Geometría para el Profesorado

En los niveles terciario y universitario, se menciona la geometría siempre asociada con alguna especificación: analítica, algebraica, euclídea, diferencial, integral, estocástica, etc. ¿Son éstas diferentes geometrías?, ¿se ocupan de diferentes objetos geométricos?, no necesariamente. Así como en la matemática en general, diferentes "ramas" pueden estar trabajando sobre un mismo objeto con diferentes miradas, con otras técnicas o herramientas, así también sucede en el caso particular de la geometría.

Como ejemplo del caso general, consideremos la campana de Gauss. Es una distribución de **probabilidad**, que usamos para interpretar un conjunto de datos **estadísticos** cuando queremos analizar ciertas características de una población. La representamos por una **función** que responde, según parámetros calculados **aritméticamente**, a una determinada expresión **algebraica**. La asociamos al caso límite de una distribución binomial, a través de un trabajo **analítico**. Utilizamos el valor del área **geométrica** bajo la curva para asociarle intervalos de confianza. ¿Qué es lo que varía de una rama a otra de la matemática? En algunos casos lo que varía son los objetos, pero en la mayoría de los casos lo que cambia es su **representación**, los **métodos** de análisis, los **espacios** donde los pensamos inmersos. En cada caso obtenemos diferentes propiedades, cada una de las cuales nos acerca al concepto del objeto. En el fondo son **diferentes miradas.**

Como mirar un cuerpo desde diferentes ángulos, e ir complementando la información obtenida en cada caso para llegar a la imagen del objeto. Pensemos, por ejemplo, en un cubo. Si sólo podemos ver una de sus caras, nada lo diferencia de un cuadrado. Si vemos una segunda cara adyacente a la primera, ya sabremos que el objeto no es una figura plana, sabremos que tiene dos caras en ángulo recto, pero podría ser nada más que eso. Si accedemos a todas las demás caras, menos una, aún puede no tener la sexta, y ser sólo "parte" de un cubo. Recién al haber mirados todas sus caras y la posición relativa de unas con otras, tenderemos una imagen razonable de lo que es un cubo.

Ustedes ya conocen algunas de las miradas geométricas que mencionamos. Algo de geometría analítica, que se ocupa del trabajo en coordenadas. Algo de geometría algebraica en el trabajo con ecuaciones de curvas y superficies, y deben tener, aunque más no sea un recuerdo de lo que se llama geometría sintética, que es el tipo de geometría que se estudia en los primeros años de la escuela media.

En este curso vamos a desarrollar

- la mirada desde los **lugares geométricos** (esencialmente geometría sintética), que aparece más o menos explícitamente en los orígenes de la geometría;
- la mirada **axiomática** de la época griega, que da origen, más de 2000 años después a la geometría **diferencial** (en la que vamos a incursionar un poco hacia el final del curso);
- la mirada **funcional**, que aparece como una síntesis de las diferentes geometrías, desde el estudio de los invariantes que caracterizan a cada una de ellas a partir de un grupo de movimientos.

Para poder llegar a esta mirada funcional y porque consideramos que, desde la manera particular de trabajo, casi caracteriza las demostraciones de tipo geométrico, vamos a desarrollar en el plano una parte de la geometría **proyectiva**.

1. Lugar geométrico

Actualmente, el término *lugar geométrico* casi ha desaparecido de la jerga disciplinar. Por ejemplo, en lugar de definir la mediatriz de un segmento como el *lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del segmento*, se suele decir que es el conjunto de los puntos que equidistan de los extremos del segmento. ¿Significa esto que los lugares geométricos y los conjuntos de puntos son la misma cosa? ¿Podemos definir cualquier conjunto de puntos como un lugar geométrico?, y viceversa, ¿podemos definir cualquier lugar geométrico como un conjunto de puntos? Sí. ¿ Por qué o cuándo, entonces, hablar de lugar geométrico? Podemos hallar una respuesta en el desarrollo histórico de la disciplina. Los lugares geométricos fueron estudiados y concebidos como tales mucho antes de existir la noción de conjunto. Los usamos para poner el énfasis en una mirada geométrica, en una representación del objeto que viene dictada por relaciones geométricas. Recién Fermat, por ejemplo, se dio cuenta de que las ecuaciones con dos variables determinaban un lugar geométrico; dice Fermat "siempre que en una ecuación final aparezcan dos cantidades incógnitas, tenemos un lugar geométrico, al describir el extremo de una de ellas una línea, recta o curva."
El uso de uno u otro término tiene algunas sutiles diferencias. A nadie se le ocurriría hablar de un lugar geométrico cuando el conjunto de puntos es vacío; posiblemente tampoco cuando, por ejemplo, la curva no es continua -la palabra lugar es singular, se refiere a un lugar, no a dos o más. Tampoco para describir curvas, superficies o cuerpos si no existen propiedades geométricas sencillas que los caractericen.

