ISSN 1851-149X

Fascículo 13

Cursos y seminarios de matemática

Serie B

Guillermo Cortiñas

Álgebra II + 1/2

Notas de teoría de álgebras

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

2021

Cursos y Seminarios de Matemática – Serie B

Fascículo 13

ISSN 1851-149X (Versión Electrónica)
ISSN 1851-1481 (Versión Impresa)

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

Álgebra $II + {}^{1}\!/\!{}_{2}$:
Notas de Teoría de Álgebras

Guillermo Cortiñas

7 de mayo de 2021, 08:52

Introducción

Éstas son las notas del curso de Teoría de Álgebras dictado en la FCEyN-UBA en el segundo cuatrimestre virtual de 2020. La materia, optativa para la licenciatura y el doctorado en matemática, se dicta cada dos años y está dedicada a distintos tópicos del álgebra no conmutativa. En esta oportunidad, se expusieron algunos conceptos y resultados sobre temas muy clásicos, como producto tensorial, teoría de Morita, álgebras separables y casi libres, localizacion universal y grupo de Grothendieck. En los ejemplos nos concentramos en el caso concreto de álgebras de caminos de grafos, particularmente álgebras de Leavitt, cubriendo bastantes resultados recientes acerca de tales álgebras.

Es un placer agradecer a todos los que asistieron a las clases virtuales y a quienes me indicaron correcciones, particularmente a Guido Arnone.

Guillermo Cortiñas
Maschwitz, abril 2021

Índice general

Capítulo 1

Módulos y bimódulos

1.1. Álgebras y bimódulos

Sea k un anillo conmutativo. Una *k-álgebra* (unital) es un anillo R junto con un morfismo de anillos $k \to R$ cuya imagen está contenida en el *centro* de R, que denotamos $Z(R)$. Un *morfismo* de k-álgebras de $\iota : k \to R$ en $\jmath : k \to S$ es un morfismo de anillos $\phi : R \to S$ tal que $\phi \circ \iota = \jmath$. En adelante fijamos k y utilizamos el término álgebra como sinónimo de k-álgebra. El anillo k es nuestro *anillo de base*; lo vemos como k-álgebra con el morfismo identidad.

Recordemos que darle a un grupo abeliano M una estructura de módulo (unital) a izquierda sobre un anillo R equivale a dar un morfismo de anillos $\rho : R \to \operatorname{End}_{\mathbb{Z}}(M)$. El morfismo ρ y la multiplicación de elementos de M por elementos de R se corresponden mediante la fórmula

$$a \cdot x = \rho(a)(x) \quad (a \in R,\ x \in M).$$

Supongamos ahora que R es una k-álgebra. Entonces M es un k-módulo mediante $\rho \circ \iota$ y el hecho de que $\rho(k) \subset Z(R)$ nos dice que

$$\lambda \cdot (a \cdot x) = a \cdot (\lambda \cdot x) \quad (\forall\, \lambda \in k,\ a \in R,\ x \in M).$$

En otras palabras, $\rho(R) \subset \operatorname{End}_k(M)$. Notemos además que, para la estructura de k-módulo definida en M, la correstricción de $\rho\iota$ a $\operatorname{End}_k(M)$ envía un elemento $\lambda \in k$ al morfismo $L_\lambda : M \to M$, $L_\lambda(x) = \lambda \cdot x$. Recíprocamente, si N es cualquier k-módulo, entonces $\operatorname{End}_k(N)$ es canónicamente una k-álgebra mediante $L : k \to \operatorname{End}_k(N)$, $L(\lambda) = L_\lambda$ y si $\phi : R \to \operatorname{End}_k(N)$ es un morfismo de k-álgebras entonces N es un R-módulo mediante ϕ y $\phi \circ \iota = L$. Se sigue entonces que dar un módulo a izquierda sobre una k-álgebra R equivale a dar un k-módulo M y un morfismo de k-álgebras $\rho : R \to \operatorname{End}_k(M)$. Dar a M una estructura de módulo a derecha es lo mismo que darle una de R^{op}-módulo a izquierda, es decir, una estructura de k-módulo y un morfismo de k-álgebras $\mu : R^{\mathrm{op}} \to \operatorname{End}_k(M)$.

Ejercicio 1.1.1. Sean R una k-álgebra y M un R-módulo a izquierda. Para cada $\lambda \in k$, sea $L_\lambda : M \to M$, $L_\lambda(x) = \lambda \cdot x$. Probar que $L_\lambda \in \operatorname{End}_R M$ y que $L : k \to \operatorname{End}_R M$ es morfismo de anillos. En particular, $\operatorname{End}_R(M)$ es una k-álgebra.

Sean R y S álgebras; un (R, S)-*bimódulo* es un k-módulo M junto con morfismos de álgebras $\rho : R \to \operatorname{End}_k M$ y $\mu : S^{\text{op}} \to \operatorname{End}_k(M)$ tales que $\rho(a)$ y $\mu(b)$ conmutan para todo $a \in R$ y $b \in S$. Escribiremos ${}_RM_S$ para indicar que M es un (R, S)-bimódulo. Un *morfismo* $\phi : {}_RM_S \to {}_RN_S$ es una función $M \to N$ k-lineal que es a la vez morfismo de R-módulos a izquierda y morfismo de S-módulos a derecha. En pos de aliviar la notación, a veces utilizaremos el término R-bimódulo en vez de (R, R)-bimódulo.

Ejercicio 1.1.2. Sean R y S k-álgebras y M un k-módulo. Probar que tener una estructura de (R, S)-bimódulo en M equivale a tener cualquiera de las siguientes:

i) una estructura de R-módulo a izquierda en M y un morfismo $\mu : S^{\text{op}} \to \operatorname{End}_R(M)$;

ii) una estructura de S-módulo a derecha en M y un morfismo $\rho : R \to \operatorname{End}_S(M)$.

Ejemplos 1.1.3. Sean R, S y T k-álgebras.

i) Un bimódulo sobre k (visto como k-álgebra mediante el morfismo identidad) es lo mismo que un k-módulo.

ii) Si R es cualquier k-álgebra y M es un R-módulo a derecha, la multiplicación por escalares de k conmuta con la multiplicación a derecha por elementos de R y por tanto hace de M un (k, R)-bimódulo. La notación M_R indica que M es un R-módulo a derecha; si no se especifica otra, vemos a M como (k, R)-módulo mediante la estructura que acabamos de describir. Análogamente todo R-módulo a izquierda N es automáticamente un (R, k)-bimódulo ${}_RN$.

iii) La multiplicación a izquierda y a derecha de R la hacen un (R, R)-bimódulo.

iv) Sea $\phi : R \to S$ un morfismo de álgebras y ${}_SN_T$ un bimódulo. Entonces

$$a \cdot x := \phi(a) \cdot x \quad (x \in N,\, a \in R),$$

define una estructura de R módulo a izquierda en N que lo hace un (R, T)-bimódulo.

v) El álgebra S es un R-bimódulo mediante ϕ.

vi) Las inclusiones $k[x] \subset k[x, y]$ y $k[x] \cong k[y] \subset k[x, y]$ hacen de $k[x, y]$ un $k[x]$-bimódulo.

vii) Sean M y N R-módulos (e.g. a izquierda); entonces $\operatorname{End}_R(M)$ y $\operatorname{End}_R(N)$ son k-álgebras por el Ejercicio 1.1.1 y $\operatorname{Hom}_R(M, N)$ es un

$(\operatorname{End}_R(N), \operatorname{End}_R(M))$-bimódulo mediante $f \cdot \phi \cdot g = f \circ \phi \circ g$, con $f \in \operatorname{End}_R(N)$, $\phi \in \operatorname{Hom}_R(M, N)$ y $g \in \operatorname{End}_R(N)$.

vii) Sean R, S y T álgebras y ${}_RM_S$, ${}_SN_T$ y ${}_RP_T$ bimódulos. Entonces $\operatorname{Hom}_T(N, P)$ y $\operatorname{Hom}_R(M, P)$ son respectivamente un (R, S)-bimódulo y un (S, T)-bimódulo mediante

$$(r \cdot f \cdot s)(n) = r \cdot (f(sn)) \text{ y } (s \cdot g \cdot t)(m) = g(ms)t.$$

1.2. Grafos y bimódulos

Sea X un conjunto finito y sea k^X el conjunto de todas las funciones $X \to k$, equipado con las operaciones de suma y producto puntuales. Denotamos χ_x a la función característica del subconjunto $\{x\} \subset X$; tenemos $\chi_{x_1}\chi_{x_2} = \delta_{x_1,x_2}\chi_{x_1}$. Vemos a k^X como k-álgebra mediante la aplicación diagonal $k \to k^X$, $\lambda \mapsto \sum_{x\in X} \lambda\chi_x$. Sean Y otro conjunto finito y M un k-módulo. Por definición una estructura de (k^X, k^Y) bimódulo en M consiste de dos morfismos de k-álgebras $\rho : k^X \to \mathrm{End}_k(M) \leftarrow k^Y : \mu$ tales que $\rho(a)\mu(b) = \mu(b)\rho(a)$ para todo $a \in k^X$ y todo $b \in k^Y$. Dar tales morfismos equivale a dar, para cada $x \in X$ y cada $y \in Y$, elementos $p_x, p_y \in \mathrm{End}_k M$ tales que

$$p_{x_1}p_{x_2} = \delta_{x_1,x_2}p_{x_1},\ p_{y_1}p_{y_2} = \delta_{y_1,y_2}p_{y_1}\ (x_i \in X, y_i \in Y), \qquad (1.2.1)$$
$$1 = \sum_{x\in X} p_x = \sum_{y\in Y} p_y,$$
$$p_x p_y = p_y p_x\ (x \in X, y \in Y).$$

Dadas familias $\{p_x : x \in X\}$ y $\{p_y : y \in Y\}$ de elementos de $\mathrm{End}_k(M)$ que satisfacen (1.2.1), sea

$$p_{x,y} = p_x p_y\ ((x, y) \in X \times Y).$$

Tenemos

$$p_{x_1,y_1}p_{x_2,y_2} = \delta_{(x_1,y_1),(x_2,y_2)}p_{x_1,y_1},\ 1 = \sum_{(x,y)\in X\times Y} p_{x,y}. \qquad (1.2.2)$$

Se sigue que

$$\tau : k^{X\times Y} \to \mathrm{End}_k(M),\ \tau(\chi_{(x,y)}) = p_{x,y} \qquad (1.2.3)$$

es morfismo de álgebras. Luego M es un módulo sobre $k^{X\times Y}$. Recíprocamente, dado (1.2.3), los elementos

$$p_x = \sum_{y'\in Y} p_{x,y'},\ p_y = \sum_{x'\in X} p_{x',y}\ (x \in X,\ y \in Y)$$

satisfacen (1.2.1).

Concluímos que un (k^X, k^Y)-bimódulo es lo mismo que un $k^{X\times Y}$-módulo; por [11, Proposición 3.7.1], esto es lo mismo que una familia de k-módulos $\{M_{x,y} : (x, y) \in X \times Y\}$.

Nos concentraremos ahora en el caso en que todos los $M_{x,y}$ son k-módulos libres; observemos que, si k es un cuerpo, este es el caso general. Para cada (x, y) elegimos una base $\mathfrak{B}_{x,y}$ de $M_{x,y}$ y consideramos la unión disjunta

$$\mathfrak{B} = \sqcup_{(x,y)\in X\times Y}\mathfrak{B}_{x,y}. \qquad (1.2.4)$$

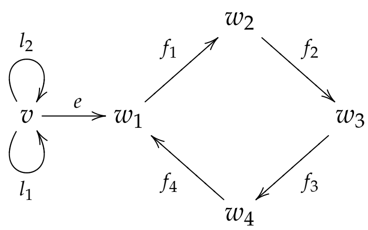
Tenemos una función

$$\phi : \mathfrak{B} \to X \times Y,\ \phi(e) = (x, y),\ \text{ si } e \in \mathfrak{B}_{x,y}. \qquad (1.2.5)$$

Recíprocamente, dada una tal ϕ, definiendo $\mathfrak{B}_{x,y} = \phi^{-1}(\{(x, y)\})$ obtenemos la descomposición (1.2.4).

Concluímos que dar una familia de k-módulos libres $\{M_{x,y} : (x,y) \in X \times Y\}$ con una base especificada para cada (x,y) equivale a dar un conjunto $\mathfrak{B}$ y una función $\phi : \mathfrak{B} \to X \times Y$, o, lo que es lo mismo, una función $\phi_1 : \mathfrak{B} \to X$ y una función $\phi_2 : \mathfrak{B} \to Y$.

Un *grafo* (dirigido) (o *quiver*, o *carcaj*) E, consiste de conjuntos E^0, E^1 y funciones $r, s : E^1 \to E^0$. Los elementos de E^0 son los *vértices* y los elementos de E^1 las *aristas* del grafo; la arista e *sale* del vértice $s(e)$ y *llega* al vértice $r(e)$. Representamos a cada vértice como un punto y a cada arista como una flecha. Por ejemplo el dibujo



representa al grafo con conjunto de vértices $E^0 = \{v, w_1, w_2, w_3, w_4\}$, conjunto de aristas $E^1 = \{l_1, l_2, e, f_1, f_2, f_3, f_4\}$, función de salida $s : E^1 \to E^0$, $s(l_i) = v$, $s(e) = v$, $s(f_i) = w_i$, y función de llegada $r : E^1 \to E^0$, $r(l_i) = v$, $r(e) = w_1$, $r(f_i) = f_{i+1}$ (suma módulo 4).

Decimos que E es *finito* cuando E^0 y E^1 son ambos finitos. En ese caso, la *matriz de incidencia* del grafo E es la matriz finita $A_E \in \mathbb{N}_0^{E^0 \times E^0}$ dada por

$$(A_E)_{v,w} = |\{e \in E^1 : s(e) = v,\ r(e) = w\}|.$$

En el caso del grafo del ejemplo, si ordenamos los vértices así: v, w_1, w_2, w_3, w_4, la matriz de incidencia nos queda

$$A_E = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

De la discusión de arriba vemos que dar un bimódulo M sobre k^X de modo que para cada par $(x,y) \in X \times X$ el k-módulo $M_{x,y} = \chi_x M \chi_y$ sea libre y especificar una base $\mathfrak{B}_{x,y}$ para cada $M_{x,y}$ equivale a dar un grafo E con $E^0 = X$. Como k-módulo, $M = k^{(E_1)}$, el conjunto de todas las funciones $\phi : E_1 \to k$ de soporte finito. El bimódulo M será finitamente generado si y sólo si $|E^1| < \infty$. En este caso, el módulo M y las bases $\mathfrak{B}_{x,y}$ están completamente determinados por la matriz de incidencia del grafo E.

Sea E un grafo. Sea $n \geq 1$; *camino* en E de *longitud* n es una sucesión de aristas $\alpha = e_1 \cdots e_n$ de modo que para todo i, $r(e_i) = s(e_{i+1})$. Los vértices se consideran caminos de longitud 0. Denotamos por $|\alpha|$ la longitud del camino α y ponemos

$$E^n = \{\alpha : \text{ camino con } |\alpha| = n\}.$$

Las funciones de salida y llegada se extienden a todo $\mathcal{P}_n$; por ejemplo, si α es como arriba, $s(\alpha) = s(e_1)$ y $r(\alpha) = r(e_n)$. Así, para cada n, E^n es un grafo, y definen por tanto un k^{E^0}-bimódulo; se trata del k-módulo $k^{(E^n)}$, equipado con el producto

$$\chi_v \chi_\alpha \chi_w = \delta_{v,s(\alpha)} \delta_{w,r(\alpha)} \chi_\alpha.$$

Ejercicio 1.2.6. Sea E un grafo finito con matriz de incidencia A; sea $n \geq 0$. Probar que la matriz de incidencia de E^n es la n-ésima potencia A^n de A; es decir, se tiene la fórmula:

$$A_{E^n} = (A_E)^n.$$

Capítulo 2

Producto tensorial

2.1. Funciones bilineales

Sean R, S y T álgebras y ${}_R M_S$, ${}_S N_T$ y ${}_R P_T$ bimódulos y sea $\phi : M \times N \to P$ una función. Decimos que ϕ es *bilineal* si y sólo si para todo $x, y \in M$, $z, w \in N$, $a \in R$, $b \in S$ y $c \in T$ se tiene

$$\phi(x+y,z) = \phi(x,z) + \phi(y,z), \quad \phi(x,z+w) = \phi(x,z) + \phi(x,w)$$
$$a\phi(xb,z)c = \phi(axb,zc) = \phi(ax,bzc) = a\phi(x,bz)c.$$

En otras palabras, ϕ es bilineal si y sólo si para todo $x \in M$ y todo $z \in N$, $\phi(x,-) : N \to P$ es morfismo de (S,T)-bimódulos y $\phi(-,z)$ es morfismo de (R,S)-bimódulos.

Ejemplo 2.1.1. Sea R una k-álgebra y sea $\mu : R \times R \to R$, $\mu(a,b) = ab$. Entonces μ es una aplicación bilineal ${}_R R_k \times {}_k R_R \to {}_R R_R$.

Ejemplo 2.1.2. Sean R una k-álgebra y $e \in R$ un idempotente. Sea $S = eRe$; S es una k-álgebra con unidad e; eR es un (S,R)-bimódulo y Re un (R,S)-bimódulo, y la multiplicación en R induce aplicaciones bilineales $eR \times Re \to eRe$ y $Re \times eR \to R$.

Ejercicio 2.1.3. Sean E un grafo y sean $\alpha = e_1 \cdots e_n$ y $\beta = f_1 \cdots f_m$ caminos en E con $r(\alpha) = s(\beta)$. La *concatenación* de α y β es el camino $\alpha\beta = e_1 \cdots e_n f_1 \cdots f_m$. La concatenación de caminos induce una función

$$\cdot : k^{(E^n)} \times k^{(E^m)} \to k^{(E^{n+m})}, \chi_\alpha \cdot \chi_\beta = \delta_{r(\alpha),s(\beta)} \chi_{\alpha\beta}.$$

Sea $R = k^{(E^0)}$; probar que $\cdot$ es una función bilineal ${}_R k_R^{(E^n)} \times {}_R k_R^{(E^m)} \to {}_R k_R^{(E^{n+m})}$.

Ejercicio 2.1.4. Sean R, S y T k-álgebras, $f : {}_R M_S \to {}_R M'_S$, $g : {}_S N_T \to {}_S N'_T$ y $h : {}_R P_T \to {}_R P'_T$ morfismos de bimódulos y $\phi : M' \times N' \to P$ una función bilineal. Probar que $\psi : M \times N \to P'$, $\psi(x,y) = h(\phi(f(x), g(y)))$ es bilineal.

Sean R, S y T k-álgebras y ${}_R M_S$, ${}_S N_T$ y ${}_R P_T$ bimódulos. Sea

$$\mathrm{Bil}({}_R M_S \times {}_S N_T, {}_R P_T) = \{\phi : {}_R M_S \times {}_S N_T \to {}_R P_T \text{ bilineal }\}$$

Observemos que tenemos el siguiente diagrama conmutativo de inclusiones

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Bil}({}_RM_S \times {}_SN_T, {}_RP_T) \arrow[r, tail] & \mathrm{Bil}({}_kM_S \times {}_SN_T, {}_kP_T) & \\
\mathrm{Bil}({}_RM_S \times {}_SN_k, {}_RP_k) \arrow[r, tail] \arrow[u, tail] & \mathrm{Bil}({}_kM_S \times {}_SN_k, {}_kP_k) \arrow[r, tail] \arrow[u, tail] & \mathrm{Bil}({}_kM_k \times {}_kN_k, {}_kP_k)
\end{tikzcd}
$$

Notemos que $\mathrm{Bil}({}_kM_S \times {}_SN_k, {}_kP_k)$ tiene estructura de

- (R, T)-bimódulo mediante $(r \cdot \phi \cdot t)(x, y) = r\phi(x, y)t$;
- (R, R)-bimódulo mediante $(r_1 \cdot \phi \cdot r_2)(x, y) = r_1\phi(r_2x, y)$;
- (T, T)-bimódulo mediante $(t_1 \cdot \phi \cdot t_2)(x, y) = \phi(x, yt_1)t_2$.

En adelante aliviaremos la notación eliminando subíndices k; por ejemplo si M es un S-módulo a derecha con la estructura de (k, S)-módulo del Ejemplo 1.1.3 ii), escribiremos $\mathrm{Bil}(M_S \times {}_SN_T, P_T)$ por $\mathrm{Bil}({}_kM_S \times {}_SN_T, {}_kP_T)$.

Ejercicio 2.1.5. Sean R una k-álgebra. Supongamos que R es dominio íntegro conmutativo. Sean M un R-módulo divisible y N un R-módulo de torsión. Probar que para todo k-módulo $\mathbb{V}$,

$$\mathrm{Bil}(M_R \times {}_RN, \mathbb{V}) = 0.$$

Proposición 2.1.6. *Sean R, S y T k-álgebras y ${}_RM_S$, ${}_SN_T$ y ${}_RP_T$ bimódulos. Las funciones*

$$\begin{aligned} \mathrm{Bil}(M_S \times {}_SN_T, P_T) &\to \mathrm{Hom}_S(M, \mathrm{Hom}_T(N, P)), \\ \phi &\mapsto (x \mapsto (y \mapsto \phi(x, y)) \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Bil}({}_RM_S \times {}_SN, {}_RP) &\to \mathrm{Hom}_S(N, \mathrm{Hom}_R(M, P)), \\ \phi &\mapsto (y \mapsto (x \mapsto \phi(x, y)) \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

son isomorfismos de (R, R) y de (T, T)-bimódulos respectivamente.

Demostración. Recordemos que X, Y, Z son conjuntos y $\mathrm{map}(X, Y)$ es el conjunto de funciones de X en Y, entonces las funciones

$$\mathrm{map}(X \times Y, Z) \to \mathrm{map}(X, \mathrm{map}(Y, Z)),\ f \mapsto (x \mapsto (y \mapsto f(x, y)))$$
$$\mathrm{map}(X, \mathrm{map}(Y, Z)) \to \mathrm{map}(X \times Y, Z),\ g \mapsto ((x, y) \mapsto g(x)(y))$$

son biyecciones inversas. La demostración de la primera afirmación consiste en aplicar esto para $X = M$, $Y = N$ y $Z = P$, y verificar que la primera de estas funciones envía el subconjunto $\mathrm{Bil}({}_kM_S \times {}_SN_T, P_T) \subset \mathrm{map}(M \times N, P)$ en el subconjunto $\mathrm{Hom}_S(M, \mathrm{Hom}_T(N, P)) \subset \mathrm{map}(M, \mathrm{map}(N, P))$ y que la segunda envía $\mathrm{Hom}_S(M, \mathrm{Hom}_T(N, P))$ en $\mathrm{Bil}(M_S \times {}_SN_T, P_T)$. La demostración de la segunda afirmación es similar. □

Ejemplo 2.1.9. Sean S y T k-álgebras y N y P (S, T)-bimódulos. Tenemos isomorfismos de (S, S)-bimódulos

$$\mathrm{Bil}(S_S \times {}_SN_T, P_T) \cong \mathrm{Hom}_S(S_S, \mathrm{Hom}_T(N, P)) \cong \mathrm{Hom}_T(N, P)$$

La composición envía $\phi \mapsto (x \mapsto \phi(1, x))$.

Ejemplo 2.1.10. Sean R, S, T, M, N y P como en la Proposición 2.1.6 y sea $M_0 \subset M$ un (R,S)-submódulo. Se sigue de la Proposición 2.1.6 y de la exactitud a izquierda de Hom_S que hay un isomorfismo de (R,R)-bimódulos

$$\mathrm{Bil}((M/M_0)_S \times {}_SN_T, P_T) \cong \{f \in \mathrm{Bil}(M_S \times {}_SN_T, P_T) | f(M_0 \times N) = 0\}.$$

En otras palabras, dar una función bilineal $\phi : (M/M_0)_S \times {}_SN_T \to P_T$ equivale a dar una función bilineal $\hat{\phi} : M_S \times {}_SN_T \to P_T$ tal que $\hat{\phi}(m_0, n) = 0$ para todo $m_0 \in M_0$ y $n \in N$. En particular, si $I \subset S$ es un ideal a derecha, entonces

$$\mathrm{Bil}(S_S/I \times {}_SN_T, P_T) \cong \mathrm{Hom}_T(N/IN, P)$$

como S-módulos a izquierda.

Ejemplo 2.1.11. Sean R, S, T, N y P como arriba y sea $\{M_i : i \in I\}$ una familia de (R,S)-bimódulos. Entonces

$$\mathrm{Bil}(\bigoplus_{i \in I}(M_i)_S \times {}_SN_T, P_T) \cong \prod_{i \in I} \mathrm{Bil}((M_i)_S \times {}_SN_T, P_T)$$

como (R,R)-bimódulos.

Ejercicio 2.1.12. Sean I y J conjuntos y $\mathbb{V}$ un k-módulo. Probar que $\mathrm{Bil}(R_R^{(I)} \times {}_RR^{(J)}, \mathbb{V}) \cong \mathbb{V}^{I \times J}$ como k-módulos.

2.2. Producto tensorial

Proposición 2.2.1. *Sean R, S y T k-álgebras y ${}_RM_S$, ${}_SN_T$ bimódulos. Entonces existen un (R,T)-bimódulo $M \otimes_S N$ y una función bilineal $b : {}_RM_S \times {}_SN_T \to M \otimes_S N$ tales que para todo (R,T)-bimódulo P y toda función bilineal $\phi : M \times N \to P$ existe un único morfismo de (R,T)-bimódulos $\bar{\phi} : M \otimes_S N \to P$ tal que $\phi = \bar{\phi} \circ b$.*

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "b"] & P \\
M \otimes_S N \arrow[ur, dotted, "\bar{\phi}"'] &
\end{tikzcd}$$

Demostración. Sea $F = k^{(M \times N)}$ el k-módulo libre con base $M \times N$. Sea $F_0 \subset F$ el k-submódulo generado por todos los elementos de la forma

$$(x + y, z) - (x, z) - (y, z), \ (x, z + w) - (x, z) - (x, w), \ (xb, z) - (x, bz)$$

con $x, y \in M$, $z, w \in N$ y $b \in S$.Sea $M \otimes_S N = F/F_0$. Cálculos directos muestran que la función $\hat{\rho} : R \to \mathrm{End}_k(F)$, $\hat{\rho}(a)(x,z) = (ax, z)$ satisface $\rho(a)(F_0) \subset F_0$ $\forall a \in R$, y que la función inducida $\rho : R \to \mathrm{End}_k(M \otimes_S N)$ es morfismo de k-álgebras. Análogamente, $\hat{\mu} : T \to \mathrm{End}_k(F)$, $\hat{(\mu)}(c)(x,z) = (x, zc)$ induce un morfismo de k-álgebras $\mu : T^{\mathrm{op}} \to \mathrm{End}_k(M \otimes_S N)$, y el par (ρ, μ) hace de $M \otimes_S N$ (R,S)-bimódulo. Para cada par $(x,y) \in M \times N$ sea $x \otimes y$ su imagen en $M \otimes_S N$ por la proyección al cociente. La aplicación $b : M \times N \to M \otimes_S N$, $b(x,y) = x \otimes y$ es bilineal por construcción de $M \otimes_S N$.

Además el hecho de que ϕ es bilineal se traduce en que el morfismo k-lineal $\hat{\phi} : F \to P$, $\hat{\phi}(x, y) = \phi(x, y)$ manda F_0 a 0 y en que el morfismo k-lineal inducido$\bar{\phi} : M \otimes_S N \to P$ es también morfismo de (R, T)-bimódulos. Por definición,

$$\bar{\phi}(b(x, y)) = \bar{\phi}(x \otimes y) = \phi(x, y)\ (\forall (x, y) \in M \times N). \tag{2.2.2}$$

Luego $\bar{\phi} \circ b = \phi$; más aún esta condición equivale a la identidad (2.2.2). Dado que $\{x \otimes y : (x, y) \in M \times N\}$ genera a $M \otimes_S N$ como k-módulo, la identidad (2.2.2) determina $\bar{\phi}$ unívocamente; por tanto $\bar{\phi}$ es el único morfismo que cumple la condición de la proposición. □

Corolario 2.2.3. *Las siguientes funciones*

$$\operatorname{Hom}_T(M \otimes_S N, P) \to \operatorname{Hom}_S(M, \operatorname{Hom}_T(N, P)), \tag{2.2.4}$$
$$f \mapsto (x \mapsto (y \mapsto f(x \otimes y)))$$
$$\operatorname{Hom}_R(M \otimes_S N, P) \to \operatorname{Hom}_S(N, \operatorname{Hom}_R(M, P)), \tag{2.2.5}$$
$$f \mapsto (y \mapsto (x \mapsto f(x \otimes y)))$$

son isomorfismos de (R, R) y (T, T)-módulos respectivamente.

Demostración. Por la Proposición 2.2.1 y el Ejercicio 2.1.4, las funciones

$$\operatorname{Bil}(M_S \times {}_SN_T, P_T) \leftrightarrow \operatorname{Hom}_T(M \otimes_S N, P) \tag{2.2.6}$$
$$\phi \mapsto \bar{\phi}$$
$$f \circ b \leftarrow f$$

son biyecciones inversas. Es sencillo verificar que son isomorfismos de (R, R)-módulos; el primer isomorfismo del corolario se obtiene componiendo con el isomorfismo (2.1.7). El segundo isomorfismo del corolario se obtiene en forma análoga. □

Ejercicio 2.2.7. Sean R una k-álgebra, M un R-módulo a derecha y N un R-módulo a izquierda. Probar que $N \otimes_{R^{op}} M \cong M \otimes_R N$.

Ejercicio 2.2.8. Sean E un grafo con finitos vértices, $n \geq 0$, $R = k^{E^0}$ y $P_n = k^{(E^n)}$. Sea $\cdot : P_n \times P_m \to P_{n+m}$ como en el Ejercicio 2.1.3. Probar que $(\cdot, P_{n+m})$ tiene la propiedad universal de $(b, P_n \otimes_R P_m)$. Deducir que $P_n \otimes_R P_m \cong P_{n+m}$ como (R, R)-bimódulos.

Ejercicio 2.2.9. Sean R, M y N como en el Ejercicio 2.1.5. Probar que $M \otimes_R N = 0$.

Sean R, S, T, M, N y b como en la Proposición 2.2.1 y sean $f : M' \to M$ y $g : N' \to N$ morfismos de (R, S) y de (S, T)-módulos respectivamente. Por el Ejercicio 2.1.4, $b \circ (f \times g)$ es bilineal; luego por la Proposición 2.2.1, si $b' : M' \times N' \to M' \otimes_S N'$ la función bilineal canónica, entonces existe un único morfismo de (R, T)-módulos $M' \otimes_S N' \to M \otimes_S N$ que hace conmutar el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd}
M' \times N' \arrow[r, "b \circ (f \times g)"] \arrow[d, "b'"] & M \otimes_S N \\
M' \otimes_S N' \arrow[ur, dotted, "f \otimes g"] &
\end{tikzcd}$$

Ejercicio 2.2.10 (Naturalidad)**.** Sean $\alpha : {}_R M'_S \to {}_R M_S$, $\beta : {}_S N'_T \to {}_S N_T$ y $\gamma : {}_R P'_T \to {}_R P_T$ morfismos de bimódulos.

i) Probar que el primer isomorfismo del Corolario 2.2.3 hace conmutar los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_T(M \otimes_S N, P) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "(\alpha\otimes\mathrm{id})^*"] & \mathrm{Hom}_S(M, \mathrm{Hom}_T(N, P)) \arrow[d, "\alpha^*"] \\
\mathrm{Hom}_T(M' \otimes_S N, P) \arrow[r, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_S(M', \mathrm{Hom}_T(N, P))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_T(M \otimes_S N, P) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes\beta)^*"] & \mathrm{Hom}_S(M, \mathrm{Hom}_T(N, P)) \arrow[d, "(\beta^*)_*"] \\
\mathrm{Hom}_T(M \otimes_S N', P) \arrow[r, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_S(M, \mathrm{Hom}_T(N', P))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_T(M \otimes_S N, P') \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "(\gamma)_*"] & \mathrm{Hom}_S(M, \mathrm{Hom}_T(N, P')) \arrow[d, "(\gamma)_*"] \\
\mathrm{Hom}_T(M \otimes_S N, P) \arrow[r, "\cong"'] & \mathrm{Hom}_S(M, \mathrm{Hom}_T(N, P))
\end{tikzcd}$$

ii) Formular y probar el análogo del ítem anterior para el segundo isomorfismo del Corolario 2.2.3.

Lema 2.2.11 (Yoneda)**.** *Sean R un anillo , M, N R-módulos y $f_Q : \mathrm{Hom}_R(N, Q) \to \mathrm{Hom}_R(M, Q)$ una familia de morfismos indexada por todos los R-módulos Q, tal que el diagrama siguiente conmuta para todo morfismo de R módulos $\alpha : Q' \to Q$*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(N, Q') \arrow[r, "f_{Q'}"] \arrow[d, "\alpha_*"] & \mathrm{Hom}_R(M, Q') \arrow[d, "\alpha_*"] \\
\mathrm{Hom}_R(N, Q) \arrow[r, "f_Q"'] & \mathrm{Hom}_R(M, Q)
\end{tikzcd} .$$

Entonces existe un único $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ tal que para todo Q, $f_Q = f^*$.

Demostración. Sea $f = f_N(\mathrm{id}_N)$. Comprobemos que f tiene la propiedad pedida. Sean Q un R-módulo y $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(N, Q)$. Por hipótesis, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(N, N) \arrow[r, "f_N"] \arrow[d, "\alpha_*"] & \mathrm{Hom}_R(M, N) \arrow[d, "\alpha_*"] \\
\mathrm{Hom}_R(N, Q) \arrow[r, "f_Q"'] & \mathrm{Hom}_R(M, Q).
\end{tikzcd}$$

En particular, $f_Q(\alpha) = f_Q(\alpha_*(\mathrm{id}_N)) = \alpha_*(f_N(\mathrm{id}_N)) = \alpha_*(f) = f^*(\alpha)$. $\square$

Ejercicio 2.2.12. Formular y probar el análogo del Lema 2.2.11 para bimódulos. ¿En qué cambia la demostración?

Proposición 2.2.13 (Asociatividad)**.** *Sean R, S, T y U álgebras y $M = {}_R M_S$, $N = {}_S N_T$ y $P = {}_T P_U$ bimódulos. Hay un isomorfismo canónico de (R, U)-bimódulos*

$$(M \otimes_S N) \otimes_T P \cong M \otimes_S (N \otimes_T P)$$

Demostración. Utilizando el Corolario 2.2.3 repetidas veces y teniendo en cuenta el Ejercicio 2.2.10, obtenemos, para cada (R, U)-módulo Q, una cadena de isomorfismos naturales de (R, R)-bimódulos

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_U((M \otimes_S N) \otimes_T P, Q) &\cong \mathrm{Hom}_T(M \otimes_S N, \mathrm{Hom}_U(P, Q)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_S(M, \mathrm{Hom}_T(N, \mathrm{Hom}_U(P, Q)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_S(M, \mathrm{Hom}_U(N \otimes_T P, Q)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_U(M \otimes_S (N \otimes_T P), Q).\end{aligned}$$

La proposición se sigue ahora usando el Ejercicio 2.2.12. □

Ejercicio 2.2.14. Sean $n \geq 2$, $R_0, \ldots, R_n$ k-álgebras unitales, P un (R_0, R_n)-bimódulo y para cada $1 \leq i \leq n$, M_i un (R_{i-1}, R_i)-bimódulo.

i) Definir el concepto de función n-multilineal $M_1 \times \cdots \times M_n \to P$.

ii) Probar que $b : M_1 \times \cdots \times M_n \to M_1 \otimes_{R_1} \cdots \otimes_{R_{n-1}} M_n$, $b(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ es n-multilineal.

iii Probar que si $\phi : {}_{R_0}(M_1)_{R_1} \times \cdots \times {}_{R_{n-1}}(M_n)_{R_n} \to {}_{R_0}P_{R_n}$ es n-multlineal, entonces existe un único morfismo de (R_0, R_n)-bimódulos $\bar{\phi} : M_1 \otimes_{R_1} \cdots \otimes_{R_{n-1}} M_n \to P$ tal que $\bar{\phi} \circ b = \phi$.

Ejercicio 2.2.15. Sea A un k-módulo.

i) Probar que dar una estructura de k-álgebra (no necesariamente unital) en A equivale a dar un morfismo k-lineal $\mu : A \otimes_k A \to A$ de modo que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} A \otimes_k \otimes A \otimes_k A & \xrightarrow{\mu \otimes \mathrm{id}} & A \otimes_k A \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id} \otimes \mu} & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ A \otimes_k A & \xrightarrow[\mu]{} & A \end{array}$$

ii) Probar que si A' es otra álgebra, con multiplicación $\mu' : A' \otimes_k A' \to A'$, un morfismo de k-álgebras $A' \to A$ es un morfismo k-lineal $f : A' \to A$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} A' \otimes_k A' & \xrightarrow{f \otimes f} & A \otimes_k A \\ \downarrow{\scriptstyle \mu'} & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ A' & \xrightarrow[f']{} & A \end{array}$$

iii) Probar que dar un elemento neutro de A equivale a dar un morfismo k-lineal $\iota : k \to A$ de modo que $\mu \circ \iota = \iota$.

Proposición 2.2.16 (Aditividad). *Sean R, S, T y U álgebras y $M = {}_RM_S$, $N = {}_SN_T$ y $\{P_i = {}_T(P_i)_U : i \in I\}$ bimódulos. El morfismo canónico*

$$\iota : \bigoplus_{i \in I} M \otimes_S P_i \to M \otimes_S (\bigoplus_{i \in I} P_i)$$

inducido por las inclusiones $\iota_j : P_j \to \bigoplus_{i \in I} P_i$, es un isomorfismo de (R, U)-bimódulos.

Demostración. Es claro que ι es morfismo de (R, U)-bimódulos. Para probar que es biyectivo basta, por el Lema 2.2.11, probar que $\mathrm{Hom}(\iota, \mathbb{V})$ es biyectivo para todo k-módulo $\mathbb{V}$. Esto se sigue del isomorfismo (2.2.6), el Ejemplo 2.1.11 y el Ejercicio 2.2.7. □

2.3. Álgebra tensorial

Sean R una k-álgebra y M un (R, R)-bimódulo. Definimos inductivamente

$$M^{\otimes_R 0} = R, \ M^{\otimes_R (n+1)} = M^{\otimes_R n} \otimes_R M$$

Sea

$$T_R(M) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M^{\otimes_R n}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} T_R(M) \otimes_R T_R(M) &= \bigoplus_{p,q \geq 0} M^{\otimes_R p} \otimes_R M^{\otimes_R q} \\ &= \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigoplus_{p+q=n} M^{\otimes_R n} \\ &= \bigoplus_{n=0}^{\infty} (M^{\otimes_R n})^{n+1} \end{aligned}$$

Para cada $n \geq 0$, sea

$$\mu_n : (M^{\otimes n})^{n+1} \to M^{\otimes n}, \mu_n(x_0, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} x_i.$$

Sea

$$\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n : T_R(M) \otimes_R T_R(M) \to T_R(M)$$

Ejercicio 2.3.1. Sea $b : T_R(M) \times T_R(M) \to T_R(M) \otimes_R T_R(M)$ la función bilineal canónica. Probar que $T_R(M)$, equipado con el producto $\mu \circ b$ es un álgebra asociativa.

Sea $M = (M, \cdot)$ un monoide. Una k-álgebra M-*graduada* es una k-álgebra A junto con una descomposición $A = \bigoplus_{m\in M} A_m$ en suma directa de k-submódulos de modo que $A_m \cdot A_n \subset A_{m\cdot n}$. El k-sumódulo A_m es la *componente homogéea* de grado m y sus elementos son *homogéneos de grado m*. Cada elemento $x \in A$ se escribe en forma única como $x = \sum_{m\in M} x_m$ con $x_m \in A_m$; x_m es la *componente homogénea de grado m* de x.

Por ejemplo, el álgebra tensorial $T_R(M)$ del Ejercicio 2.3.1 es $\mathbb{N}_0 = (\mathbb{N}_0, +)$ graduada, cuya componente homogénea de grado n es

$$T_R^n(M) = M^{\otimes n}.$$

Si $f : T_R(M) \to S$ es morfismo de k-álgebras, escribimos

$$f_n : f_{|T_R^n(M)} : T_R^n(M) \to S. \tag{2.3.2}$$

Proposición 2.3.3. *Sean R y S k-álgebras y M un (R,R)-bimódulo. Entonces la función*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}_\ell}(T_R(M), S) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}_\ell}(R, S) \times \mathrm{Hom}(M, S)$$

es inyectiva y su imagen es el subconjunto

$$\{(f_0, f_1) :\ f_1(axb) = f_0(a)f_1(x)f_0(b)\ \forall a, b \in R,\ x \in M\}. \tag{2.3.4}$$

Demostración. Es claro que si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}_\ell}(T_R(M), S)$, entonces (f_0, f_1) está en (2.3.4). Luego basta ver que dado (f_0, f_1) en (2.3.4) existe un único $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}_\ell}(T_R(M), S)$ tales que (2.3.2) se cumple para $n = 0, 1$. Observemos que S es un (R,R)-bimódulo a través de f_0 y que, por definición, $f_1 : M \to S$ es morfismo de (R,R)-bimódulos. Además la asociatividad de la multiplicación en S nos dice que $\mu : {}_RS_R \times {}_RS_R \to {}_RS_R$, $\mu(s,t) = st$ es bilineal. Luego $\mu_n : S^{\otimes n} \to S$, $\mu_n(s_1 \otimes \cdots \otimes s_n) = s_1 \cdots s_n$ está bien definida, y para que $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}_\ell}(T_R(M), S)$, debe cumplirse que $f_n(m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) = f_1(m_1)\cdots f_1(m_n)$. En otras palabras $f_n := \mu_n \circ f^{\otimes n} : T_R^n(M) \to S$; esto da la unicidad. Por otro lado es sencillo verificar que $f : T_R(M) \to S$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_n)$es morfismo de k-álgebras, lo que prueba la existencia. ☐

Ejemplo 2.3.5 (Álgebra de caminos)**.** Sean E un grafo, $E^* = \sqcup_{n\geq 0} E^n$ y

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\} \sqcup E^*$$

Equipamos $\mathcal{P}(E)$ con el producto siguiente

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} \alpha\beta & \text{si } \alpha, \beta \in E^* \text{ y } r(\alpha) = s(\beta) \\ \emptyset & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Con este producto, $\mathcal{P}(E)$ es un semigrupo. El *álgebra de caminos* de E, es $P(E) = k^{(E^*)} = k^{(\mathcal{P}(E))}/k\emptyset$ equipada con el producto inducido por el de $\mathcal{P}(E)$. Si E^0 es finito, $R = k^{(E^0)}$ es unital, y se sigue del Ejercicio 2.2.8 que $P(E) = T_R(P_1(E))$.

