# ANÁLISIS II
## Computación

## Práctica 3

---

1. *a*) Analizar si los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son abiertos
   1) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 7\}$
   2) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y \geq 1\}$
   3) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \quad \text{ó} \quad y \neq 0\}$

   *b*) Dar un ejemplo de un conjunto $A \subset \mathbb{R}^3$ que no sea ni abierto ni cerrado.

2. Para cada uno de los siguientes conjuntos $A \subset \mathbb{R}^3$, hallar $\partial A$, $\overline{A}$, $\overline{A} \setminus A$ y $A \setminus \partial A$.

   *a*) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$
   *b*) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z < 1 \text{ y } z < 2\}$
   *c*) $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 > \frac{1}{2}\right\}$

3. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son compactos:

   *a*) $K_1 = B_1(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$
   *b*) $K_2 = \overline{K_1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$
   *c*) $K_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \quad \text{e} \quad y > 0\}$
   *d*) $K_4 = \left\{\left(0, \frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$
   *e*) $K_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{y} \quad y = 0\}$

4. Usando sólo la definición de límite demostrar que:

   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} x + y = 1$ (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,8)} x.y = -8$

5. Probar que:

   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} x.e^{xy} = 0$ (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} \operatorname{sen}(x \cos y) = 0$

   (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} \dfrac{y^2 + \cos(\pi - x)}{y} = \dfrac{8}{3}$ (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,0)} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2 y)}{x^2 - y^2} = 0$ con $a \neq 0$

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = 0$. Probar que:

*a*) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\operatorname{sen}(f(x,y))}{f(x,y)} = 1$

*b*) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{e^{f(x,y)}-1}{f(x,y)} = 1$

*c*) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)\ln(f(x,y)) = 0$

7. Analizar la existencia de los límites direccionales y del límite global en $(0,0)$:

a) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$

b) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2-x^2}{x^2-y^2}$

c) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

d) $f(x,y) = \dfrac{xy}{|x|+|y|}$

e) $f(x,y) = |x|^y$

f) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$

g) $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$

h) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}\ -1}$

i) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2-x}$

j) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{|x-y|}$

k) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$

l) $f(x,y) = \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{xy+y-x}$

m) $f(x,y) = (x^2+y^2)\ \ln(x^2+y^2)$

n) $f(x,y) = x\ln(x^2+y^2)$

ñ) $f(x,y) = (x^2+y^2)^{x^2y^2}$

o) $f(x,y) = \dfrac{e^{x(y+1)}-x-1}{|x-y|}$

8. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados

*a*) $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ xy \neq 1 \\ x^2y & \text{si } \ xy = 1 \end{cases}$ en $(1,1)$ y $(-2,-1/2)$.

*b*) $f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{si } x \neq 0 \ \text{ e } \ y \neq 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$ en $(0,0)$ y $(1,1)$.

*c*) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2-y^2} & \text{si } \ |x| \neq |y| \\ 0 & \text{si } \ |x| = |y| \end{cases}$ en $(1,-1)$ y $(0,0)$.

9. Probar que si $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es continua en $x=a$ y la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ está dada por $f(x,y)=g(x)$, entonces $f$ es continua en todo punto de la recta $(a,y)$.

Use esto para probar que las siguientes funciones son continuas en todo $\mathbb{R}^2$:

(a) $f(x, y) = \operatorname{sen}(x)$. (b) $f(x, y) = \operatorname{sen}(x^2) + e^y$.

10. Dada la función $f(x, y) = xy \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{y}\right)$

    *a*) Calcular su dominio

    *b*) Definirla, si es posible, en $\mathbb{R}^2 \setminus \operatorname{Dom}(f)$ de modo que resulte continua en todo $\mathbb{R}^2$.

11. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones

    (a) $f(x, y) = (x^2,\ e^x)$. (b) $f(x, y) = \left(\dfrac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}\ ,\ \dfrac{e^{x^2+y^2} - 1}{x^2 + y^2}\right)$.

12. *a*) Sea $f : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{1 - \|x\|}$. Probar que $f$ es continua y no es acotada.

    *b*) Sea $g : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \|x\|$. Probar que $g$ es continua y acotada pero no alcanza su máximo en $B_1(0)$.