1.1. En la historia

La recta y la circunferencia son los lugares geométricos que más aparecen en las civilizaciones antiguas, como Egipto y Babilonia. Esto está asociado con las formas aparentes del sol y de la luna. En Egipto encontramos además los ángulos rectos. El historiador griego Herodoto (-484/-420) cuenta que, como el Nilo se desbordaba todos los años borrando los límites de los campos, era necesario remarcar los perímetros. Aparecen así los "tensadores de cuerdas" que, ya familiarizados con las ternas pitagóricas, las utilizaban para trazar ángulos rectos. También se realizaban cálculos de áreas y perímetros - aproximados- de figuras curvas. Incluso algunas teorías sostienen que las pirámides fueron construidas de modo que la altura fuera igual al radio del círculo que tiene el mismo perímetro que la base de la pirámide (lo que da un ángulo de inclinación de aproximadamente 51° 51′). Para calcular el área del círculo usaban la fórmula $A=(8/9 - d)^2$, donde d es el diámetro (esto da un valor aproximado de $\pi=3.1605$).

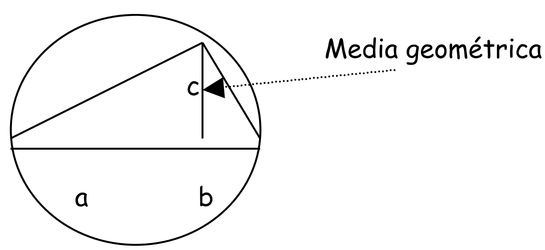
Hay que esperar hasta la llamada "época heroica" de los griegos (S VI aC - S III aC) para que aparezcan nuevos lugares geométricos. La geometría se concibe entonces como una ciencia, no sólo aplicada, sino con una metodología propia para el estudio de magnitudes continuas. Es un momento floreciente, sobre todo en Atenas (especialmente bajo el gobierno de Pericles), que cuenta entre sus filósofos con personajes como Demócrito, Sócrates, Aristóteles y Platón. Se practica más la filosofía que la ciencia, y la matemática se desarrolla en su carácter formal. En esta época surgen los problemas conocidos como problemas clásicos de los griegos, a saber:

- la trisección del ángulo (dividir un ángulo cualquiera en tres partes iguales),
- la cuadratura del círculo (construir un cuadrado con la misma área que un círculo dado) y
- la duplicación del cubo (construir un cubo con el doble de volumen que un cubo dado).

De los dos primeros no se conoce el origen, el tercero se asocia con una peste desatada en Atenas en el año 429 aC, a causa de la cual probablemente murió Pericles. Dice la leyenda que los atenienses consultaron el oráculo de Delos para saber cómo erradicar la peste, y la respuesta fue que construyeran un altar el doble de grande (parece que construyeron uno con el doble de arista, resultando con 8 veces el volumen).

Ya habían pasado por Grecia personajes como Tales (Mileto, apr. –624), uno de los 7 sabios de Grecia, quien conoció (aunque se duda que demostrase formalmente) resultados como la igualdad de los ángulos de la base de un triángulo isósceles; Pitágoras (Samos, apr. –585), discípulo de Tales, fundador de la escuela pitagórica, donde se conocía la suma de los ángulos interiores del triángulo; Hipócrates (Quíos, S -IV o –III), que encontró soluciones incompletas a la cuadratura del círculo y la duplicación del cubo.

