Series

Plan de estudio de una serie $\sum u_n$

1. si $u_n \nrightarrow 0$ entonces la serie diverge (condición de Weierstrass)
2. si $u_n \to 0$ entonces la serie $\sum u_n$ puede ser convergente. En este caso, hay que distinguir si $u_n \geq 0$ por n grande o no :
   (a) si $u_n \geq 0$ por n grande, se puede usar los criterios de comparación :
      i. criterio de Cauchy :
      sea $\lim u_n^{1/n} = l$, si $l < 1$ (resp. $l > 1$)) entonces la serie CV (resp. DV),

      ii. criterio de D'Alembert :
      sea $\lim u_{n+1}/u_n = l$, si $l < 1$ (resp. $l > 1$)) entonces la serie CV (resp. DV),

      iii. mirar $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = l$ si se sabe algo de $\sum v_n$ (igual que por las integrales impropias) :
      si $l \in (0, +\infty)$ entonces $\sum u_n$ CV ssi $\sum v_n$ CV,
      si $l = 0$ e $\sum v_n$ CV entonces $\sum u_n$ CV,
      y si $l = +\infty$ e $\sum v_n$ DV entonces $\sum u_n$ DV.

      iv. criterio integral de Cauchy : si $u_n = f(n)$ con $f : [0, +\infty) \to [0, \infty)$ decresciente, se puede comparar $\sum u_n$ con $\int^\infty f$ (ver el ejercicio 6 del guia o el item (20) siguiente). Obtenemos que
      $$\sum u_n \ \ CV \ \ ssi \int^\infty f \ \ CV.$$
      Como consecuencia, vemos que la serie $\sum \dfrac{1}{n^p}$ CV ssi $p > 1$. Este ejemplo es muy importante.

   (b) si u_n no tiene signo fijo, mirar
      i. si la serie es absolutamente convergente i.e. si la serie $\sum |u_n|$ es convergente (usando los criterios de comparación del (a)).
      ii. Si no lo es, podemos concluir si u_n es de la forma $u_n = (-1)^n v_n$ con $v_n \geq 0$ decresciente y $v_n \to 0$, pues en este caso sabemos que $\sum u_n$ converge.

Ejercicios

Decir si las siguientes series $\sum u_n$ son convergentes :

1. $u_n = \dfrac{2^n}{n}$
2. $u_n = (-1)^n$
3. $u_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2}{5}\right)^n$
4. $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$
5. $u_n = \dfrac{n!}{2^n+1}$
6. $u_n = \dfrac{1}{n!}$
7. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
8. $u_n = \left(\dfrac{n+1}{2n-1}\right)^n$
9. $u_n = \left(\dfrac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$
10. $u_n = \left(\dfrac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$
11. $u_n = \left(\dfrac{3n}{3n+1}\right)^n$
12. $u_n = \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
13. $u_n = \dfrac{3n-1}{2^{\frac{n}{2}}}$
14. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$
15. $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n}$
16. $u_n = \dfrac{n^2}{2n^2+1}$
17. $u_n = \dfrac{n^3}{e^n}$
18. $u_n = \dfrac{2^{n-1}}{n^n}$
19. $u_n = \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$
20. $u_n = \dfrac{1}{n^p}$, $p \in \mathbb{R}$
21. $u_n = \dfrac{2.5.8\ldots(3n-1)}{1.5.9\ldots(4n-3)}$

Corrección

CV = convergente, DV = divergente,
NACV = no absolutamente convergente, ACV = absolutamente convergente.
$u_n \sim v_n$ si $v_n \neq 0$ por n grande y $u_n/v_n \to 1$.
$u_n = o(v_n)$ si $v_n \neq 0$ por n grande y $u_n/v_n \to 0$.