Ejercicio 2.3.6. Describir el álgebra de caminos de los siguientes grafos para $n \geq 1$

- $\mathcal{R}_n$ el grafo con un vértice y n lazos ($n \geq 1$).
- $\mathcal{A}_n$ el grafo

$$v_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow v_{n+1}$$

2.4. Producto tensorial de álgebras

Sean A y B k-álgebras (no necesariamente unitales) y sean $\mu_1 : A \otimes_k A \to A$ y $\mu_2 : B \otimes_k B \to B$. Sea $\tau : B \otimes_k A \to A \otimes_k B$, $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$. Definimos $\mu := (\mu_1 \otimes \mu_2) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) : (A \otimes_k B) \otimes_k (A \otimes B) \to A \otimes_k B$, de forma que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
A \otimes_k B \otimes_k A \otimes_k B \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\mu"'] & A \otimes_k A \otimes_k B \otimes_k B \arrow[d, "\mu_1 \otimes \mu_2"] \\
& A \otimes_k B
\end{tikzcd}$$

Es sencillo verificar que la aplicación μ cumple el requisito del Ejercicio 2.2.15 y define una multiplicación asociativa en $A \otimes_k B$ que la convierte en un álgebra asociativa. Si además A y B son unitales, con unidades $\iota_1 : k \to A$, $\iota_2 : k \to B$, entonces $A \otimes_k B$ es unital con unidad

$$\iota : k \cong k \otimes_k k \xrightarrow{\iota_1 \otimes \iota_2} A \otimes_k B$$

Proposición 2.4.1. *Sean R_1, R_2 y S k-álgebras unitales, y sean $f_i : R_i \to S$ morfismos unitales $(i = 1, 2)$ tales que para todo $x \in R_1$ y $y \in R_2$,*

$$f_1(x) f_2(y) = f_2(y) f_1(x). \tag{2.4.2}$$

Entonces existe un único morfismo de k-álgebras $f : R_1 \otimes R_2 \to S$ tal que $f(x \otimes 1) = f_1(x)$ y $f(1 \otimes y) = f_2(y)$ para todo $x \in R_1$, $y \in R_2$.

Demostración. Sea $\phi : R_1 \times R_2 \to S$, $\phi(x, y) = f_1(x) f_2(y)$. Como ϕ es bilineal, por propiedad universal de $R_1 \otimes_k R_2$ (Proposición 2.2.1 se factoriza como $\phi = f \circ b$ para un único morfismo k-lineal $f : R_1 \otimes R_2 \to S$. Este morfismo satisface

$$f(x \otimes y) = f_1(x) f_2(y) = f(x \otimes 1) f(1 \otimes y) \tag{2.4.3}$$

Por otra parte es claro que cualquier morfismo de k-álgebras qeu cumpla las conidiciones de la proposición, debe satisfacer la ecuación (2.4.3); esto prueba la unicidad. Se sigue también de (2.4.3) que $f(1 \otimes 1) = 1$. Sólo resta ver que f preserva el producto, lo que, como en el Ejercicio 2.2.15 ii), podemos expresar en términos de la conmutatividad de un diagrama, que escribimos a continuación. Para abreviar notación, ponemos $\otimes = \otimes_k$. El diagrama cuya conmutatividad queremos probar es el formado por las flechas externas; su conmutatividad se sigue del Ejercicio 2.2.14 y del hecho de que los dos diagramas interiores conmutan a consecuencia de (2.4.2) y de que f_1 y f_2 son morfismos de álgebras.

$$\begin{tikzcd}
A \otimes B \otimes A \otimes B \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}"'] & S \otimes S \arrow[d, "\mu_S"] \\
A \otimes A \otimes B \otimes B \arrow[ur, "f_1 \otimes f_1 \otimes f_2 \otimes f_2"'] \arrow[d, "\mu_1 \otimes \mu_2"] & {} \\
A \otimes B \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

$\square$

Corolario 2.4.4. *Sean A y B como en la Proposición 2.4.1 y sea M un k-módulo. Entonces es equivalente dar a M una estructura de (A,B)-bimódulo o darle una de $A \otimes_k B^{\mathrm{op}}$-módulo a izquierda.*

Demostración. Por definición, una estructura de (A,B)-bimódulo en M consiste de morfismos de k-álgebras $\rho_1 : A \to \mathrm{End}_k(M) \leftarrow \rho_1 : B^{\mathrm{op}}$ de modo que $\rho_1(a)$ y $\rho_2(b)$ conmutan para todo $a \in A$, $b \in B$. Por la Proposición 2.4.1 esto es lo mismo que dar un morfismo de k-álgebras $A \otimes_k B^{\mathrm{op}} \to \mathrm{End}_k(M)$, lo que a su vez equivale a dar una estructura de $A \otimes_k B^{\mathrm{op}}$-módulo a izquierda en M. □

Ejercicio 2.4.5. Probar:

i) $(A \otimes_k B)^{\mathrm{op}} = A^{\mathrm{op}} \otimes_k B^{\mathrm{op}}$.

ii) $\tau : A \otimes B \to B \otimes A$, es un isomorfismo de k-álgebras.

Ejemplo 2.4.6. Sean X e Y conjuntos finitos. Entonces $k^X \otimes_k k^Y \to k^{X \times Y}$, $\chi_x \otimes \chi_y \mapsto \chi_{(x,y)}$ es un isomorfismo de k-álgebras. Por el Corolario 2.4.4, se sigue un (k^X, k^Y)-bimódulo es lo mismo que un $k^{X \times Y}$-módulo. Recuperamos así lo visto en la Sección 1.2.

Ahora que sabemos que un (A,B)-bimódulo es lo mismo que un $A \otimes_k B^{\mathrm{op}}$-módulo, podemos trasladar la notación, lenguaje, etc de módulos a la bimódulos. Por ejemplo un (A,B)-bimódulo es proyectivo si lo es como $A \otimes_k B^{\mathrm{op}}$-módulo.

Proposición 2.4.7. *Sean R, S, U k-álgebras, M un (R,R)-bimódulo y*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"'] & S \arrow[d, "q"] \\ T_R(M) \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, dotted, "f"] & U \end{tikzcd}$$

un diagrama conmutativo de morfismos de k-álgebras representados por flechas sólidas y sea M un (R,R)-bimódulo. Supongamos que M es proyectivo. Entonces existe una flecha punteada que es morfismo de k-álgebras y que hace conmutar el diagrama.

Demostración. Como el diagrama de flechas sólidas conmuta, la composición de por ambos caminos da el mismo morfismo de k-álgebras $j := q \circ g = h \circ p : R \to U$, que da a U una estructura de R-bimódulo. Del mismo modo, g hace de S un (R,R)-bimódulo y $q$es morfismo de (R,R)-bimódulos. Como M es proyectivo, existe un morfismo de R-bimódulos $f_1 : M \to S$ tal que $p \circ f_1$ es restricción a M de h. Por la Proposición 2.3.3 existe un único morfismo $f : T_R(M) \to S$ con $(f_0, f_1) = (g, f_1)$; es claro que f hace conmutar ambos triángulos del diagrama. □

Ejemplo 2.4.8. Sea X un conjunto finito y sea M un (k^X, k^X)-bimódulo. Se sigue del Ejemplo 2.4.6 y [11, Proposición 3.7.1] que M es proyectivo si y sólo si para cada $(x,y) \in X \times X$, $M_{x,y} = \chi_x M \chi_y$ es un k-módulo proyectivo. En particular, si E es un grafo con $E^0 = X$, entonces k^{E^1} es proyectivo como (k^X, k^X)-bimódulo. Luego por el Ejemplo 2.3.5 la Proposición 2.4.7 nos dice que si $R \twoheadrightarrow S$ es un morfismo de k-álgebras suryectivo y el siguiente diagrama de flechas sólidas (que representan morfismos de k-álgebras) conmuta, entonces existe el morfismo de k-álgebras representado por la flecha punteada y hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
k^{E^0} \arrow[r] & R \arrow[d, two heads] \\
P(E) \arrow[u, tail] \arrow[ur] \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

2.5. Producto tensorial y sucesiones exactas

Lema 2.5.1. *Sean R un anillo y*

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0 \tag{2.5.2}$$

una sucesión de morfismos de R-módulos. Son equivalentes

i) La sucesión (2.5.2) es exacta.

ii) Para todo R-módulo N, la sucesión de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M'', N) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(M, N) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(M', N)$$

es exacta.

Demostración. La implicación $\Rightarrow$ se sigue de [11, Lema 3.4.6 y Observación 3.4.7]. Supongamos entonces que ii) se verifica para todo N. Sea $Q'' = \mathrm{Coker}(g) = M''/\mathrm{Im}(g)$ y sea $\pi'' : M'' \to Q''$ la proyección al cociente. Entonces $g^*(\pi'') = \pi'' \circ g = 0$. Tomando $N = Q''$ en ii) obtenemos que $\pi'' = 0$, es decir que g es un epimorfismo. Tomando $N = M''$, vemos que $0 = f^*g^*(\mathrm{id}_{M''}) = g \circ f$ y por tanto $\mathrm{Im}(f) \subset ker(g)$. Sea ahora $\pi : M \to Q = \mathrm{Coker}(f)$ la proyección al cociente; tomando $N = Q$ en ii) vemos que $0 = \pi \circ f = f^*(\pi)$ y por tanto existe $h : M'' \to Q$ tal que $\pi = g^*(h) = h \circ g$. Luego $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(\pi) \supset \mathrm{Ker}(g)$. □

Ejercicio 2.5.3. Sean R un anillo y

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \tag{2.5.4}$$

una sucesión de morfismos de R-módulos. Probar que son equivalentes

i) La sucesión (2.5.4) es exacta.

ii) Para todo R-módulo N, la sucesión de grupos abelianos

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N, M') \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(N, M) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(N, M'')$$

es exacta.

Proposición 2.5.5 (Exactitud a derecha)**.** *Sean S una k-álgebra, N un S-módulo a izquierda y*

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta. Sea $\mathrm{id} = \mathrm{id}_N$*. Entonces la sucesión de k-módulos*

$$M' \otimes_S N \xrightarrow{f\otimes \mathrm{id}} M \otimes_S N \xrightarrow{g\otimes \mathrm{id}} M'' \otimes_S N \longrightarrow 0$$

es exacta.

Demostración. Para aliviar notación escribimos $\mathrm{Hom} = \mathrm{Hom}_k$. Por el Lema 2.5.1 basta probar que para todo k-módulo $\mathbb{V}$, la sucesión

$$\mathrm{Hom}(M' \otimes_S N, \mathbb{V}) \xleftarrow[(f\otimes \mathrm{id})^*]{} \mathrm{Hom}(M \otimes_S N, \mathbb{V}) \xleftarrow[(g\otimes \mathrm{id})^*]{} \mathrm{Hom}(M'' \otimes_S N, \mathbb{V}) \longleftarrow 0 \tag{2.5.6}$$

que resulta de aplicar $\mathrm{Hom}(-, \mathbb{V})$ a la segunda sucesión de la proposición, es exacta. Pero se sigue del Corolario 2.2.3 y del Ejercicio 2.2.10 que (2.5.6) es isomorfa a la sucesión

$$\mathrm{Hom}_S(M', \mathrm{Hom}(N, \mathbb{V})) \xleftarrow{f^*} \mathrm{Hom}_S(M, \mathrm{Hom}(N, \mathbb{V}))$$
$$\xleftarrow{g^*} \mathrm{Hom}_S(M'', \mathrm{Hom}(N, \mathbb{V})) \leftarrow 0$$

Esta sucesión es la que resulta de aplicar $\mathrm{Hom}_S(-, \mathrm{Hom}(M, \mathbb{V}))$ a la primera sucesión de la proposición. Es exacta pues Hom_S es exacto a izquierda [11, Lema 3.4.6]. □

Corolario 2.5.7. *Sea*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta escindida de R-módulos a derecha. Sea N un R-módulo a izquierda. Entonces la sucesión de k-módulos

$$0 \longrightarrow M' \otimes_R N \xrightarrow{f\otimes \mathrm{id}} M \otimes_R N \xrightarrow{g\otimes \mathrm{id}} M'' \otimes_R N \longrightarrow 0$$

es exacta escindida.

Demostración. Por la Proposición 2.5.5, la sucesión es exacta en $M \otimes_R N$ y en $M'' \otimes_R N$. Resta ver que $f \otimes \mathrm{id}_N$ tiene una inversa a izquierda k-lineal. Por hipótesis, existe $r \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$ tal que $r \circ f = \mathrm{id}_{M'}$. Entonces $\bar{r} = r \otimes_R \mathrm{id}_N$ es k-lineal y satisface $\bar{r} \circ (f \otimes \mathrm{id}_N) = \mathrm{id}_{M' \otimes_R N}$. □

Corolario 2.5.8. *Sean R una k-álgebra, $I \subset R$ un ideal a derecha y M un R-módulo a izquierda. Hay un isomorfismo canónico de k-módulos*

$$(R/I) \otimes M \cong M/IM$$

Demostración. Sean $\pi_1 : R \to R/I$ y $\pi_2 : M \to M/IM$ las proyecciones y sea $\phi : R/I \times M \to M/IM$, $\phi(\pi_1(a), m) = \pi_2(am)$. Es sencillo probar que ϕ está bien definida y que es bilineal. Vamos a probar que $\bar{\phi} : R/I \otimes_R M \to M/IM$ es un isomorfismo. Sea $\mu : R \times M \to M$, $\mu(a, m) = m$; denotemos por la misma letra su restricción a $I \times M \to M$. Sea $\iota : I \subset M$ la inclusión. Tenemos un diagrama conmutativo como sigue, donde la segunda fila es exacta por definición y la primera por la Proposición 2.5.5

$$\begin{tikzcd}
 & I \otimes_R M \arrow[r, "\iota\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\bar{\mu}"] & R \otimes_R M \arrow[r, "\pi_1\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\bar{\mu}"] & (R/I) \otimes_R M \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\phi}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & IM \arrow[r] & M \arrow[r, "\pi_2"] & M/IM \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{2.5.9}$$

Se sigue de la Proposición 2.2.1 y el Ejemplo 2.1.9 que la flecha vertical del medio es un isomorfismo. Es claro que la flecha vertical de la izquierda es suryectiva. Usando todo esto, un argumento de seguimiento del diagrama muestra que la flecha vertical de la derecha es un isomorfismo. □

Ejercicio 2.5.10. Dar otra demostración del Corolario 2.5.8, utilizando el Ejemplo 2.1.10, el Corolario 2.2.3 y el Lema 2.2.11.

Ejemplo 2.5.11 (No exactitud a izquierda)**.** Sea $f \in k$ un elemento que no sea ni inversible ni divisor de cero. Entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow k \xrightarrow{f} k \longrightarrow k/fk \longrightarrow 0$$

es exacta. Tensorizándola por k/fk y utilizando el Corolario 2.5.8 obtenemos la sucesión exacta

$$k/fk \xrightarrow{0} k/fk \xrightarrow{\mathrm{id}} k/fk \longrightarrow 0$$

Este ejemplo muestra que $\otimes$ no es exacto a izquierda.

Ejercicio 2.5.12. Sean R una k-álgebra y $I = (I, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado (*poset*). Decimos que I es *filtrante* si todo subconjunto finito de I tiene cota superior. Un *sistema filtrante* de R-módulos a derecha consiste de un poset filtrante I y una familia de morfismos de R-módulos a derecha $\{\sigma_{i,j} : M_i \to M_j\}$ indexada por todos los pares $(i, j) \in I^2$ con $i \leq j$ que satisface

$$\sigma_{i,i} = \mathrm{id}_{M_i}, \ \sigma_{j,k} \circ \sigma_{i,j} = \sigma_{i,k} \ \forall i \leq j \leq k.$$

El *colímite* del sistema filrante es

$$\operatorname*{colim}_I M_i = (\bigoplus_{i\in I} M_i)/\langle x - \sigma_{i,j}(x) : x \in M_i,\, i \leq j \in I\rangle.$$

Para cada $j \in I$, sea $\sigma_j : M_i \to \operatorname{colim}_I M_i$ la composición de la inclusión canónica $M_j \to \bigoplus_{i\in I} M_i$ con la proyección al cociente.

Probar

i) $\sigma_j\sigma_{i,j} = \sigma_i \ \forall i \leq j$.

ii) Sean N un R-módulo a derecha y sea $\{f_i : M_i \to N | i \in I\}$ una familia de morfismos tal que $f_j \sigma_{i,j} = f_i \; \forall i \leq j$. Probar que existe un único morfismo de R-módulos $f : \operatorname{colim}_I M_i \to N$ tal que $\forall i \in I$, $f\sigma_i = f_i$.

iii) Sea $\check{N}$ un R-módulo a izquierda. Probar que el morfismo natural de k-módulos

$$(\operatorname*{colim}_I M_i) \otimes_R \check{N} \to \operatorname*{colim}_I (M_i \otimes \check{N})$$

es un isomorfismo.

2.6. Módulos playos

Sean R una k-álgebra y P un R-módulo a izquierda. Decimos que P es *playo* si $\otimes_R P$ preserva monomorfismos.

Proposición 2.6.1. *Sean R una k-álgebra y P un R-módulo a izquierda. Son equivalentes*

i) P es playo. '

ii) Para todo k-módulo $\mathbb{V}$, el R-módulo a derecha $Q = \operatorname{Hom}(P, \mathbb{V})$ es inyectivo.

iii) Para todo ideal a derecha $I \subset R$, el morfismo $I \otimes_R P \to IP$, $x \otimes p \to xp$ es inyectivo.

Demostración. Por la Proposición 2.5.5, P es playo si y sólo si, para toda sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0, \tag{2.6.2}$$

la sucesión

$$0 \longrightarrow M' \otimes_R P \xrightarrow{f} M \otimes_R P \xrightarrow{g} M'' \otimes_R P \tag{2.6.3}$$

es exacta. Por el Lema 2.5.1, esto sucede si y sólo si para todo k-módulo $\mathbb{V}$, la sucesión

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}(M'' \otimes_R P, \mathbb{V}) \xrightarrow{(g\otimes \mathrm{id})^*} \operatorname{Hom}(M \otimes_R P, \mathbb{V}) \xrightarrow{(f\otimes \mathrm{id})^*} \operatorname{Hom}(M' \otimes_R P, \mathbb{V}) \tag{2.6.4}$$

es exacta. Sea $Q = \operatorname{Hom}(P, \mathbb{V})$; por el Corolario 2.2.3, la sucesión (2.6.4) es isomorfa a la siguiente

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M'', Q) \xrightarrow{g^*} \operatorname{Hom}_R(M, Q) \xrightarrow{f^*} \operatorname{Hom}_R(M', Q) \tag{2.6.5}$$

Que (2.6.5) sea exacta para toda sucesión (2.6.2) equivale a que Q sea inyectivo [11, Sección 3.8]. Esto prueba que i) y ii) son equivalentes. Supongamos que P es playo. Entonces el morfismo $I \otimes_R P \to R \otimes_R P$ es inyectivo. Se sigue del diagrama (2.5.9) que $I \otimes_R P \to IP$ también es inyectiva. Supongamos ahora que P satisface iii). Entonces, por la Proposición 2.5.5, para todo ideal a derecha $I \subset R$, la siguiente sucesión de k-módulos es exacta

$$0 \longrightarrow I \otimes_R P \longrightarrow R \otimes_R P \longrightarrow (R/I) \otimes_R P \longrightarrow 0$$

Luego si $\mathbb{V}$ es un k-módulo y $Q = \mathrm{Hom}(P, \mathbb{V})$,

$$0 \longleftarrow \mathrm{Hom}_R(I, Q) \longleftarrow \mathrm{Hom}_R(R, Q) \longleftarrow \mathrm{Hom}_R(R/I, Q) \longleftarrow 0$$

es exacta, por el argumento de arriba. Por el Teorema de Baer [11, Teorema 3.8.9], esto implica que Q es inyectivo. Probamos así que iii)⇒ii). Esto termina la demostración. □

Ejemplo 2.6.6. Todo módulo libre es playo. Esto se sigue del caso $I = 0$ del Corolario 2.5.8, la Proposición 2.2.16 y el hecho de que la suma directa de sucesiones exactas es una sucesión exacta.

Ejemplo 2.6.7. Sean R un anillo conmutativo y $f \in R[x]$ un polinomio mónico de grado $n \geq 1$. Entonces $S = R[x]/fR[x]$ es un libre como R-módulo, con base $\{1 = x^0, \ldots, x^{n-1}\}$. En particular, S es playo sobre R.

Ejercicio 2.6.8. Probar que todo módulo proyectivo es playo.

Ejercicio 2.6.9. Sean R un dominio de ideales principales y M un R-módulo. Probar que M es playo si y sólo si es libre de torsión.

Ejercicio 2.6.10. Sea
$$0 \to K \to F \to P \to 0$$
una sucesión exacta de R módulos a derecha con F libre. Probar que son equivalentes:

i) P es playo.

ii) Para todo a izquierda $I \subset R$, se tiene $K \cap (F \cdot I) \subset K \cdot I$.

Sea $I \subset R$ un ideal a izquierda. Probar que $IF \cap K = IK$.

El siguiente lema y la siguiente proposición fueron extraídos de [10, Proposition 2.1 y 2.2].

Lema 2.6.11. *Sean R un anillo, X un conjunto, y*

$$0 \to K \to R_R^{(X)} \to P \to 0 \tag{2.6.12}$$

una sucesión exacta. Para cada $\phi \in R^{(X)}$ sea $I(\phi) = \sum_{x \in X} R\phi(x)$. Son equivalentes

i) P es playo.

ii) $\forall \phi \in K$, $\phi \in K \cdot I(\phi)$.

Demostración. Sea $F = R^{(X)}$. Notemos que, para todo $\phi \in F$, $\phi \in I(\phi)^{(X)} = F \cdot I$. Luego si P es playo y $\phi \in K$, $\phi \in K \cap F \cdot I = K \cdot I$, por el Ejercicio 2.6.10. Recíprocamente, supongamos que vale ii). Sea $I \subset R$ un ideal a izquierda. Sea $\phi \in K \cap (F \cdot I)$; entonces $\phi(x) \in I \ \forall x \in X$, y por tanto $I(\phi) \subset I$. Luego $K \cdot I(\phi) \subset K \cdot I$; en particular, $\phi \in K \cdot I$. Se sigue que $(F \cdot I) \cap K \subset K \cdot I$ y por tanto P es playo por el Ejercicio 2.6.10. □

Proposición 2.6.13 (Villamayor). *Sean R un anillo, P un R-módulo a derecha, y (2.6.12) una sucesión exacta. Son equivalentes*

i) P es playo.

ii) Para cada elemento $\phi \in K$ existe un morfismo R-lineal $f : R^{(X)} \to K$ tal que $f(\phi) = \phi$.

iii) Para cada submódulo $K_0 \subset K$ finitamente generado existe un morfismo R-lineal $f : R^{(X)} \to K_0$ tal que $f(\phi) = \phi\ \forall \phi \in K$.

Demostración. i)⇒ii): por el Lema 2.6.11, $\phi \in KI(\phi)$. Luego si $F = \mathrm{sop}(\phi)$, existen $\psi^x \in K$ ($x \in F$) tales que $\phi = \sum_{x \in F} \psi^x \phi(x)$. Entonces el morfismo $f : R^{(X)} \to K$, $f(\chi_y) = \psi^y$ si $y \in F$ y 0 si $y \notin F$ satisface ii). ii)⇒ i): sea $\phi \in K$ y sea f como en ii). Entonces $\phi = f(\phi) = \sum_{x \in X} f(\chi_x)\phi(x) \in KI(\phi)$. Luego P es playo por el Lema 2.6.11. ii)⇒iii): Sea $\phi_1, \dots, \phi_n \in K_0$ un sistema de generadores. Si $n = 1$, f existe por ii). Sea $n > 1$, sea $K_0 = \sum_{i=1}^n R\phi_i$ y supongamos que iii) se satisface para todo submódulo generado por $< n$ elementos. Sea $f_n : R^{(X)} \to K$ tal que $f_n(\phi_n) = 1$. Sea $\mathrm{id} = \mathrm{id}_{R^{(X)}}$ y sea $K_1 = (\mathrm{id} - f_n)(K_0)$. Entonces $\{\phi_i - f_n(\phi_i) : 1 \le i \le n-1\}$ genera K_1. Luego por hipótesis inductiva existe $f' : R^{(X)} \to K$ tal que $f'(\psi) = \psi$ para todo $\psi \in K_1$. Entonces $f : R^{(X)} \to K$, $f = \mathrm{id} - (\mathrm{id} - f')(\mathrm{id} - f_n)$ cumple lo pedido. iii)⇒i). Sean $\phi \in K$ y $f : R^{(X)} \to K$ tal que $f(\phi) = \phi$. Sea $F = \mathrm{sop}(f)$; entonces $\phi = \sum_{x \in F} \chi_x \phi(x)$ y por tanto $\phi = \sum_{x \in F} f(\chi_x)\phi(x) \in K \cdot I(\phi)$. Luego P es playo por el Lema 2.6.11. □

Sea P un R-módulo a derecha P. Decimos que P es *finitamente relacionado* si existe una sucesión exacta (2.6.12) con K finitamente generado y que es *finitamente presentado* si existe una sucesión exacta (2.6.12) con K finitamente generado y X finito.

Corolario 2.6.14. *Un R-módulo finitamente relacionado es playo si y sólo si es proyectivo.*

Ejercicio 2.6.15. Sea M un R-módulo a derecha finitamente relacionado. Probar que existen submódulos $M_0, M_1 \subset M$ tales que M_0 es finitamente presentado, M_1 es libre y $M = M_0 \oplus M_1$.

Corolario 2.6.16. *Si R es noetheriano, todo R-módulo playo finitamente generado es proyectivo.*

Ejercicio 2.6.17. Sean I un poset filtrante, R un anillo, $M' = \{M'_i\}$, M y M'' sistemas filtrantes de R-módulos indexados por I, y $f_i : M'_i \to M_i$, $g_i : M_i \to M''_i$ ($i \in I$) familias de morfismos tales que para todo $i \le j$, $f_j \sigma'_{i,j} = \sigma_{i,j} f_i$ y $g_j \sigma_{i,j} = \sigma''_{i,j} g_i$ y que para todo i la sucesión

$$0 \to M'_i \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{g_i} M''_i \to 0$$

es exacta. Sean $M' = \mathrm{colim}_I M'_i$, $M = \mathrm{colim}_I M_i$ y $M'' = \mathrm{colim}_I M''_i$, y sean $f : M' \to M$ y $g : M \to M''$ los morfismos inducidos por las familias $\{f_i\}$ y $\{g_i\}$. Probar que la sucesión

$$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$$

es exacta.

Ejercicio 2.6.18. Sean R una k-álgebra, $\{P_i : i \in I\}$ una sistema filtrante de R-módulos playos. Probar que $\mathrm{colim}_I P_i$ es playo.

2.7. Extensión de escalares

Sea $\phi : R \to S$ un morfismo de álgebras y sea M un R-módulo a derecha. Usamos ϕ para ver a S como (R, S) bimódulo y formamos el producto tensorial $M \otimes_R S$; el resultado as un S-módulo a derecha. Si N es otro R-módulo a derecha y $f : M \to N$ es un morfismo de R-módulos, $f \otimes \mathrm{id}_S : M \otimes_R S \to N \otimes_R S$ es morfismo de S-módulos a derecha. La asignación $M \mapsto M \otimes_R S$, $f \mapsto f \otimes \mathrm{id}_S$ es la *extensión de escalares* a lo largo de ϕ. La asignación que asocia a cada S-módulo a derecha P el mismo grupo abeliano visto como R-módulo a través de ϕ y a cada morfismo S-lineal $f : P \to Q$ la misma función, vista como morfismo de R-módulos es la *restricción* a lo largo de ϕ.

Proposición 2.7.1. *Sean $\phi : R \to S$ un morfismo de álgebras, M un R-módulo a derecha y N un S-módulo a derecha. Hay un isomorfismo natural*

$$\hom_R(M, N) \xrightarrow{\sim} hom_S(M \otimes_R S, N), \ \phi \mapsto (m \otimes s \mapsto \phi(m)s) \tag{2.7.2}$$

Demostración. Consideremos el isomorfismo canónico de S-módulos

$$\mathrm{ev} : \hom_S(S, N) \to N, \ \mathrm{ev}(f) = f(1).$$

Componiendo el isomorfismo (2.2.4) con ev obtenemos un isomorfismo

$$hom_S(M \otimes_R S, N) \to \hom_R(M, N), \ f \mapsto (x \mapsto f(x \otimes 1)). \tag{2.7.3}$$

Es sencillo verificar que (2.7.2) y (2.7.3) son isomorfismos inversos. □

Proposición 2.7.4. *Sean $\phi : R \to S$ un morfismo de álgebras y M un R-módulo. Si M es finitamente generado, o libre, o proyectivo, o playo como R-módulo, entonces $M \otimes_R S$ tiene la misma propiedad como S-módulo.*

Demostración. Sea X un conjunto; entonces $R^{(X)} \otimes_R S = (R \otimes_R S)^{(X)} = S^{(X)}$. Luego $\otimes_R S$ manda módulos libres en módulos libres. Si L es un R-módulo libre y $M \oplus N \cong L$ entonces $M \otimes_R S \oplus N \otimes_R S = L \otimes_R S$ es libre; por tanto $\otimes_R S$ preserva módulos proyectivos. Si M es un R-módulo a derecha finitamente generado, entonces hay un $n \geq 1$ y un morfismo suryectivo $R^n \twoheadrightarrow M$; tensorizando obtenemos un morfismo suryectivo $S^n \twoheadrightarrow M \otimes_R S$; por tanto $\otimes_R S$ preserva generación finita. Finalmente recordemos que para todo S-módulo a izquierda P, tenemos un isomorfismo natural $S \otimes_S P \cong P$. Usándolo, y usando también asociatividad de $\otimes$, obtenemos un isomorfismo natural $(M \otimes_R S) \otimes_S P \cong M \otimes_R P$. Se sigue que $M \otimes_R S$ es playo si M lo es. □

Observación 2.7.5. Sean ϕ y M como en la Proposición 2.7.4. Supongamos que M es proyectivo finitamente generado. Entonces existen $n \geq 1$ $p = p^2 \in M_n R$ tales que $M \cong \mathrm{Im}(p)$. Luego $M \otimes_R S \cong \mathrm{Im}(p) \otimes_R S$. Además, como p es la composición de una retracción (la correstricción de p a su imagen) seguida de una sección (la inclusión de $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(1 - p)$ en R^n), $\mathrm{Im}(p) \otimes_R S = \mathrm{Im}(p \otimes \mathrm{id}_S)$. Observemos que, dado que vemos a S como R-módulo a izquierda a través de ϕ, el isomorfismo canónico $R \otimes_R S \cong S$ envía $x \otimes 1 \mapsto \phi(x)$. Usando esto obtenemos que la matriz de $p \otimes \mathrm{id}_S : S^n \to S^n$ en la base canónica es la matriz $\phi(p)$ que resulta de aplicar ϕ a p coeficiente a coeficiente. Análogamente se sigue que si $q \in M_m R$ es otra matriz idempotente, $f : \mathrm{Im}(p) \to \mathrm{Im}(q)$

es morfismo de R-módulos, $\mathrm{inc} : \mathrm{Im}(q) \subset R^m$ es la inclusión y $A \in R^{m\times n}$ es la matriz de $\mathrm{inc} \circ f \circ p$ en las bases canónicas, entonces $\phi(A) \in S^{m\times n}$ es la matriz de $\mathrm{inc} \circ (f \otimes \mathrm{id}_S) \circ \phi(p)$ en las bases canónicas.

Capítulo 3

Propiedades de levantamiento

Este capítulo está basado principalmente en algunos resultados del artículo [14].

3.1. Módulos proyectivos y conexiones

Sean R una k-álgebra; el *álgebra envolvente* de R es $R^e := R \otimes_k R^{\text{op}}$; por el Corolario 2.4.4, un R-bimódulo es lo mismo que un R^e-módulo a izquierda.

Sea

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0 \tag{3.1.1}$$

una sucesión exacta de R-bimódulos. Decimos que la sucesión (3.1.1) es *semi-escindida* si es escindida como sucesión de k-módulos, es decir, si existe $s \in \operatorname{Hom}_k(M'', M)$ tal que $g \circ s = \mathrm{id}_{M''}$. Un R-bimódulo P se dice *relativamente proyectivo* si $\operatorname{Hom}_{R^e}(P, -)$ envía sucesiones exactas semi-escindidas en sucesiones exactas.

Sean R una k-álgebra,

$$\mu : R \otimes_k R \to R,\ \ \mu(x \otimes y) = xy, \qquad \Omega^1(R) = \Omega(R/k) := \operatorname{Ker}(\mu).$$

Observemos que μ es un morfismo de R-bimódulos, y por tanto $\Omega^1(R)$ es un R-bimódulo. Por definición, tenemos una sucesión eacta

$$0 \longrightarrow \Omega^1(R) \xrightarrow{f} R \otimes_k R \xrightarrow{g} R \longrightarrow 0 \tag{3.1.2}$$

Sean $s_0, s_1 : R \to R \otimes_k R$, $s_0(a) = 1 \otimes a$ y $s_1(a) = a \otimes 1$; s_0 es morfismo de R-módulos a derecha, s_1 es morfismo de R-módulos a izquierda, y $\mu s_0 = \mu s_1 = \mathrm{id}_R$. En particular, si N es un R-bimódulo, tensorizando (3.1.2) a izquierda con N obtenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow N \otimes_R \Omega^1(R) \longrightarrow N \otimes_k R \xrightarrow{\mu_r} N \longrightarrow 0 \tag{3.1.3}$$

Aquí $\mu_r : N \otimes_k R \to N$, $\mu_r(x \otimes a) = x \cdot a$, tiene inversa a derecha s_1 que manda $n_\shortmid \to n \otimes 1$, que es morfismo de R-módulos a izquierda. Análogamente

$$0 \longrightarrow \Omega^1(R) \otimes_R N \longrightarrow R \otimes_k N \xrightarrow{\mu_l} N \longrightarrow 0 \tag{3.1.4}$$

es una sucesión exacta de R-bimódulos y $s_0 : n \to 1 \otimes n$ la escinde como sucesión de R-módulos a derecha Sea

$$d := s_0 - s_1 : R \to \Omega^1(R),\ d(a) = 1 \otimes a - a \otimes 1.$$

Observemos que d es k-lineal y satisface

$$d(ab) = d(a)b + ad(b)\ \ (a, b \in R). \tag{3.1.5}$$

En particular,

$$d(1) = d(1 \cdot 1) = d(1) + d(1) \Rightarrow d(1) = 0 \Rightarrow d(k \cdot 1) = 0.$$

Sea

$$\bar{R} = \mathrm{Coker}(k \to R).$$

Tenemos un morfismo natural de R-bimódulos a izquierda

$$R \otimes_k \bar{R} \to \Omega^1(R), a \otimes \bar{b} \mapsto ad(b). \tag{3.1.6}$$

Lema 3.1.7. *El morfismo (3.1.6) es biyectivo.*

Demostración. Sea $p = \mathrm{id}_{R\otimes_k R} - s_1\mu$; como $\mu \circ s_1 = \mathrm{id}_R$, $\Omega^1(R) = \mathrm{Im}(p)$. Pero $\xi \in \mathrm{Ker}(p) \iff \xi = s(\mu(\xi)) \iff x \in \mathrm{Im} s_1$. □

A través del isomorfismo del Lema 3.1.7, d se identifica con $x \mapsto 1 \otimes \bar{x} \in R \otimes_k \bar{R}$. La estructura de R-módulo a derecha en $R \otimes_k \bar{R}$ es la dada por la fórmula (3.1.5). También se sigue del lema que si M es un R-módulo a derecha, entonces

$$M \otimes_R \Omega^1(R) \cong M \otimes_k \bar{R} = M \otimes_k d(R).$$

Análogamente, $\Omega^1(R) \cong \bar{R} \otimes_k R$ y $\Omega^1(R) \otimes_R N = d(R) \otimes_k N$ para todo R-módulo a izquierda N.

Sea M un R-bimódulo. Una *derivación* $D : R \to M$ es una función k-lineal que satisface la *regla de Leibniz*

$$D(ab) = D(a)b + aD(b).$$

Por ejemplo $d : R \to \Omega^1(R)$ es una derivación. Además d es universal, como lo muestra el siguiente lema.

Lema 3.1.8. *Sean R una k-álgebra, M un R-bimódulo y $D : R \to M$ una derivación. Entonces existe un único morfismo de R-bimódulos $\bar{D} : \Omega^1(R) \to M$ tal que $D = \bar{D} \circ d$.*

Demostración. Sea $\phi : {}_R R \times \bar{R} \to {}_R M$, $\phi(a, \bar{b}) = aDb$. Como ϕ es bilineal, existe un único morfismo de R-módulos a izquierda $\bar{D} : \Omega^1(R) = R \otimes_k \bar{R} \to M$ tal que $\bar{D}(xdy) = xDy$. Además

$$\bar{D}((xdy)z) = \bar{D}(xd(yz) - xydz) = xD(yz) - xyDz = (xDy)z = \bar{D}(xdy)z.$$

□

Ejercicio 3.1.9. Sea $\Omega(R) = T_R(\Omega^1(R))$; sea $\Omega^n(R) = T_R^n(\Omega^1(R))$. Escribimos

$$a_0 da_1 \cdots da_n := a_0 da_1 \otimes \cdots \otimes da_n$$

i) Probar que para todo $n \geq 0$, la función

$$R \otimes_k \bar{R}^{\otimes_k n} \to \Omega^n(R), \; a_0 \otimes \bar{a}_1 \otimes \ldots \bar{a}_n \mapsto a_0 da_1 \cdots da_n$$

es un isomorfismo de R-módulos a izquierda.

ii) Sea

$$d : \Omega^*(R) \to \Omega^{*+1}(R), \; d(a_0 da_1 \cdots da_n) = da_0 \cdots da_n$$

Probar que si $\omega \in \Omega^n(R)$ y $\eta \in \Omega(R)$ entonces

$$d(\omega\eta) = d(\omega)\eta + (-1)^n \omega d(\eta).$$

Una *conexión a derecha* en un R-bimódulo N es una función $\nabla_r : N \to N \otimes_R \Omega^1(R)$ tal que para todo $a \in R$ y $x \in N$ se tiene

$$\nabla_r(a \cdot x) = a \cdot \nabla_r(x), \; \nabla_r(x \cdot a) = \nabla_r(x) \cdot a + x \otimes da.$$

Una *conexión a izquierda* es una función $\nabla_l : N \to \Omega^1(R) \otimes_R N$ tal que

$$\nabla_l(x \cdot a) = \nabla_l(x) \cdot a, \; \nabla_l(a \cdot x) = a \cdot \nabla_l(x) + da \otimes x.$$

Una *conexión* en N es un par (∇_l, ∇_r) con ∇_l conexión a izquierda y ∇_r conexión a derecha en N.

Ejercicio 3.1.10. Sean R una k-álgebra y $\nabla : \Omega^1(R) \to \Omega^1(R) \otimes_R \Omega^1(R) = \Omega^2(R)$. Probar que ∇ es conexión a derecha si, y sólo si, $\nabla + d$ es conexión a izquierda.

Lema 3.1.11. *Sean R una k-álgebra y N un R-bimódulo. Son equivalentes*

i) N es proyectivo relativo.

ii) Existe un morfismo de R-bimódulos $\sigma : N \to R \otimes_k N \otimes_k R$ tal que $\mu_l \circ (\mathrm{id} \otimes \mu_r) \circ f = \mathrm{id}_N$.

iii) N admite una conexión (∇_l, ∇_r).

Demostración. Que i)⇒ii) es claro de la definición de proyectivo relativo. Veamos la recíproca. Sea (3.1.1) una sucesión de R-bimódulos semi-escindida y sea $\rho : M'' \to M$ un morfismo k-lineal tal que $g \circ \rho = \mathrm{id}_{M''}$. Dado $f \in \mathrm{Hom}_{R^e}(N, M'')$, sea $\tilde{f} : R \otimes_N \otimes_k R \to M$, $\tilde{f}(a \otimes x \otimes b) = a \cdot \rho(x) \cdot b$, y sea $\hat{f} = \tilde{f} \circ \sigma : N \to M$. Entonces $g \circ \hat{f} = f$. Luego ii)⇒i). Veamos ahora que i)⇒iii). Si N es proyectivo, las sucesiones (3.1.3) y (3.1.4) se parten; luego existen morfismos de bimódulos $\sigma_r : N \to N \otimes_k R$ y $\sigma_l : N \to R \otimes_k N$ tales que $\mu_r \circ \sigma_r = \mu_l \circ \sigma_l = \mathrm{id}_N$. Es sencillo verificar que $\nabla_r = \sigma_r - s_1$ y $\nabla_l = \sigma_l - s_0$ son conexiones a izquierda y a derecha, respectivamente. Resta ver que iii)⇒ii). Dados ∇_l y ∇_r sean $\sigma_l = s_0 + \nabla_l$ y $\sigma_r = s_1 + \nabla_r$. Un cálculo sencillo muestra que σ_l y σ_r son morfismos de R-bimódulos que escinden respectivamente a (3.1.4) y (3.1.3). Se sigue que $\sigma = (\sigma_r \otimes \mathrm{id}_N) \circ \sigma_l$ cumple ii). □

Ejercicio 3.1.12. Sean R una k-álgebra y P un R-módulo a derecha. Una *conexión* en P es un morfismo k-lineal $P \to P \otimes_R \Omega^1(R)$ tal que $\nabla(p \cdot a) = \nabla(p) \cdot a + p \otimes da$ para todo $p \in P$ y $a \in R$. Probar que P admite una conexión si y sólo si $\mathrm{Hom}_R(P, -)$ preserva sucesiones exactas de R-módulos a izquierda que son escindidas como sucesiones de k-módulos.