Menecmo (discípulo de Platón, S IV aC), Hipias y Dinóstrato, hallan sendas curvas que resuelven problemas geométricos de estos planteados en Grecia. En esa época ya se sabía que la media geométrica de dos segmentos era la altura del triángulo rectángulo construido sobre la suma de los segmentos, con extremo en la circunferencia que la tiene como diámetro, sobre el punto de unión de ambos.



Para ver esto, basta con utilizar que los dos triángulos determinados por la altura “c” son semejantes, de donde a/c=c/b.

Los geómetras buscan entonces dos medios proporcionales entre a y b, es decir, segmentos *x* e *y* tales que

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

Menecmo encuentra los dos medios proporcionales como intersección de dos parábolas (trabajando con el cono recto).

La escuela de Eudoxo (apr. –408) desarrolla la teoría general de proporciones, la sección áurea y el método de exhauxión. Otra ciudad importante es Alejandría, fundada en 322 aC por Alejandro Magno a orillas del Nilo. El Museo (universidad) y la Biblioteca, entre otras cosas, hacen de ella el centro cultural más importante de la época. Llega a tener 700.000 rollos cuando es incendiada por las tropas de César en el 48 aC. Euclides (apr. –330/-285), Arquímedes y Apolonio, los tres hombres más destacados del Siglo de Oro de la matemática griega, pasaron por el Museo.

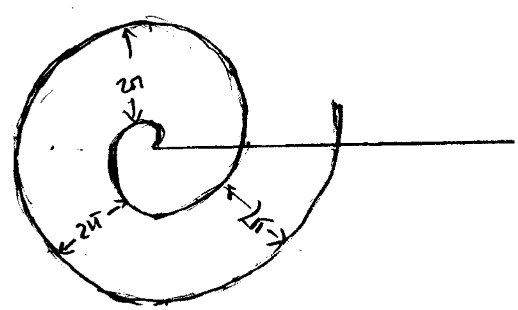
Euclides (S III aC) es el autor de "Los Elementos", obra que recopila el saber matemático del momento, y que fue fuente de estudio por casi 2000 años. Euclides no incluye el estudio de las cónicas en sus Elementos, por considerarlo "tema de la matemática superior". Trabaja lugares geométricos como circunferencia, mediatriz, bisectriz y arco capaz.

Los griegos clasifican los lugares geométricos en tres tipos, y esta clasificación se utiliza hasta mediados del siglo XVII:

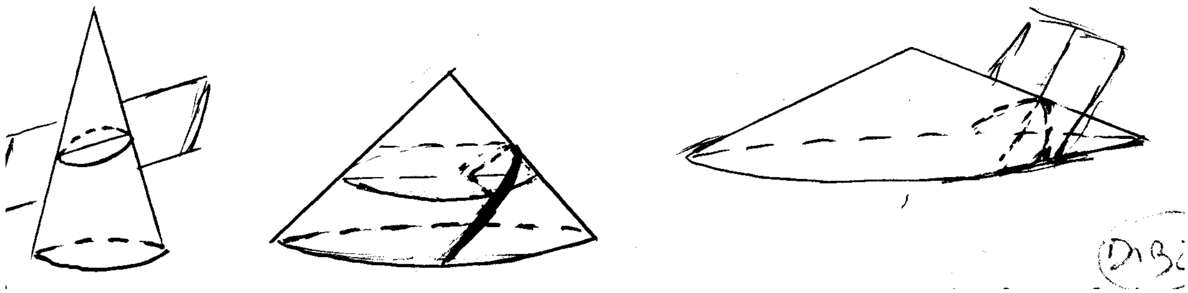
- los llamados *lugares planos*: rectas y circunferencias, resultando *problemas planos* los que pueden resolverse con regla y compás,
- los *lugares lineales*: son otras curvas, por ejemplo las espirales, que resuelven los *problemas lineales* y
- los *lugares sólidos* que incluyen a las cónicas, siendo los *problemas sólidos* los que necesitan de éstas para su resolución.