1. DV porque $u_n \not\to 0$ ($u_n \to +\infty$).
2. NACV porque $|u_n| = 1 \not\to 0$, DV porque $u_n \not\to 0$ ($u_{2n} = 1$ y $u_{2n+1} = -1$ por todo $n \in \mathbb{N}$).
3. CV : $u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n$ con $\sum \left(\frac{2}{5}\right)^n$ CV (serie geométrica.
4. DV : $u_n \sim \frac{1}{n}$ con $\sum \frac{1}{n}$ DV (serie armónica)
5. DV : $u_n \sim \frac{n!}{2^n} \to +\infty$ (formula de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$), o podemos usar el criterio de D'Alembert :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!(2^n+1)}{(n!(2^{n+1}+1)} = (n+1)\frac{2^n+1}{2^{n+1}+1} = (n+1)\frac{1+2^{-n}}{2+2^{-n}} \to +\infty$$
6. CV (usar la formula de Stirling o el criterio de D'Alembert : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \to 0 < 1$).
7. DV : $u_n \sim 1/n$ y la serie armónica diverge.
8. CV : usamos el criterio de Cauchy : $u_n^{1/n} \to 1/2 < 1$.
9. CV usamos el criterio de Cauchy :
$$u_n^{1/n} = \exp\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)\ln\frac{n}{3n-1}\right) \to \exp\ln\frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1$$
10. CV : usamos el criterio de Cauchy :
$$u_n^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)\right) \to \exp(\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2}{3}\right)\right) = \sqrt{\frac{2}{3}} < 1.$$
11. DV : $u_n = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)\right) \to e^{-1/3} \neq 0$ porque $\ln(1+x) \sim x$ por x cerca de 0.

12. CV : $u_n \sim 1/n^2$ (porque $\sin(x) \sim x$ por x cerca de 0) y $\sum n^{-2}$ CV (ver (20)).
13. DV : $u_n \sim \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^n$ y $\sum \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^n$ DV (serie geométrica)
14. ACV : $|u_n| = 1/n^2$ y $\sum 1/n^2$ CV (ver (20)).
15. NACV : $|u_n| \geq \frac{\ln(2)}{n}$ con $\sum \frac{1}{n}$ DV (serie armónica) ; pero CV : la sucesión $(\frac{\ln n}{n})$ es decresciente por n grande.
16. DV : $u_n \to 1/2 \neq 0$.
17. CV $u_n = o(e^{-n/2})$ (porque $e^{n/2}u_n = \frac{n^3}{e^{n/2}} \to 0$) y $\sum e^{-n/2} = \sum (e^{-1/2})^n$ CV (serie geométrica o usar el criterio integral de Cauchy : la integral $\int^\infty e^{-x/2}\,dx$ CV).
18. CV : usando la formula de Stirling, tenemos

$$u_n \sim \frac{2^{n-1}}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi n}}\left(\frac{2e}{n}\right)^n$$

Entonces por n grande

$$u_n \lesssim \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

con $\sum 2^{-n}$ CV. También se puede usar el criterion de D'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{2}{n+1}e^{-n\ln(1+1/n)} \to 0$$

porque el exponential converge haste e^{-1} (acordarse que $\ln(1+x) \sim x$ por $x \to 0$).
19. DV : $u_n \sim 1/n$ (porque $\ln(1+x) \sim x$ por $x \to 0$) y $\sum 1/n$ DV (serie armónica).
20. CV ssi $p > 1$: $u_n \to 0$ ssi $p > 0$ entonces $\sum \frac{1}{n^p}$ diverge si $p \leq 0$. Ahora supongamos que $p > 0$. Vamos a probar que la serie converge ssi la integral $\int^\infty \frac{dx}{x^p}$ converge, asi obtendremos el resultado. Por cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{x^p} \geq \frac{1}{(n+1)^p}$ por cada $x \in [n, n+1]$, y luego

$$\frac{1}{n^p} \geq \int_n^{n+1} \frac{dx}{x^p} \geq \frac{1}{(n+1)^p}.$$

Sumando, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^p} \geq \int_1^{N+1} \frac{dx}{x^p} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)^p} = \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n^p}.$$

Ahora si $\int^\infty \frac{dx}{x^p}$ diverge, la serie $\sum 1/n^p$ tambien por la primera esigualdad, y si la integral converge, la segunda desigualdad muestra que la sucesión de las sumas parciales $(\sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n^p})_N$ es acotada y luego, como es tambien cresciente, converge.
21. CV : usamos el criterio de D'Alembert : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3n+2}{4n+1} \to \frac{3}{4} < 1$.