Polinomios homogéneos: La norma uniforme vs. la norma de coeficientes.

Mansilla, Martín

13 de abril de 2016

Un polinomio m-homogéneo en n variables complejas es una función

$$P : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C},$$

que siempre puede ser escita como $P(z) = \sum\limits_{\alpha \in \Lambda(m,n)} c_\alpha(P) z^\alpha$, donde

$$\Lambda(m,n) = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n : \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = m\},$$

y $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}$. Al espacio de polinomios m-homogéneos en n variables complejas se lo suele notar con $\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$.

Existen dos familias de normas clásicas definidas en $\mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ que estudiaremos. Dado $P \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ como antes, y cualquier $1 \leq r \leq \infty$, se define su norma ℓ_r o r-norma de coeficientes como

$$|P|_r := \Big(\sum_{\alpha \in \Lambda(m,n)} |c_\alpha(P)|^r \Big)^{\frac{1}{r}} \qquad \text{si} \qquad 1 \leq r < \infty,$$

$$|P|_\infty := \sup_{\alpha \in \Lambda(m,n)} |c_\alpha(P)| \qquad \text{si} \qquad r = \infty.$$

Por otro lado, dado $1 \leq p \leq \infty$, se define la norma p-uniforme como

$$\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)} := \sup_{z \in B_{\ell_p^n}} |P(z)|.$$

En muchos problemas del análisis complejo y armónico, teoría de números, teoría de operadores y de espacios de Banach es de mucha utilidad poder relacionar la sumabilidad de los coeficientes de polinomios m-homogéneos con su norma uniforme. Esto motiva el siguiente problema:

Problema 1. *Sean $A^m_{p,r}(n)$ y $B^m_{p,r}(n)$ las más chicas de las constantes que cumplen las siguientes desigualdades:*

$$|P|_r \leq A^m_{p,r}(n) \|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)},$$

$$\|P\|_{\mathcal{P}(^m\ell_p^n)} \leq B^m_{p,r}(n) |P|_r.$$

¿Cómo se comportan estas constantes en función del número de variables n ? ¿Cuál es su comportamiento asintótico correcto?

En los siguientes encuentros discutiremos este problema encontrando el comportamiento exacto para un gran rango de valores de p y r. Asímismo mostraremos cual sería el comportamiento asintótico correcto en todos lo casos bajo una hipótesis que proviene de la teoría de interpolación compleja de espacios de Banach que constituye una pregunta abierta en el área. Por último, de ser posible, mostraremos algunas aplicaciones que estos resultados tienen en el estudio de constante de incondicionalidad para Espacios de Polinomios y en desigualdades de von Neumann provienientes de la Teoría de Operadores.