Arquímedes nace aproximadamente en el año 287 aC en Siracusa. Construye diferentes máquinas que ayudan a la ciudad a resistir el sitio de los romanos durante la segunda guerra púnica (catapultas para arrojar piedras, espejos que utilizan el sol para incendiar los barcos, etc.). Encuentra métodos generales para calcular áreas de figuras curvilíneas y volúmenes de cuerpos limitados por superficies curvas. Descubre varias curvas, entre ellas la que se conoce como espiral de Arquímedes o espiral uniforme.

Es el lugar geométrico de 1 punto del plano que, partiendo del origen de una semirrecta, se mueve uniformemente sobre ella, mientras que la semirrecta gira a su vez uniformemente alrededor de su origen. Esta manera de definir un lugar geométrico se llama mecánica.



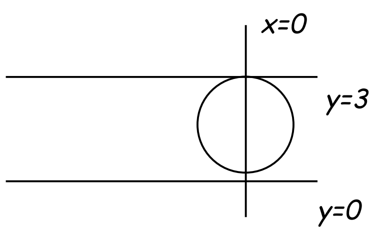
Aproximadamente medio siglo después de Arquímedes, **Apolonio** (nacido en Perga, hoy Turquía), llamado el gran geómetra, estudia las cónicas. Menecmo ya había obtenido la parábola, la hipérbola y la elipse cortando conos de diferentes ángulos, con planos perpendiculares a su generatriz. Él llamaba *oxitoma*- sección del cono agudo - a la elipse; *ortotoma* - sección del cono recto - a la parábola; y *amblitoma* -sección del cono obtuso - a la hipérbola



Apolonio obtiene las cónicas a partir de las intersecciones de *un cono circular cualquiera*, no necesariamente de revolución, cortando con planos de diferente inclinación. Su estudio sobre las cónicas aporta un conjunto de propiedades, que sólo es superada con las propiedades proyectivas a partir del S XVII. Es también uno de los fundadores de la matemática astronómica griega, es decir, del uso de modelos geométricos para describir el movimiento de los planetas.

Menéalo (del S I de nuestra era) hace un profundo estudio sobre triángulos esféricos, completado por **Ptolomeo**, quien también desarrolla el estudio de proyecciones para la construcción de cartas geográficas).

La época siguiente corresponde a los trabajos de Diofanto y Pappus (aprox. 250/350). El principal problema de **Pappus**, también conocido como "lugar determinado por 3 o 4 rectas" puede remontarse a la época de Euclides. Pide: "dadas 3 rectas de un plano, hallar el lugar geométrico de los puntos P que se mueven de tal manera que el cuadrado del segmento PA, trazado con un ángulo fijo a una de las rectas, es proporcional al producto de los segmentos PB y PC, trazados a las otras dos con el mismo ángulo". Para 4 rectas se pide PA PB proporcional a PC PD, siempre con el mismo ángulo.



$P=(x,y) \Rightarrow$
$x^2 = y\,(3-y)$
$x^2 = 3y - y^2$
$x^2 = -[y^2 - 3y + (3/2)^2] + 9/4$
$x^2 + (y-3/2)^2 = 9/4$
(Observar que y-3 me da vacío)

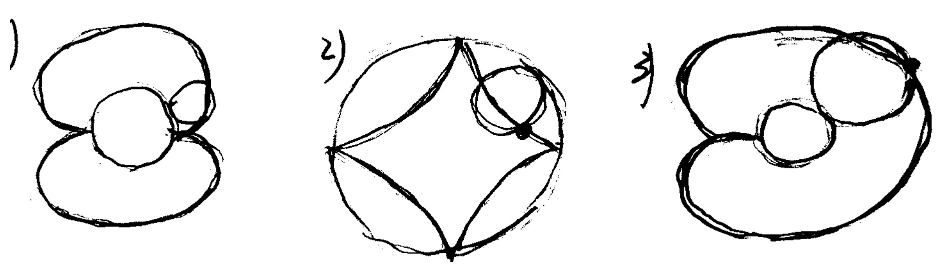
Apolonio ya había estudiado el problema, Pappus prueba que, en todos los casos, el lugar geométrico es una cónica; y extiende el problema a 6 rectas. No puede analizar el problema para 8 rectas, ya que aparecería entonces un producto de 4 segmentos, que no tiene significado geométrico - el de 3 es un volumen. Pappus también trabaja las relaciones entre foco y directriz.

