

ANÁLISIS II
COMPUTACIÓN

PRÁCTICA 4

DERIVADAS PARCIALES

1. Calcular

a) $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1)$ para $f(x, y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$

b) $\frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1)$ para $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + z^2} + \ln y$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ para $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

2. Sean las funciones

$$f_1(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$f_2(x, y) = |x| + |y|$$

Demostrar que en el origen

- a) f_1 es discontinua aunque existen las derivadas parciales.
b) f_2 no admite derivadas parciales pero es continua.

3. Estudiar la continuidad y existencia de derivadas parciales de las siguientes funciones en el origen:

a) $f(x, y, z) = \sqrt{|xyz|}$

b) $f(x, y) = \begin{cases} x \sin\left(4 \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 c) \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\
 d) \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \\
 e) \quad f(x, y) &= \begin{cases} \frac{x}{y} \sin\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ x & \text{si } y = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

4. Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones

- a) $f(x, y) = x^4 + 2xy + y^3x - 1$
- b) $f(x, y, z) = ye^x + z$
- c) $f(x, y) = \sin x$
- d) $f(x, y, z) = xyz + \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$
- e) $f(x, y, z) = z(\cos(xy) + \ln(x^2 + y^2 + 1))$
- f) $f(x, y) = xe^{x^2+y^2}$
- g) $f(x, y, z) = \cos(ye^{xy}) \sin x + \arctan z$
- h) $f(x, y) = \int_x^y e^{\sin t} dt$
- i) $f(x, y) = \int_x^{x^2+y^2} e^t dt$
- j) $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$
- k) $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$

DIFERENCIABILIDAD

5. a) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_1 + 3x_2).$$

- 1) Verificar que f es una transformación lineal, y calcular su matriz asociada.
- 2) Calcular la matriz de la diferencial $Df(x)$.
- 3) ¿Qué relación hay entre estas dos matrices?

- b) Mostrar que lo ocurrido en el ítem anterior vale para cualquier transformación lineal $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

6. Mostrar que

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es diferenciable pero sus derivadas parciales son discontinuas.

7. Calcular $DF(x)$ para las siguientes funciones

- a) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $F(x, y) = (x, y)$
 b) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $F(x, y) = (xe^y + \cos y, x, x + e^y)$
 c) $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $F(x, y, z) = (x + e^z + y, yx^2)$
 d) $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $F(x) = \|x\|^2$

8. Estudiar la diferenciabilidad en el origen de las funciones del ejercicio 3.

9. Estudiar la diferenciabilidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican y escribir la ecuación del plano tangente cuando exista.

a) $f(x, y) = xy + 1 - \sin\left(\frac{x^2}{2}\right)$ en $(1, 5)$ y en $(2, 2)$.

b) $f(x, y) = x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}}$ en $(0, 0)$ y en $(16, 1)$.

c) $f(x, y) = \frac{x}{y}$ en (x_0, y_0) con $y_0 \neq 0$.

d) $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
 en $(0, 0)$ y en $(1, 0)$.

e) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
 en $(0, 0)$ y en $(-1, 1)$.

10. Calcular el gradiente de f para

a) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

b) $f(x, y, z) = xy + xz + yz$

$$c) f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$

REGLA DE LA CADENA

11. Sean $f(u, v, w) = u^2 + v^3 + wu$ y $g(x, y) = x \operatorname{sen} y$. Dadas

$$u(t) = t^2 + 1; \quad v(t) = \operatorname{sen} t \quad w(t) = t - 1$$

y $x(t) = \operatorname{sen} t; \quad y(t) = t$ calcular

$$\frac{d}{dt} f(u(t), v(t), w(t)) \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt} g(x(t), y(t))$$

a) usando la regla de la cadena

b) sustituyendo

12. Sean $f(u, v) = e^{uv} \sin(u^2 + v^2)$, $g(u, v, w) = \ln(u^2 + v^2 + w^2 + 1)$. Dadas $u(x, y) = x + y$, $v(x, y) = xy$, $w(x, y) = x - y + 1$, calcular las derivadas parciales de las funciones

a) usando la regla de la cadena

b) sustituyendo

13. Sean $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dadas por

$$f(x_1, x_2) = (e^{x_1}, x_2, x_1 + x_2), \quad g(x_1, x_2, x_3) = (\sin(x_1 x_2), x_3),$$

y sea $F(x_1, x_2) = g(f(x_1, x_2))$. Calcular $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ $i, j = 1, 2$

a) usando la regla de la cadena

b) sustituyendo

14. Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:

$$a) f(x, y) = \int_0^{2y} x^2 z + z^3 dz$$

$$b) f(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} xy}{y} dy$$

$$c) f(x) = \int_x^{x^2} e^{tx} dt$$

15. Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivables y $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable. Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:

- a) $\phi(x, y) = h(f(x)g(y), f(y)g(x))$
 b) $\phi(x, y) = h(x^y, y^x) \quad (x, y > 0)$
 c) $\phi(x, y) = h(x, h(x, y))$

APLICACIONES

16. Aproximar $(0, 99e^{0,02})^8$ usando la expresión del plano tangente de una función f adecuada.
17. TEOREMA DEL VALOR MEDIO PARA 2 VARIABLES Demostrar que si f es una función diferenciable definida en algún abierto que contiene al segmento P_1P_2 , entonces vale que

$$f(P_1) - f(P_2) = \nabla f(P) \cdot (P_1 - P_2)$$

donde P es algún punto del segmento P_1P_2 , y el producto del segundo miembro es el producto escalar de vectores.

18. a) Sea $f : B \rightarrow \mathbb{R}$, donde B es una bola en \mathbb{R}^2 .
- 1) Probar que si f es constante en B , entonces $\nabla f(x, y) = 0$, cualquiera sea $(x, y) \in B$.
 - 2) Probar que si $\nabla f(x, y) = 0$ cualquiera sea $(x, y) \in B$, entonces f es constante en B .
- b) Si $f, g : B \rightarrow \mathbb{R}$ son diferenciables, y verifican que $\nabla f(x, y) = \nabla g(x, y)$ para todo $(x, y) \in B$, probar que entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x, y) = g(x, y) + c.$$

19. a) COORDENADAS POLARES Dada $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, sean $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ y $g(r, \theta) = f(x, y)$. Calcular $\frac{\partial g}{\partial r}$ y $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ imponiendo condiciones adecuadas de diferenciability sobre f .
- b) COORDENADAS ESFÉRICAS Dada $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, sean $x = r \cos(\theta) \sin(\phi)$, $y = r \sin(\theta) \sin(\phi)$, $z = r \cos(\phi)$ y $g(r, \theta, \phi) = f(x, y, z)$ Calcular $\frac{\partial g}{\partial r}$, $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ y $\frac{\partial g}{\partial \phi}$ imponiendo condiciones adecuadas de diferenciability sobre f .
- c) COORDENADAS CILÍNDRICAS Dada $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, sean $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$ y $g(r, \theta, z) = f(x, y, z)$ Calcular $\frac{\partial g}{\partial r}$, $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ y $\frac{\partial g}{\partial z}$ imponiendo condiciones adecuadas de diferenciability sobre f .

DERIVADAS DIRECCIONALES

20. Hallar las derivadas direccionales de f en el origen en cualquier dirección v , $\|v\| = 1$, siendo

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

21. Sea $f(x, y) = x^{1/3}y^{1/3}$.

- a) Usando la definición de derivada direccional, mostrar que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

y que $\pm e_1, \pm e_2$ son las únicas direcciones para las cuales existe la derivada direccional en el origen.

- b) Mostrar que f es continua en $(0, 0)$.

- c) ¿Es f diferenciable en $(0, 0)$?

22. Calcular la derivada direccional de f en x_0 en la dirección v siendo:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & f(x, y) = \sin(x) \cos(y) & x_0 = (1, 1) \quad v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ \text{(b)} & f(x, y) = x^4 + \ln(xy) & x_0 = (e, 1) \quad v = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \\ \text{(c)} & f(x, y, z) = e^z(xy + z^2) & x_0 = (0, 1, 0) \quad v = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ \text{(d)} & f(x, y, z) = y + yz + zx & x_0 = (1, 1, 1) \quad v = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ \text{(e)} & f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 & x_0 = (1, 1, 1) \quad v = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ \text{(f)} & f(x, y, z) = x^{yz} & x_0 = (e, e, 0) \quad v = \left(\frac{12}{13}, \frac{3}{13}, \frac{4}{13}\right) \end{array}$$

Si f es diferenciable en x_0 , verificar que la derivada calculada coincide con $\nabla f \cdot v$.

23. Mostrar que el vector $v = (0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ es normal a la superficie $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ en el punto $(0, \sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ e interpretar este hecho geométricamente.
24. Sean $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables en $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Demostrar que la función definida por $h(x) = f(x)g(x)$ es diferenciable en x_0 y

$$\nabla h(x_0) = f(x_0)\nabla g(x_0) + g(x_0)\nabla f(x_0)$$

¿Qué relación existe entre la derivada direccionales de h en x_0 en la dirección v ($\|v\| = 1$) y las derivadas direccionales de f y g en x_0 en la misma dirección?