Sea $p : \mathcal{E} \twoheadrightarrow S$ un morfismo suryectivo de k-álgebras y sea $I = \mathrm{Ker}(p)$. Decimos que p es una *extensión* si existe un morfismo de k-módulos $\sigma : S \to \mathcal{E}$ tal que $p \circ \sigma = \mathrm{id}_S$.

Ejercicio 3.1.13. Sean R una k-álgebra y P un R-bimódulo relativamente proyectivo. Probar que el álgebra tensorial $T_R(P)$ tiene la propiedad de levantamiento de la Proposición 2.4.7 para toda extensión $q : S \to U$.

3.2. Álgebras separables y casi-libres

Una extensión p se dice *nilpotente* si existe $n \geq 1$ tal que $I^n = 0$; si esto ocurre con $n = 2$, decimos que p es una extensión *de cuadrado cero*.

Sea R una k-álgebra. Decimos que R es *casi libre* si para todo morfismo $f : R \to S$ y toda extensión de cuadrado cero $p : \mathcal{E} \twoheadrightarrow S$ existe un morfismo $\hat{f} : R \to \mathcal{E}$ tal que $p \circ \hat{f} = f$. El morfismo $\hat{f}$ se llama un *levantamiento* de f a lo largo de p. En términos de diagramas:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{E} \arrow[d, "p"] \\ R \arrow[ur, dotted, "\hat{f}"] \arrow[r, "f"'] & S \end{tikzcd} \tag{3.2.1}$$

Decimos que la k-álgebra R es *separable* si es casi-libre y si para cada par f y p como en (3.2.1) y cada par de levantamientos $\hat{f}, \hat{f}'$ de f, existe $x \in \mathrm{Ker}(p)$ tal que $\hat{f}'(a) = \hat{f}(a) + [\hat{f}(a), x]$. Aquí $[x, y] = xy - yx$.

Ejemplo 3.2.2. Sean R una k-álgebra y P un R-bimódulo. Si R es casi-libre y P es relativamente proyectivo, entonces $T_R(P)$ es casi-libre, por la Proposición 2.4.7.

Ejercicio 3.2.3. i) Probar que R es casi libre si y sólo si $\hat{f}$ existe en todo diagrama (3.2.1) donde p es nilpotente y para $I = \mathrm{Ker}(p)$ se tiene que para todo n, $\mathcal{E}/I^{n+1} \to \mathcal{E}/I^n$ es una extensión.

ii) Probar que una k-álgebra R es separable si y sólo si es casi libre y para cada diagrama (3.2.1) con p e I como en i) y cada par $\hat{f}$, $\hat{f}'$ de levantamientos de f existe $u \in \mathcal{E}^*$ tal que $p(u) = 1$ y tal que para todo $a \in R$, $\hat{f}'(a) = \mathrm{ad}(u)((\hat{f})(a)) = u\hat{f}(a)u^{-1}$.

Ejercicio 3.2.4. Sea R una k-álgebra y sea $\mathcal{U} = R \oplus \Omega^2(R)$ equipado con el siguiente producto

$$(a + \omega)(b + \eta) = ab + \omega \cdot b + a \cdot \eta + dadb.$$

i) Probar que el producto definido arriba es asociativo y hace de $\mathcal{U}$ una k-álgebra de modo que la proyección sobre el primer sumando $\pi : \mathcal{U} \to R$ es una extensión de cuadrado cero.

ii) Sean $p : \mathcal{E} \to R$ una extensión de cuadrado cero y $\rho : R \to \mathcal{E}$ es una sección k-lineal de p. Sea

$$f : \mathcal{U} \mapsto \mathcal{E}, \ f(a + x_0 dx_1 dx_2) = \rho(a) + \rho(x_0)(\rho(x_1)\rho(x_2) - \rho(x_1 x_2))$$

Probar que f es un morfismo de k-álgebras que satisface $p \circ f = \pi$.

iii) R es casi-libre si y sólo si existe un morfismo de k-álgebras $\sigma : R \to \mathcal{U}$ tal que $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_R$.

Teorema 3.2.5. *Sea R una k-álgebra. Entonces R es casi-libre si y sólo si el bimódulo $\Omega^1(R)$ relativamente proyectivo.*

Demostración. Supongamos que R es casi-libre. Sea $\sigma : R \to \mathcal{U}$ como en el Ejercicio 3.2.4, iii). Entonces $\sigma(a) = a + \phi(a)$, con ϕ k-lineal, y de la identidad $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$ obtenemos

$$dadb = a\phi(b) - \phi(ab) + \phi(a)b. \tag{3.2.6}$$

Sea $\nabla_r : \Omega^1(R) \to \Omega^1(R) \otimes_R \Omega^1(R) = \Omega^2(R)$, $\nabla_r(adb) = a\phi(b)$. Por definición, ∇_r es morfismo de R-módulos a izquierda. Además se sigue de (3.2.6) que

$$\begin{aligned}\nabla_r((a_0da_1)a_2) =& \nabla_r(a_0d(a_1a_2)) - \nabla_r(a_0a_1d(a_2))\\ =& a_0(\phi(a_1a_2) - a_1\phi(a_2))\\ =& a_0\phi(a_1)a_2 + a_0da_1da_2 = \nabla_r(a_0da_1)a_2 + (a_0da_1)da_2\end{aligned}$$

Luego ∇_r es una conexión a derecha. Por el Ejercicio 3.1.10, $\nabla_l = \nabla_r + d$ es conexión a izquierda. Luego $\Omega^1(R)$ es relativamente proyectivo, por el Lema 3.1.11. Recíprocamente, supongamos que $\Omega^1(R)$ es relativamente proyectivo. Entonces existe una conexión a derecha $\nabla_r : \Omega^1(R) \to \Omega^2(R)$; un cálculo sencillo muestra que $\phi := \nabla_r \circ d : R \to \Omega^2(R)$ cumple (3.2.6), y por tanto $\sigma : R \to \mathcal{U}$, $\sigma(a) = a + \phi(a)$ es como en el Ejercicio 3.2.4; luego R es casi-libre. Esto termina la demostración. $\square$

Teorema 3.2.7. *Sea R una k-álgebra. R es separable si y sólo si ${}_RR_R$ es proyectivo.*

Demostración. Supongamos que R es separable. Sea $\mathcal{V} = R \oplus \Omega^1(R)$ con el siguiente producto

$$(a + \omega)(b + \eta) = ab + \omega \cdot b + a \cdot \eta.$$

Notemos que $\mathcal{V}$ es una k-álgebra, que la proyección $\pi : \mathcal{V} \to R$ es morfismo de k-álgebras lo mismo que $\sigma_0, \sigma_1 : R \to \mathcal{V}$, $\sigma_0(a) = a$, $\sigma_1(a) = a + da$ y que $\pi\sigma_i = \mathrm{id}_R$ $(i = 0, 1)$. Como R es separable, existe $x \in \Omega^1(R)$ tal que $\sigma_1(a) = \sigma_0(a) + [\sigma_0(a), x]$, de lo que se sigue que $d(a) = [a, x]$. Sea $s : R \to R \otimes_k R$, $s(a) = a \otimes 1 + ax$. Es claro que $\mu \circ s = \mathrm{id}_R$ y que s es morfismo de R-módulos a izquierda. Además,

$$\begin{aligned}s(ab) =& ab \otimes 1 + abx = ab \otimes 1 + adb + axb\\ =& ab \otimes 1 + a \otimes b - ab \otimes 1 + axb = (a \otimes 1 + ax)b = s(a)b.\end{aligned}$$

Luego s es morfismo de bimódulos lo que implica que ${}_RR_R$ es sumando directo de $R \otimes_k R$ y por tanto es proyectivo. Recíprocamente supongamos que ${}_RR_R$ es proyectivo. Entonces $\Omega^1(R)$ es proyectivo y por tanto R es casi-libre, por el Teorema 3.2.5. Sea $s : {}_RR_R \to R \otimes_k R$ un morfismo de R-bimódulos tal que $\mu \circ s = \mathrm{id}_R$. Sea $e = s(1)$; notemos que si $a \in R$, $ae = s(a) = ea$. Luego para $x = e - 1 \otimes 1$ y $a \in R$, tenemos

$$[a, x] = ax - xa = a(e - 1 \otimes 1) - (e - 1 \otimes 1)a = [a, e] - [a, 1 \otimes 1] = d(a).$$

Sean ahora $p : \mathcal{E} \to R$ una extensión de cuadrado cero y sean $\hat{f}$ y $\hat{f}'$ son dos levantamientos de f en el diagrama (3.2.1). Un cálculo sencillo muestra que $D = \hat{f}' - \hat{f} : R \to I := \operatorname{Ker}(p)$ es una derivación; luego por el Lema 3.1.8, existe un morfismo de R-bimódulos $\bar{D} : \Omega^1(R) \to I$ tal que $D = \bar{D} \circ d$. Sea $y = \bar{D}(x)$; entonces para todo $a \in R$, $D(a) = \bar{D}(d(a)) = \bar{D}([a,x]) = [a,y]$. □

Corolario 3.2.8. *R es separable si y sólo si existe un elemento $p \in R^e$ tal que $\mu(p) = 1$ y $(dx)p = 0$ para todo $x \in R$.*

Demostración. Dado que μ es la proyección al cociente $R = R^e/\Omega^1(R)$ y que $\mu(1 \otimes 1) = 1$, dar una sección de μ que sea morfismo de R-bimódulos equivale a dar un elemento $p \in R^e$ tal que $\mu(p) = 1$ y $a \mapsto ap$ sea morfismo de bimódulos, es decir,

$$\omega \cdot p = 0 \ \forall \omega \in \Omega^1(R). \tag{3.2.9}$$

Por el Lema 3.1.7, (3.2.9) se reduce a pedir que $dx \cdot p = 0$ para todo $x \in R$. □

Observación 3.2.10. Sea $p = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$ como en el Corolario 3.2.8. Entonces en R^e, $(a \otimes b)p = ((ab) \otimes 1)p$. En particular, p es idempotente:

$$pp = \mu(p)p = p.$$

Ejemplo 3.2.11. Sea X un conjunto finito. Entonces $e = \sum_{x \in X} \chi_{x,x} \in k^{X \times X} = k^X \otimes_k k^X$ satisface $\mu(e) = 1$ y $e\phi = \phi e$ para todo $\phi \in k^X$. Luego k^X es separable, por el Corolario 3.2.8. Sea ahora E un grafo con $E^0 = X$. Por el Ejemplo 2.4.8, el Ejercicio 3.1.13 y lo que acabamos de probar, el álgebra de caminos $P(E)$ es casi-libre.

Proposición 3.2.12. *Sean R_1, R_2 k-álgebras. Si R_1 y R_2 son separables, entonces $R = R_1 \oplus R_2$ es separable.*

Demostración. Sean $\pi : \mathcal{E} \to B$ una extensión de cuadrado cero, $\sigma : B \to \mathcal{E}$ una sección k-lineal y $f : R_1 \oplus R_2 \to B$ un morfismo de k-álgebras. Sea $\iota : k^2 \to R \oplus S$ la suma de los morfismos estructurales. Por el Ejemplo 3.2.11, ι se levanta a lo largo de π a un morfismo $\hat{\iota} : k^2 \to \mathcal{E}$. Sean $p_1 = f(1,0)$, $p_2 = f(0,1)$, $q_i = \hat{\iota}(p_i)$, $B_i = p_i B p_i$ y $\mathcal{E}_i = q_i \mathcal{E} q_i$. Entonces $\pi_i : \pi_{|\mathcal{E}_i} : \mathcal{E}_i \to B_i$ es una extensión con sección $\sigma_i(x) = q_i \sigma(x) q_i$ y $f_i = f_{|R_i} : R_i \to B_i$ es morfismo de k-álgebras. Como R_i es separable, f_i admite un levantamiento $\hat{f}_i : R_i \to \mathcal{E}_i$, y $\hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2$ es un levantamiento de f. Si g es otro, entonces por separabilidad de k^2 y el Ejercicio 3.2.3 existe $u \in \mathcal{E}^*$ tal que $\pi(u) = 1$ y tal que para $\operatorname{ad}(u) : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, $\operatorname{ad}(u)(x) = uxu^{-1}$, se tiene $\operatorname{ad}(u)(g(p_i)) = q_i$ $(i = 1,2)$. Sea $g' := \operatorname{ad}(u) \circ g : R \to \mathcal{E}$. Entonces $g'(R_i) \subset \mathcal{E}_i$, $g'_i = g'_{|R_i}$ es un levantamiento de f_i y $g = g_1 + g_2$. Luego existe $v_i \in \mathcal{U}(\mathcal{E}_i)$ con $\pi(v_i) = 1$ tal que $g'_i = \operatorname{ad}(v_i) \circ \hat{f}_i$. Tenemos que $v = v_1 + v_2 \in \mathcal{E}^*$ y $g' = \operatorname{ad}(v) \circ \hat{f}$ y por tanto $g = \operatorname{ad}(uv) \circ \hat{f}$. □

Proposición 3.2.13 (Villamayor-Zelinsky)**.** *Sean k un cuerpo y R una k-álgebra. Si R es separable, entonces $\dim_k R < \infty$.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una base de R como k-espacio vectorial. Entonces $R \otimes_k R = R \otimes_k (\bigoplus_{v \in \mathcal{B}} kv) = \bigoplus_{v \in \mathcal{B}} R \otimes_k kv$ y por tanto cada elemento $\xi \in R \otimes_k R$ se escribe en forma única como $x = \sum_{v \in \mathcal{B}} x_v \otimes v$ con $x_v \in R$. Aplicando esto a $\xi = p$ obtenemos un conjunto finito $F = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathcal{B}$ y $x_1, \dots, x_n \in R \setminus \{0\}$ tales que $p = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes v_i$. Sea $I = \sum_{i=1}^{n} kx_i \subset R$. Veamos que I es un ideal a izquierda. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in k$ y $a \in R$. Sea $f : R \to k$ la función k-lineal dada por $f(v_i) = \lambda_i$ y $f(v) = 0$ para todo $v \in \mathcal{B} \setminus F$. Entonces

$$a \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} (ax_i) f(v_i) = (1 \otimes f)(ap) = (1 \otimes f)(pa) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(v_i a) \in I.$$

Probamos así que I es ideal a izquierda. Veamos que, más aún, I es fiel como R-módulo a izquierda. En efecto, $a \in \mathrm{Ann}_R(I) \iff ax_i = 0\ \forall i$. Pero $\sum_{i=1}^{n} x_i v_i = 1$ y por tanto $ax_i = 0\ \forall i$ implica $a = 0$. Se sigue que el morfismo de k-álgebras $L : R \to \mathrm{End}_k(I)$, $L_a(x) = a \cdot x$ es inyectivo, lo que, como $\dim_k I < \infty$, implica que $\dim_k R < \infty$. □

Lema 3.2.14. *Sean k un cuerpo y R una k-álgebra. Entonces*

i) Si R es separable entonces R^e y R son anillos semisimples.

ii) Si R^e es un anillo semisimple, entonces R es separable.

Demostración. Un anillo A es semisimple si y sólo si todo A-módulo es proyectivo ([11, Teorema 3.11.1]). Luego si R^e es semisimple, ${}_R R_R$ es proyectivo y por tanto R es separable, por el Teorema 3.2.7. Recíprocamente, supongamos que R es separable. Sea $s : R \to R \otimes_k R$ un morfismo de bimódulos tal que $\mu \circ s = \mathrm{id}_R$ y sea $x = s(1) - 1 \otimes 1$. Sean M un R-módulo a derecha y $\nu : M \otimes_R R \otimes_k R \cong M \otimes_k R$ el isomorfismo canónico. Sea $\nabla : M \to M \otimes_R \Omega^1(R)$, $\nabla(m) = \nu(m \otimes x)$. Entonces

$$\nabla(ma) = \nu(ma \otimes x) = \nu(m \otimes ax) = m \otimes da + \nabla(m)a$$

Luego M es proyectivo, por el Ejercicio 3.1.12. Notemos que si además M es R-bimódulo, entonces ∇ es conexión a derecha. Análogamente, si $\nu' : R \otimes_k R \otimes_R M \cong R \otimes_k R$ es el isomorfismo canónico, $\nabla_l : M \to \Omega^1(R) \otimes_R M$, $\nabla_l(m) = -\nu'(x \otimes m)$ es conexión a izquierda. Luego M es un bimódulo proyectivo. □

Ejemplo 3.2.15. Sean k un cuerpo y R una k-álgebra. Decimos que R es *matricial* si existen $r \geq 1$ y $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ tales que $R \cong \bigoplus_{i=1}^{r} M_{n_i}$. Observemos que una tal álgebra es separable. En efecto, M_{n_i} es semsimple, $M_{n_i}^{\mathrm{op}} \cong M_{n_i}$ y $M_{n_i} \otimes_k M_{n_i} \cong M_{n_i^2}$. Luego R es separable, por la Proposición 3.2.12 y el Lema 3.2.14.

Ejemplo 3.2.16. Sean $k \subset K$ cuerpos. Notemos que K es semisimple; sin embargo, $K^e = K \otimes_k K$ no siempre lo es. Probaremos a continuación que si $\mathrm{char}(k) = p > 0$ y existe $x \in K \setminus k$ tal que $x^p \in K$ –como ocurre, por ejemplo si $K = \mathbb{F}_p(t)$ es el cuerpo de fracciones de $\mathbb{F}_p[x]$ y $k = \mathbb{F}_p(x^p)$– entonces K^e no es semisimple. Observemos que, como K^e es conmutativa, por Artin-Wedderburn es semisimple si y sólo si es producto de cuerpos. Notemos también que un producto de cuerpos no tiene elementos nilpotentes no triviales. Sea $y = d(x) = 1 \otimes x - x \otimes 1$; tenemos $y^p = 0$. Resta ver que $y \neq 0$. Como $x \notin k$, $\{1, x\}$ es un conjunto l.i. sobre k, luego se extiende a una base $\mathcal{B}$ de K sobre k, y $\{v \otimes w : v, w \in \mathfrak{B}\}$ es base de $K \otimes_k K$, por la Proposición 2.2.16. En particular, $x \otimes 1$ y $1 \otimes x$ son linealmente independientes sobre k y por tanto $y \neq 0$.

Un anillo R se dice *hereditario* (a izquierda) si todo submódulo de un R-módulo proyectivo (a izquierda) es proyectivo. Con un poco de álgebra homológica se demuestra que R es hereditario si y sólo si para todo R-módulo M existe un morfismo suryectivo $\pi : P \to M$ con P y $\mathrm{Ker}(\pi)$ proyectivos.

Proposición 3.2.17. *Sean k un cuerpo y R una k-álgebra. Si R es casi-libre entonces es un anillo hereditario (a izquierda y a derecha).*

Demostración. Como R es casi-libre, existe un conjunto X tal que para $\mathbb{V} = k^{(X)}$, $\Omega^1(R)$ es sumando directo de un $(R \otimes_k R)^{(X)} = R \otimes_k \mathbb{V} \otimes_k R$. Luego si N es un R-módulo a derecha, para $\mathbb{W} = N \otimes_k \mathbb{V}$ tenemos que el R-módulo a derecha $N \otimes_R \Omega^1(R)$ es sumando directo de $\mathbb{W} \otimes_k R$. Como k es un cuerpo, $\mathbb{W} \cong k^{(Y)}$ para algún conjunto Y, luego $\mathbb{W} \otimes_k R \cong R_R^{(Y)}$ como módulos a derecha. Por tanto $N \otimes_R \Omega^1(R)$ es proyectivo; luego la sucesión (3.1.3) presenta a N como cociente de dos módulos proyectivos. Como esto vale para todo N, R es hereditario. □

3.3. Colímites

Sea I un conjunto parcialmente ordenado filtrante y sea $\{\sigma_{i,j} : R_i \to R_j | i \leq j\}$ una familia de morfismos de álgebras de modo que $\sigma_{i,i} = \mathrm{id}_{R_i}$ y si $i \leq j \leq k$, entonces $\sigma_{j,k} \circ \sigma_{i,j} = \sigma_{i,k}$. Sea $R = \mathrm{colim}_I R_i$ como en el Ejercicio 2.5.12; por definición, R es un k-módulo. Usando la parte iii) del citado ejercicio en la segunda y tercera igualdad obtenemos

$$R \otimes_k R = (\operatorname*{colim}_I R_i) \otimes_k (\operatorname*{colim}_I R_j) = \operatorname*{colim}_I R_i(\otimes_k(\operatorname*{colim}_I R_j)) = \operatorname*{colim}_I \operatorname*{colim}_I R_i \otimes_k R_j \tag{3.3.1}$$

Para seguir adelante, necesitamos el siguiente ejercicio.

Ejercicio 3.3.2.

i) Sean I y J conjuntos parcialmente ordenados filtrantes y sea $I \times J$ su producto cartesiano, equipado con el orden producto; $(i_1, j_1) \leq (i_2, j_2) \iff i_1 \leq i_2$ y $j_1 \leq j_2$. Sean R un anillo y $\{M_{i,j} : (i,j) \in I \times J\}$ un sistema dirigido de R-módulos. Probar que hay isomorfismos canónicos

$$\operatorname*{colim}_I \operatorname*{colim}_J M_{i,j} \cong \operatorname*{colim}_J \operatorname*{colim}_I M_{i,j} \cong \operatorname*{colim}_{I \times J} M_{i,j}.$$

ii) Sea I un conjunto parcialmente ordenado filtrante. Un subconjunto $I_0 \subset I$ es *cofinal* si para todo $i \in I$ existe $i_0 \in I_0$ tal que $i_0 \geq i$. Probar que I_0 es filtrante y que si $\{N_i : i \in I\}$ es un sistema dirigido de R-módulos, entonces el morfismo canónico

$$\operatorname*{colim}_{I_0} N_i \to \operatorname*{colim}_I N_i$$

es un isomorfismo.

Usando el Ejercicio 3.3.2, y observando que la diagonal $\Delta(I) = \{(i,i) : i \in I\} \subset I \times I$ es cofinal, obtenemos

$$\operatorname*{colim}_I \operatorname*{colim}_I R_i \otimes_k R_j = \operatorname*{colim}_{I \times I} R_i \otimes_k R_j = \operatorname*{colim}_{\Delta(I)} R_i \otimes_k R_i = \operatorname*{colim}_I R_i \otimes_k R_i.$$

Sea $\mu_i : R_i \otimes_k R_i \to R_i$ la multiplicación; como $\sigma_{i,j} : R_i \to R_j$ es morfismo de anillos para cada $i \leq j$, tenemos $\mu_j \circ \sigma_{i,j} \otimes \sigma_{i,j} = \sigma_{i,j}\mu_i$. Luego existe un morfismo de k-módulos

$$\mu : R \otimes_k R \to R \tag{3.3.3}$$

tal que para todo i, $\mu \circ (\sigma_i \otimes \sigma_i) = \sigma_i \mu_i$. Por otro lado, se sigue de la propiedad del colímite que si $\iota_i : k \to R_i$ es el morfismo estructural, y $j \geq i$, entonces $\sigma_i \iota_i = \sigma_j \iota_j$. Por tanto el morfismo

$$\iota = \sigma_i \circ \iota_i : k \to R, \tag{3.3.4}$$

es independiente de i.

Ejercicio 3.3.5. Probar que R equipado con el producto (3.3.3) y el morfismo (3.3.4) es una k-álgebra asociativa.

Proposición 3.3.6. *Sea $\{\sigma_{n,m} : R_n \to R_m | n \leq m \in \mathbb{N}\}$ un sistema dirigido de k-álgebras separables. Entonces $R = \operatorname{colim}_{n \in \mathbb{N}} R_n$ es casi-libre.*

Demostración. Sean $\pi : \mathcal{E} \to B$ una extensión, $f : R \to B$ un morfismo de k-álgebras y $f_n = f \circ \sigma_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Debemos probar que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un levantamiento $\hat{f}_n : R_n \to \mathcal{E}$ de f_n, de modo tal que si $m < n$, entonces $\hat{f}_n \circ \sigma_{m,n} = \hat{f}_m$. Hacemos esto por inducción en n. Para $n = 1$, $\hat{f}_1$ existe pues R_1 es casi-libre (ya que es separable) y es única a menos de un automorfismo interior $\operatorname{ad}(u)$ con $\pi(u) = 1$ por separabilidad de R_1. Supongamos $\hat{f}_n$ construido. Como R_{n+1} es casi-libre, existe un levantamiento $g : R_{n+1} \to \mathcal{E}$ de f_{n+1}. Como R_n es separable y $g\sigma_{n,n+1}$ levanta a f_n, existe una unidad $u \in \mathcal{E}^*$ tal que $\pi(u) = 1$ y $\operatorname{ad}(u) \circ g\sigma_{n,n+1} = \hat{f}_n$. Luego $\hat{f}_{n+1} := \operatorname{ad}(u) \circ g$ cumple las condiciones pedidas. □

Ejemplo 3.3.7. Una k- álgebra R es *ultramatricial* si existe un sistema dirigido $\{\sigma_{m,n} : R_m \to R_n | m \leq n \in \mathbb{N}\}$ de k-álgebras matriciales tales que $R = \operatorname{colim}_{\mathbb{N}} R_n$. Por la Proposición 3.3.6, una tal álgebra es casi-libre.

Lema 3.3.8. *Sean k un cuerpo, $r, s \geq 1$, $n_1, \dots, n_r$ y $f : \bigoplus_{i=1}^r M_{n_i} \to M_m$ un morfismo de k-álgebras. Entonces existen $q \in \mathbb{N}_0^r$ y $u \in \mathrm{GL}_m(k)$ tales que $\sum_{i=1}^r q_i n_i = m$ y $g := \operatorname{ad}(u) \circ f$ es el morfismo*

$$g(A_1, \dots, A_r) = \bigoplus_{i=1}^r A_i^{\oplus q_i}$$

Demostración. El morfismo f hace de k^n un $R = \bigoplus_{i=1}^r M_{n_i}$-módulo. Como R es semisimple y, salvo isomorfismos, los R-módulos simples son $k^{n_1}, \cdots, k^{n_r}$, existen $q \in \mathbb{N}_0^r$ y un isomorfismo de R-módulos $\theta : k^n \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^r (k^{n_i})^{q_i}$. Se sigue que $n = \sum_{i=1}^r q_i n_i$. Sea $\mathcal{B}$ la base de $k^n = (k^{n_i})^{q_i}$ que se obtiene yuxtaponiendo las bases canónicas de las copias de k^{n_i}. La matriz $u = [\theta]_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$ cumple lo pedido. □

Corolario 3.3.9. *Sean k un cuerpo, $n_1, \dots, n_r, m_1, \dots, m_s \in \mathbb{N}$, y $d = \operatorname{mcd}(n_1, \dots, n_r)$. Entonces existe un morfismo $\bigoplus_{i=1}^r M_{n_i} \to \bigoplus_{j=1}^s M_{m_j}$ si y sólo si $\exists Q \in \mathbb{N}_0^{s \times r}$ tal que*

$$Q \cdot \begin{bmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_s \end{bmatrix}$$

El Corolario 3.3.9 nos dice que, salvo conjugación, un morfismo entre álgebras matriciales equivale a una matriz Q como en el corolario. Esta matriz tiene asociado un grafo con vértices $(1,1),\ldots,(1,r),(2,1),\ldots,(2,s)$ y $q_{i,j}$ aristas de $(1,j)$ en $(2,i)$. Si $R_* = \{\sigma_{p,q} : R_p = \bigoplus_{i=1}^{r_p} M_{n_{i,p}} \to R_q | p \leq q \in \mathbb{N}\}$ es un sistema dirigido de álgebras matriciales, y $Q(p)$ es la matriz asociada a $\sigma_{p,p+1}$, obtenemos un grafo infinito E con vértices $E^0 = \{(p,i) : p \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq r_p\}$ cuya matriz de incidencia $A \in M_{E^0}(\mathbb{N}_0)$ está dada por

$$A_{(p,i),(p',j)} = \delta_{p',p+1} Q(p)_{j,i}.$$

El grafo E es el *diagrama de Bratelli* del sistema dirigido R_*.

Ejemplo 3.3.10. Sea $M_{d^*} = \{M_{d^r} | r \in \mathbb{N}\}$ el sistema dirigido donde $M_{d^r} \to M_{d^{r+1}}$ es la inmersión diagonal asociada a la matriz $Q = [d]$. Para $d = 2$, el diagrama de Bratelli correspondiente es

$$1 \rightrightarrows 2 \rightrightarrows 3 \rightrightarrows 4 \rightrightarrows \ldots$$

Escribimos $M_{d^\infty} = \operatorname{colim}_r M_{d^r}$.

3.4. Álgebra ultramatricial de un grafo

Sea E un grafo. Un vértice $v \in E^0$ es un *pozo* si $s^{-1}\{v\} = \emptyset$, un *emisor infinito* si $|s^{-1}\{v\}| = \infty$, es *singular* si es un pozo o un emisor infinito y *regular* si no es singular. Escribimos $\operatorname{sink}(E)$, $\operatorname{ínf}(E)$, $\operatorname{sing}(E)$ y $\operatorname{reg}(E)$ por los conjuntos de pozos, emisores infinitos, vértices singulares y vértices regulares de E. Decimos que E es *regular* si $\operatorname{sing}(E) = \emptyset$ y que es *singular* si no es regular. La *matriz de incidencia reducida* de E es la matriz $\bar{A} = \bar{A}_E \in \mathbb{N}_0^{\operatorname{reg}(E)\times E^0}$

$$\bar{A}_{v,w} = |\{e \in E^1 : s(e) = v, r(e) = w\}|.$$

En otras palabras, el coeficiente (v,w) de $\bar{A}$ es el mismo que el de la matriz de incidencia A cuando ambos están definidos.

En lo que sigue, supondremos que E es *finito*, es decir, que tanto E^0 como E^1 son finitos; equivalentemente, E^0 es finito e $\operatorname{ínf}(E) = \emptyset$. Asociaremos a E un sistema dirigido de álgebras matriciales $\{\mathcal{M}(E)_n : n \in N_0\}$ donde para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}(E)_n = \bigoplus_{v\in E^0} \mathcal{M}_n[v]$, con cada $\mathcal{M}_n[v]$ es un álgebra matricial, definida como sigue. Para cada $v \in E^0$ y $n \geq 0$, sea $\mathcal{P}(n,v)$ el conjunto de todos los caminos α de longitud n tales que $r(\alpha) = v$. Sea

$$\mathcal{M}_n[v] = \begin{cases} M_{\mathcal{P}(n,v)} & v \notin \operatorname{sink}(E) \\ \bigoplus_{i=0}^{n} M_{\mathcal{P}(i,v)} & v \in \operatorname{sink}(E) \end{cases}$$

Si $X \subset E^0$ es un subconjunto, ponemos $\mathcal{M}_n[X] = \bigoplus_{v\in X} \mathcal{M}_n[v]$. El morfismo de transición $\sigma_{n,n+1} : \mathcal{M}_n \to \mathcal{M}_{n+1}$ se define como sigue. Sobre $\mathcal{M}_n[\operatorname{sink}(E)]$, es la inclusión canónica en $\mathcal{M}_{n+1}[\operatorname{sink}(E)]$. Sobre $\mathcal{M}_n[\operatorname{reg}(E)]$ es la inclusión diagonal $\mathcal{M}_n[\operatorname{reg}(E)] \to R_{n+1}$ dada por la transpuesta $\bar{A}^t$ de la matriz de incidencia reducida. El *álgebra ultramatricial* de E es

$$\mathcal{M}(E) = \operatorname*{colim}_{\mathbb{N}} \mathcal{M}(E)_n.$$

Ejemplo 3.4.1. Sea $\mathcal{A}_n$ como en el Ejercicio 2.3.6. Entonces para $p \geq n$, $\mathcal{M}(\mathcal{A}_n)_p = M_n$, y $\sigma_{p,p+1} = \mathrm{id}_{M_n}$. Luego $\mathcal{M}(\mathcal{A}_n) = M_n$.

Ejemplo 3.4.2. Sea $\mathcal{R}_n$ como en el Ejercicio 2,3,6. Entonces $\mathcal{M}(\mathcal{R}_n)_p = M_{n^p}$ y el diagrama de Bratelli del sistema $\{\mathcal{M}(\mathcal{R}_n)_p\}$ es el descripto en el Ejemplo 3.3.10. Luego $\mathcal{M}(\mathcal{R}_n) = M_{n^\infty}$.

Proposición 3.4.3. *Sea E un grafo finito regular. Entonces el diagrama de Bratelli del sistema $\mathcal{M}(E)_*$ es el grafo $\tilde{E}$ dado por*

$$s, r : \tilde{E}^1 = E^1 \times \mathbb{N}_0 \to \tilde{E}^0 = E^0 \times \mathbb{N}_0, \; s(e,n) = (s(e),n), \; r(e,n) = (r(e), n+1).$$

Demostración. Como E es regular, el morfismo de transición $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_n(E) \to \mathcal{M}_{n+1}$ es el morfismo diagonal asociado a la matriz de incidencia transpuesta A^t. Luego el diagrama de Bratelli de $\mathcal{M}_*$ es aquél donde para todo n, la matriz de transición del paso n al paso $n+1$ es A; este es exactamente el grafo $\tilde{E}$. $\square$

3.5. Localización

Sea $\phi : R \to S$ un morfismo de álgebras y sea $f : M \to N$ un morfismo de R-módulos a derecha. Decimos que ϕ *invierte* f si el morfismo de S-módulos $f \otimes_R \mathrm{id}_S$ es un isomorfismo. Decimos que ϕ invierte una familia de morfismos de R-módulos Σ si invierte cada elemento $f \in \Sigma$.

Lema 3.5.1. *Sean R un álgebra y $f : P \to Q$ un morfismo de R-módulos a derecha proyectivos y finitamente generados. Sean $n, m \geq 1$ y $p \in M_n(R)$ y $q \in M_m(R)$ matrices idempotentes, $\alpha : \mathrm{Im}(p) \xrightarrow{\sim} P$ y $\beta : Q \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(q)$ isomorfismos, $\mathrm{inc} : \mathrm{Im}(q) \subset R^m$ la inclusión y $A \in R^{m \times n}$ la matriz de $g = \mathrm{inc} \circ \beta \circ f \circ \alpha p$ en las bases canónicas. Entonces*

i) $A = qA = Ap$.

ii) *f es un isomorfismo si y sólo si existe $B \in R^{m \times n}$ tal que $B = pB = Bq$, $BA = p$ y $AB = q$. Cuando existe, una tal matriz B es única.*

Demostración. Por defineión, $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Im}(q)$, luego $qA = A$. Además $g = gp$, lo que implica que $Ap = A$. Es claro que f es isomorfismo si y sólo si $f_1 = \beta \circ f \circ \alpha$ lo es. Supongamos que f_1 es un isomorfismo y sea $\mathrm{inc}' : \mathrm{Im}(p) \subset R^n$ la inclusión. Sea B la matriz de $\mathrm{inc}' \circ f_1^{-1} \circ q$ en las bases canónicas; es claro que B cumple lo pedido en ii). Si $B' \in R^{n \times m}$ es otra matriz con las mismas propiedades, entonces

$$0 = (B'A - BA)B = (B' - B)(AB) = B'q - Bq = B' - B.$$

Resta ver que si B existe, entonces f, o equivalentemente, f_1, es un isomorfismo. Notemos que $f_1(x) = Ax$ para todo $x \in \mathrm{Im}(p)$. Luego $h : \mathrm{Im}(q) \to \mathrm{Im}(p)$, $h(x) = Bx$ es la inversa de f_1. $\square$

Teorema 3.5.2 (Cohn). *Sean R un álgebra y Σ un conjunto de morfismos entre R-módulos a derecha proyectivos finitamente generados. Entonces existe un morfismo de álgebras $\iota : R \to R_\Sigma$ que invierte Σ y es tal que si $\phi : R \to S$ es otro morfismo con la misma propiedad entonces existe un único morfismo de álgebras $\bar{\phi} : R_\Sigma \to S$ tal que $\bar{\phi} \circ \iota = \phi$.*

Demostración. Para cada $f : P \to Q \in \sigma$ elegimos $n, m \geq 1$, $p \in M_n R$ y $q \in M_m R$ como en el Lema 3.5.1. Construiremos R_Σ como cociente de un álgebra tensorial del R-bimódulo libre L en el conjunto X definido como sigue. Para cada $f \in \Sigma$, con n y m como antes, X contiene $n \times m$ elementos $x^f_{i,j}$ $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$, que pensamos como los coeficientes de una matriz x^f de $n \times m$. Definimos R_Σ como el cociente de $T_R(L)$ por el ideal bilátero que tiene, para cada $f \in \Sigma$, $2n \times m$ generadores, (números que, como antes, dependen de f) dados por los coeficientes de $x^f A(f) - p(f)$, $A(f)x^f - q(f)$, $p(f)x^f - x^f$ y $x^f q(f) - x^f$. El morfismo ι se define como la composición de la inclusión $R \subset T_R(L)$ seguida por la proyección π al cociente. Por construcción, $\pi(x^f) = \iota(q(f))\pi(x^f)\iota(p(f))$, $\iota(A(f))\pi(x^f) = \iota(p(f))$ y $\pi(x^f)\iota(A(f)) = \iota(q(f))$. Por la Observación 2.7.5 y el Lema 3.5.1, ι invierte Σ. Nuevamente por el Lema 3.5.1, si $\phi : R \to S$ es otro morfismo de álgebras que invierte a Σ, entonces para cada $f \in \Sigma$ existe una matriz $B(f) \in S^{n\times m}$ (n y m dependen de f y son los mismos de antes) tal que $B(f)\phi(A(f)) = \phi(p(f))$ y $\phi(A(f))B(f) = \phi(q(f))$. Como L es libre, existe un único morfismo de R-bimódulos $\phi_1 : L \to {}_\phi S_\phi$ tal que $\phi_1(x^f) = B(f)$ para cada $f \in \Sigma$. El par (ϕ, ϕ_1) define un morfismo $T_R(L) \to S$, y es claro que desciende al cociente dando un morfismo $\bar{\phi} : R_\Sigma \to S$ tal que $\bar{\phi} \circ \iota = \phi$. Notemos que si $\bar{\phi}' : R_\Sigma \to S$ es otro morfismo con la misma propiedad, entonces para cada f la matriz $B'(f) = \bar{\phi}'(x^f)$ cumple lo mismo que $B(f)$, y por tanto es igual a $B(f)$ por el Lema 3.5.1. Luego $\bar{\phi}' = \bar{\phi}$. $\square$

Lema 3.5.3. *Sean $\mathcal{E}$ un álgebra e $I \lhd \mathcal{E}$ un ideal tal que $I^2 = 0$. Sea $f : P \to Q$ un morfismo de $\mathcal{E}$-módulos a derecha proyectivos finitamente generados. Si $\bar{f} : P/PI \to Q/QI$ es un isomorfismo, entonces f es un isomorfismo.*

Demostración. Sean p, q y A como en el Lema 3.5.1. Sea $\bar{A}$ la imagen de A en $(\mathcal{E}/I)^{m\times n}$; por el Lema 3.5.1, existe $B \in \mathcal{E}^{n\times m}$ tal que $\bar{B} = \bar{p}\bar{B}\bar{q}$, $\bar{B}\bar{A} = \bar{p}$ y $\bar{A}\bar{B} = \bar{q}$. Luego de reemplazar B por pBq si es necesario, podemos suponer que $B = pBq$. Sea $N = p - BA$; entonces $N \in pM_n(I)p$ y por tanto $N^2 = 0$. Luego $(p - N)BA = (p - N)(p + N) = p - Np + pN = p$. Por construcción, la matriz $(p - N)B$ induce un morfismo $g : Q \to P$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_P$. Análogamente, existe $N' \in qM_m(I)q$ tal que $AB(I - N') = q$; $B(I - N')$ induce un morfismo $h : P \to Q$ tal que $f \circ h = \mathrm{id}_Q$. En conclusión, f tiene inversa a izquierda y a derecha y por tanto es un isomorfismo. $\square$

Proposición 3.5.4. *Sean R y Σ como en el Teorema 3.5.2. Si R es casi-libre, entonces R_Σ es casi-libre.*

Demostración. Sean $\pi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}/I$ una extensión semi-escindida con $I^2 = 0$ y $\phi : \mathbb{R}_\Sigma \to \mathcal{E}/I$ un morfismo de álgebras. Como R es casi-libre por hipótesis, la composición $\phi \circ \iota$ se levanta a un morfismo $\phi_0 : R \to \mathcal{E}$. Tenemos así un diagrama conmutativo de flechas sólidas

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\phi_0"] \arrow[d, "\iota"'] & \mathcal{E} \arrow[d, "\pi"] \\
R_\Sigma \arrow[r, "\phi"'] \arrow[ur, dotted] & \mathcal{E}/I
\end{tikzcd}$$

Como $\pi \circ \phi_0$ se factoriza a través de ι, invierte a Σ, y por el Lema 3.5.3, ϕ_0 también lo hace. Luego la flecha punteada existe por el Teorema 3.5.2. $\square$

Ejemplo 3.5.5 (Anillos de fracciones)**.** Sea $\Sigma \subset R$; identificando a cada elemento $s \in \Sigma$ con el morfismo $R_R \to R_R$, $x \mapsto sx$, podemos formar R_Σ. Por construcción, R_Σ es el cociente del álgebra tensorial del bimódulo libre en $\{x_s : s \in \Sigma\}$ por el submódulo generado por los elementos de la forma $sx_s - 1$ y $1 - x_s s$ con $s \in \Sigma$, de modo que $x_s = s^{-1}$ en R_Σ. Luego (omitiendo ι) cada elemento de R_Σ es una suma de productos de la forma

$$a_0 s_1^{-1} \cdots a_{n-1} s_n^{-1} a_n, \quad \text{con } a_i \in R,\ s_i \in \Sigma. \tag{3.5.6}$$

Si los elementos de Σ están en el centro de R, entonces para cada $s \in \Sigma$ s^{-1} conmuta en R_Σ con cada elemento de $\iota(R)$. Luego podemos reescribir (3.5.6)

$$a(s_1 \cdots s_n)^{-1}, \quad \text{con } a = a_0 \cdots a_n. \tag{3.5.7}$$

Observemos que la suma de dos elementos de la forma (3.5.7) es de nuevo de esa forma. Por tanto todo elemento de R_Σ puede escribirse en la forma (3.5.7). Si además Σ es cerrado por productos, nos queda que cada elemento de R_Σ es de la forma as^{-1} con $a \in R$ y $s \in \Sigma$.

