CLASE PRÁCTICA: Convergencia de series en $\mathbb{R}_{\geq 0}$ (correspondiente a la Práctica 3)

María Angélica Cueto

3 de abril de 2007

Lo que sigue pretende ser un brevísimo resumen de la clase práctica correspondiente al día martes 3 de abril, que no pudo dictarse por el corte de luz producido en el Pabellón I. Estas notas permitirán trabajar en el comienzo de la Práctica 3 (i.e. Ejercicios 1 a)

1. Generalidades y criterios de convergencia

Antes de analizar criterios de convergencia para series de términos positivos, recordemos la definición de una serie.

Definición 1 *Sea $(a_n)_{N\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos. Consideremos la sucesión de sumas parciales $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n$. Decimos que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es* convergente *sii la sucesión de sumas parciales lo es, y en tal caso $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} S_N$ se llama la* suma *de la serie.*

En particular, diremos que la serie converge absolutamente *si la serie de los módulos de los (a_n) converge.*

A continuación, mencionaremos algunos criterios de convergencia para series de números complejos.

Proposición 1 *Sea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de números complejos convergente. Entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*
La recíproca no es cierta, como puede verse al tomar la serie armónica.

Proposición 2 (Criterio de comparación para series en $\mathbb{R}_{\geq 0}$) *Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones en $\mathbb{R}_{\geq 0}$, y supongamos que existe $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $a_n \leq cb_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ (alternativamente, $\forall\, n \geq n_0$). Entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ convergente $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente. Más aún $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \leq c \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Demostración. La sucesión de sumas parciales para la serie de los a_n es positiva y acotada superiormente. $\square$

Corolario 1 *Tomemos* $(a_n), (b_n) \subset \mathbb{R}_{>0}$ *dos sucesiones asintóticamente iguales (i.e.* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$*, se nota* $(a_n) \sim (b_n)$*). Entonces o ambas convergen o ambas divergen.*

Ejemplo. Tomemos la serie $\sum_{n}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ diverge pues $(\sin \frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$. □

Veamos ahora cómo podemos usar este criterio de comparación para analizar convergencia de series. La clave radicará en la comparación con la serie armónica, o más en general, con las series de tipo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$. Resulta importante entonces ver para qué valores de α dicha serie converge.

Ejemplo. Tomemos entonces $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$.

1. Supongamos que la serie converge. Entonces, por la Proposición 1, $\frac{1}{n^\alpha} \to 0$. Por lo tanto, $\alpha > 0$. Luego, si $\alpha \leq 0$ la serie diverge (más aún, converge a infinito).

2. Para $\alpha > 0$ necesitaremos un criterio extra: el criterio de la integral.

□

Proposición 3 (Criterio de la Integral) *Sea* $f : \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *una función decreciente y continua. Definimos la sucesión* $a_n := f(n)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{converge} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_1^{\infty} f(x)\,dx \quad \textit{converge.}$$

Demostración. Por ser f decreciente, continua y positiva, sabemos que es integrable (Riemann) y que la integral impropia pertenece a $\hat{\mathbb{R}}$. Además, analizando las sumas superiores e inferiores en un intervalo conveniente, vemos que

$$\sum_{n=2}^{N} a_n \leq \int_1^N f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{N-1} a_n \ ,$$

a partir de lo cual se desprende el resultado deseado.
(*Sugerencia:* Haga un dibujo para convencerse de estas desigualdades.) □

Ejemplo. [Ejemplo 1 continuación] Aplicando el criterio de la integral, se ve claramente que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge sii $\alpha > 1$ □

Proposición 4 *Para series de números complejos se verifica:*

convergencia absoluta $\Rightarrow$ *convergencia.*

Demostración. *Usar la desigualdad triangular para que ver la sucesión de sumas parciales es de Cauchy y concluir por completitud.* □

Proposición 5 (Linealidad de series complejas convergentes) *Sean* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dos sucesiones en* $\mathbb{C}$*, y* $c \in \mathbb{C}$*. Entonces:*