25. Hallar la ecuación del plano tangente y de la recta normal, cuando existan, a las superficies dadas en los puntos indicados

a) $x^{10}y - x \cos(z) + 7 = 0 \quad x_0 = (7, 0, 0)$

$$b) \quad xy - z \ln(y) + e^{xy} = 1 \quad x_0 = (0, 1, 1)$$

$$c) \quad xy + ze^{xy} - z^2 = 0 \quad x_0 = (4, 0, 1)$$

$$d) \quad \cos(x) \cos(y)e^z = 0 \quad x_0 = (\pi/2, 1, 0)$$

26. Dada una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en (x_0, y_0) y $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x, y, z) = f(x, y) - z$, ver qué relación existe entre el plano tangente al gráfico de f en (x_0, y_0) y el plano tangente a una superficie de nivel de h en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

27. a) Mostrar que si $\nabla f(x_0) \neq 0$, entonces $-\nabla f(x_0)$ apunta en la dirección a lo largo de la cual f decrece más rápidamente.

b) Una distribución de temperaturas en el plano está dada por la función $f(x, y) = 10 + 6 \cos(x) \cos(y) + 3 \cos(2x) + 4 \cos(3y)$. En el punto $(\pi/3, \pi/3)$ encontrar las direcciones de mayor crecimiento y decrecimiento de temperatura.

28. El capitán Ralph se encontró en el lado soleado de Mercurio y notó que su traje espacial se fundía. La temperatura en un sistema rectangular de coordenadas cerca suyo viene dada por

$$T(x, y, z) = e^{-x} + e^{-zy} + e^{-3z}$$

Si él está ubicado en $(1, 1, 1)$ ¿En qué dirección deberá comenzar a moverse con el fin de enfriarse lo más rápido posible?

TEOREMAS DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA E INVERSA

29. Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Probar que

$$\det(DF(x, y)) \neq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

pero que F no es inyectiva.

30. Determinar si las siguientes aplicaciones son localmente inversibles de clase C^1 en el punto dado

$$a) \quad F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy) \quad \text{en } (x, y) \neq (0, 0)$$

$$b) \quad F(x, y) = (\sin x, \cos(xy)) \quad \text{en } (\pi, \pi/2)$$

31. Sea $f(x, y, z) = x^3 - 2y^2 + z^2$. Demostrar que $f(x, y, z) = 0$ define una función implícita $x = \varphi(y, z)$ en el punto $(1, 1, 1)$. Encontrar $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(1, 1)$ y $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(1, 1)$.

32. Hallar la solución $y = f(x, z)$ de $x^2 + y^2 - z^3 = 0$ en un entorno de los siguientes puntos del plano xz

$$(a) \quad (5, 10) \quad (b) \quad (0, 64).$$

Escribir explícitamente esos entornos.

33. Determinar las derivadas parciales de las funciones que quedan definidas implícitamente en un entorno del punto dado mediante las relaciones

$$a) f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 - y^2 = 1 \quad P = (2, 0)$$

$$b) g(x, y) = x^5 + y^5 + xy = 3 \quad P = (1, 1)$$

$$c) h(x, y, z) = x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y - 8 = 0 \quad P = (0, 0, 2)$$

34. Hallar los planos tangentes a la superficie $\mathcal{S} : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ que sean paralelos al plano $\Pi : x + 4y + 6z = 8$.

PARAMETRIZACIÓN DE CURVAS

35. Calcular los vectores velocidad y rapidez de las siguientes curvas:

$$a) \sigma(t) = (\sin(2\pi t), \cos(2\pi t), 2t - t^2)$$

$$b) \sigma(t) = (\sin(2t), \ln(1 + t), t)$$

$$c) \sigma(t) = (t^2, t^3 - 4t, 0)$$

36. Determinar los vectores velocidad y aceleración, y la ecuación de la recta tangente en los valores de t dados para las curvas

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \sigma(t) = (e^t, e^{-t}, e^2) \quad t = 1, \quad t = 2 \\ \text{(b)} & \sigma(t) = (t, t + 1, t^2 + 2) \quad t = 0, \quad t = \frac{1}{2} \\ \text{(c)} & \sigma(t) = (t^2 \sin t, (t - 1)e^t, t) \quad t = 1, \quad t = 8 \\ \text{(d)} & \sigma(t) = (6t, 3t^2, t^3) \quad t = 0, \quad t = -1 \\ \text{(e)} & \sigma(t) = (0, 0, t) \quad t = 1, \quad t = -7 \end{array}$$

37. Supongamos que una partícula sigue la trayectoria $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$ hasta que se desprende súbitamente sobre una tangente en $t_0 = \pi$. ¿Dónde estará cuando $t = 4$?

38. Describir los siguientes conjuntos como trayectorias de curvas.

$$a) \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = e^x\}$$

$$b) \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 = 1\}$$

$$c) \text{Una recta en } \mathbb{R}^3 \text{ que pasa por el origen y el punto } (a, b, c).$$