Ejercicio 3.5.8.

i) Sean R un anillo, $\Sigma \subset R$ y $a \in R$. Probar que si existe un $s \in \Sigma$ tal que $as = 0$ entonces $\iota(a) = 0$.

ii) Sean R un dominio conmutativo y $\Sigma = R \setminus \{0\}$. Probar que R_Σ es el cuerpo de fracciones de R.

iii) Sean R_1, R_2 conmutativos, $R = R_1 \oplus R_2$ y $\Sigma = \{(1, a) : a \in R_2\}$. Calcular R_Σ.

iv) Sea $R = k\{x_1, \dots, x_n\}$ el anillo de polinomios en variables no conmutativas y sea $\Sigma = \{x_1, \dots, x_n\}$. Probar que R_Σ es la k-álgebra del grupo libre en n elementos.

Ejemplo 3.5.9 (Álgebras de Leavitt)**.** Sea E un grafo finito. Para cada $v \in \operatorname{reg}(E)$, sea

$$\sigma_v : \bigoplus_{s(e)=v} r(e)P(E) \to vP(E)$$

Sea $\Sigma = \{\sigma_v : v \in \operatorname{reg}(E)\}$; el *álgebra de Leavitt* de E es $L(E) = P(E)_\Sigma$.

Ejercicio 3.5.10. Sea $S_v = \operatorname{Coker}(\sigma_v)$ $(v \in \operatorname{reg}(E))$. Probar que $S_v \otimes_{P(E)} L(E) = 0$. Probar que si k es un cuerpo, entonces S_v es un $P(E)$-módulo simple.

Proposición 3.5.11. *Sea E un grafo finito. Entonces $L(E)$ es canónicamente isomorfa al cociente del álgebra de polinomios en variables $\{e, e^*, v : e \in E^1, v \in E^0\}$ sujeta a las siguientes relaciones*

(P) $vw = \delta_{v,w} v$, $\sum_{v \in E^0} v = 1$, $e = s(e)e = er(e)$, $e^* = r(e)e^* = e^* s(e)$.

(CK1) $e^* f = \delta_{e,f} r(e)$.

(CK2) $v = \sum_{s(e)=v} ee^*$, $(v \in \operatorname{reg}(E))$.

Demostración. El álgebra es k^{E^0} es el cociente de $k\{v : v \in E^0\}$ sujeto a

$$vw = \delta_{v,w}v, \quad \sum_{v \in E^0} v = 1 \tag{3.5.12}$$

El k^{E^0}-bimódulo k^{E^1} es el k-espacio vectorial con base E^1, con la estructura de bimódulo determinada por $e = s(e)e = er(e)$. Luego $P(E) = T_{k^{E^0}}(k^{E^1})$ es el cociente de $k\{v, e : v \in E^0, e \in E^1\}$ por las relaciones (3.5.12) y las relaciones

$$e = s(e)e = er(e).$$

Para cada $v \in \operatorname{reg}(E)$, sea $n = n_v = |s^{-1}(\{v\})|$. En cada sumando $r(e)P(E)$, el morfismo σ_v de la definición de $L(E)$ es la multiplicación por e. Luego si numeramos $s^{-1}(\{v\}) = \{e_1, \ldots, e_n\}$, podemos identificar a σ_v con la matriz

$$\sigma_v = [e_1, \ldots, e_n] \in P(E)^{1\times n}.$$

Por tanto $L(E)$ es el cociente del álgebra $P(E)\{e^* : e \in E^1\}$ sujeta a las siguientes relaciones, donde, como antes, $v \in \operatorname{reg}(E)$, $n = n_v$ y $s^{-1}(\{v\}) = \{e_1, \ldots, e_n\}$.

$$[e_1, \cdots, e_n]\begin{bmatrix} e_1^* \\ \vdots \\ e_n^* \end{bmatrix} = v,$$

$$\begin{bmatrix} e_1^* \\ \vdots \\ e_n^* \end{bmatrix}[e_1, \cdots, e_n] = \operatorname{diag}(r(e_1), \ldots, r(e_n)),$$

$$\begin{bmatrix} e_1^* \\ \vdots \\ e_n^* \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(r(e_1), \ldots, r(e_n))\begin{bmatrix} e_1^* \\ \vdots \\ e_n^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1^* \\ \vdots \\ e_n^* \end{bmatrix}[v]$$

Escribiendo estas relaciones coeficiente a coeficiente se obtienen las relaciones CK1 y CK2, lo que concluye la demostración. □

Observación 3.5.13. En la Proposición 3.5.11 las relaciones (P) son las relaciones que definen al álgebra de caminos del *doble* $D(E)$; este es el grafo con los mismos vértices que E y con una arista adicional e^* para cada arista de $e \in E^1$, con $s(e^*) = r(e)$ y $r(e^*) = s(e)$. Las relaciones (CK1) y (CK2) son las llamadas relaciones de Cuntz-Krieger.

Ejercicio 3.5.14.

i) Sean $n \geq 1$ y $\mathcal{A}_n$ como en el Ejercicio 2.3.6. Probar que $L(\mathcal{A}_n) \cong M_n$.

ii) Sea $\mathcal{R}_n$ como en el Ejercicio 2.3.6 y sea $L_n = L(\mathcal{R}_n)$. Probar que $L_1 = k[t, t^{-1}]$ el álgebra de polinomios de Laurent.

Capítulo 4

Álgebras de Leavitt

La obra de referencia para todo este capítulo es el libro [1]. Para simplificar y evitar las álgebras sin unidad, consideramos sólo álgebras de Leavitt de grafos con finitos vértices, a los que llamaremos *unitales*, aunque la teoría está desarrollada para grafos arbitrarios.

4.1. Semigrupo inverso asociado a un grafo

Recordemos que un *semigrupo* es un conjunto equipado con una multiplicación asociativa. Un elemento $\emptyset \in \mathcal{S}$ es *nulo* si $s\emptyset = \emptyset s = \emptyset$ para todo $s \in S$. Notemos que un semigrupo poseee a lo sumo un elemento nulo. Un semigrupo se dice *punteado* si posee un elemento nulo. Si $\mathcal{S}$ es un semigrupo punteado con elemento nulo $\emptyset$, el *álgebra reducida* de $\mathcal{S}$ es

$$kS = k[S]/k \cdot \emptyset.$$

Un morfismo de semigrupos punteados es *punteado* si preserva elementos nulos; en ese caso induce un morfismo de entre las álgebras reducidas asociadas. Dos elementos $s, t \in \mathcal{S}$ son *inversos* si $sts = s$ y $tst = t$. Decimos que $\mathcal{S}$ es *inverso* si todo elemento $s \in \mathcal{S}$ tiene una única inversa s^*. En ese caso, la función $s \mapsto s^*$ es un isomorfismo punteado $\mathcal{S} \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}^{\text{op}}$ y se extiende a un isomorfismo $^* : kS \to k\mathcal{S}^{\text{op}} = (k\mathcal{S})^{\text{op}}$.

Sea E un grafo y sea

$$\mathcal{S}(E) = \{(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in E^*, r(\alpha) = r(\beta)\} \cup \{\emptyset\}.$$

Definimos una operación

$$\begin{gathered} \cdot : \mathcal{S}(E) \times \mathcal{S}(E) \to \mathcal{S}(E), \\ \xi \cdot \emptyset = \emptyset \cdot \xi = \emptyset \ \forall \xi \in \mathcal{S}(E), \\ (\alpha_1, \beta_1) \cdot (\alpha_2, \beta_2) = \begin{cases} (\alpha_1\alpha_2', \beta_2) & \text{si } \alpha_2 = \beta_1\alpha_2' \\ (\alpha_1, \beta_1'\beta_2) & \text{si } \beta_1 = \alpha_2\beta_1' \\ \emptyset & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{gathered} \tag{4.1.1}$$

Sea $\mathcal{P}(E)$ como en el Ejemplo 2.3.5, y sea

$$\iota : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{S}(E),\ \iota(\emptyset) = \emptyset,\ \iota(\alpha) = (\alpha, r(\alpha)). \tag{4.1.2}$$

Lema 4.1.3. *La operación (4.1.1) hace de $\mathcal{S}(E)$ un semigrupo inverso punteado y de (4.1.2) un morfismo de semigrupos punteado. En $\mathcal{S}(E)$, $\iota(e)^*\iota(e) = \iota(r(e))$ y $\iota(f)^*\iota(e) = \emptyset$ si $f \neq e$..Si $\mathcal{T}$ es otro semigrupo inverso punteado y $\phi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{T}$ es un morfismo punteado tal que $\phi(e)^*\phi(e) = \phi(r(e))$ y $\phi(f)^*\phi(e) = 0$ para $f \neq e$, entonces existe un único morfismo punteado $\bar{\phi} : \mathcal{S}(E) \to \mathcal{T}$ tal que $\bar{\phi} \circ \iota = \phi$.*

Demostración. Una verificación tediosa muestra que $\cdot$ es un producto asociativo [1, página 20]. Si $\xi = (\alpha, \beta) \in \mathcal{S}(E)$, entonces $\xi^* = (\beta, \alpha)$ es la única inversa de ξ en $\mathcal{S}(E)$. Luego $\mathcal{S}(E)$ es un semigrupo inverso. Además, por definición, $(r(e), e)(r(f), f) \neq \emptyset$ si y sólo si $e = f$. Sean $\mathcal{T}$ un semigrupo inverso punteado y $\phi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{T}$ un morfismo punteado como en el enunciado. Otra verificación tediosa similar a la anterior muestra que $\bar{\phi} : \mathcal{S}(E) \to \mathcal{T}, \bar{\phi}(\emptyset) = 0$, $\bar{\phi}(\alpha, \beta) = \phi(\alpha)\phi(\beta)^*$ es morfismo punteado de semigrupos. Es claro que $\bar{\phi}$ es el único morfismo tal que $\bar{\phi} \circ \iota = \phi$. □

4.2. Álgebra de Cohn de un grafo

Sea E un grafo unital. El *álgebra de Cohn* de E es el cociente del álgebra libre en generadores $E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* = \{e, e^*, v : e \in E^1, v \in E^0\}$ sujeta las relaciones (P) y (CK1) de la Proposición 3.5.11. La biyección

$$E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* \to E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*,\ v \mapsto v,\, e \mapsto e^*,\, e^* \mapsto e$$

se extiende en forma única a un morfismo $k\{E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*\} \to k\{E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*\}^{\mathrm{op}}$. Este morfismo pasa al cociente definiendo un isomorfismo $^* : C(E) \to C(E)^{\mathrm{op}}$.

Proposición 4.2.1. *El único morfismo de álgebras $C(E) \to k\mathcal{S}(E)$ dado por la identidad en $E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$ es un isomorfismo.*

Demostración. Como en la demostración de la Proposición 3.5.11, vemos que de las relaciones (P) se obtiene un morfismo canónico $P(E) = k\mathcal{P}(E) \to C(E)$ que manda $v \mapsto v$, $e \mapsto e$. Una verificación sencilla muestra que la unión de $\{0\}$ con el subconjunto

$$\mathcal{B}_E = \{\alpha\beta^* : \alpha, \beta \in E^*, r(\alpha) = r(\beta)\} \subset C(E) \tag{4.2.2}$$

forma un semigrupo inverso $\mathcal{T}$. Por el Lema 4.1.3, la aplicación evidente $\mathcal{P}(E) \to \mathcal{T}$ se extiende en forma única a un morfismo de álgebras $k\mathcal{S}(E) \to C(E)$ que manda $\mathcal{S}(E) \setminus \{\emptyset\}$ sobre $\mathcal{B}_E$. Recíprocamente, el morfismo de la proposición manda $\mathcal{B}_E$ sobre $\mathcal{S}(E) \setminus \{\emptyset\}$, por lo que ambos son mutuamente inversos. □

Corolario 4.2.3. *El álgebra $C(E)$ es libre como k-módulo con base (4.2.2).*

Ejemplo 4.2.4 (Álgebra de Toeplitz)**.** Sea $C_n = C(\mathcal{R}_n)$; en particular, $C_1 = k\{x, x^*\}/\langle x^*x - 1\rangle$ se llama el *álgebra de Toeplitz*; es la versión puramente algebraica de la C^*-álgebra del mismo nombre. Por esta razón algunos autores llaman álgebra de Toeplitz de E al álgebra $C(E)$.

Ejercicio 4.2.5. Sean $\mathbb{V} = k^{(\mathbb{N})}$, $\{\chi_n : n \in \mathbb{N}\}$ la base canónica, $\mathcal{E} = \operatorname{End}_k(k^{(\mathbb{N})})$. Sean $s, s^* \in \mathcal{E}$ definidos por

$$s(\chi_n) = \chi_{n+1}, \; s^*(\chi_n) = \begin{cases} \chi_{n-1} & \text{si } n \geq 2 \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Sea $\rho : C_1 \to \mathcal{E}$, $\rho(t) = s$, $\rho(t^*) = s^*$. Probar que ρ es un morfismo inyectivo.

4.3. Extensión de Cohn; base de $L(E)$

Por definición, tenemos un morfismo suryectivo $p : C(E) \to L(E)$; sea $\mathcal{K}(E) = \operatorname{Ker}(p)$. La *extensión de Cohn* es

$$\mathcal{K}(E) \hookrightarrow C(E) \twoheadrightarrow L(E).$$

Para cada $v \in \operatorname{reg}(E)$, sea

$$q_v = v - \sum_{s(e)=v} ee^* \in C(E). \tag{4.3.1}$$

Notemos que $\mathcal{K}(E)$ es el ideal bilátero generado por los elementos q_v con $v \in \operatorname{reg}(E)$.

Para cada $v \in \operatorname{reg}(E)$ fijemos un elemento $e_v \in s^{-1}(\{v\})$. Sean

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B}'_E = \{\alpha q_v \beta^* : \alpha, \beta \in E^*, r(\alpha) = r(\beta) = v \in \operatorname{reg}(E)\}, \tag{4.3.2}$$
$$\mathcal{B}'' = \mathcal{B}''_E = \mathcal{B} \setminus \{\alpha e_v e_v^* \beta^* : \alpha\beta^* \in \mathcal{B}', r(\alpha) = v \in \operatorname{reg}(E)\}.$$

Proposición 4.3.3. *Sea E un grafo unital. Entonces $\mathcal{B}'$ es base de $\mathcal{K}(E)$ y $\mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$ es base de $C(E)$ como k-módulos.*

Demostración. Como ya dijimos, $\mathcal{K}(E)$ es el ideal generado por los q_v con $v \in \operatorname{reg}(E)$. Luego los elementos de la forma $\xi q_v \eta$ con $\xi, \eta \in \mathcal{B}$ generan $\mathcal{K}(E)$, por el Corolario 4.2.3. Observemos que si α es un camino de longitud ≥ 1, entonces $q_v = q_v^*$ y

$$q_v \alpha = \alpha^* q_v = 0. \tag{4.3.4}$$

Por otra parte es claro que

$$\alpha q_v = q_v \alpha^* = 0 \text{ si } r(\alpha) \neq v. \tag{4.3.5}$$

Deducimos así que $\mathcal{B}'$ genera $\mathcal{K}(E)$ como k-módulo. Veamos que es l.i.; sea

$$0 = \sum c_{\alpha,\beta} \alpha q_v \beta^*$$

una ecuación de dependencia lineal con coeficientes $c_{\alpha,\beta} \in k \setminus \{0\}$. Usando (4.3.1) y pasando de miembro queda

$$\sum c_{\alpha,\beta} \alpha \beta^* = \sum_{\alpha,\beta} \sum_{s(e)=v} c_{\alpha,\beta} \alpha e e^* \beta^*.$$

Sea $\alpha\beta^*$ tal que $|\alpha|$ es máximo entre los que aparecen del lado izquierdo con coeficiente no nulo; del lado derecho está $\alpha e e^* \beta^*$ con el mismo coeficiente;

esto es una contradicción, ya que $\mathcal{B}$ es l.i. por el Corolario 4.2.3. Notemos que si $v \in \operatorname{reg}(E)$, entonces

$$e_v e_v^* = q_v + \sum_{s(f)=v, f \neq e_v} f f^*.$$

Se sigue que cada elemento de $\mathcal{B}$ es combinación lineal de $\mathcal{B}''' = \mathcal{B}' \cup \mathcal{B}''$, que por tanto es sistema de generadores. Acabamos de probar que $\mathcal{B}'$ es l.i.; es claro que $\mathcal{B}''$ también lo es, ya que es un subconjunto de $\mathcal{B}$. Luego para ver que $\mathcal{B}'''$ es l.i. basta ver que ninguna combinación lineal no nula ξ de elementos de $\mathcal{B}'$ está en el k-submódulo M generado por $\mathcal{B}''$. Pero dado que $-e_v e_v^*$ es uno de los sumandos de q_v, cuando escribimos a ξ como combinación lineal de elementos de $\mathcal{B}$, aparecen términos de la forma $\alpha e_v e_v^* \beta^*$ con coeficiente no nulo. Se sigue que ξ no está en M, lo que finaliza la demostración. □

Corolario 4.3.6. *El conjunto $p(\mathcal{B}''_E)$ es base de $L(E)$.*

Sea $\alpha = e_1 \cdots e_n$ un camino en E con $|\alpha| \geq 1$. Decimos que α es *cerrado* si $s(\alpha) = r(\alpha) = v$; el vértice v es la *base* de α . Si además $s(e_i) \neq s(e_j)$ para todo $i \neq j$, decimos que α es un *ciclo*. Decimos que E es *acíclico* si no tiene ciclos.

Corolario 4.3.7. *Sea E un grafo finito. Son equivalentes*

i) *$L(E)$ es finitamente generada como k-módulo.*

ii) *$C(E)$ es finitamente generada como k-módulo.*

iii) *$\mathcal{K}(E)$ es finitamente generada como k-módulo.*

iv) *E es acíclico.*

Demostración. Se sigue de la Proposición 4.3.3 que para cada uno de los tres módulos en cuestión, la condición de ser finitamente generado equivale a que haya una cota en la longitud de los caminos en E. Como E es finito eso equivale a que sea acíclico. □

4.4. El álgebra $\mathcal{K}(E)$

Sea X un conjunto y sea M_X el k-módulo libre $k^{(X \times X)}$. Dadas $\phi, \psi \in M_X$, definimos

$$(\phi \cdot \psi)(x,y) = \sum_z \phi(x,z)\psi(z,y).$$

Para cada $(x,y) \in X \times X$ sea $\varepsilon_{x,y}$ la función característica de $\{(x,y)\}$. Tenemos

$$\varepsilon_{x,y} \cdot \varepsilon_{z,w} = \delta_{y,z}\varepsilon_{x,w}.$$

Se sigue que si $Y \subset X$, entonces $M_Y \subset M_X$ es una subálgebra. Además si $|X| = n$, $M_X \cong M_{\{1,\ldots,n\}} = M_n$. Escribimos $M_\infty = M_{\mathbb{N}}$ y lo identificamos con $\bigcup_{n \geq 1} M_n$.

Sea $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ y para cada $v \in E^0$, sean

$$\mathcal{P}_v = \{\alpha \in \mathcal{P} \mid r(\alpha) = v\}, \quad \mathcal{P}^v = \{\alpha \in \mathcal{P} \mid s(\alpha) = v\}. \tag{4.4.1}$$

Proposición 4.4.2. *El morfismo de k-módulos*

$$\bigoplus_{v\in \mathrm{reg}(E)} M_{\mathcal{P}_v} \to \mathcal{K}(E),\ \varepsilon_{\alpha,\beta} \mapsto \alpha q_v \beta^*$$

es isomorfismo de k-álgebras.

Demostración. Se sigue de la Proposición 4.3.3 que el morfismo en cuestión es biyectivo. Además por (4.3.4) y (4.3.5) que

$$(\alpha q_v \beta^*)(\gamma q_w \mu^*) = \delta_{\beta,\gamma}\alpha q_v \mu^*.$$

Luego la función de la proposición es morfismo de álgebras. □

4.5. $L(E)$ en el caso acíclico

Proposición 4.5.1. *Sea E un grafo finito y acíclico. Entonces el morfismo de k-módulos*

$$\bigoplus_{v\in \mathrm{sink}(E)} M_{\mathcal{P}_v} \to L(E),\ \varepsilon_{\alpha,\beta} \to \alpha\beta^*$$

es un isomorfismo de álgebras.

Demostración. Sea $\mathcal{B}''' = \{\alpha\beta^* : r(\alpha) = r(\beta) \in \mathrm{sink}(E)\}$. Por la Proposición 4.3.3, una combinación lineal de elementos de $\mathcal{B}'''$ es 0 en $L(E)$ si y sólo si es igual en $C(E)$ a una combinación lineal de elementos de $\mathcal{B}'$. Expresada en términos de la base $\mathcal{B}$ de $C(E)$, toda combinación lineal no nula de $\mathcal{B}'$ contiene una combinación lineal no nula de elementos $\alpha\beta^*$ con $r(\alpha) = r(\beta) \in \mathrm{reg}(E)$, y por tanto no puede ser igual a una combinación lineal de elementos de $\mathcal{B}'''$. Se sigue que el morfismo de la proposición es inyectivo. Notemos además que, como E es finito y acíclico, $\mathrm{sink}(E) \neq \emptyset$ y todo camino puede extenderse hasta terminar en un pozo. Sea $v \in \mathrm{reg}(E)$ y sea X_v el conjunto de todos los caminos de longitud positiva α tales que $s(\alpha) = v$ y $r(\alpha) \in \mathrm{sink}(E)$. Sea n_v la longitud máxima entre los caminos de X_v. Probemos por inducción en n_v que $v = \sum_{\alpha\in X_v} \alpha\alpha^*$. Si $n_v = 1$, esto se sigue de CK2. Sea $n_v > 1$; entonces $v = \sum_{s(e)=v} ee^*$ y $n_{r(e)} < n_v$ para todo $e \in s^{-1}(\{v\})$. Aplicando la hipótesis inductiva probamos lo que queríamos. Por lo que acabamos de probar, el morfismo de la proposición es suryectivo. Finalmente se sigue de (4.1.1) y de la Proposición 4.2.1 que la función en cuestión es morfismo de álgebras. □

4.6. Graduación

Sean G un grupo y R un álgebra. Una *G-graduación* de R es una descomposición en suma directa de k-submódulos $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$ tal que $R_g \cdot R_h \subset R_{gh}$ para todo $g, h \in G$. Un *álgebra G-graduada* es un álgebra R junto con una graduación. El k-submódulo $R_g \subset R$ es la *componente homogénea* de grado g de R. Todo elemento $a \in R$ se escribe en forma única como $a = \sum_{g\in G} a_g$ con $a_g \in R_g$; a_g es la componente homogénea de grado g de a. Escribimos $|a| = g$ si $a \in R_g$. Si S es otra álgebra G-graduada y $\phi : R \to S$ es un morfismo, decimos que ϕ es *homogéneo* si $\phi(a)_g = \phi(a_g)$ para todo $a \in R$ y $g \in G$.

Ejemplo 4.6.1. Sean G un grupo y R una k-álgebra. Entonces el álgebra de grupo $R[G]$ es g-graduada, con $R[G]_g = Rg$.

Ejemplo 4.6.2. Sean $n \geq 1$ y $\omega_1, \ldots, \omega_n \in \mathbb{Z}$. Sea $F \subset R = k\{x_1, \ldots, x_n\}$ el subconjunto de todos los monomios en $x_1, \ldots, x_n$. Notemos que F es el monoide libre en $x_1, \ldots, x_n$. Luego existe un único morfismo de monoides $|\ | : F \to \mathbb{Z}$ tal que $|x_i| = \omega_i$. Para cada $m \in \mathbb{Z}$, sean $F_m = \{w : |w| = m\}$, $R_m = k[F_m] \subset R$ el k-submódulo generado por F_m. Entonces $R = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} R_m$ es una $\mathbb{Z}$-graduación de R.

Ejemplo 4.6.3. Sean E un grafo unital, E^* el conjunto de caminos finitos en E y $P(E)$ el álgebra de caminos. Entonces $P(E)$ es $\mathbb{Z}$-graduada con $P(E)_n = kE^n$ si $n \geq 0$ y $P(E)_n = 0$ si $n < 0$.

Sean R un álgebra G-graduada e $I \triangleleft R$ un ideal. Decimos que I es *homogéneo* si $a \in I \Rightarrow a_g \in I$ para todo $g \in G$.

Ejercicio 4.6.4. Sean R un álgebra G-graduada e $I \triangleleft R$ un ideal. Para cada $g \in G$ sea $I_g = I \cap R_g$. Probar

i) I es homogéneo si y sólo si $I = \bigoplus_{g \in G} I_g$.

ii) Sea $X \subset R$ un conjunto de elementos homogéneos y sea $I = \langle X \rangle \triangleleft R$ el ideal bilátero generado por X. Entonces I es homogéneo.

iii) Si I es homogéneo entonce existe una única graduación en R/I tal que la proyección al cociente es homogénea.

Ejercicio 4.6.5. Sea G un grupo y sea $G^\vee = \hom(G, k^*)$.

i) Sea R un álgebra G-graduada. Para cada $\phi \in G^\vee$, y $a = \sum_g a_g$ ($a_g \in R_g$), sea $\phi \cdot a = \sum_g \phi(g) a_g$. Probar que $a \mapsto \phi \cdot a$ es un automorfismo.

ii) Probar que la aplicación

$$G^\vee \to \mathrm{Aut}_{k-\mathfrak{Alg}}(R), \ \phi \mapsto (a \mapsto \phi \cdot a)$$

es morfismo de grupos, y que si $f : R \to S$ es un morfismo homogéneo de álgebras G-graduadas, entonces

$$f(\phi \cdot a) = \phi \cdot f(a) \quad \forall \phi \in G^\vee, \ a \in R. \tag{4.6.6}$$

iii) Decimos que $G^\vee$ *separa elementos* de G si $\phi(g) = \phi(h)\ \forall \phi \in G^\vee \Rightarrow g = h$. Probar que si k es un cuerpo y $G^\vee$ separa elementos de G entonces para cada $g \in G$

$$R_g = \cap_{\phi \in G^\vee} \{a \in R : \phi \cdot a = \phi(g) a\}$$

iv) Probar que en las hipótesis de iii), un morfismo de R-álgebras graduadas es homogéneo si y sólo si satisface (4.6.6).

iv) Probar que si k es un cuerpo infinito, entonces $\mathbb{Z}^\vee \cong k^*$ separa elementos de $\mathbb{Z}$.

Lema 4.6.7. *Sea E un grafo unital. Entonces $L(E)$ admite una única $\mathbb{Z}$-graduación tal que $|v| = 0$, $|e| = 1$ y $|e^*| = -1$.*

Demostración. Por el Ejemplo 4.6.2, las prescripciones del lema determinan una $\mathbb{Z}$-graduación en $k\{E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*\}$. Es claro que todas las relaciones que definen $L(E)$ son homogéneas para esa graduación. El lema se sigue ahora del Ejercicio 4.6.4. □

Proposición 4.6.8. *Sea E un grafo finito. Entonces existe un isomorfismo canónico $\mathcal{M}(E) \cong L(E)_0$.*

Demostración. Sea $\phi_n : \mathcal{M}(E)_n \to L(E)_0$, definida por $\phi_n(\varepsilon_{\alpha,\beta}) = \alpha\beta^*$. Un cálculo muestra que ϕ_n es morfismo de álgebras. Sea $\sigma_{n,n+1} : \mathcal{M}(E)_n \to \mathcal{M}(E)_{n+1}$ el morfismo de transición. Se sigue de CK2 que $\phi_{n+1} \circ \sigma_{n,n+1} = \phi_n$; luego por propiedad universal del colímite tenemos un único morfismo de álgebras $\phi : \mathcal{M}(E) \to L(E)_0$ tal que para todo n, $\phi \circ \sigma_n = \phi_n$. La imagen de ϕ contiene a todos los elementos de grado 0 de $\mathcal{B}''$; por tanto ϕ es suryectivo. Se sigue del Ejercicio 2.6.17 que para probar que ϕ es inyectivo basta ver que cada ϕ_n lo es. El morfismo ϕ_n manda la base canónica en el conjunto $\mathcal{C}$ de elementos de la forma $\alpha\beta^* \in p(\mathcal{B})$ con α y β de la misma longitud y tales que $|\beta| = n$ si $r(\beta) \in \operatorname{reg}(E)$ y $|\beta| \le n$ si $r(\beta) \in \operatorname{sink}(E)$. De ellos, todos salvo los elementos de la forma $\alpha e_v e_v^* \beta^*$ con $|\alpha| = |\beta| = n-1$ están en $\mathcal{B}''$ y son por tanto l.i. Para que una combinación lineal de elementos de $\mathcal{C}$ sea 0 en $L(E)$, el correspondiente elemento de $C(E)$ tiene que estar en $\mathcal{K}(E)$ y por tanto debe ser combinación lineal de los elementos de $\mathcal{B}'$. Pero escrita en términos de $\mathcal{B}$, cualquier tal combinación involucra necesariamente elementos de la forma $\alpha\beta^*$ con $|\alpha| = |\beta| \le n-1$ y $r(\alpha) \in \operatorname{reg}(E)$, de lo que se sigue que $\mathcal{C}$ es l.i. □

4.7. Teorema de unicidad de Cuntz-Krieger

La primera versión del teorema que da nombre a esta sección fue probada en [13, Theorem 2.13] el contexto de C^*-álgebras de grafos finitos. En [1, Theorem 2.2.16] se da una versión para álgebras de Leavitt de grafos arbitrarios sobre un cuerpo k. Aquí damos el caso de grafos unitales de la versión para álgebras de Leavitt sobre k arbitrario probada en [8, Theorem 3.1].

Sean E un grafo y $\alpha = e_1 \cdots e_n$ un camino en E de longitud $n \ge 1$. Decimos que α es *cerrado* si $s(\alpha) = r(\alpha)$; $s(\alpha)$ es el vértice *base* de α. Un camino cerrado $\alpha = e_1 \cdots e_n$ basado en v es *simple* si $s(e_i) \ne v$ para todo $i \ne 1$ y es un *ciclo* si $s(e_i) \ne s(e_j)$ para todo $i \ne j$.

Ejercicio 4.7.1. Sean E un grafo, $v \in E^0$ y α un camino cerrado en E basado en v. Probar que existen únicos $n \ge 1$ y caminos cerrados simples $c_1, \dots, c_n$ tales que $\alpha = c_1 \cdots c_n$.

Decimos que un camino cerrado α de un grafo E tiene una *salida* en i si existe $f \in E^1 \setminus \{e_i\}$ tal que $s(f) = s(e_i)$; la arista f es una salida de α.

Observación 4.7.2. Una salida de un camino cerrado puede formar parte del mismo camino. Por ejemplo en $\mathcal{R}_2$, el camino $\alpha = e_1 e_2$ tiene 2 salidas; son e_1 y e_2.

Lema 4.7.3. *Sean E un grafo y $v \in E^0$. Supongamos que existe al menos un camino cerrado basado en v. Entonces o bien todo camino cerrado basado en v tiene salida o bien ninguno la tiene. En este último caso, existe un ciclo c sin salidas basado en v tal que todo camino cerrado basado en v es una potencia de c.*

Demostración. Sea α un camino cerrado basado en v. Si en la factorización de α como producto de caminos cerrados simples distintos basados en v (Ejercicio 4.7.1) hay al menos dos caminos distintos, α tiene salida. Si es una potencia de un camino simple que pasa dos veces por el mismo vértice $w \neq v$, tiene una salida en w. Luego si no tiene salidas tiene que ser una potencia de un ciclo c sin salidas basado en v. Si un tal ciclo c existe, no puede existir ningún camino cerrado α basado en v que no sea una potencia de c, ya que, de otro modo, la primera arista de α que no sea parte de c sería una salida de c. □

Lema 4.7.4. *Sean E un grafo y $0 \neq x \in L(E)$. Entonces existe $\gamma \in E^*$ tal que $0 \neq x\gamma \in P(E)$.*

Demostración. Para cada $n \geq 0$, sea $\mathcal{A}_n \subset L(E)$ el k-submódulo generado por todos los elementos $\alpha\beta^* \in \mathcal{S}(E)$ con $|\beta^*| \leq n$. Notemos que $L(E) = \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{A}_n$; luego si $x \in L(E)$ existe $n \geq 0$ tal que $x \in \mathcal{A}_n$. Probaremos el lema por inducción en n. Si $x \in \mathcal{A}_0 = P(E) \setminus \{0\}$, podemos escribir $x = \sum_{i=1}^r c_i\alpha_i$ con los $\alpha_i \in E^*$ todos distintos y todos los $c_i \neq 0$. Entonces para $v = r(\alpha_1)$, $xv = \sum_{i:r(\alpha)=v} c_i\alpha_i \in P(E) \setminus \{0\}$, luego $\gamma = v$ cumple lo pedido. Si $n > 0$ y $x \in \mathcal{A}_n \setminus \mathcal{A}_{n-1}$ entonces existen $r \geq 1$, $e_1, \ldots, e_s \in E^1$ todos distintos, $x_1, \ldots, x_r \in \mathcal{A}_{n-1} \setminus \{0\}$ y $y \in P(E)$ tales que

$$x = \sum_{i=1}^{r} x_i e_i^* + y.$$

Sea $v = s(e_1)$; reemplazando x por xv y renumerando si es necesario, podemos suponer que $s(e_i) = v$ para todo i y que $yv = y$. Si $y = 0$, entonces $xe_1 = x_1 \in \mathcal{A}_{n-1} \setminus \{0\}$ y por hipótesis inductiva existe $\gamma \in E^*$ tal que $xe_1\gamma \in P(E) \setminus \{0\}$. Supongamos entonces que $y \neq 0$. Si $v \in \operatorname{reg}(E)$ entonces usando que $v = \sum_{s(e)=v} ee^*$, agregando $e_j \in s^{-1}(\{v\})$ si es necesario y reagrupando, nos queda una suma

$$x = \sum_{i=1}^{t} x_i' e_i^*.$$

donde todos los términos son no nulos, todos los e_i son distintos y salen de v y todos los $x_i' \in \mathcal{A}_{n-1}$. Entonces $\mathcal{A}_{n-1} \ni xe_1 = x_1' \neq 0$, y estamos hechos por hipótesis inductiva. Recordemos que $v = s(e_i)$ para todo i, luego no puede darse que $v \in \operatorname{sink}(E)$. Finalmente si $v \in \operatorname{ínf}(E)$, existe $e \in E^1$ con $s(e) = v$ que no es ninguno de los e_i. Luego $xe = ye \in P(E) \setminus \{0\}$; esto termina la demostración. □

Sea $I \lhd L(E)$ un ideal. Decimos que I está *libre de vértices* si para todo $v \in E^0$ y $a \in k$,

$$av \in I \Rightarrow a = 0.$$

Lema 4.7.5. *Sea $0 \neq I \lhd L(E)$ un ideal. Si I está libre de vértices entonces existen $u \in E^0$, $n \geq 1$, caminos cerrados $\beta_1, \ldots, \beta_n$ basados en u y elementos $a_0, \ldots, a_n \in k \setminus \{0\}$ tales que*

$$0 \neq a_0 u + \sum_{i=1}^{n} a_i \beta_i \in I.$$

Demostración. Como $I \neq 0$, por el Lema 4.7.4 existe $0 \neq x \in I \cap P(E)$. Como $1 = \sum_{v \in E^0} v$, existe $v \in E^0$ tal que $y = vx \neq 0$. Como I está libre de vértices, existen $m \geq 1$, $b_0, \dots, b_m \in k$ con $b_i \neq 0$ si $i \geq 1$ y caminos distintos $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \mathcal{P}^v$, con $1 \leq |\gamma_1| \leq \cdots \leq |\gamma_m|$, tales que

$$y = b_0 v + \sum_{i=1}^{m} b_i \gamma_i.$$

Probaremos a continuación que existe $0 \neq z \in I$ de la forma

$$z = c_0 u + \sum_{i=1}^{l} c_i \beta_i \tag{4.7.6}$$

con $u \in E^0$ y $c_i \neq 0$ para todo i –incluido $i = 0$– y todos los $\beta_i \in \mathcal{P}^u$ distintos y de longitud positiva. Si $b_0 \neq 0$, no hay que probar. Si $b_0 = 0$, consideramos

$$\gamma_1^* y = b_1 r(\gamma_1) + \sum_{i=2}^{m} b_i \gamma_1^* \gamma_i.$$

Como I está libre de vértices, alguno de los $\gamma_1^* \gamma_i \neq 0$, y como $|\gamma_1|$ es mínimo, cada uno es un camino β_j que sale de $r(\gamma_1)$. Luego

$$\gamma_1^* y = b_1 r(\gamma_1) + \sum_{i=2}^{l} d_i \beta_i$$

tiene la forma deseada. Sea entonces z como en (4.7.6) y consideremos

$$zu = c_0 u + \sum_{\{i : r(\beta_i) = u\}} c_i \beta_i.$$

Como I está libre de vértices, hay al menos un β_i en la suma; cada uno de ellos es un camino cerrado basado en u. Como los coeficientes son todos no nulos y los β_i todos de longitud positiva y distintos, $zu \neq 0$ y tiene la forma deseada. □

Lema 4.7.7. *Sea $u \in E^0$; supongamos que los ciclos basados en u tienen salida. Sean $n \geq 1$ y $\beta_1, \dots, \beta_n$ caminos cerrados basados en u, todos distintos. Entonces existe $\gamma \in \mathcal{P}^u$ tal que $\gamma^* \beta_i \gamma = 0$ para todo i.*

Demostración. Sea τ un ciclo basado en u de longitud mínima. Como τ tiene salida lo podemos escribir como $\tau = \nu\mu$ con $\nu \in \mathcal{P}^u$, $\mu \in \mathcal{P}_u \setminus \{u\}$ y de modo que $s^{-1}(\{s(\mu)\})$ contiene un elemento f que no es la primera arista de μ. Sea m tal que $|\tau^m| \geq |\beta_i|$ para todo i. Tomamos

$$\gamma = \tau^m \nu f.$$

Veamos que este elemento cumple lo pedido. Si $\tau^m = \beta_i \theta$ para algún camino θ, entonces por el Ejercicio 4.7.1, existe $1 \leq l < m$ tal que $\beta_i = \tau^l$. Luego

$$\gamma^* \beta_i \gamma = f^* \nu^* \tau^l \nu f = f^* \nu^* \nu \mu \tau^{l-1} \nu f = f^* \mu \tau^{l-1} \nu f = 0.$$

Si β_i no es una potencia de τ, entonces $(\tau^*)^m \beta_i = 0$ y por tanto $\gamma^* \beta_i \gamma = 0$. □

Proposición 4.7.8. *Si $0 \neq I \lhd L(E)$ está libre de vértices, entonces existen un vértice $u \in E^0$, un ciclo sin salida α basado en u, $n \geq 1$ y $a_0, \ldots, a_n \in k$ no todos cero, tales que*

$$0 \neq \sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i \in I.$$

Demostración. Sea $0 \neq x = a_0 u + \sum_{i=1}^{n} a_i \beta_i \in I$ como en el Lema 4.7.5. Si los ciclos basados en u tienen salida, tomando γ como en el Lema 4.7.7, obtenemos

$$0 \neq a_0 u = \gamma^* x \gamma \in I$$

lo que contradice la hipótesis de que I está libre de vértices. Luego los ciclos basados en u no tienen salida y por el Lema 4.7.3, cada β_i es una potencia del único ciclo basado en u. Esto prueba la proposición. □

Teorema 4.7.9. *Sean E un grafo unital y $\phi : L(E) \to S$ un morfismo de álgebras. Entonces ϕ es inyectivo si y sólo si se satisfacen las siguientes dos condiciones*

(G1) $\phi(av) \neq 0$ *para todo* $a \in k \setminus \{0\}$ *y todo* $v \in E^0$.

(G2) $\phi(q(c)) \neq 0$ *para todo ciclo sin salida c de E y todo* $q \in k[t] \setminus \{0\}$.

