

ANÁLISIS II
COMPUTACIÓN

PRÁCTICA 5

1. Calcular las derivadas parciales de segundo orden para las siguientes funciones, verificando la igualdad de las derivadas parciales mixtas para aquellas funciones de clase C^2 .

$$(a) f(x, y) = x^3y + e^{xy^2} \qquad (b) f(x, y, z) = e^z y + \frac{e^y}{x} + xy \sin z$$

$$(c) f(x, y) = x^2 e^{\frac{y}{x}} + y^2$$

2. Determinar en cada caso si existe una función f que satisfaga las condiciones requeridas. Si existe alguna, encontrar todas.

$$a) \nabla f(x, y) = (3x^2y + 2y^2, x^3 + 4xy - 1), \quad f(1, 1) = 4.$$

$$b) \nabla f(x, y) = (5y, 2x).$$

$$c) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^{xy} + xy e^{xy} + \cos x + 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 e^{xy}.$$

$$d) \nabla f(x, y, z) = (e^{y+z^2}, xe^{z^2} + \cos y, 2xz e^y e^{z^2}), \quad f(0, 0, 0) = 1.$$

3. a) Supongamos que f es de clase C^2 en \mathbb{R}^2 y que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0 \quad \forall (x, y)$.

Probar que $f(x, y) = g(x) + h(y)$.

b) Sean f de clase C^2 en \mathbb{R}^2 y que $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} - \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0$.

1) Si llamamos $u = x + y$ y $v = x - y$, calcular $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$.

2) Probar que $f(x, y) = g(x + y) + h(x - y)$.

4. a) Hallar la fórmula de Taylor de segundo orden para las funciones dadas en el punto indicado. Escribir la forma de Lagrange del residuo.

i. $f(x, y) = (x + y)^2$ en $(0, 0)$ ii. $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$ en $(0, 0)$

iii. $f(x, y) = e^x \sin y$ en $(2, \frac{\pi}{4})$ iv. $f(x, y) = \ln(1 + xy)$ en $(2, 3)$

v. $f(x, y) = x + xy + 2y$ en $(1, 1)$ vi. $f(x, y) = x^y$ en $(1, 2)$

- b) Utilizando los resultados anteriores evaluar $(0,95)^{2,01}$

i. con error $\varepsilon < \frac{1}{500}$ ii. con error $\varepsilon < \frac{1}{5000}$

5. Hallar el polinomio de segundo grado que mejor aproxima, en el origen, a la función

$$f(x, y) = \sin x \sin y$$

6. Encontrar los puntos críticos de las siguientes funciones y verificar que son puntos de ensilladura:

$$(a) f(x, y) = x^2 - y^2 \qquad (b) f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x$$

$$(c) f(x, y) = xy$$

7. a) Calcular los extremos de $f(x, y) = x^2 + y^4$ y de $g(x, y) = x^4 + y^4$ y sus hessianos en dichos puntos.

b) Sea f de clase C^2 tal que tiene un extremo estricto en $a \in \mathbb{R}^n$. ¿Es necesariamente $Hf(a)$ definida positiva o negativa?

8. Sea $f(x, y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$. Probar que:

$$a) \det(Hf(0, 0)) = 0$$

b) f tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$ sobre cada recta que pase por $(0, 0)$, esto es: si $g(t) = (at, bt)$ entonces $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un mínimo relativo en 0 para cada elección de a y b .

c) $(0, 0)$ es un punto de ensilladura.

9. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$:

a) Probar que $a = (0, 0)$ es un punto crítico pero no extremo.

b) Probar que $\pm\sqrt{2}(1, -1)$ son mínimos absolutos.

c) ¿Hay máximos relativos?

10. Para las siguientes funciones, hallar los puntos críticos y analizar cuáles son máximos, mínimos locales o puntos de ensilladura:

$$(a) f(x, y) = (2x + 1 - y)^2 \qquad (b) f(x, y) = x^2 - y^2 - xy + 3x + 3y + 1$$

$$(c) f(x, y) = x^3 + 3x^2 - 4xy + y^2 \qquad (d) f(x, y) = \ln((x + y)^2 + (x + 1)^2)$$

$$(e) f(x) = \frac{1}{1 + \|x\|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n \qquad (f) f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$$

$$(g) f(x, y) = -3x^2 + 2xy + 2x - y^2 + y + 4 \qquad (h) f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$$

$$(h) f(x, y) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2y}} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

11. Hallar los extremos absolutos de $f|_A$ en los siguientes casos:

$$(a) f(x, y) = xy(x - y)^2 \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0\}$$

$$(b) f(x, y) = xy(x - y)^2 \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0\}$$

$$(c) f(x, y) = 2x^2 - xy + y^2 + 7x \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq 3, |y| \leq 3\}$$

$$(d) f(x, y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3 \quad A = \mathbb{R}^2$$

$$(e) f(x, y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3 \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$$

12. a) Hallar el punto de la parábola $y^2 = 4x$ cuya distancia al $(1, 0)$ es mínima.
 b) Resolver el mismo problema reduciéndolo a trabajar con una función de una variable.

13. Hallar los máximos y mínimos de la función:

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 1$$

dentro del círculo unitario y en el borde.

14. Encontrar los extremos de f sujetos a las restricciones mencionadas:

$$(a) f(x, y) = x - y + z \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2$$

$$(b) f(x, y) = 2x - 2y - 3z \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$$

$$(c) f(x, y) = \frac{x^2 + 3 \sin x \cos x}{e^x} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

$$(d) f(x, y) = xy \quad \frac{|xy|}{|xy|+1} \leq 1$$

15. Resolver los siguientes problemas geométricos mediante el método de Lagrange:

- a) Encontrar la distancia más corta desde el punto $(1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ hasta el plano de ecuación $x_1 + x_2 - x_3 = 5$.
 b) Encontrar el punto sobre la recta de intersección de los dos planos

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3 \quad \text{y} \quad 2x_1 + 6x_2 - x_3 = 0$$

que está más cerca del origen.

- c) Mostrar que el volumen del mayor paralelepípedo rectangular que puede inscribirse en el elipsoide

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{25} = 1$$

es $240/3\sqrt{3}$.

16. Hallar la distancia mínima desde el origen al cono

$$z^2 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2.$$

17. Encontrar tres números x, y, z tales que $x + y + z = 1$ y $xy + xz + yz$ sea tan grande como sea posible.

18. Encontrar el punto de la superficie $z = xy - 1$ más cercano al origen.

19. Demostrar la siguiente desigualdad:

$$\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}, \quad \forall x, y, z \geq 0.$$

Sugerencia: Buscar el máximo de la función $u = xyz$ con la condición $x + y + z = c$.