Convergencia monomial en $H_b(\ell_p)$ y la técnica de descomposición de índices.

Una función $f : \ell_p \to \mathbb{C}$ es Fréchet diferenciable en $z \in \mathbb{C}$ si existe un funcional $T_z : \ell_p \to \mathbb{C}$ tal que

$$\lim_{\|h\|_{\ell_p}\to 0} \frac{f(z+h) - f(z) - T_z(h)}{\|h\|_{\ell_p}} = 0.$$

Si f es Frechet diferenciable para todo $z \in \ell_p$, diremos que es holomorfa en ℓ_p ($f \in H(\ell_p)$). Siempre que f sea holomorfa existen coeficientes $(a_\alpha(f))_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}}$ que permiten escribir

$$f(z) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} a_\alpha(f) z^\alpha,$$

cuando $z \in C_{00}$. Surge entonces la pregunta, ¿Para que elementos $z \in \ell_p$ se tendrá $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} |a_\alpha(f) z^\alpha| < \infty$?

Esta pregunta, interesante para una función holomorfa, lo es también para una familia de funciones dada $\mathcal{F} \subset H(\ell_p)$. Se define así el conjunto de convergencia monomial de una cierta familia $\mathcal{F} \subset H(\ell_p)$ como

$$\mathrm{mon}\mathcal{F} := \{z \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} |a_\alpha(f) z^\alpha| < \infty \text{ para toda } f \in \mathcal{F}\}.$$

El problema de determinar el conjunto de convergencia monomial ha sido estudio por varios autores en diversas familias de funciones holomorfas y sobre diversos espacios de sucesiones (por ejemplo ℓ_p).

Si le pedimos a cierta función $f \in H(\ell_p)$ que además sea acotada sobre los conjuntos acotados de ℓ_p diremos que pertenece a la familia $H_b(\ell_p)$. En estas charlas nos dedicaremos a mostrar que

$$\mathrm{mon}H_b(\ell_p) = \{z \in \ell_\infty : \sup_{n\geq} \frac{1}{\log(n)^{1-\frac{1}{p}}} \sum_{k=1}^{n} |z_k^*| < \infty\},$$

lo cual resulta un espacio de Marcinkiewicz, dotando a este conjunto de una estructura extra. La clave en el ataque de este problema será estudiar la incondicionalidad en espacios de polinomios homogénos. La principal técnica nace de descomponer los conjuntos de índices que definen a estos polinomios en ciertos subconjuntos que funcionan de ladrillos de algún modo y entender el problema de incondicionalidad sobre ellos.

El trabajo que expondré fue hecho en colaboración con Daniel Galicer, Santiago Muro y Pablo Sevilla-Peris.