Demostración. Es claro que si ϕ es inyectivo entonces (G1) y (G2) se cumplen. Sea $I = \mathrm{Ker}(\phi)$. Si (G1) se cumple entonces I es libre de vértices. Por la Proposición 4.7.8 si $I \neq 0$ existen un ciclo sin salida c en E y $0 \neq q \in k[t]$ tal que $I \ni q(c) \neq 0$. Luego si ambas condiciones del teorema se cumplen, I tiene que ser cero. □

4.8. Teorema graduado de unicidad

Teorema 4.8.1. *Sean E un grafo unital, S un álgebra $\mathbb{Z}$-graduada y $\phi : L(E) \to S$ un morfismo homogéneo. Entonces ϕ es inyectivo si y sólo si satisface (G1).*

Demostración. En virtud del Teorema 4.7.9, basta ver que si ϕ satisface (G1), entonces satisface también (G2). Sean $I = \mathrm{Ker}(\phi)$, c un ciclo y $q = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i \in k[t]$ un polinomio de grado n; supongamos que $q(c) \in I$. Como ϕ es homogéneo, I lo es; luego como $a_i c^i \in L(E)$ es homogéneo de grado i, $a_i c^i \in I$ para todo i, por el Ejercicio 4.6.4. En particular, $a_n c^n \in I$ y por tanto $I \ni (c^*)^n a_n c^n = a_n r(c)$. Como $a_n \neq 0$, esto contradice (G1). □

4.9. Ideales básicos homogéneos

La caracterización de ideales homogéneos de álgebras de Leavitt sobre un cuerpo para grafos arbitrarios se da en [1, Theorem 2.5.8]. En esta sección veremos el caso de grafos unitales de la versión para anillos de ese teorema, probada en [23, Theorem 7.9].

Sean E un grafo unital e $I \lhd L(E)$ un ideal. Decimos que I es *básico* si

$$k \ni a \neq 0,\ v \in E^0,\ av \in I \Rightarrow v \in I.$$

Observación 4.9.1. Si k es un cuerpo, entonces todo ideal de $L(E)$ es básico.

Sean $v, w \in E^0$. Decimos que w *desciende* de v y escribimos $v \geq w$, si $\mathcal{P}^v \cap \mathcal{P}_w \neq \emptyset$, es decir, si existe un camino que sale de v y llega a w. Notemos que $\geq$ es un orden parcial y que

$$v \geq w \iff \exists u \in r(s^{-1}\{v\}) \ \ u \geq w.$$

En otras palabras, los elementos de $r(s^{-1}\{v\})$ son los *descendientes inmediatos* de v. Un subconjunto $H \subset E^0$ se dice *hereditario* si $v \in H$ y $v \geq w$ implica que $w \in H$. Un subconjunto hereditario $H \subset E^0$ es *saturado* si para todo $v \in \operatorname{reg}(E)$, $r(s^{-1}\{v\}) \subset H \Rightarrow v \in H$.

Observemos que si $H_i, H_2 \subset E^0$ son hereditarios y saturados entonces $H_1 \cap H_2$ también lo es. La *saturación* de un conjunto hereditario H es la intersección $\overline{H}$ de todos los subconjuntos hereditarios y saturados de E^0 que contienen a H. Más generalmente, si $X \subset E^0$ es cualquier subconjunto, escribimos

$$\overline{X} = \bigcap_{X \subset H \in \mathcal{H}(E)} H$$

Por definición, $\overline{X}$ es el mínimo subconjunto hereditario y saturado de E^0 que contiene a X; lo llamamos la *clausura hereditaria y saturada* de X.

Ejercicio 4.9.2. Dar un ejemplo de un grafo unital E y dos subconjuntos hereditarios y saturados $H_1, H_2 \subset E^0$ tales que $H_1 \cup H_2$ no sea saturado.

Sea

$$\mathcal{H}(E) = \{H \subset E^0 : \ H \text{ hereditario y saturado } \}.$$

Notemos que el poset $(\mathcal{H}(E), \leq)$ es un retículo, con ínfimo y supremo dados respectivamente por

$$H_1 \wedge H_2 = H_1 \cap H_2, \ \ H_1 \vee H_2 = \overline{H_1 \cup H_2}.$$

Sea

$$\mathcal{I}(L(E)) = \{I \triangleleft L(E) \ : \ \text{ básico y homogéneo } \}$$

Notemos que $\mathcal{I}(L(E))$ también es un retículo, con

$$I_1 \wedge I_2 = I_1 \cap I_2, \ \ I_1 \vee I_2 = I_1 + I_2.$$

Veremos en el Teorema 4.9.9 que estos dos retículos son isomorfos.

Sean E un grafo y $H \in \mathcal{H}(E)$. Notemos que, como H es hereditario, si $e \in E^1$ y $s(e) \in H$, entonces $e \in r^{-1}(H)$. En otras palabras, se satisface

$$e \notin r^{-1}(H) \Rightarrow s(e) \notin H.$$

El *grafo cociente* $E \setminus H$ es el grafo con vértices $(E \setminus H)^0 = E^0 \setminus H^0$ y aristas $(E \setminus H)^1 = E^1 \setminus r^{-1}(H)$, equipado con la restricción de las funciones de salida y llegada de E.

Lema 4.9.3. *Sea $I \triangleleft L(E)$ un ideal. Entonces $H(I) := I \cap E^0 \in \mathcal{H}(E)$.*

Demostración. Si $e \in E^1$ y $s(e) \in I$, entonces $e = s(e)e \in I$ y por tanto $r(e) = e^*e \in I$. Luego H es hereditario. Si $v \in \operatorname{reg}(E)$ y $r(s^{-1}(\{v\})) \subset H$, entonces $e = er(e) \in I$ para todo $e \in E^1$ tal que $s(e) = v$ y por tanto $v = \sum_{s(e)=v} ee^* \in I$. Luego $v \in H$. □

Proposición 4.9.4. *Sea $H \in \mathcal{H}(E)$ y sea $I_H \lhd L(E)$ el ideal bilátero generado por H. Entonces I_H es básico y homogéneo, $I_H \cap E^0 = H$ y tenemos*

$$I_H = \operatorname{span}_k\{\alpha\beta^* : \alpha, \beta \in E^*, r(\alpha) = r(\beta) \in H\}.$$

Demostración. Por definición, I_H es generado por elementos homogéneos; luego es homogéneo por el Ejercicio 4.6.4. Es claro que si α y β son caminos con $r(\alpha) = r(\beta) \in H$, entonces $\alpha\beta^* \in I_H$. Luego para probar la igualdad de la proposición, basta ver que el lado derecho es un ideal bilátero. Esto se sigue de la ley de multiplicación en $\mathcal{S}(E)$ (4.1.1) y de la Proposición 4.2.1. Resta ver que I_H es básico. Sea

$$\pi : E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^* \to \{0\} \cup (E \setminus H)^0 \cup (E \setminus H)^1 \cup ((E \setminus H)^1)^*$$
$$\pi(v) = (\mathrm{id} - \chi_H)(v), \ \pi(e) = e\pi(r(e)), \ \pi(e^*) = \pi(r(e))e^*.$$

Vemos que π se extiende a un morfismo de álgebras suryectivo

$$\pi : L(E) \twoheadrightarrow L(E \setminus H). \tag{4.9.5}$$

Sea $I = \mathrm{Ker}(\pi)$; notemos que $H \subset I$; luego $I_H \subset I$. Por el Corolario 4.3.6, si $v \in E^0 \setminus H$, $\pi(av) = av = 0$ en $L(E \setminus H)$ implica que $a = 0$. Luego para $v \in E^0$, $av \in I_H$ con $a \neq 0$ implica que $v \in H$. Finalmente veamos que $E^0 \cap I_H = H$. Si $v \in E^0 \cap I_H$ entonces como $I_H \subset I$, $\pi(v) = 0$, y por tanto $v \in H$; luego $E^0 \cap I_H \subset H$. La otra contención es clara. $\square$

Ejercicio 4.9.6. Sea $H \subset E^0$ un subconjunto hereditario, no necesariamente saturado. Sea $I_H \lhd L(E)$ el ideal generado por H. Probar que

$$I_H = \operatorname{span}_k\{\alpha\beta^* : \alpha, \beta \in E^*, r(\alpha) = r(\beta) \in H\}. \tag{4.9.7}$$

Sea $X \subset E^0$

Lema 4.9.8. *Sea $X \subset E^0$ y sea $I_X \lhd L(E)$ el ideal bilátero generado por X. Se tiene $I_X = I_{\overline{X}}$.*

Demostración. Basta ver que $\overline{X} \subset H = I_X \cap E^0$. Por el Lema 4.9.3, H es hereditario y saturado. Luego $H = \overline{H} \supset \overline{X}$. $\square$

Teorema 4.9.9.

i) Las funciones

$$\mathcal{H}(E) \leftrightarrow \mathcal{I}(E)$$
$$H \mapsto I_H$$
$$I(H) \hookleftarrow I$$

son isomorfismos inversos de reticulados.

ii) El morfismo (4.9.5) *induce un isomorfismo homogéneo $L(E)/I_H \cong L(E \setminus H)$.*

Demostración. Probaremos primero ii). Sea $\pi' : L(E) \to L(E)/I_H$ la proyección. Por la Proposición 4.9.4 y su demostración, $L(E)/I_H$ es $\mathbb{Z}$-graduado, π' es homogénea, y para π como en (4.9.5), existe un único morfismo $\overline{\pi} : L(E)/I_H \to L(E \setminus H)$ tal que $\overline{\pi} \circ \pi' = \pi$. Para cada elemento $x \in (E^0 \setminus$

$H) \cup E^1 \setminus r^{-1}(H) \cup (E^1 \setminus r^{-1}(H))^*$ sea $\phi(x) = \pi'(x)$. Los elementos $\phi(x)$ cumplen las relaciones (P), (CK1) y (CK2) que definen a $L(E \setminus H)$. Luego tenemos un morfismo $\phi : L(E \setminus H) \to L(E)/I_H$. Por construcción, $\bar{\pi} \circ \phi$ coincide con la identidad en los generadores de $L(E \setminus H)$ y por tanto es la identidad. Como además todos los elementos de $E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$ que no están en $(E \setminus H)^0 \cup (E \setminus H)^1 \cup ((E \setminus H)^1)^*$ están en I_H, se sigue que ϕ es suryectivo. Luego ϕ y $\bar{\pi}$ son isomorfismos inversos. Resta probar la parte i). Es claro que ambas funciones preservan el orden de inclusión; luego basta probar que son biyecciones inversas. Sean $I \in \mathcal{I}(E)$ y $H = H(I)$; por definición, $I_H \subset I$. Luego por la parte ii), existe un morfismo suryectivo homogéneo $\psi : L(E \setminus H) \to L(E)/I$, cuyo núcleo es isomorfo a I/I_H. Si $a \in k$ $v \in E^0$ y $\psi(av) = 0$, entonces $av \in I$, lo que, como I es básico, implica que $v \in I$ y por tanto $v \in H$, de lo que se sigue que es cero en $L(E \setminus H)$. Por el Teorema 4.8.1, ψ es un isomorfismo. Luego $I = I_{H(I)}$. Por otro lado, probamos en la Proposición 4.9.4 que $H(I_H) = I_H \cap E^0 = H$. □

4.10. Clausura hereditaria y saturada

Sean E un grafo unital y $v \in E^0$. El *árbol* de v es

$$T(v) = \{w \in E^0 : v \geq w\}.$$

Notemos que si $X \subset E^0$ es un subconjunto, entonces

$$T(X) = \bigcup_{x \in X} T(x)$$

es el mínimo conjunto de vértices hereditario que contiene a X. Consideramos también

$$S(X) = \{v \in \operatorname{reg}(E) \,:\, \{r(e) : s(e) = v\} \subset X\} \cup X.$$

Observemos que $S(X)$ es hereditario si X lo es y que cualquier subconjunto saturado $X \subset Y \subset E^0$ contiene a $S(X)$. Sea

Lema 4.10.1. *Sean $X_0 = T(X)$, $X_{n+1} = S(X_n)$. Entonces $\overline{X} = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$.*

Demostración. Es claro de la definición de X_n que todo conjunto de vértices hereditario y saturado que contiene a X debe contener a todos los X_n. Como además E^0 es finito por hipótesis, existe m tal que $X_m = X_{n+m}$ para todo n. Habíamos observado que $S(Y)$ es hereditario si Y lo es; se sigue que X_m es hereditario. Como además $X_m = X_{m+1} = S(X_m)$, X_m también es saturado. □

4.11. Grafos cofinales

Sea E un grafo unital. Un *camino infinito* en E es una sucesión infinita $\alpha = (e_i)_{i \geq 1}$ tal que para todo j, $r(e_j) = s(e_{j+1})$. El *soporte* de un camino, finito o infinito, en E es

$$\operatorname{supp} \alpha = \{s(e_i), r(e_i)\}.$$

El soporte de un vértice v es $\{v\}$. Sea

$$\mathfrak{X}(E) = \{\alpha \,:\, \text{ camino infinito en } E\} \cup \{\alpha \in \mathcal{P}(E) \,:\, r(\alpha) \in \operatorname{sing}(E)\}$$

Observemos que, como E es unital, todo camino infinito pasa por algún ciclo.

Decimos que E es *cofinal* si

$$(\forall v \in E^0,\ \gamma \in \mathfrak{X}(E))\ T(v) \cap \operatorname{supp}(\gamma) \neq \emptyset.$$

Equivalentemente, E es cofinal si se satisfacen las dos condiciones siguientes.

i) Para todo $v \in E^0$ y todo ciclo c en E existe $u \in \operatorname{supp}(c)$ tal que $v \geq u$.

ii) Para todo vértice v y todo vértice singular w, se tiene $v \geq w$.

Proposición 4.11.1. *El grafo unital E es cofinal si y sólo si $\mathcal{H}(E) = \{\emptyset, E^0\}$.*

Demostración. Supongamos que existe $H \in \mathcal{H}(E) \setminus \{\emptyset, E^0\}$. Sea $v \in E^0 \setminus H$; construiremos un camino γ tal que tal que $\operatorname{supp}(\gamma) \cap H = \emptyset$ y o bien $r(\gamma) \in \operatorname{sing}(E)$ o bien existe un ciclo c tal que $r(\gamma) \in \operatorname{supp}(c)$. Si $v \in \operatorname{sing}(E)$, tomamos $\gamma = v$. Si $v \in \operatorname{reg}(E)$, como H es saturado, existe $e \in s^{-1}\{v\}$ tal que $r(e) \notin H$. Si $r(e) \in \operatorname{sing}(E)$, tomamos $\gamma = e$. Si no, seguimos hasta que lleguemos a un vértice singular o repitamos un vértice regular; en este último caso, llegamos a un vértice que está en el soporte de un ciclo. Tenemos así un camino γ que empieza en v y termina en un vértice que no está en H y que es singular o está un ciclo. Sea ahora $w \in H$ (que existe pues $H \neq \emptyset$). Si E fuera cofinal, existiría $u \in \operatorname{supp}(\gamma)$ tal que $w \geq u$, y por tanto $w \geq r(\gamma) \notin H$, lo que contradice el hecho de que H es hereditario. Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{H}(E) = \{\emptyset, E^0\}$. Sean $v \in E^0$ y $\alpha \in \mathfrak{X}(E)$; queremos ver que existe $v \geq u \in \operatorname{supp}(\alpha)$. Si $v \in \operatorname{supp}(\alpha)$, tomamos $u = v$. Supongamos entonces que $v \notin \operatorname{supp}(\alpha)$. Por hipótesis, $\overline{\{v\}} = E^0$. Luego existe $n \geq 0$ tal que $\{v\}_n = E^0$, y por tanto hay $m \geq 0$ mínimo tal que $\{v\}_m \cap \operatorname{supp}(\alpha) \neq \emptyset$. Sea $w \in \{v\}_m \cap \operatorname{supp}(\alpha)$; entonces $\alpha = \alpha_1\alpha_2$ con α_1 finito, $r(\alpha_1) = w = s(\alpha_2)$. Si $m > 0$, entonces por minimalidad de m, $w \in \operatorname{reg}(E)$ y $r(s^{-1}\{w\}) \subset \{v\}_{m-1}$. En particular, como w es regular, $|\alpha_2| \neq 0$, y si $\alpha_2 = e\alpha_3$, entonces $r(e) \in \{v\}_{m-1} \cap \operatorname{supp}(\alpha)$, lo que contradice la minimalidad de m. Luego $m = 0$, y por tanto $v \geq w$, como queríamos. ☐

Ejercicio 4.11.2. Probar que un grafo cofinal tiene a lo sumo un pozo y que si lo tiene, no puede tener ningún ciclo.

4.12. El ideal generado por un ciclo sin salida

Proposición 4.12.1. *Sean E un grafo unital, c un ciclo sin salida en E, $v = s(c)$ e $I(v) \lhd L(E)$ el ideal generado por v. Sea*

$$\Lambda_c = \{\alpha \in \mathcal{P}_v \ :\ \alpha \text{ no contiene todas las aristas de } c\}.$$

Sea $c^0 := v$, y si $n < 0$, sea $c^n := (c^*)^n$. Entonces

$$\phi : M_{\Lambda_c} k[t, t^{-1}] \to I(v),\ \ \phi(\varepsilon_{\alpha,\beta} t^n) = \alpha c^n \beta^*$$

es un isomorfismo de álgebras.

Demostración. Observemos que si $\beta \neq \gamma \in \mathcal{P}_v$ y $\beta^*\gamma \neq 0$, entonces uno de los dos es segmento inicial del otro, lo que, como c no tiene salida, implica que el resto del que tiene longitud mayor es una potencia positiva de c. Esto no puede suceder si $\beta, \gamma \in \Lambda_c$, y por tanto $\beta^*\gamma = \delta_{\beta,\gamma}v$. Se sigue que ϕ es morfismo de álgebras. Sea $H = T(v)$; como c no tiene salida, $H = \operatorname{supp}(c)$. Dado que $s(c) = r(c) = v$, podemos reescribir

$$\alpha c^n \beta^* = \gamma\delta^* \tag{4.12.2}$$

con $r(\gamma) = r(\delta) = v$ y por tanto pertenece a I_H. Para ver que ϕ es suryectiva, basta, por el Ejercicio 4.9.6, mostrar que todo elemento de la forma $\alpha\beta^*$ con $w = r(\alpha) = r(\beta) \in \operatorname{supp}(c)$ está en la imagen de ϕ. Si $w = v$ y $\alpha \notin \Lambda_c$, entonces existen $\alpha_1 \in \Lambda_v$ y $n \geq 0$ tales que $\alpha = \alpha_1 c^n$; aplicando lo mismo a β, vemos que si $w = v$, entonces $\alpha\beta^*$ está en la imagen de ϕ. Si $v \neq w$ entonces $c = e_1 \cdots e_r$ y $w = s(e_i)$ para un único $r \geq i > 1$, y

$$c_i = e_i \cdots e_r e_1 \cdots e_{i-1} = e_i \cdots e_r c (e_i \cdots e_r)^*.$$

Por lo que ya vimos, $\alpha = \alpha_1 c_i^n$ para algún n y algún $\alpha_1 \in \Lambda_{c_i}$. Si $\alpha_1 e_i \cdots e_r \notin \Lambda_c$, entonces $\alpha_1 = \alpha_2 e_1 \cdots e_{i-1}$ para algún y $\alpha_2 \in \mathcal{P}_v$, que por lo anterior podemos escribir como $\alpha_3 c^m$ con $\alpha_3 \in \Lambda_c$. En resumen $\alpha = \alpha_3 c^{n+m+1}(e_i \cdots e_r)^*$; aplicando lo mismo a β, obtenemos nuevamente que $\alpha\beta^* \in \operatorname{Im}(\phi)$. Para ver que ϕ es inyectiva, basta ver que

$$\mathcal{C} = \{\alpha c^n \beta^* \,:\, \alpha, \beta \in \Lambda_c,\, n \in \mathbb{Z}\}$$

es linealmente independiente. Pero usando que para todo $1 \leq i \leq r$,

$$e_i \cdots e_r (e_i \cdots e_r)^* = s(e_i),$$

vemos que $\mathcal{C}$ es un subconjunto de la base $\mathcal{B}''$ de la Proposición 4.3.3 y el Corolario 4.3.6. □

4.13. Simplicidad

Sea E un grafo unital. Decimos que E es *simple* si es cofinal y todo ciclo en E tiene salida.

Teorema 4.13.1. *Sea E un grafo unital. Entonces E es simple si y sólo si los únicos ideales biláteros básicos de $L(E)$ son 0 y $L(E)$.*

Demostración. Supongamos que E es simple. Sean $I \subsetneq L(E)$ un ideal básico y $\pi : L(E) \to L(E)/I$ la proyección. Si $a \in k \setminus \{0\}$, $v \in E^0$ y $\pi(av) = 0$, entonces $av \in I$, lo que como I es básico implica que $v \in H(I) = I \cap E^0$, que es hereditario y saturado por el Lema 4.9.3. Luego $H(I) = E^0$ por cofinalidad de E y a Proposición 4.11.1 y $I \supset \langle E^0 \rangle = L(E)$, contradicción. Luego $\pi(av) = 0$ con $a \in k$ implica que $a = 0$. Como por hipótesis todo ciclo en E tiene salida, se sigue del Teorema de unicidad de Cuntz-Krieger 4.7.9 que π es un monomorfismo y por tanto $I = 0$. Recíprocamente, supongamos que los únicos ideales biláteros básicos de $L(E)$ son 0 y $L(E)$. Entonces lo mismo ocurre con los ideales biláteros básicos que además son homogéneos, y por tanto E es cofinal por el Teorema 4.9.9 y la Proposición 4.11.1. Resta ver que todo ciclo en E tiene salida. Supongamos que no y sean c un ciclo sin salida y $v = s(c)$. Entonces $I(v) = L(E)$ y por la Proposición 4.12.1, $L(E) \cong M_{\Lambda_c} k[t, t^{-1}]$. Como E es unital, Λ_c es finito y $\mathcal{A} = \mathcal{M}_{\Lambda_c}(t-1)k[t, t^{-1}]$ es un ideal propio no nulo, libre como k-módulo con base

$$\{\varepsilon_{\alpha,\beta}(t-1)t^n : n \in \mathbb{Z}, \alpha, \beta \in \Lambda_c\}.$$

Bajo el isomorfismo de la Proposición 4.12.1, $\mathcal{A}$ corresponde al ideal

$$J = \operatorname{span}_k\{\alpha c^{n+1}\beta^* - \alpha c^n \beta^* \ : \ n \in \mathbb{Z}, \alpha, \beta \in \Lambda_c\}.$$

Vemos que si $w \in E^0$ y $a \neq 0$ entonces aw no es combinación lineal de estos elementos; luego J es básico y libre de vértices. □

Corolario 4.13.2. *Si k es un cuerpo entonces $L(E)$ es simple si y sólo si E lo es.*

Demostración. Se sigue del Teorema 4.13.1 y la Observación 4.9.1. □

Ejercicio 4.13.3. Probar que si E es simple y acíclico, entonces existe $n \geq 1$ tal que $L(E) \cong M_n$.

4.14. Teorema de reducción

Teorema 4.14.1. *Sean E un grafo unital y $0 \neq x \in L(E)$. Supongamos que todo ciclo de E tiene salida. Entonces existen $0 \neq a \in k$, $v \in E^0$ y $\alpha, \beta \in \mathcal{P}(E)$ tales que $\alpha^* x \beta = av$.*

Demostración. Por el Lema 4.7.4 existe $\beta \in \mathcal{P}(E)$ tal que $0 \neq y = x\beta \in P(E)$, y basta probar el teorema para y. Escribamos $y = \sum_{i=1}^{s} a_i \gamma_i$ con todos los γ_i distintos, y todos los $a_i \neq 0$; si $s > 1$ podemos además ordenar los sumandos de modo que para todo i, $|\gamma_i| \leq |\gamma_{i+1}|$. Notemos que para todo i, $r(\gamma_i) = r(\beta) =: v$. Probaremos el teorema por inducción en s. Si $s = 1$, $\gamma_1^* y = a_1 v$. Sea $s > 1$; entonces

$$\gamma_1^* y = a_1 v + \sum_{i=2}^{s} a_i \gamma_1^* \gamma_i.$$

Si algún $\gamma_1^* \gamma_i = 0$, la suma tiene menos de s sumandos y terminamos aplicando la hipótesis inductiva. Si no, para cada i, $c_i := \gamma_1^* \gamma_i$ es un camino cerrado basado en v, que, por hipótesis del teorema, tiene salida. Luego por el Lema 4.7.7, existe un camino $\eta \in \mathcal{P}^v$ tal que $\eta^* c_i \eta = 0$ para todo i. Por tanto

$$(\gamma_1 \eta)^* y \eta = \eta^* (\gamma_1^* y) \eta = a_1 \eta^* \eta = a_1 r(\eta).$$

□

4.15. Idempotentes infinitos

Sean R un anillo y $e, f \in R$ idempotentes. Decimos que e y f son Murray-von Neumann *equivalentes*, y escribimos $e \sim f$, si existen $x, y \in R$ tales que $e = xy$ y $f = yx$. Decimos que e y f son *ortogonales* si $ef = fe = 0$; escribimos $e \perp f$ para indicar que e y f son ortogonales.

Lema 4.15.1. *Sean R un anillo y $e, f \in R$ idempotentes. Son equivalentes*

i) $e \sim f$.

ii) Existen $x \in eRf$ *y* $y \in fRe$ *tales que* $xy = e$ *y* $yx = f$.

iii) Los ideales a izquierda Re *y* Rf *son isomorfos.*

iv) Los ideales a derecha eR *y* fR *son isomorfos.*

Demostración. Si $e \sim f$, por definición, existen $x_1, y_1 \in R$ tales que $x_1y_1 = e$ y $y_1x_1 = f$. Entonces $x = ex_1f$ y $y = fy_1e$ satisfacen ii). Luego i) $\iff$ ii). El resto se sigue de que la evaluación en e induce biyecciones $\hom_R(Re, Rf) \to eRf$ y $\hom_R(eR, fR) \to fRe$. □

Corolario 4.15.2. *Sean e_1, e_2, f_1, f_2 idempotentes tales que e_1 y e_2 son ortogonales entre sí y que f_1 y f_2 son ortogonales entre sí. Si $e_1 \sim f_1$ y $e_2 \sim f_2$, entonces $e_1 + e_2 \sim f_1 + f_2$.*

Demostración. Sean $e = e_1 + e_2$ y $f = f_1 + f_2$ Las condiciones de ortogonalidad implican que $Re = Re_1 \oplus Re_2$ y $Rf = Rf_1 \oplus Rf_2$. Por el Lema 4.15.1, $e_i \sim f_i$ implica que $Re_i \cong Rf_i$, y por tanto $Re \cong Rf$, lo que, nuevamente por el Lema 4.15.1, implica que $e \sim f$. □

Decimos que un idempotente $e \in R$ es *infinito* si existen idempotentes ortogonales e_1, e_2 tales que $e = e_1 + e_2$, $e_1 \sim e$ y $e_2 \neq 0$.

Lema 4.15.3. *Si $e \leq f \in R$ son idempotentes y e es infinito, entonces f también lo es.*

Demostración. Sea $g = f - e$ y sean e_1 y e_2 como en la definición de idempotente infinito. Entonces $Re_2 \neq 0$, $Rf = Re_1 \oplus Re_2 \oplus Rg$ y $Re_1 \oplus Rg \cong R(e_1 + e_2) \oplus Rg = Rf$. Luego $e_1 + g \sim f$, por el Lema 4.15.1. □

Lema 4.15.4. *Sean $e \sim f \in R$ idempotentes. Si e es infinito, entonces f es infinito.*

Demostración. Sean e_1, e_2 como en la definición de idempotente infinito, $x, y \in R$ como en la parte ii) del Lema 4.15.1 y $f_i = ye_ix$. Entonces

$$f_1f_2 = ye_1xye_2x = ye_1(e_1 + e_2)e_2x = ye_1e_2x = 0.$$

Cambiando f_1 por f_2 obtenemos que también $f_2f_1 = 0$. Además

$$f = yx = yex = ye_1x + ye_2x = f_1 + f_2.$$

Como $e_1 \sim e$, hay $z \in eRe_1$ y $w \in e_1Re$ tales que $zw = e$ y $wz = e_1$. Entonces

$$(ywx)(yzx) = y(wez)x = y(wz)x = ye_1x = f_1,$$
$$(yzx)(ywx) = yz(xy)wx = yzewx = yzwx = yex = yx = f.$$

□

Lema 4.15.5. *M_n no posee idempotentes infinitos.*

Demostración. Suongamos que existe un idempotente infinito $e \in M_n$ y sean e_1, e_2 como en la definición de idempotente infinito, $P = ek^n$ y $P_i = e_i k^n$ $(i = 1, 2)$. Notemos que $P = P_1 \oplus P_2$ y $P_2 \neq 0$. Sean $x \in eM_n e_1$ y $y \in e_1 M_n e$ tales que $xy = e$ y $yx = e_1$. Entonces $P \to P_1$, $a \mapsto ya$ y $P_1 \to P$, $a \mapsto xa$ son isomorfismos inversos, luego $P \cong P \oplus P_2$. Sea $\mathfrak{m} \lhd k$ un ideal maximal y sea $\pi : k \to k/\mathfrak{M} = \ell$ la proyección. Entonces $P \otimes_k \ell \cong P \otimes_k \ell \oplus P_2 \otimes_k \ell$ implica que $P_2 \otimes_k \ell = 0$, es decir que $\pi(e_2) = 0$. Luego e_2 está en la intersección de todos los ideales maximales de k, y por tanto $1 - e_2$ no está en ningún ideal maximal. Se sigue que $1 - e_2$ es inversible; como además es idempotente, $1 - e_2 = 1$, luego $e_2 = 0$, contradicción. □

4.16. Anillos simples puramente infinitos

Sea R un anillo. Decimos que R es *simple puramente infinito* si R no es un anillo de división y $\forall x \in R \setminus \{0\}$ $\exists\, a, b \in R$ tales que $axb = 1$.

La referencia para anillos simples puramente infinitos es el artículo fundamental [6].

Lema 4.16.1. *Sea R un anillo. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

i) $\forall x \in R \setminus \{0\}$ existen $a, b \in R$ tales que axb es un idempotente infinito.

ii) Todo ideal a izquierda no nulo contiene un idempotente infinito.

iii) Todo ideal a derecha no nulo contiene un idempotente infinito.

Demostración. Supongamos que R satisface i), sean $x \in R \setminus \{0\}$ y $a, b \in R$ tales que $e := axb$ es un idempotente infinito. A menos de reemplazar a y b por ea y be, podemos suponer que $ea = a$ y $be = b$. Entonces $(xba)(xba) = xbea = xba$ es un idempotente equivalente a e y por tanto infinito, que está en el ideal xR. Análogamente $bax \in Rx$ y es un idempotente infinito. Luego i) $\Longrightarrow$ ii) y iii). Supongamos que R satisface ii) y sea $x \in R \setminus \{0\}$. Entonces existe $a \in R$ tal que $e = ax$ es idempotente infinito. Entonces $e = axe$ es un idempotente infinto. La demostración de que iii) $\Longrightarrow$ i) es similar. □

Teorema 4.16.2. *Sea R un anillo simple. Son equivalentes*

i) R es simple puramente infinito.

ii) R satisface las condiciones equivalentes del Lema 4.16.1

Demostración. Supongamos que R es simple puramente infinito. Sean $0 \neq I \subset R$ un ideal a derecha (el caso $I = R$ no está excluido) y $0 \neq J \subset I$ un ideal a derecha de R tal que $J \neq R$. Sea $0 \neq x \in J$ y sean $a, b \in R$ tales que $axb = 1$. Entonces $e = bax \in aR \subset J \subset I$ es idempotente, y no es 1 pues pertenece a un ideal propio. Luego $1 - e \neq 0$; como además $e \sim axb = 1$, 1 es un idempotente infinito, lo que por el Lema 4.15.4 implica que e es infinito. Probamos así que i) del teorema implica iii) del Lema 4.16.1. Supongamos ahora que R satisface iii) del Lema 4.16.1. Entonces R posee un idempotente infinito, y por tanto no puede ser un anillo de división. Sea $x \in R \setminus \{0\}$ y sea $e = xa \in xR$ un idempotente infinito. Sean e_1, e_2 como en la definición de idempotente infinito, de modo que $e_1 R \cong eR$ y $e_2 \neq 0$. Como R es simple por hipótesis, existen $n \geq 1$, $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in R$ tales que $\sum_{i=1}^{n} a_i e_2 b_i = 1$. Entonces la función

$$(e_2 R)^n \to R, \ (y_1, \dots, y_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} a_i y_i$$

es un morfismo suryectivo de R-módulos a derecha. Luego existe un R-módulo a derecha P tal que $(e_2 R)^n \cong R \oplus P$. Por tanto

$$eR \cong eR \oplus (e_2 R)^n \cong eR \oplus R \oplus P.$$

Luego existen idempotentes $p, q \in \mathrm{End}_R(eR) = eRe$ tales que p corresponde, mediante el isomorfismo de arriba, a la projección sobre R y q a la proyección sobre $eR \oplus P$. Luego p y q son ortogonales, $p + q = e$ y la composición del isomorfismo de arriba con la proyección sobre R se restringe a un isomorfismo $pR \cong R$. Luego $p \sim 1$, y por tanto existen $b \in pR$, $a \in Rp$ tales que $ba = p$ y $ab = 1$. Como además $p \in eR \subset xR$, existe $t \in R$ tal que $p = xt$. Luego

$$1 = abab = apb = axtb.$$

□

4.17. Álgebras de Leavitt simples puramente infinitas

Lema 4.17.1. *Sean E un grafo unital, $w \in E^0$, c un ciclo basado en w y e una salida de c con $s(e) = w$. Entonces w es un idempotente infinito de $L(E)$.*

Demostración. Como $r(c) = s(c) = w$, $w = c^*c \sim cc^* \leq w$. Además $c^*e = 0$ por $CK1$, luego $(w - cc^*)e = we = e \neq 0$, y por tanto $w - cc^* \neq 0$. □

Proposición 4.17.2. *Sean E un grafo unital y $v \in E^0$. Supongamos que existe un ciclo con salida c tal que $\mathrm{supp}(c) \cap T(v) \neq \emptyset$. Entonces v es un idempotente infinito de $L(E)$.*

Demostración. Sean $v \in E^0$ y c un ciclo de E que tiene una salida $e \in E^1$ en $w = s(e)$. Supongamos que $T(v) \cap c \neq \emptyset$. Entonces existe $\mu \in \mathcal{P}(E)$ tal que $s(\mu) = v$ y $r(\mu) = w$. Entonces $\mu^*\mu = w$ y $\mu\mu^* \leq v$, luego $f = v - \mu\mu^*$ es idempotente y ortogonal a $\mu\mu^*$. Por el Lema 4.17.1, w es infinito; luego $\mu\mu^*$ es infinito por el Lema 4.15.4 y por tanto v lo es por el Lema 4.15.3. □

Corolario 4.17.3. *Si E es simple y tiene al menos un ciclo, entonces todo vértice de E es un idempotente infinito de $L(E)$.*

Teorema 4.17.4. *Sea E un grafo unital. Las siguientes propiedades son equivalentes.*

i) $L(E)$ no posee ideales básicos propios no nulos y para todo elemento no nulo $x \in L(E)$, existen $\alpha, \beta \in L(E)$, $p \in L(E)$ idempotente infinito y $0 \neq a \in k$ tales que $\alpha x \beta = ap$.

ii) E es simple y tiene al menos un ciclo.

Demostración. Si i) se satisface, entonces E es simple, por el Teorema 4.13.1. Si E no tiene ciclos, entonces por el Ejercicio 4.13.3, $L(E) \cong M_n$ para algún $n \geq 1$. Pero M_n no posee idempotentes infinitos, por el Lema 4.15.5. Luego E debe tener al menos un ciclo. Recíprocamente, si E es simple, entonces $L(E)$ no posee ideales básicos no triviales, por el Teorema 4.13.1. Si además tiene al menos un ciclo, entonces por el Corolario 4.17.3, todo vértice es un idempotente infinito. Por el Teorema de reducción 4.14.1, si $0 \neq x \in L(E)$ existen $\alpha, \beta \in \mathcal{P}(E)$, $a \in k^*$ y $v \in E^0$ tales que $av = \alpha^* x \beta$. □

Corolario 4.17.5. *Si k es un cuerpo entonces $L(E)$ es simple puramente infinito si y sólo si E es simple y tiene al menos un ciclo.*

Demostración. Basta ver que la condición i) del Teorema 4.17.4 equivale a que $L(E)$ sea simple y puramente infinito. Por la Observación 4.9.1, todo ideal de $L(E)$ es básico, luego la condición i) equivale a que $L(E)$ sea simple y cumpla la condición i) del Lema 4.16.1, lo que, a su vez, por el Teorema 4.16.2 equivale a que $L(E)$ sea simple puramente infinito. □

Capítulo 5

Teoría de Morita

La referencia básica para este capítulo es [7, Chapter II, Section 3].

5.1. Contextos de Morita

Un *contexto Morita* es una séxtupla (R, S, P, Q, f, g) donde R y S son álgebras, $P = {}_R P_S$, $Q = {}_S Q_R$ son bimódulos y $f : P \otimes_S Q \to R$ y $g : Q \otimes_R P \to S$ son morfismos de bimódulos que satisfacen

i) $f(p \otimes q) \cdot p' = p \cdot g(q \otimes p')\ \forall p, p' \in P, q \in Q.$

ii) $g(q \otimes p) \cdot q' = q \cdot f(p \otimes q')\ \forall p \in P, q, q' \in Q.$

Una *equivalencia Morita* entre R y S es un contexto Morita como arriba tal que f y g son isomorfismos. Dos álgebras R y S son *equivalentes Morita* si existe una equivalencia Morita entre R y S; escribimos $R \sim S$ para indicar que R y S son equivalentes Morita.

Observación 5.1.1. Las condiciones i) y ii) de la definición de contexto Morita nos dicen que f y g permiten darle una estructura de álgebra al conjunto de matrices

$$C = \begin{bmatrix} R & P \\ Q & S \end{bmatrix}.$$

Explícitamente, el producto en C es

$$\begin{bmatrix} a_1 & p_1 \\ q_1 & b_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & p_2 \\ q_2 & b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 a_2 + f(p_1 \otimes q_2) & a_1 p_2 + p_1 b_2 \\ q_1 a_1 + b_1 q_2 & b_1 b_2 + g(q_1 \otimes p_2) \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 5.1.2. Sean S un álgebra y $e \in S$ un idempotente. Sean $R = eSe$, $P = eS$, $Q = Se$, $f : P \otimes_S Q \to R$ y $g : Q \otimes_R P \to S$ los morfismos inducidos por la multiplicación de S. Entonces (R, S, P, Q, f, g) es un contexto Morita con f suryectivo. La imagen de g es el ideal bilátero generado por e.

Ejemplo 5.1.3. Sean R un álgebra, P un R-módulo a izquierda, $Q = \hom_R(P, R)$ y $S = \mathrm{End}_R(P)^{\mathrm{op}}$. Entonces $P \cong \hom_R(R, P)$ es un (R, S)-bimódulo y Q es un (S, R)-bimódulo por el Ejemplo vii) de 1.1.3. Es sencillo verificar que $f : P \otimes_S Q \to R$, $f(p \otimes q) = q(p)$ y $g : Q \otimes_R P \to S$, $g(q \otimes p)(p') = q(p')p$ cumplen las condiciones i) y ii) de la definición de contexto Morita.

Ejemplo 5.1.4. Sean R un álgebra, P un R-módulo a derecha, $Q = \hom_R(P, R)$ y $S = \mathrm{End}_R(P)$. Entonces $P \cong \hom_R(R, P)$ es un (S, R)-bimódulo y Q es un (R, S)-bimódulo. Es sencillo verificar que $f : Q \otimes_S P \to R$, $f(q \otimes p) = q(p)$ y $g : P \otimes_R Q \to S$, $g(p \otimes q)(p') = pq(p')$ cumplen las condiciones i) y ii) de la definición de contexto Morita con las letras P y Q intercambiadas.

Ejemplo 5.1.5. Si $\mathcal{C} = (R, S, P, Q, f, g)$ es un contexto Morita, entonces $\mathcal{C}^t = (S, R, Q, P, g, f)$ también lo es, y es una equivalencia si $\mathcal{C}$ lo es.

Un R-módulo P es un *generador* si para todo R-módulo M existen un conjunto X y un morfismo suryectivo $P^{(X)} \twoheadrightarrow M$.

Ejemplos 5.1.6.

i) Si R es un anillo y L es un R-módulo libre, entonces L es generador.

ii) Si R es semisimple y $\{S_1, \dots, S_r\}$ es un sistema completo de representantes de las clases de isomorfismo de R-módulos simples, entonces $M = \bigoplus_{i=1}^r S_i^{(X_i)}$ es generador si y sólo si $X_i \neq \emptyset \ \forall i$.

Ejercicio 5.1.7. Un R-módulo P es generador si y sólo si existen $n \geq 1$ y $\pi \in \hom_R(P^n, R)$ un morfismo suryectivo.

Proposición 5.1.8. *Sea (R, S, P, Q, f, g) un contexto Morita. Supongamos que f es suryectiva. Entonces*

i) f es un isomorfismo.

ii) ${}_RP$ y Q_R son generadores.

iii) P_S y ${}_SQ$ son proyectivos y finitamente generados.

iv) g induce isomorfismos de S-módulos

$$P \cong \hom_S(Q, S), \ Q \cong \hom_S(P, S).$$

v) Los morfismos de álgebras

$$R \to \mathrm{End}_S(P), \ R \to \mathrm{End}_S(Q)^{\mathrm{op}}$$

inducidos por las estructuras de bimódulos, son isomorfismos.