1. *Supongamos que* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *son series convergentes, entonces*

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$ *coverge y su suma es* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

   b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c\, a_n$ *también converge y su suma es* $c \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

2. *Si la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge pero la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverge* $\Rightarrow$ *la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$ *diverge.*

Ejemplo. Como ejemplo para la segunda condición, podemos pensar en las series con términos $a_n = \frac{1}{n}$ y $b_n = \frac{1}{2^n}$, siendo convergente sólo la segunda. $\square$

2. Series Telescópicas

Definición 2 *Sea* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de números complejos, y consideremos la sucesión* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *definida por*

$$b_n := a_n - a_{n+1} \ .$$

La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *se llama* serie telescópica.

Proposición 6 *Con la notación de la definición anterior se tiene:*

La serie telescópica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge* $\Leftrightarrow$ *la sucesión* (a_n) *converge y en tal caso vale* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = a_1 - L$*, siendo* $L := \lim_{n\to\infty} a_n$.

A continuación veamos varios ejemplos, para entender la aplicación de este criterio para determinar convergencia de series.

Ejemplo. Sea $b_n = \frac{1}{n^2+n}$. Si hacemos un poco de aritmética, vemos que $b_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Entonces, tomando $a_n = \frac{1}{n}$ vemos que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge a $\frac{1}{1} - 0 = 1$. $\square$

Ejemplo. Consideremos ahora $b_n = \ln(\frac{n}{n+1}) = \ln(n) - \ln(n+1)$ y $a_n = \ln(n) \to \infty$. Por lo tanto la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(\frac{n}{n+1})$ diverge. $\square$

3. Series Geométricas

Definición 3 *Sea* $x \in \mathbb{C}$*. Definimos la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ *como la* serie geométrica de razón x.

Mirando la sucesión de sumas parciales, tenemos

$$\sum_{n=1}^{N} x^n = \begin{cases} \frac{x^{N+1}-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ N & \text{si } x = 1 \end{cases} .$$

Por lo tanto, la serie converge *sii* $|x| < 1$. Más aún, la serie converge a infinito si $|x| > 1$ y diverge si $|x| = 1$.

4. Límite superior e inferior (en $\mathbb{R}$)

Definición 4 *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$. Definimos el límite superior e inferior de la siguiente manera.*

$$\limsup\, a_n = \overline{\lim}\, a_n = \inf_n (\sup_{k\geq n} (a_k)) \in \hat{\mathbb{R}} \ ,$$

$$\liminf\, a_n = \underline{\lim}\, a_n = \sup_n (\inf_{k\geq n} (a_k)) \in \hat{\mathbb{R}} \ .$$

Observación 1 *Notemos que $(\sup_{k\geq n} (a_k))$ es una sucesión creciente (n) y por lo tanto, resulta*

$$\overline{\lim}\, a_n = \lim_{n\to\infty} (\sup_{k\geq n} (a_k)) \ .$$

Análogamente,

$$\underline{\lim}\, a_n = \lim_{n\to\infty} (\inf_{k\geq n} (a_k)) \ .$$

Proposición 7 *Para toda sucesión de números reales $\underline{\lim}\, a_n \leq \overline{\lim}\, a_n$.*

Veamos ahora bajo qué condiciones vale la igualdad. Para ello, necesitamos un lema auxiliar, cuya demostración es un buen ejercicio para internalizar estos conceptos.

Lema 1 *Dada una sucesión (a_n) en $\mathbb{R}$ se tiene:*

1. $\overline{\lim}\, a_n = \sup($*límite de subsucesiones*$(a_{n_k})_k)$.
2. $\underline{\lim}\, a_n = \inf($*límite de subsucesiones*$(a_{n_k})_k)$.

Más aún, ambos límites se alcanzan.

Corolario 2 *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ una sucesión. Entonces:*

$$\underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n \quad \Longleftrightarrow \quad \exists \lim_{n\to\infty} a_n \ \text{y vale} \ \lim_{n\to\infty} a_n = \underline{\lim}\, a_n = \overline{\lim}\, a_n \ .$$