En la época siguiente, hay algunos desarrollos de la geometría hindú (Aryabhata: 476; Brahmagupta: S VII) especialmente en trigonometría, y de la geometría árabe (Al-Khwarizmi: S VII) muy ligada al álgebra.
En toda esta época de la geometría medieval, en occidente cabe mencional al monje Gerberto (930-1003) quien escribe un tratado de geometría. Con la caída de Constantinopla en 1453, los manuscritos griegos pasan nuevamente a occidente donde renacen.

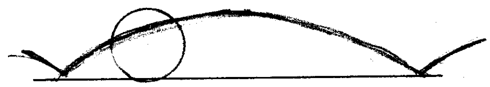
Pasamos entonces a la mirada renacentista de los artistas (como Durero y Leonardo) y de los científico (como Kepler y Galileo).

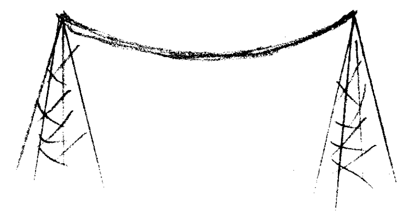
Alberto **Durero** (1471-1528), pintor, publica un libro llamado "Introducción sobre la medida con regla y compás de figuras planas y sólidas". El libro tiene algunas justificaciones, aunque está pensado esencialmente para artistas. Contiene representaciones aproximadas de espirales, como la de Arquímedes, y la espiral áurea también conocida como espiral de Durero.

También incluye el trazado de cónicas utilizando una doble proyección ortogonal; y de nuevos lugares geométricos como las epicicloides, generadas por un punto P que pertenece a un círculo C que rueda, sin deslizarse, sobre otra circunferencia, por ejemplo, la nefroide (1), la astroide(2) y la cardioide(3):



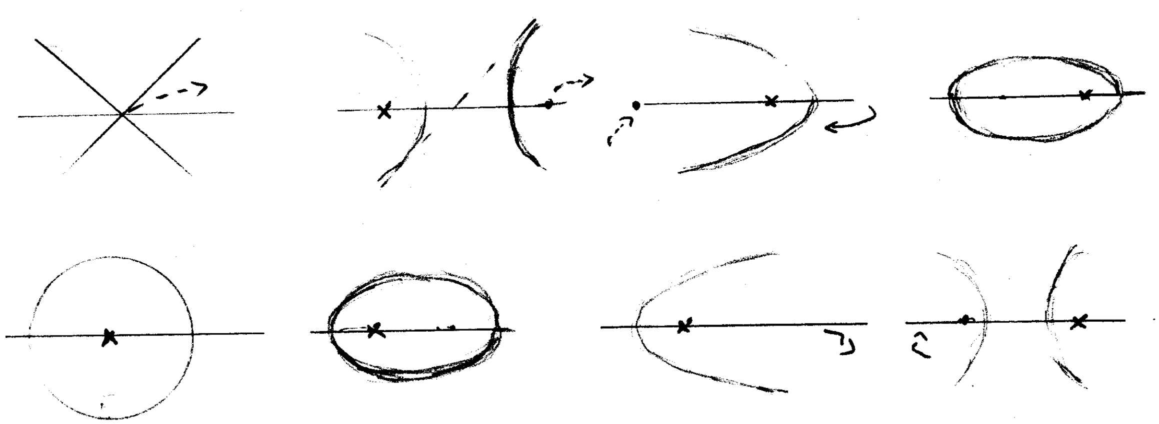
Galileo (1564-1642) analiza curvas como la cicloide y la catenaria,



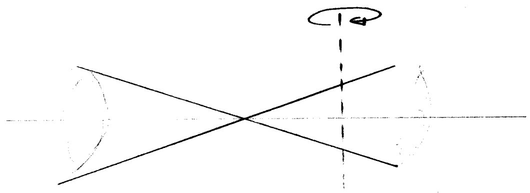


conjetura acertadamente que el área de la cicloide es el triple de la del círculo que la genera, pero se equivoca al identificar ambas curvas (la cicloide y la catenaria).