Demostración. Como f es suryectivo, existen $n \geq 1$ y $p_1, \dots, p_n \in P$ y $q_1, \dots, q_n \in Q$ tales que

$$f(\sum_{i=1}^{n} p_i \otimes q_i) = 1. \tag{5.1.9}$$

i) Sea $x = \sum_j p'_j \otimes q'_j \in \mathrm{Ker}(f)$. Entonces

$$\begin{aligned}
x =& x \cdot f(\sum_i p_i \otimes q_i) \\
=& \sum_{i,j} p'_j \otimes q'_j f(p_i \otimes q_i) \\
=& \sum_{i,j} p'_j \otimes g(q'_j \otimes p_i) q_i \\
=& \sum_{i,j} p'_j g(q'_j \otimes p_i) \otimes q_i \\
=& \sum_{i,j} f(p'_j \otimes q'_j) p_i \otimes q_i \\
=& f(\sum_j p'_j \otimes q'_j) \sum_i p_i \otimes q_i \\
=& 0.
\end{aligned}$$

ii) Sean $h_i^P : P \to R$, $h_i(p) = f(p \otimes q_i)$ y $h_i^Q : Q \to R$, $h_i^Q(q) = f(p_i \otimes q)$. Entonces $h^P = \sum_{i=1}^n h_i^P : P^n \to {}_R R$, y$h^Q = \sum_{i=1}^n h_i^P : P^n \to R_R$ son morfismos suryectivos. Como ${}_R R$ y R_R son generadores, se sigue que P y Q también lo son.
iii) Sean $\alpha : P \leftrightarrow S_S^n : \pi$, $\alpha(p) = (g(q_1 \otimes p), \ldots, g(q_n \otimes p))$, $\pi(s_1, \ldots, s_n) = \sum_i p_i s_i$. Tenemos

$$\pi(\alpha(p)) = \sum_i p_i g(q_i \otimes p) = \sum_i f(p_i \otimes q_i) p = p.$$

Análogamente, $\beta : Q \leftrightarrow {}_S S^n : \pi'$, $\beta(q) = (g(q \otimes p_1), \ldots, g(q \otimes p_n))$ y $\pi'(s) = (s_1 q_1, \ldots, s_n q_n)$ satisfacen $\pi' \circ \beta = \mathrm{id}_Q$.
iv) El morfismo g induce un morfismo de bimódulos $h : P \to \hom_S(Q, S)$, $h(p)(q) = g(q \otimes p)$. Si $p \in \mathrm{Ker}(h)$ entonces

$$p = \sum_i f(p_i \otimes q_i) p = \sum_i p_i g(q_i \otimes p) = 0.$$

Luego h es inyectiva. Sea $\alpha \in \hom_S(Q, S)$. Entonces para todo $q \in Q$,

$$\begin{aligned}
\alpha(q) &= \alpha(q \sum_i f(p_i \otimes q_i)) = \sum_i \alpha(g(q \otimes p_i) q_i) \\
&= \sum (h(p_i)\alpha(q_i))(q) = h(\sum_i p_i \alpha(q_i))(q).
\end{aligned}$$

Luego h es suryectiva. La prueba de que $Q \cong \hom_R(P, R)$ es similar.
v) Sea $\rho : R \to \mathrm{End}_S(P)$, $\rho(a)(p) = ap$; queremos probar que ρ es un isomorfismo. Si $a \in \mathrm{Ker}\rho$, entonces $a = a \sum_i f(p_i \otimes q_i) = \sum_i f(ap_i \otimes q_i) = 0$. Sea $\alpha \in \mathrm{End}_S(P)$. Para todo $p \in P$

$$\begin{aligned}
\alpha(p) &= \alpha(\sum_i f(p_i \otimes q_i) p) = \sum_i \alpha(p_i g(q_i \otimes p)) \\
&= \sum_i \alpha(p_i) g(q_i \otimes p) = \sum_i f(\alpha(p_i) \otimes q_i) p = \rho(\sum_i f(\alpha(p_i) \otimes q_i))(p).
\end{aligned}$$

Luego ρ es suryectiva. La prueba de que $\mu : R \to \mathrm{End}_S(Q)^{\mathrm{op}}$ es un isomorfismo es similar. $\square$

Ejercicio 5.1.10. Completar la demostración de las partes iv) y v) de la Proposición 5.1.8.

Ejemplo 5.1.11. Aplicando la Proposición 5.1.8 en el Ejemplo 5.1.2 obtenemos que $eS \otimes_S Se \cong eSe$.

Observación 5.1.12. Aplicando la Proposición 5.1.8 al contexto transpuesto (S, R, Q, P, g, f) del Ejemplo 5.1.5, obtenemos que si g es suryectiva entonces es un isomorfismo, ${}_RP$ y Q_R son proyectivos finitamente generados, P_S y ${}_SQ$ son generadores, $S \cong \mathrm{End}_R(P)^{\mathrm{op}}$ y $R \cong \mathrm{End}_R(Q)$.

Teorema 5.1.13. *Sea (R, S, P, Q, f, g) una equivalencia Morita.*

i) Hay isomorfismos canónicos

$$\mathcal{Z}(R) \cong \mathrm{End}_{R\otimes S^{\mathrm{op}}}(P) \cong \mathcal{Z}(S) \cong \mathrm{End}_{S\otimes R^{\mathrm{op}}}(Q) \cong \mathcal{Z}(S).$$

ii) Las funciones

$$\begin{aligned}
\{I \subset R_R \,:\, \textit{ideal}\,\} &\to \{M \subset P \,:\, S - \textit{submódulo}\},\ I \mapsto I \cdot P \\
\{I \subset {}_SS \,:\, \textit{ideal}\,\} &\to \{M \subset P \,:\, R - \textit{submódulo}\},\ I \mapsto P \cdot I \\
\{J \subset S_S \,:\, \textit{ideal}\,\} &\to \{N \subset Q \,:\, R - \textit{submódulo}\},\ J \mapsto J \cdot Q \\
\{J \subset {}_RR \,:\, \textit{ideal}\,\} &\to \{N \subset Q \,:\, S - \textit{submódulo}\},\ J \mapsto Q \cdot J
\end{aligned}$$

son isomorfismos de reticulados. Bajo estas biyecciones, los ideales biláteros corresponden a los sub-bimódulos. En particular, los reticulados de ideales biláteros de R y S son isomorfos.

Demostración. i) Sean

$$\begin{aligned}
\alpha : \mathcal{Z}(R) &\to \mathrm{End}_{R\otimes S^{\mathrm{op}}}(P),\ z \mapsto (p \mapsto zp) \\
\beta : \mathrm{End}_{R\otimes S^{\mathrm{op}}}(P) &\to \mathcal{Z}(R),\ \phi \mapsto f(\sum_i \phi(p_i) \otimes q_i).
\end{aligned}$$

Es inmediato que $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}_{\mathcal{Z}(R)}$. Además si $p \in P$,

$$\begin{aligned}
\alpha(\beta(\phi))(p) = f(\sum_i \phi(p_i) \otimes q_i))p &= \sum_i \phi(p_i) g(q_i \otimes p) \\
&= \sum_i \phi(p_i g(q_i \otimes p)) = \sum_i \phi(f(p_i \otimes q_i)p) \\
&= (\sum_i f(p_i \otimes q_i))\phi(p) = \phi(p).
\end{aligned}$$

El resto de los isomorfismos de i) se prueba en forma similar.
ii) Por la Proposición 5.1.8 (aplicada con g y f intercambiados), ${}_RP$ es proyectivo y por tanto playo. Luego $I \otimes_R P \cong I \cdot P$ para todo ideal $I \subset R_R$. Del mismo modo, ${}_SQ$ es proyectivo, luego $\otimes_S Q$ define una función en sentido inverso que también preserva el orden, y que es inversa a izquierda de la anterior, ya que $P \otimes_S Q \cong R$. Del mismo modo se sigue del isomorfismo $Q \otimes_R P \cong S$ que la composición inversa también da la identidad. Ambas funciones inversas envían sub-bimódulos en sub-bimódulos. Luego la función del teorema es un isomorfismo de reticulados bajo el cual los ideales biláteros se corresponden biyectivamente con los sub-bimódulos. El resto de las afirmaciones de ii) se sigue en forma similar. □

Observación 5.1.14. Por la parte iii) de la Proposición 5.1.8, los S-módulos P_S y ${}_SQ$ son proyectivos y finitamente generados. Luego por [11, Ejercicio 7b) de la Práctica 6], son isomorfos a sus dobles duales respectivos. Luego se sigue de la parte iv) de la Proposición que

$$\hom_S(P,S) \cong Q, \quad , \hom_S(Q,S) \cong P$$

como S-módulos.

5.2. Módulos que inducen equivalencias Morita

Sean R un anillo y M, N R-módulos a derecha. Sean

$$\begin{aligned} M^\vee &= \hom_R(M,R) \\ \varepsilon = \varepsilon^{M,N} &: N \otimes_R M^\vee \to \hom_R(M,N), \\ \varepsilon_{y,\phi}(x) &= y \cdot \phi(x). \end{aligned}$$

Si $f : M_2 \to M_1$ y $g : N_1 \to N_2$ son morfismos de módulos, sea

$$\mathrm{ad}(g,f) : \hom_R(M_1,N_1) \to \hom_R(M_2,N_2), \ \mathrm{ad}(g,f)(T) = g \circ T \circ f.$$

Lema 5.2.1. *Sean $f : M_2 \to M_1$ y $g : N_1 \to N_2$ morfismos de R-módulos a derecha. El diagrama siguiente conmuta.*

$$\begin{tikzcd} N_1 \otimes_R M_1 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "g\otimes f^\vee"] & \hom_R(M_1,N_1) \arrow[d, "\mathrm{ad}(g,f)"] \\ N_2 \otimes_R M_2 \arrow[r, "\varepsilon"] & \hom_R(M_2,N_2) \end{tikzcd}$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \varepsilon \circ (g \otimes f^\vee)(y \otimes \phi)(z) =& \varepsilon(g(y) \otimes (\phi \circ f))(z) \\ =& g(y)\phi(f(z)) = g(y\phi(f(z))) \\ =& g(\varepsilon_{y,\phi}(f(z))) = (g \circ \varepsilon_{y,\phi} \circ f)(z) \\ =& (\mathrm{ad}(g,f) \circ \varepsilon)(y \otimes \phi)(z). \end{aligned}$$

□

Proposición 5.2.2. *Sean R un anillo y P, N R-módulos a derecha. Sea $\varepsilon := \varepsilon^{P,N}$: $N \otimes_R P^\vee \to \hom_R(P,N)$. Si P es proyectivo y finitamente generado, ε es un isomorfismo.*

Demostración. Como P es proyectivo y finitamente generado, es sumando directo de un módulo libre y finitamente generado. Luego existen $n \geq 1$ y morfismos de R-módulos $\iota : P \to R^n$ y $\pi : R^n \to P$ tales que $\pi \circ \iota = \mathrm{id}_P$. Aplicando $^\vee := \hom_R(-,P)$ obtenemos $\iota^\vee \circ \pi^\vee = \mathrm{id}_{P^\vee}$. Luego

$$\begin{aligned} (\mathrm{id}_N \otimes \iota^\vee) \circ (\mathrm{id}_N \otimes \pi^\vee) &= \mathrm{id}_{N \otimes_R P^\vee} \\ \mathrm{ad}(\mathrm{id}_N, \iota) \circ \mathrm{ad}(\mathrm{id}_N, \pi) &= \mathrm{id}_{\hom_R(P,N)} \, . \end{aligned}$$

Por tanto, en virtud del Lema 5.2.1 y del hecho de que un retracto de un isomorfismo es un isomorfismo, basta probar que $\varepsilon : N \otimes (R^n)^\vee \to \hom_R(R^n, N)$ es un isomorfismo. Sean $\mathcal{E} = \{\chi_1, \dots, \chi_n\}$ la base canónica de R^n y $\mathcal{E}^\vee = \{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ la base dual. Consideremos los isomorfismos $\phi : R^n \to (R^n)^\vee$, $\phi(\chi_i) = \delta_i$, $\psi : \hom_R(R^n, N) \to N \otimes_R R^n$, $\psi(T)_i = T(\chi_i) \otimes \chi_i$. Vemos que $\psi \circ \varepsilon \circ (\mathrm{id}_N \otimes \phi) = \mathrm{id}_{N \otimes_R R^n}$, luego ε es un isomorfismo. □

Sea P un R-módulo a derecha y sea

$$\tau : P^\vee \otimes_{\mathrm{End}_R(P)} P \to R, \ \ \tau(\phi \otimes p) = \phi(p). \tag{5.2.3}$$

Proposición 5.2.4. *El morfismo (5.2.3) es suryectivo si y sólo si P es un generador.*

Demostración. Por el Ejercicio 5.1.7 P es generador si y sólo si existen $n \geq 1$ y un morfismo suryectivo $\phi : P^n \to R$. Dar un morfismo $P^n \to R$ equivale a dar n elementos $\phi_1, \cdots, \phi_n \in P^\vee$. El morfismo ϕ es suryectivo si y sólo si 1 está en la imagen, lo que equivale a decir que existen $p_1, \dots, p_n \in P$ tales que

$$1 = \sum_{i=1}^n \phi_i(p_i) = \tau(\sum_{i=1}^n \phi_i \otimes p_i). \tag{5.2.5}$$

Por otro lado la suryectividad de τ también equivale a que $1 \in \mathrm{Im}(\tau)$, que es lo mismo que decir que existen p_i y ϕ_i que cumplen (5.2.5). □

Lema 5.2.6. *Sea (R, S, P, Q, f, g) un contexto Morita. Sean $P^\vee = \hom_R(P, R)$, $Q^\vee = \hom_S(P, S)$, $\bar{f} : Q \to P^\vee$, $\bar{f}(q)(p) = f(p \otimes q)$, $\bar{g} : P \to Q^\vee$, $\bar{g}(p)(q) = g(q \otimes p)$, $\mu : R \to \mathrm{End}_S(Q)^{\mathrm{op}}$ y $\rho : S \to \mathrm{End}_R(P)^{\mathrm{op}}$ los morfismos inducidos por las estructuras de bimódulo, y*

$$\mu' : Q \otimes_R Q^\vee \to Q \otimes_{\mathrm{End}_S(Q)^{\mathrm{op}}} Q^\vee = Q^\vee \otimes_{\mathrm{End}_S(Q)} Q$$
$$\rho' : P \otimes_S P^\vee \to P \otimes_{\mathrm{End}_R(P)^{\mathrm{op}}} P^\vee = P^\vee \otimes_{\mathrm{End}_R(P)} P$$

los morfismos inducidos por μ y ρ. Entonces los siguientes diagramas conmutan.

$$\begin{tikzcd}
P \otimes_S P^\vee \arrow[r, "\rho'"] & P^\vee \otimes_{\mathrm{End}_R(P)} P \arrow[d, "\tau"] \\
P \otimes_S Q \arrow[u, "\mathrm{id}_P \otimes \bar{f}"] \arrow[r, "f"] & R
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
Q \otimes_R Q^\vee \arrow[r, "\mu'"] & Q^\vee \otimes_{\mathrm{End}_S(Q)} Q \arrow[d, "\tau"] \\
Q \otimes_R P \arrow[u, "\mathrm{id}_Q \otimes \bar{g}"] \arrow[r, "g"] & S.
\end{tikzcd}$$

Demostración. Verificación directa. □

Teorema 5.2.7. *Sean R un álgebra, P un R-módulo a derecha y $S = \mathrm{End}_R(P)$. Sea $\mathcal{C} := (R, S, Q, P, f, g)$ el contexto Morita del Ejemplo 5.1.4. Entonces $\mathcal{C}$ es una equivalencia Morita si y sólo si P es proyectivo finitamente generado y generador.*

Demostración. Si $\mathcal{C}$ es una equivalencia Morita entonces por la Proposición 5.1.8 y la Observación 5.1.12, P es proyectivo finitamente generado y generador. Por las Proposiciones 5.2.2 y 5.2.4, la recíproca también vale. □

Corolario 5.2.8. *Sean R un álgebra y $n \geq 1$. Entonces R y $M_n R$ son equivalentes Morita.*

Demostración. El contexto Morita $(R, M_n R, (R^n)^\vee, R^n, \tau, \varepsilon)$ es una equivalencia Morita por el Teorema 5.2.7. □

5.3. Contextos, idempotentes y esquinas

Sean S un anillo y $e \in S$ un idempotente y $SeS \lhd S$ el ideal bilátero que genera. Decimos que e es *pleno* si $SeS = S$. El anillo $eSe \subset S$ se llama *esquina* de e en S. Decimos que un anillo R es una *esquina* de S si existe un idempotente $e \in S$ tal que $R \cong eSe$; R es una esquina *plena* si e es pleno.

Lema 5.3.1. *Sean $n \geq 1$ y $a \in M_n R$. Sea $I = \langle a_{i,j} : 1 \leq i, j \leq n \rangle \lhd R$ el ideal bilátero generado por los coeficientes de a. Entonces $(M_n R) a (M_n R) = M_n I$.*

Demostración. Como R-módulo, tanto a derecha como a izquierda, $M_n R$ es libre con base $\varepsilon_{i,j}$ $1 \leq i, j \leq n$. Luego $M_n R a M_n R$ es el R-bimódulo generado por los elementos $\varepsilon_{p,i} a \varepsilon_{j,q} = \varepsilon_{p,q} a_{i,j}$, que es precisamente $M_n I$. □

Corolario 5.3.2. *Un idempotente $e \in M_n R$ es pleno si y sólo si*

$$\langle e_{i,j} : 1 \leq i, j \leq n \rangle = R.$$

Corolario 5.3.3. *Si R es simple todo idempotente no nulo $e \in M_n R$ es pleno.*

Sean $n \geq 1$ y $e \in M_n R$ idempotente. Escribimos

$$eR^n = \{e \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : (x_1, \dots, x_n) \in R^n\}$$
$$R^n e = \{\begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} \cdot e : (x_1, \dots, x_n) \in R^n\}.$$

Lema 5.3.4. *La función*

$$R^n e \to \hom_R(eR^n, R), \ [x] \mapsto ([y] \mapsto [x] \cdot [y])$$

es un isomorfismo de R-módulos.

Demostración. Tenemos $eR^n = \operatorname{Im}(e) \cong R^n / \operatorname{Ker}(e) = R^n / \operatorname{Im}(1-e) = R^n/(1-e)R^n$. Luego dar un elemento de $\hom_R(eR^n, R)$ equivale a dar un morfismo $\phi : R^n \to R$, $\phi(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$ tal que $\sum_{i=1}^n a_i (ex)_i = \sum_{i=1}^n a_i x_i$. Evaluando en los vectores de la base canónica obtenemos $a_i = \sum_{j=1}^n a_j e_{j,i}$, es decir, $a = ae \in R^n e$. □

Corolario 5.3.5. $\hom_R(R^n e, R) \cong eR^n$.

Demostración. Se sigue del Lema 5.3.4 y de [11, Ejercicio 7b), Práctica 6]. □

Lema 5.3.6. *Sea $P = eR^n$ y sea $\tau : \mathrm{Hom}_R(P, R) \otimes_{\mathrm{End}_R(P)} P \to R$ como en (5.2.3). Entonces $\mathrm{Im}(\tau)$ es el ideal bilátero generado por los coeficientes de la matriz e.*

Demostración. Por el Lema 5.3.4, la imagen de τ es el k-submódulo generado por los elementos $[x]e[y]$ con $[x] \in R^{1\times n}$ y $[y] \in R^{n\times 1}$. Sea $\mathcal{B} = \{\chi_i : 1 \leq i \leq n\}$ la base canónica de R^n. Como (R, R)-sub-bimódulo, $\mathrm{Im}(\tau)$ es generado por los elementos de la forma $[\chi_i]e[\chi_j] = e_{i,j}$ □

Corolario 5.3.7. *τ es suryectiva si y sólo si e es pleno.*

Corolario 5.3.8. *Si R es simple, todo R-módulo proyectivo finitamente generado no nulo es generador.*

Teorema 5.3.9. *Sean R y S álgebras.*

i) Existe un contexto Morita (R, S, P, Q, f, g) con f suryectiva si y sólo si existe $n \geq 1$ tal que R es una esquina de $M_n S$.

ii) R y S son equivalentes Morita si y sólo si existe $n \geq 1$ tal que R es una esquina plena de $M_n S$.

Demostración. Si $\mathcal{C} = (R, S, P, Q, f, g)$ es un contexto con f suryectiva, entonces por la Proposición 5.1.8, P_S es proyectivo y finitamente generado; luego existen $n \geq 1$ y $e \in M_n R$ idempotente tal que $P \cong eS^n$. Entonces $\mathrm{End}_S(P) \cong e(M_n S)e$, y de nuevo por la Proposición 5.1.8, $R \cong e(M_n S)e$. Si $\mathcal{C}$ es una equivalencia, tenemos además que $g : Q \otimes_R P \to S$ es un isomorfismo, lo que por el Lema 5.2.6 implica que $\tau : Q^\vee \otimes_{\mathrm{End}_R(P)} P \to S$ es un isomorfismo. Recíprocamente si $\phi : R \xrightarrow{\sim} e(M_n S)e$ es un isomorfismo para algún $n \geq 1$ y algún idempotente e, entonces $P = eS^n$ es un (R, S)-bimódulo proyectivo (donde R actúa a izquierda a través de ϕ) y finitamente generado como S-módulo y $\varepsilon : P \otimes_S P^\vee \cong \mathrm{End}_S(P) = eM_n(S)e$ es un isomorfismo. Entonces $f = \phi^{-1} \circ \varepsilon$ es un isomorfismo y $(R, S, P, P^\vee, f, \tau)$ es un contexto Morita. Si además e es pleno, entonces τ es suryectiva, por el Corolario 5.3.7 y por tanto es un isomorfismo, por la Proposición 5.1.8 aplicada al contexto transpuesto. □

5.4. Invariantes Morita

Una propiedad $\mathfrak{P}$ referida a k-álgebras se dice *invariante Morita* si toda vez que R y S son equivalentes Morita, entonces R cumple $\mathfrak{P}$ si y sólo si S la cumple.

Sea $X = (X, \leq)$ un poset. Una *cadena* en X es un subconjunto totalmente ordenado. Decimos que X es *noetheriano* si toda cadena en X tiene máximo, y que es *artiniano* si toda cadena tiene mínimo. Un módulo sobre un anillo es noetheriano o artiniano a izquierda si el poset de sus ideales a izquierda lo es. Un anillo es noetheriano (resp. artiniano) a derecha si R_R lo es; esto implica que todo R-módulo a derecha finitamente generado es noetheriano (resp. artiniano). R es noetheriano (resp. artiniano) a izquierda si R^{op} lo es.

Proposición 5.4.1. *La simplicidad, la noetherianidad y la artinianidad a izquierda y a derecha son invariantes Morita.*

Demostración. Sea $\mathcal{C} = (R, S, P, Q, f, g)$ una equivalencia Morita. Por el Teorema 5.1.13 los reticulados de ideales biláteros de R y S son isomorfos, luego R es simple si y sólo si S lo es. Por la Proposición 5.1.8 aplicada a $\mathcal{C}$ y a su transpuesta, ${}_RP$, P_S, ${}_SQ$ y Q_R son proyectivos y finitamente generados. Por el Teorema 5.1.13, los reticulados de ideales a derecha y a izquierda de S son isomorfos a los reticulados de R-submódulos al mismo lado de P y Q, respectivamente. Como estos R-módulos son finitamente generados, los reticulados respectivos son noetherianos o artinianos si R es noetheriano o artiniano. Por tanto S es noetheriano o artiniano si R lo es, y al mismo lado. $\square$

Lema 5.4.2. *Sea $\mathfrak{P}$ una propiedad de álgebras invariante por isomorfismo de álgebras. Entonces $\mathfrak{P}$ es invariante Morita si y sólo si, toda vez que R tiene $\mathfrak{P}$ y $e \in R$ es un idempotente pleno, entonces M_2R y eRe tienen $\mathfrak{P}$.*

Demostración. Como $\mathfrak{P}$ es invariante por isomorfismos, se sigue del Teorema 5.3.9 que $\mathfrak{P}$ es invariante Morita si y sólo si es preservada por esquinas plenas, i.e. si R tiene $\mathfrak{P}$ y $e \in R$ es idempotente pleno entonces eRe la tiene y por anillos de matrices, i.e. si R la tiene y $n \geq 1$ entonces M_nR también la tiene. Sea p_n la matriz identidad de M_nR; por el Corolario 5.3.2, p_n es un idempotente pleno de M_mR para todo $m \geq n$. Luego si $\mathfrak{P}$ cumple las condiciones del lema y R tiene $\mathfrak{P}$, entonces $M_nR = p_nM_{2^n}Rp_n \cong p_nM_2(M_2(\cdots(M_2R)\cdots))p_n$ también la tiene. $\square$

Ejercicio 5.4.3. Decidir cuáles de las siguientes propiedades sobre un álgebra R son invariantes Morita.

i) R es semisimple.

ii) Todo R-módulo proyectivo finitamente generado es libre.

iii) Todo submódulo de un R-módulo libre finitamente generado es libre.

iv) Todo submódulo de un R-módulo proyectivo finitamente generado es proyectivo.

v) El morfismo estructural $k \to \mathcal{Z}(R)$ es un isomorfismo.

5.5. Simplicidad puramente infinita

En esta sección demostramos el teorema de Ara, Goodearl y Pardo [6] que dice que la simplicidad puramente infinita es invariante Morita. Primero necesitamos algunos resultados previos probados en *loc. cit.*.

Un módulo M sobre un anillo R es *directamente infinito* si existe un R-módulo $N \neq 0$ tal que $M \cong M \oplus N$.

Lema 5.5.1. *Sea $e \in R$ un idempotente. Entonces e es infinito si y sólo si eR es directamente infinito, si y sólo si Re es directamente infinito.*

Demostración. Supongamos que e es infinito y escribamos $e = e_1 + e_2$ como en la definición de idempotente infinito. Entonces $e_2 \neq 0$, $eR \cong e_1R$, $Re \cong Re_1$. Supongamos ahora que eR es directamente infinito y sean $I \cong eR$ y $J \neq 0$

ideales a derecha tales que $eR = I \oplus J$. Entonces existen únicos $e_1 \in I$ y $e_2 \in J$ tales que $e = e_1 + e_2$. Observemos que, como $e_i \in eR$, $ee_i = e_i$. Luego

$$e_1 = ee_1 = e_1^2 + e_2 e_1 = e_1 + e_2 e_1$$

y por tanto $e_2 e_1 = 0$. Intercambiando e_1 y e_2 obtenemos que $e_1 e_2 = 0$. Además $e_2 \neq 0$ porque $J \neq 0$ y $e \sim e_1$ por el Lema 4.15.1. En conclusión, e es infinito si eR lo es. Aplicando esto a R^{op} obtenemos que e es infinito si Re lo es. $\square$

Proposición 5.5.2. *Sean R un anillo simple, P y Q R-módulos proyectivos finitamente generados. Si P es directamente infinito, entonces existe $M \neq 0$ tal que $P \cong Q \oplus M$.*

Demostración. Sea $N \neq 0$ tal que $P \cong P \oplus N$. Entonces N es proyectivo y finitamente generado y por tanto es generador, por el Corolario 5.3.8. Luego como Q es finitamente generado, existen $n \geq 1$ y un morfismo suryectivo $N^n \to Q$. Como además Q es proyectivo, $N \cong Q \oplus M_1$ para algún módulo M_1. Luego

$$P \cong P \oplus N^n \cong P \oplus Q \oplus M_1.$$

Notamos que $M = P \oplus M_1$ cumple lo pedido. $\square$

Proposición 5.5.3. *Sean R un anillo simple puramente infinito y P un módulo proyectivo no nulo finitamente generado. Entonces P es directamente infinito.*

Demostración. Por el Teorema 4.16.2, existe $e \in R$ idempotente infinito. Entonces eR y Re son directamente infinitos por el Lema 5.5.1. Si P es, digamos, módulo a derecha, entonces por la Proposición 5.5.2, P es isomorfo a un sumando directo I de eR; en particular $eR = I \oplus J$ para algún ideal a derecha J. Como I es un ideal a derecha no nulo, contiene un idempotente infinito f, por el Teorema 4.16.2. Luego por la Proposición 5.5.2 existe un ideal a derecha K tal que $eR = K \oplus fR$. Entonces $I = fR \oplus K \cap I$. Como f es infinito, existe $N \neq 0$ tal que $fR \cong fR \oplus N$. Luego $I \cong fR \oplus N \oplus K \cap I = I \oplus N$. Por tanto I es directamente infinito y P, que era isomorfo a I, también lo es. $\square$

Corolario 5.5.4. *Si R es simple puramente infinito, entonces todo idempotente de R es infinito.*

Demostración. Se sigue de la Proposición 5.5.3 y del Lema 5.5.1. $\square$

Teorema 5.5.5. *La simplicidad puramente infinita es invariante Morita.*

Demostración. Sea R simple puramente infinito. Como R contiene un idempotente infinito f y $1 \geq f$, 1 es infinito. Luego $R \cong R \oplus M$ con $M \neq 0$, por el Lema 5.5.1. En particular, R no es artiniano. Luego si $0 \neq e \in R$ es idempotente, eRe es simple y no es artiniano por la Proposición 5.4.1; en particular, no es un anillo de división. Si $0 \neq x \in eRe$, como R es simple puramente infinito, existen $a, b \in R$ tales que $axb = 1$. Entonces $eaexebe = eaxbe = e$ y $eae, ebe \in eRe$. Probamos así que eRe es simple puramente infinito. Además por las Proposiciones 5.5.2 y 5.5.3 $R \cong R^2 \oplus N$ para algún R-módulo a derecha no nulo N. Entonces $R^2 \cong fR$ para algún idempotente $0 \neq f \in R$, y por tanto $M_2 R = \operatorname{End}_R(R_R^2) \cong f \operatorname{End}_R(R_R) f = fRf$ es simple puramente infinito por lo que acabamos de probar. $\square$

Capítulo 6

Grafos y equivalencias Morita

En este capítulo probaremos que ciertas transformaciones que pueden hacerse a un grafo no cambian la clase de equivalencia Morita del álgebra de Leavitt. La referencia básica del capítulo es el artículo [2].

6.1. Remoción de fuentes

Sea E un grafo y sea $v \in \operatorname{sour}(E) \setminus \operatorname{sing}(E)$. Sea $E_{\setminus v}$ el grafo con vértices $E^0_{\setminus} = E^0 \setminus \{v\}$, $E^1_{\setminus v} = E^1 \setminus s^{-1}\{v\}$, con las funciones de salida y llegada obtenidas por restricción de las de E. La operación $E \mapsto E_{\setminus v}$ es la *remoción de la fuente* v.

Proposición 6.1.1. *Sea E un grafo unital y sea $v \in \operatorname{sour}(E) \setminus \operatorname{sing}(E)$. Entonces $1 - v$ es un idempotente pleno de $L(E)$ y la inclusión $E_{\setminus v} \subset E$ induce un $*$-isomorfismo $L(E_{\setminus v}) \xrightarrow{\sim} (1-v)L(E)(1-v)$. En particular, $L(E)$ y $L(E_{\setminus v})$ son equivalentes Morita.*

Demostración. Como $v \notin r(E^1)$, $w \leq 1 - v$ para todo $w \in r(E^1)$. Luego $\alpha\beta^* = \alpha(1-v)\beta^*$ para todo par de caminos $\alpha, \beta \in \mathcal{P}(E)$ con $r(\alpha) = r(\beta)$. Dado que los elementos $\alpha\beta^*$ con $r(\alpha) = r(\beta)$ generan a $L(E)$ como k-módulo, tenemos que $L(E) = L(E)(1-v)L(E)$. Luego $1 - v$ es pleno. Sea

$$L(E) \supset X := E^0 \setminus \{v\} \cup E^1 \setminus s^{-1}\{v\} \cup (E^1 \setminus s^{-1}\{v\})^*.$$

Para todo $x \in X$, tenemos

$$x = (1-v)x(1-v)$$

En otras palabras $X \subset R := (1-v)L(E)(1-v)$. Vemos que los elementos de X cumplen las relaciones de la Proposición 3.5.11 y por tanto la identidad de X induce un morfismo de álgebras $\phi : L(E_{\setminus v}) \to R$. Observemos que si α y β son caminos con $r(\alpha) = r(\beta)$ entonces $(1-v)\alpha\beta^*(1-v)$ es $\alpha\beta^*$ si $s(\alpha) \neq v \neq s(\beta)$ y es 0 en otro caso. Luego $R \subset L(E)$ es el submódulo generado por el conjunto

$$Y = \{\alpha\beta^* \,:\, r(\alpha) = r(\beta),\, s(\alpha) \neq v \neq s(\beta)\}.$$

Luego $p(\mathcal{B}'') \cap Y$ es base de R. Se sigue que ϕ manda una base en una base y por tanto es un isomorfismo. $\square$

Corolario 6.1.2. *Para todo grafo unital E existe un grafo unital F tal que $|F^i| \leq |E^i|$ para $i = 0, 1$, $\operatorname{sour}(F) \setminus \operatorname{sing}(F) = \emptyset$ y tal que $L(E) \sim L(F)$. Un tal F es simple o simple y puramente infinito si E lo es.*

Demostración. Aplicando reiteradamente la operación de remoción de fuentes se llega en finitos pasos a un grafo F sin fuentes que no sean además vértices singulares. Por la Proposición 6.1.1, $L(E) \sim L(F)$. Si E es simple o simple y puramente infinito, y ℓ es un cuerpo, entonces $L_\ell(E)$ tiene la misma propiedad; luego $L_\ell(F)$ la tiene, por la Proposición 5.4.1 y el Teorema 5.5.5, y entonces también la tiene F, por los Corolarios 4.13.2 y 4.17.5. □

Sea E un grafo finito. Decimos que E es *irreducible* si para todo par de vértices $v, w \in E^0$, existe un camino en E que empieza en v y termina en w. Decimos que E es *esencial* si no tiene pozos ni fuentes, y que es *trivial* si consiste sólo de un ciclo, sin otros vértices o aristas.

Proposición 6.1.3. *Las siguientes afirmaciones sobre un grafo finito E son equivalentes.*

i) E es irreducible, esencial y no trivial.

ii) E es simple puramente infinito y no tiene fuentes.

Demostración. Supongamos que E satisface i). Como E es finito y esencial, tiene al menos un camino cerrado. Como además es irreducible, es cofinal. Como es irreducible y no trivial, todo ciclo tiene salida. Luego E es simple puramente infinito y no tiene fuentes por ser esencial. Recíprocamente si E satisface ii), entonces no tiene fuentes por hipótesis y no tiene pozos pues es cofinal y tiene al menos un ciclo. Luego es esencial; como además es finito, todo vértice está en un camino cerrado y por tanto en un ciclo. Luego la cofinalidad de E implica que es irreducible. Finalmente, como todo ciclo en E tiene salida, E no puede ser trivial. □

Corolario 6.1.4. *Sea E un grafo finito simple puramente infinito. Entonces existe un grafo irreducible, esencial y no trivial F con $|F^i| \leq |E^i|$ $(i = 0, 1)$ tal que $L(E) \sim L(F)$.*

Demostración. Por la Proposición 6.1.3, el grafo F del Corolario 6.1.2 cumple lo pedido. □

6.2. Expansión en un vértice

Sean E un grafo y $v \in E^0$. Sean $E_v^0 = E_v \sqcup \{\overline{v}\}$, $E_v^1 = E^1 \sqcup \{f\}$. La *expansión de E en v* es el grafo E_v con funciones de salida y llegada $s_v, r_v : E_v^1 \to E_v^0$ definidos como sigue.

$$s_v(e) = \begin{cases} s(e) & \text{si } s(e) \neq v \\ \overline{v} & \text{si } s(e) = v \\ v & \text{si } e = f \end{cases} \qquad r_v(e) = \begin{cases} r(e) & \text{si } e \neq f \\ \overline{v} & \text{si } e = f. \end{cases}$$

Si E y F son grafos y existe $v \in E^0$ tal que $F = E_v$, decimos que F es una *epansión* de E y que E es una *contracción* de F.

Observación 6.2.1. Un grafo unital E es la expansión de un grafo F si y sólo si tiene una arista f que no es un lazo y es tal que $s^{-1}(s(f)) = \{f\}$ y $r^{-1}(r(f)) = \{f\}$. En otras palabras E es una expansión si tiene una arista que no es un lazo y es tal que al quitarla su salida resulta un pozo y su llegada una fuente. En términos de la matriz de incidencia $A = A_E$, esto significa que A tiene una fila con un único coeficiente no nulo, este coeficiente no está en la diagonal, es igual a 1, y es también el único coeficiente no nulo de su columna.

Proposición 6.2.2. *Sean E un grafo unital y $v \in E^0$. Entonces $p = \sum_{w \in E^0} w$ es un idempotente pleno de $L(E_v)$ y $L(E) \cong pL(E_v)p$. En particular, $L(E) \sim L(E_v)$.*

Demostración. Como f es la única arista de E_v con $s_v(f) = v$, por CK2 tenemos $v = ff^*$ en $L(E_v)$. Por la misma razón, si α, β son caminos en E_v con $r(\alpha) = r(\beta) = \overline{v}$, entonces $\alpha = \alpha' f$ y $\beta = \beta' f$ con $r(\alpha') = r(\beta') = v$, y

$$\alpha\beta^* = \alpha'(\beta')^* = \alpha' p(\beta')^* \in L(E_v)pL(E_v).$$

Por tanto p es pleno. Sea $X := E^0 \cup E^1 \cup (E^1)^*$ y sea $\phi : X \to L(E_v)$ definido como sigue.

$$\phi(x) = \begin{cases} xf & \text{si } x \in s^{-1}\{v\} \\ f^*x & \text{si } x^* \in s^{-1}\{v\} \\ x & \text{si no.} \end{cases}$$

Es sencillo verificar que los elementos $\{\phi(x) : x \in X\}$ satisfacen las relaciones de la Proposición 3.5.11. Por tanto ϕ se extiende a un morfismo $\phi : L(E) \to L(E_v)$ cuya imagen está contenida en $R := pL(E_v)p$. Recordemos que en el Corolario 4.3.6 obtuvimos una base del álgebra de Leavitt de un grafo que depende de elegir una arista $e_w \in s^{-1}\{w\}$ para cada $w \in E^0$. Fija una tal elección para E, hacemos una elección para E_v de la siguiente forma. Si $w \in E^0 \setminus \{v\}$, elegimos el mismo e_w. Si $w = \overline{v}$, elegimos e_v, y si $w = v$, tomamos la única elección posible, que es la arista f. Es claro que para esta elección, ϕ envía la base de $L(E)$ del Corolario 4.3.6 inyectivamente dentro de la correspondiente base de $L(E_v)$. Luego ϕ es inyectiva. Sea $\xi = \alpha\beta^*$ un elemento de la base de $L(E_v)$. Entonces $r(\alpha) \neq v^*$ y $p\xi p$ es no nulo si y sólo si $s(\alpha) \neq \overline{v} \neq s(\beta)$, en cuyo caso es igual a ξ. Luego aquellos ξ de la base de $L(E_v)$ con $s(\alpha) \neq \overline{v} \neq s(\beta)$ forman una base de R. Si un camino no sale de $\overline{v}$ y su última arista no es f, entonces o bien no pasa por $\overline{v}$ o bien contiene un camino de la forma fe para algún $e \in s^{-1}\{v\}$. En cualquiera de los casos, está en la imagen de ϕ. Luego todo elemento de la base de R está en la imagen de ϕ. □

Corolario 6.2.3. *Para todo grafo unital E existe un grafo unital F con $|F^i| \leq |E^i|$ para $i = 0, 1$ y tal que si $e \in E^1$ y $s(e) \neq r(e)$ entonces* $\max\{|s^{-1}\{s(e)\}|, |r^{-1}\{r(e)\}|\} \geq 2$.

Demostración. Contrayendo sucesivamente en todos los vértices de donde salga una sola arista, se llega a un grafo F como en la proposición. El argumento del Corolario 6.1.2 muestra que F es simple o puramente infinito si E lo es. □

6.3. Etiquetamiento de aristas y particiones

Sea E un grafo. Un *etiquetamiento* de las aristas de E consiste de un conjunto $\mathscr{L}$ y una función suryectiva $\theta : E^1 \twoheadrightarrow \mathscr{L}$. Un etiquetamiento induce una partición $\mathfrak{P} = \{\mathfrak{P}_l : l \in \mathscr{L}\}$ en E^1, la que a su vez induce, para cada $v \in E^0$, una partición $\mathfrak{P}^r(v) := \{\mathcal{E}_l^v : l \in \mathscr{L}\}$ con $\mathcal{E}_l^v = \mathfrak{P}_l \cap r^{-1}\{v\}$, y una una partición $\mathfrak{P}^s(v) := \{\mathcal{E}_v^l : l \in \mathscr{L}\}$ con $\mathcal{E}_v^l = \mathfrak{P}_l \cap s^{-1}\{v\}$. En adelante supondremos que para cada $v \in E^0$, las particiones $\mathfrak{P}^r(v)$ y $\mathfrak{P}^s(v)$ tienen finitos elementos. A partir de $(E, \mathfrak{P})$ construiremos grafos $E_r(\mathfrak{P})$ y $E_s(\mathfrak{P})$ a los que llamaremos respectivamente el grafo obtenido de $(E, \mathfrak{P})$ *partiendo hacia adentro* y *partiendo hacia afuera*. El grafo $E_r(\mathfrak{P})$ se define como sigue.

$$E_r(\mathfrak{P})^0 = \{(v,i) : v \in E^0 \setminus \mathrm{sour}(E),\, i \in \theta(r^{-1}\{v\})\} \cup \mathrm{sour}(E),$$
$$E_r(\mathfrak{P})^1 =$$
$$\{(e,j) : e \in E^1,\, s(e) \notin \mathrm{sour}(E),\, j \in \theta(r^{-1}\{s(e)\})\} \cup \{e : s(e) \in \mathrm{sour}(E)\},$$
$$s_{E_r(\mathfrak{P})}(e,j) = (s(e),j),\; s_{E_r(\mathfrak{P})}(e) = s(e),$$
$$r_{E_r(\mathfrak{P})}(e,j) = (r(e),\theta(e)),\; r_{E_r(\mathfrak{P})}(e) = (r(e),\theta(e)).$$

Si E y F son grafos tales que $F = E_r(\mathfrak{P})$ para alguna partición $\mathfrak{P}$ de E^1, decimos que F se obtiene de E *partiendo hacia adentro* y que E se obtiene de F *amalgamando hacia adentro*. El grafo $E_s(\mathfrak{P})$ se define como sigue.

$$E_s(\mathfrak{P})^0 = \{(v,i) : v \in E^0 \setminus \mathrm{sink}(E),\, i \in \theta(s^{-1}\{v\})\} \cup \mathrm{sink}(E),$$
$$E_r(\mathfrak{P})^1 =$$
$$\{(e,j) : e \in E^1,\, r(e) \notin \mathrm{sink}(E),\, j \in \theta(s^{-1}\{r(e)\})\} \cup \{e : r(e) \in \mathrm{sink}(E)\},$$
$$s_{E_s(\mathfrak{P})}(e,j) = (s(e),\theta(e)),\; s_{E_s(\mathfrak{P})}(e) = (s(e),\theta(e)),$$
$$r_{E_s(\mathfrak{P})}(e,j) = (r(e),j),\; r_{E_s(\mathfrak{P})}(e) = r(e).$$

Si E y F son grafos tales que $F = E_s(\mathfrak{P})$ para alguna partición $\mathfrak{P}$ de E^1, decimos que F se obtiene de E *partiendo hacia afuera* y que E se obtiene de F *amalgamando hacia afuera*.

Ejercicio 6.3.1. El grafo *transpuesto* E_t de un grafo E es el grafo con los mismos vértices y aristas que E pero con las funciones de salida y llegada intercambiadas. Probar que si $\mathfrak{P}$ es una partición de E^1, entonces $(E_t)_r(\mathfrak{P}) = (E_s(\mathfrak{P}))_t$ y $(E_t)_s(\mathfrak{P}) = (E_r(\mathfrak{P}))_t$.

Ejercicio 6.3.2. Sea E un grafo finito sin pozos ni fuentes. Sea $M \in \{0,1\}^{E^1}$, $M_{e,f} = \delta_{r(e),s(f)}$. Sea $\mathfrak{P}$ la partición de E asociada a $\theta = \mathrm{id}_{E^1}$, de modo que cada término de la partición tiene un único elemento. Probar que M es la matriz de incidencia tanto de $E_s(\mathfrak{P})$ como de $E_r(\mathfrak{P})$; deducir que estos grafos son isomorfos.

Proposición 6.3.3. *Sean E un grafo finito sin fuentes ni pozos y θ y $\mathfrak{P}$ como arriba. Para cada $v \in E^0$, sea $i(v) \in \theta(r^{-1}\{v\})$ Entonces $p = \sum_{v\in E^0}(v, i(v)) \in L(E_r(\mathfrak{P}))$ es un idempotente pleno y $L(E) \cong pL(E_r(\mathfrak{P}))p$. En particular $L(E) \sim L(E_r(\mathfrak{P}))$.*

Demostración. Sea $I \lhd L(E(\mathfrak{P}))$ el ideal bilátero generado por p. Sean $v \in E^0$, $i \in \theta(r^{-1}\{v\})$ y $e \in \mathcal{E}_i^v$. Entonces $(e,i(v)) = (s(e),i(v))(e,i(v)) = p(e,i(v)) \in I$ y por tanto $I \ni (e,i(v))^*(e,i(v)) = r(e,i(v)) = (v,i)$. Luego I contiene a todos los vértices de $E(\mathfrak{P})$ y por tanto es todo $L(E(\mathfrak{P}))$. Esto prueba que p

es pleno. Para cada $v \in E^0$ y $e \in E^1$, definimos $\phi(v) = (v, i(v))$ y $\phi(e) = \sum_{s(f)=r(e)} (e, i(s(e)))(f, \theta(e))(f, i(r(e)))^*$. Observamos que

$$\phi(s(e))\phi(e)\phi(r(e)) =$$

$$(s(e), i(s(e))) \left(\sum_{s(f)=r(e)} (e, i(s(e)))(f, \theta(e))(f, i(r(e)))^* \right) (r(e), i(r(e))) = \phi(e),$$

$$\phi(e')^*\phi(e) =$$

$$\sum_{s(g)=r(e'),s(f)=r(e)} (g, i(r(e')))(g, \theta(e'))^*(e', i(s(e'))^*(e, i(s(e)))(f, \theta(e))(f, i(r(e)))^*$$

$$= \delta_{e,e'} \sum_{s(g)=s(f)=r(e)} (g, i(r(e)))(g, \theta(e))^*(r(e), \theta(e))(f, \theta(e))(f, i(r(e)))^*$$

$$= \delta_{e,e'} \sum_{s(g)=s(f)=r(e)} (g, i(r(e)))(g, \theta(e))^*(f, \theta(e))(f, i(r(e)))^*$$

$$= \delta_{e,e'} \sum_{s(f)=r(e)} (f, i(r(e)))(f, i(r(e))^* = \delta_{e,e'}(r(e), i(r(e))) = \delta_{e,e'}\phi(r(e)),$$

$$\sum_{s(e)=v} \phi(e)\phi(e)^* =$$

$$\sum_{s(e)=v,s(f)=r(e)=s(g)} (e, i(v))(f, \theta(e))(f, i(r(e)))^*(g, i(r(e)))(g, \theta(e))^*(e, i(v))^*$$

$$= \sum_{s(e)=v,s(f)=r(e)} (e, i(v))(f, \theta(e))(f, \theta(e))^*(e, i(v))^*$$

$$= \sum_{s(e)=v} (e, i(v))(r(e), \theta(e))(e, i(v))^*$$

$$= \sum_{s(e)=v} (e, i(v))(e, i(v))^* = (v, i(v)) = \phi(v).$$

Luego por la Proposición 3.5.11, ϕ se extiende a un morfismo de álgebras $L(E) \to L(E_r(\mathfrak{P}))$, cuya imagen está contenida en $pL(E_r(\mathfrak{P}))p$. Para ver que ϕ es inyectivo, basta comprobar que se satisfacen las conidiciones G1 y G2 del Teorema 4.7.9. Dado que ϕ manda vértices en vértices, la condición G1 es inmediata. Sean $v \in E^0$, $n \geq 1$ y $\alpha = e_1 \cdots e_n$ un camino cerrado sin salidas basado en v. Entonces para cada j, e_{j+1} (suma módulo n) es la única arista que sale de $r(e_j)$; luego

$$\phi(e_j) = (e_j, i(s(e_j))(e_{j+1}, \theta(e_{j+1}))(e_{j+1}, i(s(e_{j+1})))^*.$$

Por tanto $\tilde{\alpha} = (e_2, \theta(e_2)) \cdots (e_n, \theta(e_n))(e_1, \theta(e_1))$ es un camino cerrado sin salidas y tenemos

$$\begin{aligned} \phi(\alpha) =& (e_1, i(v))(e_2, \theta(e_2)) \cdots (e_n, \theta(e_n))(e_1, \theta(e_1))(e_1, i(v))^* \\ =& (e_1, i(v))\tilde{\alpha}(e_1, i(v))^*. \end{aligned}$$

Se sigue que $\phi(\alpha^m) = (e_1, i(v))\tilde{\alpha}^m(e_1, i(v))^*$, y por tanto si $q(t) \in k[t, t^{-1}]$ es un polinomio, entonces

$$(e_1, i(v))^*\phi(q(\alpha))(e_1, i(v))^* = q(\tilde{\alpha}).$$

Se sigue que ϕ satisface G2 y por tanto es inyectivo. Resta ver que todo elemento de $R = pL(E_r(\mathfrak{P}))p$ está en la imagen de ϕ. Sea $X = \{\alpha \in \mathcal{P}(E_r(\mathfrak{P})) : s_{E_r(\mathfrak{P})}(\alpha) = (v, i(v)),\ v \in E^0\}$. Todo elemento de R es combinación k-lineal de productos $\alpha\beta^*$ con $\alpha, \beta \in X$ y $r_{E_r(\mathfrak{P})}(\alpha) = r_{E_r(\mathfrak{P})}(\beta)$. Sea $\alpha \in X$ y sea $v \in E^0$ tal que $s(\alpha) = (v, i(v))$; definimos $\alpha_0 \in \mathcal{P}(E)$ como sigue. Si $|\alpha| = 0$, ponemos $\alpha_0 = v$. Si $|\alpha| = 1$, entonces $\alpha = (e, i(s(e)))$, y tomamos $\alpha_0 = e$. Si $|\alpha| = n \geq 2$, entonces

$$\alpha = (e_1, i(v))(e_2, \theta(r(e_1)) \cdots (e_n, \theta(r(e_{n-1}))$$

y tomamos $\alpha_0 = e_1 \cdots e_n$. Vamos a probar que si $r(\alpha) = (w, l)$, entonces

$$\phi(\alpha_0) = \alpha \sum_{s(f)=w} (f, l)(f, i(w))^*. \tag{6.3.4}$$

Si $|\alpha| = 0$, $w = v$, $l = i(w)$ y (6.3.4) se sigue de CK2 para el vértice $(v, i(v))$. Si $|\alpha| = 1$, entonces $\alpha = (e, i(v))$, $\alpha_0 = e$, $w = r(e)$, $l = \theta(e)$, y el lado derecho de (6.3.4) es la definición de $\phi(e_1)$. Si $|\alpha|$ satisface (6.3.4) y e es una arista con $s(e) = w$, entonces $(\alpha \cdot (e, l))_0 = \alpha_0 \cdot e$ y

$$\begin{aligned}
\phi(\alpha_0 \cdot e) =& \alpha \sum_{s(f)=w} (f, l)(f, i(w))^* \phi(e) \\
=& \alpha \sum_{s(f)=w, s(g)=r(e)} (f, l)(f, i(w))^*(e, i(w))(g, \theta(e))(g, i(r(e)))^* \\
=& \alpha \cdot (e, l) \sum_{s(g)=r(e)} (g, \theta(e))(g, i(r(e)))^*
\end{aligned}$$

Esto prueba que (6.3.4) se satisface para todo $\alpha \in X$. Luego si α es como arriba, $\beta \in X$ y $r(\beta) = (w, l)$, entonces

$$\begin{aligned}
\alpha\beta^* =& \phi(\alpha_0) \left(\sum_{s(f)=s(g)=w} (f, l)(f, i(w))^*(g, i(w))(g, l)^* \right) \phi(\beta_0^*) \\
=& \phi(\alpha_0 \beta_0^*).
\end{aligned}$$

Esto termina la demostración. □

Proposición 6.3.5. *Sean E un grafo finito y $\mathfrak{P}$ una partición de las aristas de E. Entonces existe un isomorfismo homogéneo de álgebras $\mathbb{Z}$-graduadas $\phi : L(E) \xrightarrow{\sim} L(E_s(\mathfrak{P}))$.*

Demostración. Para cada $x \in E^0 \cup E^1$ defnimos $\phi(x)$ como sigue. Si $x \in \operatorname{sink}(E) \cup r^{-1}(\operatorname{sink}(E))$, ponemos $\phi(x) = x$. Para $v \in \operatorname{reg}(E)$ y $e \notin s^{-1}(\operatorname{sink}(E))$, ponemos

$$\phi(v) = \sum_{l \in \theta(s^{-1}\{v\})} (v, l), \quad \phi(e) = \sum_{l \in \theta(s^{-1}\{r(e)\})} (e, l).$$

Para probar que ϕ se extiende a un morfismo de álgebras $L(E) \to L(E_s(\mathfrak{P}))$, basta ver que los elementos $\phi(x), \phi(x)^*$ con $x \in E^0 \cup E^1$ cumplen las relaciones de la Proposición 3.5.11. Chequeamos aquí CK2 y dejamos el resto al lector.

Empecemos por notar que $\operatorname{reg}(E_s(\mathfrak{P})) = \{(v,\theta(f)) : s(f) = v\}$ y que en $L(E_s(\mathfrak{P}))$, CK2 dice que

$$(v,i) = \sum_{s(e)=v,\theta(e)=i,\ j\in\theta(s^{-1}\{r(e)\})} (e,j)(e,j)^* + \sum_{s(e)=v,\ \theta(e)=i,\ r(e)\in\operatorname{sink}(E)} ee^*. \tag{6.3.6}$$

Luego si $v \in \operatorname{reg}(E)$, usando que $r_{E_s(\mathfrak{P})}(e,j) = (r(e),j)$ en la segunda igualdad y (6.3.6) en la cuarta, tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{s(e)=v} \phi(e)\phi(e)^* &= \sum_{s(e)=v,\ l,i\in\theta(s^{-1}\{r(e)\})} (e,l)(e,i)^* + \sum_{s(e)=v,r(e)\in\operatorname{sink}(E)} ee^*\\ &= \sum_{s(e)=v,\ l\in\theta(s^{-1}\{r(e)\})} (e,l)(e,l)^* + \sum_{s(e)=v,r(e)\in\operatorname{sink}(E)} ee^*\\ &= \sum_{i\in\theta(s^{-1}\{v\})}\left(\sum_{s(e)=v,\ \theta(e)=i,\ l\in\theta(s^{-1}\{r(e)\})} (e,l)(e,l)^* + \sum_{s(e)=v,\ \theta(e)=i,\ r(e)\in\operatorname{sink}(E)} ee^*\right)\\ &= \sum_{i\in\theta(s^{-1}\{v\})} (v,i) = \phi(v).\end{aligned}$$

El morfismo ϕ preserva el grado de los generadores y por tanto es homogéneo para la $\mathbb{Z}$-graduación. Luego por el Teorema graduado de unicidad 4.8.1, para probar que ϕ es inyectivo basta verificar que cumple $G1$, lo cual es claro. Notemos además que por definición, $\phi(x)^* = \phi(x^*)$ se cumple para todo $x \in E^0 \cup E^1$; luego se cumple para todo $x \in L(E)$. Se sigue que la imagen de ϕ es la subálgebra $R \subset L(E_s(\mathfrak{P}))$ cerrada por $*$ generada por la imagen de los generadores de $L(E)$. También por definición, los elementos de $\operatorname{sink}(E) \subset E_s(\mathfrak{P})^0$ y $r^{-1}(\operatorname{sink}(E)) \subset E_s(\mathfrak{P})^1$ están en la imagen de ϕ. Para ver que ϕ es suryectiva, basta verificar que los elementos (v,i) con $v \in \operatorname{reg}(E)$, $i \in \theta(s^{-1}\{v\})$ y (e,j) con $e \in E^1$ y $j \in \theta(s^{-1}\{s(e)\})$ están en R. Usando que $r_{E_s(\mathfrak{P})}(e,j) = (r(e),j)$ en la segunda igualdad y (6.3.6) en la tercera, tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{s(e)=v,\theta(e)=i} \phi(e)\phi(e)^* &= \sum_{s(e)=v,\theta(e)=i,j,l\in\theta(s^{-1}\{r(e)\})} (e,j)(e,l)^*\\ &+ \sum_{s(e)=v,\ r(e)\in\operatorname{sink}(E)} ee^* = \sum_{s(e)=v,\theta(e)=i,j\in\theta(s^{-1}\{r(e)\})} (e,j)(e,j)^*\\ &+ \sum_{s(e)=v,\ r(e)\in\operatorname{sink}(E)} ee^* = (v,i).\end{aligned}$$

Luego todo vértice de $E_s(\mathfrak{P})$ está en R. Resta ver que $(e,\theta(f)) \in R$ toda vez que $r(e) \notin \operatorname{sink}(E)$ y $s(f) = r(e)$. Pero

$$\phi(e)(r(e),\theta(f)) = \sum_{j\in\theta(s^{-1}\{r(e)\})} (e,j)(r(e),\theta(f)) = (e,\theta(f)) \in R.$$

□

6.4. Equivalencia de flujo

Sean E y F grafos. Decimos que F se obtiene de E mediante una *transformación estándar* si se obtiene por extendiendo o contrayendo en un vértice, o partiendo o amalgamando hacia afuera o hacia adentro. Una *equivalencia de flujo* entre E y F es una sucesión finita de grafos $E = E_1, E_2, \ldots, E_n = F$ de modo tal que para cada i, E_{i+1} se obtiene de E_i mediante una transformación estándar. E y F tienen *flujo equivalente* si existe una equivalencia de flujo entre ellos.

Ejercicio 6.4.1. Sean E y F grafos finitos con flujo equivalente. Probar que E es irreducible, esencial o trivial si y sólo si F lo es.

Sea E un grafo finito sin pozos y sea A_E su matriz de incidencia. El *grupo de Bowen-Franks* de E es

$$\mathfrak{BF}(E) = \operatorname{Coker}(I - A_E^t).$$

En otras palabras $\mathfrak{BF}(E)$ es el cociente de $\mathbb{Z}^{E^0}$ por el subgrupo generado por las filas de la matriz $I - A_E$.

El siguiente teorema fue probado en [15, Theorem].

Teorema 6.4.2 (Teorema de Franks)**.** *Sean E y F grafos finitos irreducibles no triviales. Entonces E y F tienen flujo equivalente si y sólo si $\mathfrak{BF}(E) \cong \mathfrak{BF}(F)$ y los enteros $det(I - A_E)$ y $det(I - A_F)$ tienen el mismo signo.*

Corolario 6.4.3. *Si E y F son grafos finitos simples puramente infinitos sin fuentes tales que $\mathfrak{BF}(E) \cong \mathfrak{BF}(F)$ y que $det(I - A_E)$ y $det(I - A_F)$ tienen el mismo signo, entonces $L(E) \sim L(F)$.*

Demostración. Se sigue de la Proposición 6.1.3, el Teorema 6.4.2, y las Proposiciones 6.2.2, 6.3.3 y 6.3.5. □

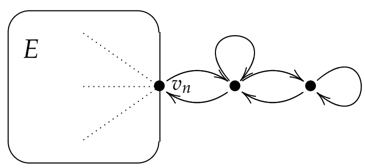
Pregunta 6.4.4. ¿Vale la recíproca del Corolario 6.4.3?

Veremos más adelante que, $\mathfrak{BF}(E)$ es un invariante Morita del álgebra de Leavitt $L(E)$ sobre un cuerpo k; esto reduce la pregunta anterior a

Pregunta 6.4.5. ¿Es $\det(I - A_E)$ invariante Morita del álgebra de Leavitt sobre un cuerpo k de un grafo finito simple puramente infinito sin fuentes?

Dados un grafo finito regular E con $E^0 = \{v_1, \ldots, v_n\}$; el *empalme de Cuntz* de E en v_n es el grafo E_- cuya matriz de incidencia es

$$A_{E_-} = \begin{bmatrix} & & & & 0 & 0 \\ & A_E & & & \vdots & \vdots \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_- = \tag{6.4.6}$$



Proposición 6.4.7. $\mathfrak{BF}(E) \cong \mathfrak{BF}(E_-)$ *y* $det(I - A_{E_-}) = -det(I - A_E)$.

Demostración. Multiplicando a izquierda y a derecha la matriz $I - A^t_{E_-}$ por matrices de la forma $I + a\varepsilon_{i,j}$ con $a \in \mathbb{Z}$, se llega a la matriz

$$\begin{bmatrix} & & & & 0 & 0 \\ & I - A^t_E & & & \vdots & \vdots \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Cambiando de orden las últimas dos filas se obtiene una matriz con el mismo conúcleo que $I - A^t_E$ y el mismo determinante; como el cambio de filas cambia el signo del determinante, esto termina la demostración. ☐

Para $n \geq 1$, sea $L_{n^-} = L(\mathcal{R}_n^-)$.

Pregunta 6.4.8. ¿Son L_2 y L_{2^-} equivalentes Morita?

Observación 6.4.9. A cada grafo E puede asociarse también una C^*-álgebra $\mathcal{O}(E)$ que se obtiene completando el álgebra de Leavitt $L_{\mathbb{C}}(E)$. Rørdam probó en [21] que la respuesta al análogo de la pregunta 6.4.5 para $\mathcal{O}(E)$ es negativa. Para ello utilizó un argumento de Cuntz –explicado también en [21]– que redujo el análogo C^* de la pregunta 1 al análogo C^* de la pregunta 2, que sostiene que para $\mathcal{O}_n = \mathcal{O}(\mathcal{R}_n)$ y $\mathcal{O}_{n^-} = \mathcal{O}(\mathcal{R}_n^-)$, se tiene $\mathcal{O}_2 \cong \mathcal{O}_{2^-}$. Una reducción similar es posible también en el caso puramente algebraico; en [2, Theorem 2.13] se prueba que si que k es un cuerpo y si se supone que existe un isomorfismo $L_2 \xrightarrow{\sim} L_{2^-}$ con ciertas condiciones, entonces se deduce que la respuesta a la pregunta 6.4.5 es negativa. Si bien mientras escribimos esto no es sabido si $L_2(k) \cong L_{2^-}(k)$, los resultados parciales que se tienen apuntan en la dirección contraria. Se sabe por ejemplo que no existe un isomorfismo $L_2(\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} L_{2^-}(\mathbb{Z})$ que preserve la involución canónica $e \mapsto e^*$ [18, Corollary 6.5]; otros resultados en la misma dirección se comentan al final de la introducción de [18]. El resultado de Rørdam se deduce como caso particular del teorema probado con posterioridad por Kirchberg y Phillips [19, 20], de clasificación de C^*-álgebras simples puramente infinitas. Ambos utilizan el teorema de Elliott [22] que dice que hay un isomorfismo de C^*-álgebras $\mathcal{O}_2 \otimes \mathcal{O}_2 \cong \mathcal{O}_2$. Se prueba en [3] que el análogo algebraico de este resultado es falso; $L_2 \otimes L_2 \ncong L_2$. Tampoco existe un morfismo inyectivo $L_2(\mathbb{Z}) \otimes L_2(\mathbb{Z}) \to L_2(\mathbb{Z})$ que preserve la involución [9].

Capítulo 7

Grupo de Grothendieck

7.1. El monoide $\mathcal{V}_\infty(R)$

Sean A un anillo, no necesariamente unital, y sea

$$\mathrm{Idem}(A) = \{e \in A : e^2 = e\}.$$

Consideremos la relación $\sim$ de equivalencia de Murray-von Neumann en A y formemos el conjunto cociente

$$\mathcal{V}(A) = \mathrm{Idem}(A)/\sim$$

Lema 7.1.1. *Sean $e_1, e_2, f_1, f_2 \in \mathrm{Idem}(A)$ tales que $e_1 \perp f_1$ y $e_2 \perp f_2$. Si $e_1 \sim e_2$ y $f_1 \sim f_2$, entonces $e_1 + f_1 \sim e_2 + f_2$.*

Demostración. Por el argumento de la parte ii) del Lema 4.15.1 existen $x, y, z, w \in A$ tales que $x = e_1 x e_2$, $y = e_2 y e_1$, $z = f_1 z f_2$, $w = f_2 w f_1$, $xy = e_1$, $yx = e_2$, $zw = f_1$ y $wz = f_2$. En particular $xw = xe_2 f_2 w = 0 = wf_1 e_1 x = wx$ y análogamente $zy = yz = 0$. Luego $(x+z)(y+w) = e_1 + f_1$ y $(y+w)(x+z) = e_2 + f_2$. $\square$

Decimos que un anillo A *tiene suficiente espacio* si se cumple

$$\forall e, f \in \mathrm{Idem}(A)\ \exists e', f' \in \mathrm{Idem}(A),\ e' \sim e,\ f' \sim f,\ e' \perp f'. \tag{7.1.2}$$

Supongamos que A tiene suficiente espacio y sean e, f, e' y f' como en (7.1.2); pongamos

$$[e] + [f] = [e' + f'] \tag{7.1.3}$$

Lema 7.1.4. *Si A es un anillo con suficiente espacio entonces (7.1.3) define una operación que hace de $\mathcal{V}(A)$ un monoide abeliano.*

Demostración. La operación está bien definida por el Lema 7.1.1. Es conmutativa y asociativa con neutro $[0]$ pues la suma en A tiene tales propiedades. $\square$

Sean R un anillo unital y $1 \le n \le \infty$. Escribimos

$$\mathrm{Idem}_n(R) = \mathrm{Idem}(M_n R),\ \mathcal{V}_n(R) = \mathcal{V}(M_n R)$$

Lema 7.1.5. *Sea R un anillo unital. Entonces $M_\infty R$ tiene suficiente espacio.*

Demostración. Basta ver que si $1 \leq n < \infty$ y $e \in \mathrm{Idem}_n(R)$ entonces e es equivalente a la matriz suma directa $e \sim 0_n \oplus e$. Sea

$$\sigma : R^{2n} \to R^{2n},\ \sigma(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{2n}) = (x_{n+1}, \ldots, x_{2n}, x_1, \ldots, x_n)$$

y, abusando notación, llamemos también σ a su matriz en la base canónica. Entonces $f := \sigma e \sigma^{-1} \sim e$ y $e \perp f$. $\square$

Ejercicio 7.1.6. Sean R un anillo unital y $n \geq 1$. Probar que la función $\mathcal{V}_n(R) \to \mathcal{V}_{n+1}R$ inducida por la inclusión $M_n R \subset M_{n+1}R$ es inyectiva.

Ejemplo 7.1.7. Sea R un anillo; para cada $n \geq 0$ sea $p_n \in \mathrm{Idem}_\infty R$ la matriz identidad de $n \times n$. La función $\iota : \mathbb{N}_0 \to \mathcal{V}_\infty(R)$, $[n] \mapsto [p_n]$ es morfismo de monoides. Notamos que ι es inyectivo si y sólo si R tiene noción de rango. Veremos que si todo R-módulo proyectivo finitamente generado es libre –e.g. si R es anillo de división o dominio principal– entonces ι es suryectiva. Sea $p \in \mathrm{Idem}_n(R)$; entonces pR^n y $(1-p)R^n$ son proyectivos y por tanto libres. Sean $\mathcal{B}_1$ una base de pR^n y $\mathcal{B}_2$ una base de $(1-p)R^n$, entonces $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es base de R^n. Sea $C = C_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$ la matriz de cambio de la base canónica de R^n a la base $\mathcal{B}$. Entonces $p_r := CpC^{-1}$ es la matriz identidad de rango $r = \mathrm{rk}(p)$; luego $[p] = \iota(r)$.

Lema 7.1.8. *Sean M un monoide abeliano y $\mathcal{R} \subset M \times M$ una relación. Entonces existen un monoide $M/\mathcal{R}$ y un morfismo de monoides $\pi : M \to M/\mathcal{R}$ tal que $x\mathcal{R}y \Rightarrow \pi(x) = \pi(y)$ y tal que si $\phi : M \to N$ es otro morfismo de monoides tal que $x\mathcal{R}y \Rightarrow \phi(x) = \phi(y)$, entonces existe un único morfismo de monoides $\bar{\phi} : M/\mathcal{R} \to N$ tal que $\bar{\phi} \circ \pi = \phi$.*

Demostración. Una *congruencia* en M es una relación de equivalencia $\mathcal{C}$ tal que $x\mathcal{C}y \Rightarrow (x+z)\mathcal{C}(y+z)$ para todo $z \in M$. Sea $\overline{\mathcal{R}}$ la intersección de todas las relaciones de congruencia que contienen a $\mathcal{R}$. Entonces $\overline{\mathcal{R}}$ es una relación de congruencia; escribamos $x \equiv y$ si $(x,y) \in \overline{\mathcal{R}}$. Sea $\pi : M \to M/\mathcal{R} := M/\equiv$ la proyección al cociente. Notemos que si $x \equiv x'$ y $y \equiv y'$, entonces $x + y \equiv x' + y \equiv x' + y'$. Luego $\pi(x) + \pi(y) := \pi(x+y)$ es una operación bien definida en $M/\mathcal{R}$; es sencillo ver que hace de $M/\mathcal{R}$ un monoide abeliano y de $\pi : M \to M/\mathcal{R}$ un morfismo de monoides. Si $\phi : M \to N$ es un morfismo de monoides y $\phi(x) = \phi(y)$, entonces $\phi(x+z) = \phi(x) + \phi(z) = \phi(y) + \phi(z) = \phi(y+z)$. Luego la relación de equivalencia $x \sim_\phi y \iff \phi(x) = \phi(y)$ es de congruencia. En particular, si $x\mathcal{R}y \Rightarrow x \sim_\phi y$, entonces $x \equiv y \Rightarrow x \sim_\phi y$. Luego existe una única función $\overline{\phi} : M/\mathcal{R} \to N$ tal que $\overline{\phi} \circ \pi = \phi$. Es sencillo verificar que $\overline{\phi}$ es morfismo de monoides. $\square$

Ejemplo 7.1.9. Sean E un grafo unital; dado que los vértices de E son idempotentes ortogonales, tenemos un morfismo de monoides $\mathbb{N}_0^{E^0} \to \mathcal{V}_\infty(L(E))$. Si $v \in \mathrm{reg}(E)$, entonces $v = \sum_{s(e)=v} ee^*$ es una suma ortogonal de idempotentes, con $ee^* \sim e^*e = r(e)$. Además si $A = A_E$ es la matriz de incidencia, para cada $w \in E^0$ hay exactamente $A_{v,w}$ aristas e tales que $s(e) = v$ y $e^*e = r(e)$. Luego el morfismo $\mathbb{N}_0^{E^0} \to \mathcal{V}_\infty(L(E))$ desciende al cociente M_E de $\mathbb{N}_0^{E^0}$ módulo la relación $[v] \sim \sum_{s(e)=v} A(r(e), v)[r(e)]$. Tenemos así un morfismo de monoides

$$\mathrm{can} : M_E \to \mathcal{V}_\infty(L(E)),\ [v] \mapsto [v]. \tag{7.1.10}$$

Teorema 7.1.11 ([1, Corollary 3.2.11]). *Sean E un grafo unital y k un cuerpo. Entonces la función (7.1.10) es un isomorfismo de monoides.*

7.2. Funtorialidad e invarianza Morita

Proposición 7.2.1. *Sean R un álgebra y $e \in \mathrm{Idem}(R)$. Entonces la inclusión $eRe \subset R$ induce un morfismo de monoides inyectivo $\mathrm{inc}_e : \mathcal{V}_\infty(eRe) \subset \mathcal{V}_\infty(R)$. Si más aún, e es pleno, entonces inc_e es un isomorfismo.*

Demostración. Sea $p_n \in M_\infty R$ la matriz identidad de $n \times n$. Tenemos $ep_n M_n Rep_n = M_n(eRe)$; se sigue que si $p \sim q \in \mathrm{Idem}_n(eRe)$ entonces $p \sim q$ en $\mathrm{Idem}_n(R)$. Luego la inclusión $eRe \subset R$ induce un morfismo de monoides $\mathcal{V}_\infty(eRe) \to \mathcal{V}_\infty(R)$; veamos que es inyectivo. Sean $p, q \in \mathrm{Idem}_n(eRe)$ tales que $p \sim q$ en $\mathrm{Idem}_n(R)$. Sean $x, y \in M_n(R)$ tales que $pxq = x$, $qyp = y$ y $xy = p$ y $yx = q$. Entonces $ep_n x p_n = ep_n pxqep_n = pxq = x$; análogamente, $ep_n y ep_n = y$ y por tanto $x, y \in M_n(eRe)$. Luego $x \sim y$ en $\mathrm{Idem}_n(eRe)$. Supongamos ahora que e es pleno. Entonces existen $n \geq 1$, $x \in R^{1\times n}e$ y $y \in eR^{n\times 1}$ tales que $xy = 1$. Sean $x' \in M_n R$ la matriz cuya primera fila es x y las demás son cero; sea $y' \in M_n R$ la matriz cuya primera columna es y y las demás son cero. Sea $\{\chi_1, \dots, \chi_n\}$ la base canónica de R^n. Si $m \geq 1$, la inclusión $R^m \to R^{nm} = R^n \otimes_R R^m$, $x \mapsto \chi_1 \otimes x$ induce un isomorfismo ϕ de $M_n R$ en la esquina de $M_{nm}R = M_n \otimes M_m R$ correspondiente al idempotente $\varepsilon_{1,1} \otimes 1$. Conjugando ϕ por una matriz de permutación, se obtiene la inclusión usual $M_n R \subset M_{nm} R$. En particular, si $q \in \mathrm{Idem}_m R$, entonces $\phi(q) \sim q$. Sean $X_m = \bigoplus_{i=1}^m x', Y_m = \bigoplus_{i=1}^m y' \in M_{nm}R$; notemos que $X_m Y_m = \phi(1)$. Luego $M_{nm}eRe \ni Y_m \phi(q) X_m \sim \phi(q) X_m Y_m = \phi(q) \sim q$. □

Corolario 7.2.2. *La inclusión $R \subset M_n R$ induce un isomorfismo*

$$\mathcal{V}_\infty(R) \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}_\infty(M_n R).$$

Corolario 7.2.3. *Sean R, S álgebras, $n \geq 1$, $e \in \mathrm{Idem}_n(S)$ y $\phi : R \to eM_n Se$ un morfismo unital de álgebras. Entonces ϕ induce un morfismo de monoides $\bar{\phi} : \mathcal{V}_\infty(R) \to \mathcal{V}_\infty(S)$. Si ϕ es un isomorfismo, entonces $\bar{\phi}$ es un monomorfismo. Si además e es pleno, $\bar{\phi}$ es un isomorfismo.*

Corolario 7.2.4. *Sea k un cuerpo. Entonces la clase de isomorfismo del monoide M_E de un grafo unital E es un invariante Morita de su álgebra de Leavitt sobre k.*

Demostración. Inmediata del Corolario 7.2.3 y el Teorema 7.1.11. □

7.3. Completación de monoides abelianos

Proposición 7.3.1. *Sea M un monoide abeliano. Entonces existen un grupo abeliano M^+ y un morfismo de monoides $\iota : M \to M^+$ tal que si G es otro grupo y $\phi : M \to G$ es un morfismo de monoides entonces existe un único morfismo de grupos $p\bar{h}i : M^+ \to G$ tal que $\bar{\phi} \circ \iota = \phi$.*

Demostración. Sea $F = \mathbb{Z}^{(M)}$ el grupo libre en los elementos de M y sea S el subrupo generado por los elementos de la forma $\chi_m + \chi_n = \chi_{m+n}$ con $m, n \in M$. Sea $M^+ = F/S$, $\pi : F \to M^+$ la proyección y $\iota = \pi \circ \chi : M \to M^+$. Es claro que ι es morfismo de monoides. Si G es un grupo y ϕ es morfismo de monoides, entonces la imagen de ϕ es un submonoide abeliano de G, y por tanto el subgrupo que genera es abeliano. Luego existe un único morfismo

$\phi' : \mathbb{Z}^{(M)} \to G$ tal que $\phi = \phi' \circ \chi$. Como ϕ es morfismo de monoides, existe un único morfismo de grupos $\bar{\phi} : M^+ \to G$ tal que $\bar{\phi} \circ \pi = \phi'$. Luego $\bar{\phi}$ es el único morfismo tal que $\bar{\phi} \circ \iota = \phi$. □

Ejercicio 7.3.2. Sea E un grafo unital. Probar que $M_E^+ = \mathfrak{BF}(E)$.

Lema 7.3.3. *Sea M un monoide abeliano. Entonces $M^+ = \iota(M) - \iota(M)$.*

Demostración. Adoptamos la misma notación que en la demostración de la Proposición 7.3.1. Cada elemento $x \in F$ se escribe en forma única como $x = \sum_{m \in \text{supp}(x)} a_m \chi_m$. Sea $\text{supp}_+(x) = \{m \in M : a_m > 0\}$ y $\text{supp}_-(x) = \{m \in M : a_m < 0\}$. Sean $x_+ = \sum_{m \in \text{supp}_+(x)} a_m \chi_m$ y $x_- = -\sum_{m \in \text{supp}_-(x)} a_m \chi_m$. Entonces $x = x_+ - x_-$, $\pi(x_+), \pi(x_-) \in \iota(M)$ y $\pi(x) = \pi(x_+) - \pi(x_-)$. □

Lema 7.3.4. *Sea M un monoide abeliano y sean $x, y, z, w \in M$. Entonces $\iota(x) - \iota(y) = \iota(z) - \iota(w)$ en M^+ si y sólo si existe $u \in M$ tal que $x + w + u = z + y + u$.*

Demostración. De nuevo adoptamos la notación de la demostración de la Proposición 7.3.1. Pasando de miembro vemos que basta probar que si $a, b \in M$ son tales que $\iota(a) = \iota(b)$, entonces existe $c \in M$ tal que $a + c = b + c$. Supongamos entonces que $\iota(a) = \iota(b)$, es decir, que $\pi(\chi_a) = \pi(\chi_b)$. Entonces existe $s \in S$ tal que $\chi_a = \chi_b + s$. Escribiendo s como combinación lineal con coeficientes ± 1 de elementos de la forma $\chi_x + \chi_y - \chi_{x+y}$, separando por un lado los términos con coeficiente 1 y por otro los de coeficiente positivo y pasando de miembro obtenemos una igualdad en $F = \mathbb{Z}^{(M)}$

$$\chi_a + \sum_{i=1}^{n} \chi_{x_i} + \chi_{y_i} - \chi_{x_i+y_i} = \chi_b + \sum_{j=1}^{m} \chi_{z_j} + \chi_{w_j} - \chi_{z_j+w_j}$$

Pasando de miembro una vez más, tenemos una igualdad en $\mathbb{N}_0^{(M)}$

$$\chi_a + \sum_{i=1}^{n} \chi_{x_i} + \chi_{y_i} + \sum_{j=1}^{m} \chi_{z_j+w_j} = \chi_b + \sum_{j=1}^{m} \chi_{z_j} + \chi_{w_j} + \sum_{i=1}^{n} \chi_{x_i+y_i}.$$

Ahora aplicamos el morfismo de monoides $\mathbb{N}_0^{(M)} \to M$ que manda $\chi_m \mapsto m$ en ambos lados de la igualdad. Para $c = \sum_{i=1}^{n} x_i + y_i + \sum_{j=1}^{m} z_j + w_j$ tenemos $a + c = b + c$. □

Ejemplo 7.3.5. El monoide $M = M_{\mathcal{R}_2}$ es el monoide libre en un generador $[v]$ módulo la relación $[v] = 2[v]$. No es trivial; tiene 2 elementos: 0 y $[v]$. Por otro lado $M^+ = \mathfrak{BF}(\mathcal{R}_2) = 0$.

Por definición, el grupo M^+ viene con un submonoide distinguido $\iota(M)$. En general si G es un grupo abeliano y $G_+ \subset G$ es un submonoide, podemos considerar la siguiente relación entre elementos de G

$$x \leq y \iff y - x \in G_+.$$

La relación $\leq$ es un preorden, es decir, es reflexiva y transitiva. Además es invariante por traslaciones; $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$ para todo $z \in G$. El submonoide G_+ se recupera de $\leq$ como el subconjunto $\{g : g \geq 0\}$. El par (G, G_+) es un *grupo preordenado*. Un morfismo de grupos ordenados $(G, G_+) \to (H, H_+)$ es un morfismo de grupos $f : G \to H$ tal que $f(G_+) \subset H_+$. Una *unidad de orden* en G es un elemento $G_+ \ni u \geq 0$ tal que para todo $x \in G$ existe $n \geq 1$ tal que $x \leq nu$. Un grupo preordenado *con escala* es un grupo G junto con un submonoide G_+ y una unidad de orden $u \in G_+$. Un morfismo de grupos preordenados con escala $(G, G_+, u) \to (H, H_+, v)$ (que a menudo notaremos simplemente $(G, u) \mapsto (H, v)$) es un morfismo de grupos preordenados que envía u en v.

Ejemplo 7.3.6. Sea E un grafo unital. Entonces $[1]_E := \sum_{v \in E^0}[v] \in \mathfrak{BF}(E)$ es una unidad de orden de $(\mathfrak{BF}(E), \iota(M_E))$.

Lema 7.3.7. *Sea M un monoide y $u \in M$. Si $\iota(u) \in M^+$ es unidad de orden, entonces $\forall \xi \in M^+ \ \exists\, x \in M$, $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $\xi = \iota(x) - \iota(nu)$.*

Demostración. Por el Lema 7.3.3, existen $y, z \in M$ tales que $\xi = \iota(y) - \iota(z)$. Como $\iota(u)$ es unidad de orden, existen $n \in \mathbb{N}_0$ y $w \in M$ tales que $\iota(nu) = \iota(z + w)$. Luego para $x := y + w$, tenemos

$$\xi = \iota(y + w) - \iota(z + w) = \iota(x) - \iota(nu).$$

□

7.4. Grupo de Grothendieck

El *grupo de Grothendieck* de un álgebra R es $K_0(R) = \mathcal{V}_\infty(R)^+$. Es un grupo preordenado, con $K_0(R)_+ = \iota(\mathcal{V}_\infty(R))$ y unidad de orden $[1_R]$.

Ejemplo 7.4.1. Sea k un cuerpo o un dominio principal, entonces $K_0(k) = \mathcal{V}_\infty(k)^+ = \mathbb{N}_0^+ = \mathbb{Z}$. Si E es un grafo unital, k es un cuerpo y $L(E) = L_k(E)$, entonces $K_0(L(E)) = \mathfrak{BF}(E)$, por el Teorema 7.1.11. Si k es noetheriano y es tal que todo k-módulo tiene una resolución proyectiva de longitud finita, entonces $K_0(L(E)) = K_0(k) \otimes \mathfrak{BF}(E)$, por [12, Example 5.5]. En particular si k es dominio principal, tenemos $K_0(L(E)) = \mathfrak{BF}(E)$. Para k cualquiera, el morfismo de monoides (7.1.10) induce un morfismo de grupos preordenados con escala

$$\mathrm{can} : (\mathfrak{BF}(E), [1]_E) \to (K_0(L(E)), [1_{L(E)}]). \tag{7.4.2}$$

Proposición 7.4.3. *Sean R, S álgebras, $n \geq 1$, $e \in \mathrm{Idem}_n(S)$ y $\phi : R \to S$ un morfismo no necesariamente unital de álgebras. Entonces ϕ induce un morfismo de grupos preordenados $K_0(\phi) : K_0(R) \to K_0(S)$. Si ϕ es un isomorfismo sobre $\phi(1)M_nS\phi(1)$, y $\phi(1)$ es pleno, entonces $K_0(\phi)$ es un isomorfismo.*

Demostración. Inmediata del Corolario 7.2.3. □

Corolario 7.4.4. *Sea k un cuerpo. La clase de isomorfismo del grupo $\mathfrak{BF}(E)$ es un invariante Morita del álgebra $L(E)$.*

Ejemplo 7.4.5. Sean R y S álgebras. Si $\phi : R \to S$ es un morfismo de álgebras unital, entonces $K_0(\phi)$ es un morfismo de grupos preordenados con escala. Sea $n \geq 1$; por la Proposición 7.4.3, la inclusión $R \subset M_nR$ en la esquina superior izquierda induce un isomorfismo $K_0(R) \xrightarrow{\sim} K_0(M_nR)$, que envía $[1_R] \mapsto [\varepsilon_{1,1}]$. Por otro lado,

$$[1_{M_nR}] = \sum_{i=1}^{n}[\varepsilon_{i,i}] = \sum_{i=1}^{n}[\varepsilon_{i,1}\varepsilon_{1,i}] = \sum_{i=1}^{n}[\varepsilon_{1,i}\varepsilon_{i,1}] = n[\varepsilon_{1,1}].$$

Luego el isomorfismo $K_0(R) \xrightarrow{\sim} K_0(M_nR)$ es morfismo de grupos preordenados con escala si y sólo si $(n-1)[1_R] = 0$ en $K_0(R)$. Esto ocurre, por ejemplo, si $R = L_n$.