Kepler (1571-1630), quien dio su nombre al foco, introduce la idea del principio de continuidad unificado, que permite definir las cónicas a partir del movimiento de uno de los focos. Comenzando con dos rectas coincidentes, en que los dos focos están en el punto de intersección, pasa por las hipérbolas - al alejarse un foco del otro- , las parábolas -cuando llega al infinito-; y las elipses - cuando los focos vuelven a acercarse por el otro lado, para terminar en la circunferencia - cuando éstos vuelven a coincidir.



Otra manera de ver este movimiento continuo, es fijando un plano que contiene al eje del cono, y girando el cono alrededor de una perpendicular al eje que no pase por el vértice.



Llegamos así al siglo XVII con **Descartes** (1596-1650) y **Fermat**, donde aparece una nueva manera de representar los lugares geométricos: la manera algebraica.

El primero se dedica a resolver geométricamente ecuaciones algebraicas. Analiza métodos para construir geométricamente las soluciones. Extiende el problema de Pappus analizándolo como ecuaciones de 2do grado (4 rectas), tercer grado (6 rectas), cuártica (8 rectas), etc., aunque no las dibuja. Descartes utilizaba el álgebra como un lenguaje de traducción, es decir, lo que le permitía reducir un problema geométrico a otro u otros problemas también geométricos.

Fermat, reconstruyendo los lugares geométricos de Apolonio, llega a enunciar que "siempre que en una ecuación final aparezcan dos cantidades incógnitas, tenemos un lugar geométrico, al describir el extremo de una de ellas una línea, recta o curva".Analiza ecuaciones lineales (rectas) y cuadráticas (cónicas o pares de rectas). Piensa en la ecuación como la expresión algebraica de las propiedades que caracterizan el lugar geométrico.

Comienzan entonces los aportes a procedimientos analíticos generales, dando origen a la geometría moderna. Nos encontramos así con nombres como los de:
Girard **Desargues** (1593-1661), que escribe un tratado sobre cónicas;
Pascal (1623-1662), iniciador de los métodos de la geometría moderna;
Jan **de Witt** (1629-1672) que define las cónicas utilizando la razón de las distancias al foco y la directriz (término introducido por él), así como aún hoy hacemos con la parábola;
Newton (1642-1727) analiza y clasifica las curvas de tercer grado (72 tipos) y grafica un ejemplo de cada una. Newton usaba métodos similares a los de los griegos;
Leibniz (1642-1716), analista como Newton;
Stirling (1692-1770) agrega 4 tipos nuevos a la clasificación de Newton;
Roberval (1602-1675) demuestra la conjetura de Galileo;
Huygens (1629-1695) analiza evolutas y envolventes;
John Bernoulli (1667-1748) trabaja, como Newton, coordenadas polares;
Euler (1707-1783) que desarrolla las fórmulas de transformación.
En esta época y con estos nombres es que aparece el cálculo infinitesimal, haciéndose un tratamiento analítico del trazado de tangentes, cálculo de áreas y estudio de asíntotas.

Aparece entonces la geometría descriptiva con Gaspard **Mongue** (1746-1818), que trabaja esencialmente en la proyecci'on bidimensional de objetos tridimensionales, y que logra despertar un nuevo interés por la geometría en Francia. Se desarrolla entonces la Geometría Proyectiva con **Carnot** (1785-1823), **Víctor Poncelet** (1778-1867), **Chasles** (1793-1880); que se extiende rápidamente a otros países europeos con **Moebius** (1790-1868), **Steiner** (1790-1863), **Staudt** (1798-1867) y **Cayley** (1821-1895).

Finalmente, en el siglo XIX, aparecen la geometrías no euclidianas, de la mano de Karl F. **Gauss** (1777-1855), Janos **Bolyai** (1802-1860) y **Lobachevski** (1793-1856) que desarrollaron una geometría en que por un punto exterior a una recta pasan dos paralelas a la misma; y **Riemann** (1826-1866) que desarrolla la geometría riemanniana. La prueba de indemostrabilidad del 5to postulado e Euclides recién la lograrán **Beltrami** (1835-1900) y **Klein** (1849-1925).