Pregunta 7.4.6. Sean E y F grafos finitos simples puramente infinitos. ¿Si k es un cuerpo y existe un isomorfismo $\xi : (\mathfrak{BF}(E), [1]_E) \to (\mathfrak{BF}(F), [1]_F)$ de grupos preordenados con escala, se sigue que $L(E) \cong L(F)$?.

Ejemplo 7.4.7. Por la Proposición 6.4.7, $\mathfrak{BF}(\mathcal{R}_2^-) = \mathfrak{BF}(\mathcal{R}_2) = 0$. Por tanto el morfismo trivial es un morfismo de grupos preordenados con escala $K_0(L_2) \to K_0(L_{2^-})$. Luego un caso particular de la pregunta 7.4.6 es si $L_2 \cong L_{2^-}$.

7.5. Álgebras propiamente infinitas

Sea R un álgebra. Decimos que R es *propiamente infinita* si existe un morfismo de álgebras unital $\phi : C_2 \to R$.

Ejercicio 7.5.1. Sean $\{e_n : n \geq 1\}$ las aristas de $\mathcal{R}_\infty$ y f_1, f_2 las de $\mathcal{R}_2$.

i) Probar que existe un morfismo de álgebras unital $\phi : C_\infty \to C_2$ tal que $\phi(e_n) = f_2^n f_1$, $\phi(e_n^*) = \phi(e_n)^*$.

ii) Probar que si R es un álgebra propiamente infinita si y sólo si existe un morfismo de álgebras unital $\psi : C_\infty \to R$.

Lema 7.5.2. *Sea R un álgebra propiamente infinita. Entonces R tiene suficiente espacio, y la aplicación $\mathcal{V}_1(R) \to \mathcal{V}_\infty(R)$ es un isomorfismo.*

Demostración. Por el Ejercicio 7.5.1 existen sucesiones $\{s_n : n \geq 1\}$, $\{t_n : n \geq 1\} \subset R$ tales que $t_i^* s_j = \delta_{i,j}$. Si $p, q \in \mathrm{Idem}(R)$, entonces $p' = s_1 p t_1$ y $q' = s_2 q t_2$ son idempotentes ortogonales con $p' \sim p$ y $q' \sim q$. Luego R tiene suficiente lugar. La aplicación $\mathcal{V}_1(R) \to \mathcal{V}_\infty(R)$, $[p] \mapsto [\varepsilon_{1,1}p]$ es inyectiva por el Ejercicio 7.1.6 y es morfismo por el Lema 7.1.1. Sea $[p] \in \mathcal{V}_\infty(R)$ y sea n tal que $p \in \mathrm{Idem}_n(R)$. Sean $S_n = \sum_{j=1}^n \varepsilon_{1,j}s_j$ y $T_n = \sum_{i=1}^n \varepsilon_{i,1}t_i$; notemos que $T_nS_n = I_n$, la matriz identidad de $n \times n$ y que $S_nM_n(R)T_n \subset \varepsilon_{1,1}R$. Luego $S_n \cdot [p] \cdot T_n = \varepsilon_{1,1}p'$ para algún $p' \in \mathrm{Idem}\, R$ y $\varepsilon_{1,1}p' \sim p$, lo que termina la demostración. □

Corolario 7.5.3. *Si R es propiamente infinita, entonces $K_0(R) = \mathcal{V}_1(R)^+$.*

Lema 7.5.4. *Sea R un álgebra. Si R es simple puramente infinita, entonces R es propiamente infinita.*

Demostración. Por el Corolario 5.5.4, podemos descomponer $1 = p_1 + q_1$ como suma de idempotentes ortogonales infinitos con $p_1 \sim 1$. Por la Proposición 5.5.2, podemos escribir $q_1 = p_2 + q_2$ como suma ortogonal de dos idempotentes infinitos con $p_2 \sim 1$. Luego p_1, p_2 son idempotentes ortogonales equivalentes a 1. Sean $s_1, s_2, t_1, t_2 \in R$ tales que $s_it_i = p_i$, $t_is_i = 1$, $s_i = p_is_i$, $t_i = t_ip_i$. Tenemos $t_is_j = \delta_{i,j}$; luego R es propiamente infinita. □

Lema 7.5.5. *Sea E un grafo unital simple puramente infinito y sin fuentes. Entonces $L(E)$ es propiamente infinita.*

Demostración. Las hipótesis sobre E implican que todo vértice v está en un ciclo con salida basado en v. Para cada v elegimos un ciclo con salida $s_1(v)$ basado en v y un camino cerrado $s_2(v)$ basado en v que sigue $s_1(v)$ hasta la salida y luego vuelve a $s_1(v)$ (lo que es posible ya que E es cofinal) y sigue hasta v. Notemos que $s_1(v)^*s_1(v) = s_2(v)^*s_2(v) = v$ y $s_2^*(v)s_1(v) = s_1(v)^*s_2(v) = 0$. Para $i = 1, 2$, sea $s_i = \sum_{v\in E^0} s_i(v)$; tenemos $s_i^*s_j = \delta_{i,j}$. Luego $L(E)$ es propiamente infinita. □

Sea R un álgebra. Un idempotente $p \in R$ es *muy pleno* si existe un idempotente $q \leq p$ tal que $q \sim 1$. Sea $\mathrm{Idem}_f(R) \subset \mathrm{Idem}(R)$ el subconjunto de los idempotentes plenos y $\mathcal{V}_f(R) = \mathrm{Idem}_f(R)/\sim$ el conjunto de clases módulo equivalencia Murray-von Neumann.

Ejercicio 7.5.6. Probar lo siguiente.

i) Todo idempotente muy pleno es pleno.

ii) Si e y f son idempotentes y $e \sim f$, entonces e es muy pleno si y sólo si f lo es.

iii) $\mathcal{V}_f(R) \subset \mathcal{V}_1(R)$.

iv) Si R es simple puramente infinita, entonces $\mathrm{Idem}_f(R) = \mathrm{Idem}(R) \setminus \{0\}$.

Ejercicio 7.5.7. Sea $S = (S, \cdot)$ un semigrupo. Entonces S tiene a lo sumo un elemento neutro. Si S es un monoide entonces S es grupo si y sólo si para todo $s, t \in S$ existe $u \in S$ tal que $s \cdot u = t$.

Proposición 7.5.8. *Sea R un álgebra propiamente infinita. Entonces*

i) $\mathcal{V}_f(R) \subset \mathcal{V}_1(R)$ es un subsemigrupo.

ii) $\mathcal{V}_f(R)$ es un grupo abeliano (con un elemento neutro distinto del de $\mathcal{V}_1(R)$)

iii) La composición $\mathcal{V}_f(R) \to \mathcal{V}_1(R) \to \mathcal{V}_1(R)^+ = K_0(R)$ es un isomorfismo de grupos.

Demostración. Es claro de la definición de idempotente muy pleno que si p es muy pleno y $p \leq q$, entonces q es muy pleno. Luego si $p, q \in \mathrm{Idem}(R)$, $q \perp p$ y p es muy pleno, entonces $p + q$ es muy pleno. En particular, $\mathcal{V}_f(R) \subset \mathcal{V}(R)$ es un subsemigrupo. Si p es muy pleno, entonces existen $x \in pR$ y $y \in Rp$ tales que $yx = 1$. Como R es propiamente infinita, existen $s_1, s_2, t_1, t_2 \in R$ tales que $t_is_j = \delta_{i,j}$. Sean $x_i = xs_i$, $y_i = t_iy$, $i = 1, 2$; entonces $y_ix_j = \delta_{i,j}$. Si $q \in \mathrm{Idem}(R)$, tenemos $p \geq q' := x_1qy_1 \sim q$, $[q] + [p - q'] = [p]$ y $p - q' \geq x_2qy_2 \sim q$. Luego si $q \in \mathrm{Idem}_f(R)$, $p - q' \in \mathrm{Idem}_f(R)$. En particular, para todo $p \in \mathrm{Idem}_f(R)$ existe $p \geq p' \in \mathrm{Idem}_f(R)$ tal que $p' \sim p$ y $p - p' \in \mathrm{Idem}_f(R)$. Vamos a probar que si $q \in \mathrm{Idem}_f(R)$, entonces $[q] = [p - p'] + [q]$. Sea $\mathrm{Idem}_f(R) \ni q' \leq q$ tal que $q' \sim q$ y $q - q' \in \mathrm{Idem}_f(R)$. Como $q' \in \mathrm{Idem}_f(R)$, existe $p'' \leq q'$ tal que $[p] = [p'']$. Luego a menos de reemplazar p por p'', podemos suponer $p \leq q'$. Entonces

$$[q] = [q'] = [q' - p] + [p] = [q' - p] + [p'] = [q' - p + p'].$$

Por tanto

$$[q] + [p - p'] = [q' - p + p'] + [p - p'] = [q' - p + p' + p - p'] = [q'] = [q].$$

Luego $[p - p']$ es un elemento neutro de $\mathcal{V}_f(R)$, y por el Ejercicio 7.5.7, $[q - q'] = [p - p']$ para todo $q \in \mathrm{Idem}_f(R)$ y $\mathcal{V}_f(R)$ es un grupo con neutro $[p - p']$, por el Ejercicio 7.5.7. Como vimos al principio de esta demostración, si $p, q \in \mathrm{Idem}(R)$ con $p \in \mathrm{Idem}_f(R)$, entonces $[p] = [q] + [p']$ con $p' \in \mathcal{V}_f(R)$. En particular, $[p] = [p''] + [p']$ con $p'' \in \mathrm{Idem}_f(R)$; luego $\iota([q]) = \iota([p]) - \iota([p']) = \iota([p''])$. Por tanto la restricción de ι a $\mathcal{V}_f(R)$ es una suryección $\mathcal{V}_f(R) \to K_0(R)$. Como $\iota : \mathcal{V}_f(R) \to K_0(R)$ es morfismo de monoides, es morfismo de grupos; luego para probar que es inyectivo, basta ver que $\mathrm{Ker}(\iota) = 0$. Si $p \in \mathrm{Idem}_f(R)$ y $\iota([p]) = 0$, entonces por el Lema 7.3.4, existe $q \in \mathrm{Idem}(R)$ tal que $[p] + [q] = [q]$. En particular existe $p' \leq q$ tal que $[p] = [p']$ y por tanto $q \in \mathrm{Idem}_f(R)$. Se sigue que $[p]$ es el elemento neutro del grupo $\mathcal{V}_f(R)$. □

7.6. Levantando morfismos

Teorema 7.6.1. *Sean E un grafo unital, tal que E^1 es numberable, R un álgebra propiamente infinita, $\xi : \mathfrak{BF}(E) \to K_0(R)$ un morfismo de grupos y* $\mathrm{can} : \mathfrak{BF}(E) \to K_0(L(E))$ *como en* (7.4.2).

i) Existe un morfismo de álgebras –no necesariamente unital– $\phi : L(E) \to R$ tal que $K_0(\phi) \circ \mathrm{can} = \xi$ y tal que $\phi(v)$, $\phi(ee^*) \in \mathrm{Idem}_f(R)$ para todo $v \in E^0$ y $e \in E^1$.

ii) Si $p \in \mathrm{Idem}_f(R)$ y $\xi([1]_E) = [p]$, ϕ se puede tomar de modo que se cumpla i) y además $\phi(1) = p$.

Demostración. Por la Proposición 7.5.8 hay idempotentes ortogonales $\{p_e : e \in E^1\} \cup \{p_v : v \in \mathrm{sing}(E)\} \subset \mathrm{Idem}_f(R)$ tales que $[p_v] = \xi[v]$ y $[p_e] = \xi[r(e)]$ en $K_0(R)$ $(v \in \mathrm{sing}(E), e \in E^1)$. Si $e \in E^1$ y $r(e) \in \mathrm{reg}(E)$, entonces

$$[p_e] = [\sum_{f \in E^1,\, s(f) = r(e)} p_f].$$

Luego si $\sigma_e = \sum_{f \in E^1,\, s(f) = r(e)} p_f$, hay elementos $y_e \in \sigma_e R p_e$ y $x_e \in p_e R \sigma_e$ tales que $p_e = x_e y_e$ y $\sigma_e = y_e x_e$. Del mismo modo si $e \in E^1$ y $r(e) = v \in \mathrm{sing}(E)$, entonces hay $x_e \in p_e R p_v$, $y_e \in p_v R p_e$ con $x_e y_e = p_e$ y $y_e x_e = p_v$. Por verificación directa se comprueba que

$$\psi(e) = x_e, \psi(e^*) = y_e \quad (e \in E^1), \quad \psi(v) = p_v \quad (v \in \mathrm{sing}(E))$$

define un morfismo de álgebras $\psi : L(E) \to R$. Por construcción, $K_0(\psi)$ envía $[v] \mapsto [p_v] = \xi([v])$ si $v \in \mathrm{sing}(E)$ y si $v \in \mathrm{reg}(E)$,

$$\begin{aligned} K_0(\psi)([v]) &= \sum_{s(e)=v} K_0(\psi)([ee^*]) = \sum_{s(e)=v} [p_e] \\ &= \sum_{s(e)=v} \xi([r(e)]) = \xi(\sum_{s(e)=v} [r(e)]) = \xi([v]). \end{aligned}$$

Sea $q = \psi(1)$; entonces $\psi(L(E)) \subset pRp$ y tenemos $[q] = K_0(\psi)([1]_E) = \xi([1]_E) = [p]$. Luego hay $v \in pRq$, $u \in qRp$ tales que $vu = p$ y $uv = q$.

Entonces $\phi : L(E) \to R$, $\phi(a) = u\psi(a)v$ es morfismo de álgebras y $\phi(1) = upv = uv = q$. □

En el siguiente corolario y de aquí en adelante adoptamos el siguiente vocabulario. Una *subálgebra* de un álgebra R es un k-submódulo $A \subset R$ cerrado por productos. Por ejemplo si $e \in \mathrm{Idem}(R)$ entonces $A = eRe \subset R$ es una subálgebra que tiene unidad e, que si $e \neq 1$, no es la unidad de R. A es una *subálgebra unital* si $1_R \in A$ es decir, si tiene unidad y coincide con la de R.

Corolario 7.6.2. *Sean R un álgebra propiamente infinita y E un grafo unital simple. Supongamos que el morfismo estructural $k \to R$ es inyectivo. Entonces R contiene una subálgebra –no necesariamente unital– isomorfa a $L(E)$. Si además $[1_R] = 0$ en $K_0(R)$, entonces R contiene una subálgebra unital isomorfa a $L(E)$.*

Demostración. Por el Teorema 7.6.1 existe un morfismo de álgebras $\phi : L(E) \to R$ tal que $K_0(\phi) \circ \mathrm{can} = 0$ y tal que $\phi(v)$ es muy pleno para todo $v \in E^0$, que se puede elegir unital si $[1_R] = 0$. Basta ver que ϕ es inyectivo. Como E es simple, por el Teorema 4.7.9, esto se sigue si ϕ satisface G1. Sean $v \in E^0$ y $p = \phi(v)$; como p es muy pleno existen $x \in pR$, $y \in Rp$ tales que $xy \leq p$ y $yx = 1$. Si $a \in k$ y $a \cdot p = 0$, entonces $0 = y \cdot ap \cdot x = a \cdot 1$, lo que, como $k \to R$ es inyectiva, implica que $a = 0$. □

Corolario 7.6.3. *Sea E un grafo unital simple puramente infinito sin fuentes tal que $[1]_E = 0$ en $\mathfrak{BF}(E)$. Entonces para todo grafo unital simple F existe un morfismo unital inyectivo $\phi : L(F) \to L(E)$.*

Demostración. Por el Corolario 4.3.6, el morfismo estructural $k \to L(E)$ es inyectivo. Como el morfismo canónico $\mathrm{can} : \mathfrak{BF}(E) \to K_0(L(E))$ manda $[1]_E \mapsto [1_{L(E)}]$, tenemos que $[1]_E = 0$ implica $[1_{L(E)}] = 0$. Por el Lema 7.5.5, $L(E)$ es propiamente infinita. Luego la afirmación del presente corolario se sigue del Corolario 7.6.2. □

Corolario 7.6.4. *Existen morfismos unitales inyectivos $L_2 \to L_{2^-}$ y $L_{2^-} \to L_2$.*

Demostración. Por la Proposición 6.4.7 y el Ejemplo 7.3.5, $\mathfrak{BF}(\mathcal{R}_2) = \mathfrak{BF}(\mathcal{R}_2^-) = 0$. Además $\mathcal{R}_2$ y $\mathcal{R}_2^-$ son simples puramente infinitos; luego el presente corolario se sigue del Corolario 7.6.3. □

Ejercicio 7.6.5. Sea E un grafo regular finito.

i) Sea $u \in L(E)$ un elemento inversible tal que $uv = vu$ para todo $v \in E^0$. Probar que existe un endomorfismo $\phi_u : L(E) \to L(E)$ tal que $\phi_u(e) = ue$, $\phi_u(e^*) = e^* u^{-1}$ para todo $e \in E^1$ y $\phi_u(v) = v$ para todo $v \in E^0$.

ii) Sea $\phi : L(E) \to L(E)$ un endomorfismo tal que $\phi(v) = v$ para todo $v \in E^0$. Probar que $u = \sum_{i=1}^n \phi(e)e^*$ es inversible, que $uv = vu$ para todo $v \in E^0$, y que $\phi = \phi_u$.

iii) Probar que si $f : L_2 \to L_{2^-}$ y $g : L_{2^-} \to L_2$ son morfismos unitales como en el Corolario 7.6.4, entonces existe un elemento inversible $u \in L_2$ tal que $g \circ f = \phi_u$.

Observación 7.6.6. Se sigue del Corolario 7.6.3 que para cada grafo unital simple E, L_2 contiene una subálgebra unital isomorfa a $L(E)$. De hecho vale algo aún más fuerte. Brownlowe y Sørensen probaron en [8, Theorem 4.1] que para todo grafo unital (simple o no) E existe un monomorfismo unital $L(E) \to L_2$ que conmuta con la involución.

El Lema siguiente muestra que el caso $[1_R] = 0$ del Corolario 7.6.2 se sigue del caso $R = L_2$.

Lema 7.6.7. *Sea R un álgebra propiamente infinita. Entonces $[1_R] = 0$ en $K_0(R)$ si y sólo si existe un morfismo unital $\phi : L_2 \to R$. Un tal morfismo ϕ es inyectivo si y sólo si el morfismo estructural $k \to R$ es inyectivo.*

Demostración. Por el Ejemplo 7.3.5, $\mathfrak{BF}(\mathcal{R}_2) = 0$. Luego si hay un morfismo unital $\phi : L_2 \to R$, $[1_R] = K_0(\phi)([1_{L_2}]) = 0$. Recíprocamente, supongamos que $[1_R] = 0$ en $K_0(R)$. Por el Teorema 7.6.1, existe un morfismo unital $\phi : L_2 \to R$. El morfismo estructural $k \to R$ es inyectivo si y sólo si $\lambda \cdot 1_R = 0$ con $\lambda \in k$ implica que $\lambda = 0$, lo que, como ϕ es unital y $\mathcal{R}_2$ tiene un solo vértice, equivale a que se cumpla la condición (G1) del Teorema 4.7.9. Por ese teorema y como $\mathcal{R}_2$ no tiene ciclos sin salida, (G1) equivale a que ϕ sea inyectivo. □

7.7. K_0 de álgebras matriciales y ultramatriciales

Ejercicio 7.7.1. Sea $\{M_i : i \in I\}$ una familia de monoides abelianos. La *suma directa* $\bigoplus_{i\in I} M_i \subset \prod_{i\in I} M_i$ es el subconjunto de I-uplas de soporte finito, equipado con la suma coordenada a coordenada. Para cada $i \in I$ sea $\iota_i : M_i \to \bigoplus_{j\in I} M_j$ la inclusión canónica. Probar que $\sum_{i\in I} \iota_i^+ : \bigoplus_{i\in I} M_i^+ \to (\bigoplus_{i\in I} M_i)^+$ es un isomorfismo.

Lema 7.7.2. *Sean $n \geq 1$, $R_1, \cdots, R_n$ álgebras, $R = \bigoplus_{i=1}^n R_i$ y $\pi_i : R \to R_i$ la proyección. El morfismo de monoides*

$$\mathcal{V}_\infty(R) \to \bigoplus_{i=1}^n \mathcal{V}_\infty(R_i),\ \ [p] \mapsto ([\pi_1(p)], \ldots, [\pi_n(p)])$$

es un isomorfismo.

Demostración. Para cualquier álgebra S, la función $M_\infty \otimes S \to M_\infty S$, $\varepsilon_{i,j} \otimes s \to \varepsilon_{i,j} s$ es un isomorfismo de álgebras. Luego, como $\otimes$ conmuta con sumas directas, tenemos $M_\infty R \cong \bigoplus_{i=1}^n M_\infty R_i$. Por otro lado si $S = \bigoplus_{i=1}^n S_i$, entonces $\operatorname{Idem}(S) = \prod_{i=1}^n \operatorname{Idem}(S_i)$ y si $p, q \in \operatorname{Idem}(S)$ entonces $p = (p_1, \ldots, p_n) \sim q = (q_1, \ldots, q_n)$ si y sólo si $p_i \sim q_i$ para todo i. Se sigue que el morfismo del lema es un isomorfismo. □

Corolario 7.7.3. *Las proyecciones $\pi_1, \ldots, \pi_n$ inducen un isomorfismo $K_0(R) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i=1}^n K_0(R_i)$.*

Demostración. El isomorfismo del Lema 7.7.2 induce un isomorfismo $K_0(R) \xrightarrow{\sim} (\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{V}_\infty R_i)^+$; por el Ejercicio 7.7.1, $(\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{V}_\infty R_i)^+ = \bigoplus_{i=1}^n K_0(R_i)$. □

Ejemplo 7.7.4. Sean $s \geq 1$, $n_1, \ldots, n_s \geq 1$ y $R = \bigoplus_{i=1}^s M_{n_i}$. Entonces

$K_0(\bigoplus_{i=1}^{s} M_{n_i}) = K_0(k)^s$. En particular si k es un cuerpo, $K_0(R)$ es un grupo abeliano libre y su rango es el número de clases de isomorfismo de R-módulos simples.

Ejercicio 7.7.5. Sean I un poset filtrante y $\{\sigma_{i,j} : M_i \to M_j,\ i,j \in I\}$ un sistema dirigido de monoides abelianos. El *colímite* del sistema filrante es el cociente de $\bigoplus_{i\in I} M_i$ por la relación de congruencia generada por $x \sim \sigma_{i,j}(x)$, $x \in M_i$, $i \le j \in I$. Sea $\pi : \bigoplus_{i\in I} M_i \to \operatorname{colim}_{i\in I} M_i$ la proyección. Para cada $i \in I$ sean $\iota_i : M_i \to \bigoplus_{j\in I} M_j$ la inclusión canónica, y sea $\sigma_i = \pi \circ \iota_i : M_i \to \operatorname{colim}_I M_j$.

i) Probar que si N es un monoide abeliano y $\{f_i : M_i \to N \,|\, i \in I\}$ es una familia de morfismos tal que $f_j \circ \sigma_{i,j} = f_i$ para todo $i \le j$ entonces existe un único morfismo de monoides $f : \operatorname{colim}_I M_i \to N$ tal que para todo $i \in I$, $f \circ \sigma_i = f_i$.

ii) Probar que el morfismo canónico $\operatorname{colim}_I M_i^+ \to (\operatorname{colim}_I M_i)^+$ es un isomorfismo.

Lema 7.7.6. *Sea $\{\sigma_{i,j} : R_i \to R_j\}$ un sistema dirigido de álgebras y morfismos unitales. Entonces el morfismo canónico $\sigma : \operatorname{colim}_I \mathcal{V}_\infty(R_i) \to \mathcal{V}_\infty(\operatorname{colim}_I R_i)$ inducido por la familia $\mathcal{V}_\infty(\sigma_i) : \mathcal{V}_\infty(R_i) \to \mathcal{V}_\infty(\operatorname{colim}_I R_i)$ $(i \in I)$ es un isomorfismo.*

Demostración. Sea $R = \operatorname{colim}_I R_i$. Entonces $M_\infty R = M_\infty \otimes R = \operatorname{colim}_I M_\infty \otimes R_i = \operatorname{colim}_I M_\infty R_i$. Luego $p \in \operatorname{Idem}_\infty(R)$, existen $i \in I$ y $x \in R_i$ tales que $p = \sigma_i(x)$. Como $p^2 = p$, existe $j \ge i$ tal que $p_j := \sigma_{i,j}(x) = \sigma_{i,j}(x)^2$. En particular $\mathcal{V}_\infty(R) \ni [p] = [\sigma_j(p_j)]) \in \Im(\sigma)$. Sea $\mu_i : \mathcal{V}_\infty(R_i) \to \operatorname{colim}_I \mathcal{V}_\infty(R_j)$ el morfismo canónico. Sean $\xi, \nu \in \operatorname{colim}_I \mathcal{V}_\infty(R_i)$; entonces existen $i \in I$ y $p, q \in \operatorname{Idem}_\infty(R_i)$ tales que $\mu_i([p]) = \xi$ y $\mu_i([q]) = \eta$. Si $\sigma(\xi) = \sigma(\eta)$ entonces $[\sigma_i(p)] = [\sigma_i(q)]$. Luego existen $x, y \in R$ tales que $xy = \sigma_i(p)$ y $yx = \sigma_i(q)$. Como I es filtrante, podemos elegir $j \ge i$ suficientemente grande de modo que existan $x_j, y_j \in R_j$ tales que $x = \sigma_j(x_j)$, $y = \sigma_j(y_j)$, $x_j y_j = \sigma_{i,j}(p)$ y $y_j x_y = \sigma_{i,j}(q)$. Luego $[\sigma_{i,j}(p)] = [\sigma_{i,j}(q)] \in \mathcal{V}_\infty(R_j)$ y por tanto $\xi = \mu_j \mu_{i,j}([p]) = \mu_j \mu_{i,j}([q]) = \eta$. ☐

Corolario 7.7.7. *El morfismo natural $\operatorname{colim}_I K_0(R_i) \to K_0(\operatorname{colim}_I R_i)$ es un isomorfismo.*

Demostración. Se sigue del Lema 7.7.6 y del Ejercicio 7.7.5. ☐

Ejemplo 7.7.8. Sean $d \ge 2$ y M_{d^∞} como en el Ejemplo 3.3.10. Entonces

$$K_0(M_{d^\infty}) = \operatorname*{colim}_{\mathbb{N}} K_0(M_{d^n}) = \operatorname{colim}(K_0(k) \xrightarrow{d} K_0(k) \xrightarrow{d} \dots)$$

$$= K_0(k) \otimes \operatorname*{colim}_{\mathbb{N}}(\mathbb{Z} \xrightarrow{d} \mathbb{Z} \xrightarrow{d} \dots) = K_0(k) \otimes ((\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}t^n)/\langle dt^n - t^{n+1}\rangle)$$

$$K_0(k) \otimes \mathbb{Z}[t]/\langle dt - 1\rangle = K_0(k) \otimes \mathbb{Z}[1/d].$$

Teorema 7.7.9 (Elliott, [16, Theorem 15.26])**.** *Sea k un cuerpo y sean R y S álgebras ultramatriciales. Sea $\xi : (K_0(R), K_0(R)_+, [1_R]) \xrightarrow{\sim} (K_0(S), K_0(S)_+, [1_S])$ un isomorfismo de grupos preordenados con escala. Entonces existe un isomorfismo $\phi : R \xrightarrow{\sim} S$ tal que $K_0(\phi) = \xi$.*

7.8. El álgebra de Leavitt como producto cruzado

Sean R álgebra unital, $\phi : R \to R$ un endomorfismo de k-álgebras, no necesariamente unital, y $p = \phi(1)$. Decimos que ϕ es un *isomorfismo de esquina* si su correstricción $R \to pRp$ es un isomorfismo. Sea $\phi : R \to R$ un isomorfismo de esquina. Sean M el R-bimódulo libre con base $\{t_+, t_-\}$ y $T_R M$ el álgebra tensorial. El *producto cruzado* (o *álgebra de polinomios de Laurent torcida*) de R por ϕ [4] es el cociente

$$R[t_+, t_-; \phi] = T_R M / \langle t_+ a t_- - \phi(a),\ t_- t_+ - 1 \rangle$$

Observemos que, en $S = R[t_+, t_-; \phi]$, si $a \in R$, $t_+ t_- = p$ y por tanto $t_-(1 - p) = (1-p)t_+ = 0$. Luego

$$\begin{aligned} t_- a t_+ &= t_-(pap + (1-p)ap + pa(1-p) + (1-p)a(1-p)) \\ &= t_-\phi(\phi^{-1}(pap))t_+ = t_- t_+ \phi^{-1}(pap) t_- t_+ = \phi^{-1}(pap). \end{aligned} \tag{7.8.1}$$

En el siguiente lema, si $\psi : R \to R$ es un isomorfismo de esquina con $q = \psi(1)$, escribimos $(Rq)_\psi$ por el R-bimódulo Rq con multiplicación $a \cdot (xq) \cdot b = axq\psi(b)$, y ${}_\psi(qR)$ por el R-bimódulo qR con multiplicación $a \cdot (qx) \cdot b = \psi(a)qxb$.

Lema 7.8.2. *Sea $S = R[t_+, t_-, \phi]$.*

i) El álgebra S es $\mathbb{Z}$-graduada tal que

$$S_n = \begin{cases} S_0 t_+^n & \text{si } n > 0 \\ t_-^{-n} S_0 & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

ii) Hay un isomorfismo de R-bimódulos

$$S_n \cong \begin{cases} (Rp_n)_{\phi^n} & n \geq 0 \\ {}_{\phi^{-n}}(p_{-n}R) & n \leq 0 \end{cases}$$

Demostración. El álgebra $T = T_R(M)$ admite una única $\mathbb{Z}$-graduación con $|a| = 0$ si $a \in R$ y $|t_\pm| = \pm 1$. Para esta graduación, los elementos $t_+ a t_- - \phi(a)$ con $a \in R$ y $t_- t_+ - 1$ son homogéneos de grado 0. Luego el ideal bilátero $I \lhd T$ que generan es homogéneo y el cociente S es un álgebra $\mathbb{Z}$-graduada y la componente de grado n es la imagen por la proyección al cociente de la componente T_n. Ésta es generada por todos las los productos de elementos de R con t_+ y t_- de grado total n. Se sigue de (7.8.1) que S_0 es la imagen de R. las relaciones de I que S_n es generado como k-módulo, por las proyecciones de todos los productos de elementos de R y potencias de t_+ y t_- de grado total n. Las relaciones de I implican que todo tal producto es imagen de un elemento de la forma at_+^n si $n > 0$ y $t_-^{-n}a$ si $n < 0$, con $a \in S_0$. Esto prueba i) y muestra además que para todo $n \geq 0$, la proyección $\pi : T \to S$ aplica $Rt_+^{\otimes n} \twoheadrightarrow S_n$ y $t_-^{\otimes n}R \twoheadrightarrow S_{-n}$. Sea, para cada $n \in \mathbb{Z}$, L_n el lado derecho del isomorfismo de ii). Por lo que acabamos de ver, π induce un morfismo de R-bimódulos suryectivo $f_n : L_n \twoheadrightarrow S_n$ $(n \in \mathbb{Z})$. Para cada $m, n \in \mathbb{Z}$, sea

$$\mu_{m,n} : L_m \times L_n \to L_{m+n},\ \mu_{m,n}(x,y) = \begin{cases} x\phi^m(y) & m,n \geq 0 \\ \phi^{-n}(x)y & m,n < 0 \\ \phi^{-(n+m)}(x)y & 0 \leq m \leq -n \\ x\phi^{m+n}(y) & 0 \leq -n \leq m \\ \phi^m(xy)p_{(m+n)} & m+n \geq 0 \geq m \\ p_{-(n+m)}\phi^{-n}(xy) & n \geq 0 \geq m+n \end{cases}$$

Es claro que $\mu_{m,n}$ es k-bilineal para todo $m, n \in \mathbb{Z}$. Sea $\mu : L \times L \to L$, $\mu(\sum_m x_m, \sum_n y_n) = \sum_{m,n} \mu_{m,n}(x_m, y_n)$. Es largo pero sencillo verificar que μ es asociativo y que $f = \sum_n f_n : L \to S$ es morfismo de álgebras. Sean $u_+ = p \in L_1$, $u_- = p \in L_{-1}$; entonces $\mu(u_-, u_+) = \phi^{-1}(p) = 1$ y si $a \in R = L_0$,

$$u_+ \cdot a \cdot u_- = \mu_{1,-1}(\mu_{1,0}(p,a), p) = \mu_{1,-1}(p\phi(a), p) = p\phi(a)p = \phi(a).$$

Por tanto hay un único morfismo de álgebras $g : S \to L$ tal que $g \circ \pi(a) = a$ si $a \in R$, y $g(t_\pm) = u_\pm$. Por la propiedad universal de S, tenemos $f \circ g = \mathrm{id}_S$. Además es claro que $g \circ f$ es la identidad sobre $L_0 = R$ y que fija $u_\pm$. Un cálculo muestra que $L_n = u_-^{-n} L_0$ si $n < 0$ y $L_n = L_0 u_+^n$ si $n > 0$. Luego $g \circ f = \mathrm{id}_L$. □

Proposición 7.8.3. *Sea $R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R_n$ un álgebra $\mathbb{Z}$-graduada. Sean $u_+ \in R_1$ y $u_- \in R_{-1}$ tales que $u_- u_+ = 1$ y $\phi : R_0 \to R_0$, $\phi(a) = u_+ a u_-$. Entonces hay un isomorfismo de álgebras $\mathbb{Z}$-graduadas $R_0[t_+, t_-; \phi] \xrightarrow{\sim} R$.*

Demostración. Por propiedad universal de $S = R_0[t_\pm; \phi]$ la identidad de R_0 se extiende a un morfismo homogéneo $f : S \to R$ que manda $t_\pm \mapsto u_\pm$. Sea $x \in R$ homogéneo de grado n. Si $n > 0$, entonces $y = x u_-^n \in R_0$ y $x = y u_+^n$; si $n < 0$, $z = u_+^n x \in R_0$ y $x = u_-^n z$. Luego f es suryectivo y $\mathrm{Ker}(f) \triangleleft S$ es un ideal homogéneo. Si $n > 0$ y $x \in S_n \cap \mathrm{Ker}(f)$, entonces $x = y t_+^n$ para algún $y \in R_0$ y $y u_+^n = 0$. Multiplicando a derecha por u_-^n obtenemos que $y\phi^n(1) = y p_n = 0$, lo que por el Lema 7.8.2 implica que $x = 0$. Análogamente $\mathrm{Ker}(f) \cap S_n = 0$ para $n < 0$. □

Sean E un grafo finito sin fuentes, $L(E)$ su álgebra de Leavitt y $L(E)_n$ la componente homogénea de grado $n \in \mathbb{Z}$. Recordemos de la Proposición 4.6.8 que $L(E)_0 = \mathcal{M}(E)$, el álgebra ultramatricial de E. Para cada vértice v sea $f_v \in E^1$ tal que $r(f_v) = v$. Sean

$$u_+ = \sum_{v \in E^0} f_v, \quad u_- = u_+^*,\ \phi : \mathcal{M}(E) \to \mathcal{M}(E),\ \phi(x) = u_+ x u_-. \tag{7.8.4}$$

Proposición 7.8.5. *Sea E un grafo finito sin fuentes y sean $u_\pm$ y ϕ como en (7.8.4). Entonces ϕ es un isomorfismo de esquina y el morfismo canónico $\mathcal{M}(E)[t_+, t_-; \phi] \to L(E)$, $x \mapsto x$ si $x \in \mathcal{M}(E)$, $t_\pm \mapsto u_\pm$, es un isomorfismo.*

Demostración. Notemos que $u_- u_+ = \sum_{v,w \in E^0} f_v^* f_w = \sum_{v \in E^0} v = 1$; en particular $u_+ u_- u_+ = u_+$ y $u_- u_+ u_- = u_-$. Se sigue que ϕ es un isomorfismo de álgebras entre $L(E)_0 = \mathcal{M}(E)$ y la esquina del idempotente $p = u_+ u_-$. Luego $L(E) \cong \mathcal{M}(E)[t_+, t_-; \phi]$, por la Proposición 7.8.3. □

7.9. Grupo de Bowen-Franks graduado

Sea E un grafo unital, $A = A_E \in \mathbb{Z}^{\mathrm{reg}(E)\times E^0}$ su matriz de incidencia reducida y $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ el anillo de polinomios de Laurent. Sea $B = B_E \in Z[t,t^{-1}]^{E^0\times\mathrm{reg}(E)}$, $B(v,w) = \delta_{v,w} - tA(w,v)$. El *grupo de Bowen-Franks graduado* de E es el $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]$-módulo

$$\overline{\mathfrak{BF}}(E) = \mathrm{Coker} B.$$

Observación 7.9.1. Sea E un grafo finito sin pozos. Entonces $B = B_E \in \mathbb{Z}[t]^{E^0\times E^0}$. Miremos a la multiplicación por B como endomorfismo del grupo abeliano $\mathbb{Z}[t,t^{-1}]^{E^0}$. Sean $I \in \mathbb{Z}^{E^0\times E^0}$ la matriz identidad y $A = A_E$ la matriz de incidencia. La matriz de la multiplicación por B con respecto a la base $\{t^n : n \in \mathbb{Z}\}$ tiene una descomposición en bloques

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -A^t & I \end{bmatrix}$$

En otras palabras, podemos pensar a B como la resta de la matriz identidad de tamaño $E^0 \times \mathbb{Z}$ menos la matriz de bloques

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A^t & 0 \end{bmatrix}$$

Esta es la transpuesta de la matriz de incidencia del grafo $\tilde{E}$ de la Proposición 3.4.3. El grafo $\tilde{E}$ tiene asociado el monoide abeliano

$$M_{\tilde{E}} = \mathbb{N}^{(E^0\times\mathbb{Z})}/\langle (v,n) \sim \sum_{s(e)=v} (r(e), n+1)\rangle.$$

Este monoide viene equipado con una acción de $\mathbb{Z}$, donde el generador envía la clase de (v,n) en la de $(v,n+1)$.

Ejercicio 7.9.2. Sea E un grafo finito regular. Probar que $\overline{\mathfrak{BF}}(E) = M_{\tilde{E}}^{+}$ y que la multiplicación por t es inducida por la acción de $\mathbb{Z}$ en $M_{\tilde{E}}$ descripta en la Observación 7.9.1.

Proposición 7.9.3. *Sea E un grafo finito sin pozos. Entonces hay un isomorfismo natural de grupos abelianos $f : \overline{\mathfrak{BF}}(E) \otimes K_0(k) \xrightarrow{\sim} K_0(\mathcal{M}(E))$. Si E no tiene fuentes y $\phi : \mathcal{M}(E) \to \mathcal{M}(E)$ es como en (7.8.4), entonces $f(t^{-1}x) = K_0(\phi)(f(x))$ para todo $x \in \overline{\mathfrak{BF}}(E) \otimes K_0(k)$.*

Demostración. Sea $A' = A_E^t$; como $E = \mathrm{reg}(E)$, $A' \in \mathbb{Z}^{E^0\times E^0}$. Tenemos isomorfismos de grupos abelianos

$$\begin{aligned}
\overline{\mathfrak{BF}}(E) \otimes K_0(k) &= (\mathbb{Z}[t,t^{-1}]^{E^0}/(I - tA')\mathbb{Z}[t,t^{-1}]^{E^0}) \otimes K_0(k) \\
&= (\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^{E^0} t^n / \langle \mathbb{Z}^{E^0} t^n - A'\mathbb{Z}^{E^0} t^{n+1}) \otimes K_0(k) \\
&= \mathrm{colim}(\mathbb{Z}^{E^0} \xrightarrow{A'} \mathbb{Z}^{E^0} \xrightarrow{A'} \dots) \otimes K_0(k) \\
= \mathrm{colim}(K_0(k)^{E^0} \xrightarrow{A'} K_0(k)^{E^0} \xrightarrow{A'} \dots) &= \mathrm{colim}_n(K_0(\mathcal{M}_n E)) = K_0(\mathcal{M}(E)).
\end{aligned}$$

Sea f la composición de los isomorfismos de arriba. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\psi_n : K_0(\mathcal{M}_n(E)) \xrightarrow{\sim} K_0(\mathcal{M}_{n+1}(E))$ la composición de los isomorfismos canónicos $K_0(\mathcal{M}_n(E)) \xrightarrow{\sim} K_0(k)^{E^0} \xrightarrow{\sim} K_0(\mathcal{M}_{n+1}(E))$. La multiplicación por t^{-1} corresponde a través de f al morfismo inducido en el colímite por el siguiente morfismo de sistemas dirigidos

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r] & K_0(\mathcal{M}_n(E)) \arrow[r] \arrow[d, "\psi_n"] & K_0(\mathcal{M}_{n+1}(E)) \arrow[r] \arrow[d, "\psi_{n+1}"] & \dots \\ \dots \arrow[r] & K_0(\mathcal{M}_{n+1}(E)) \arrow[r] & K_0(\mathcal{M}_{n+2}(E)) \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

Por otra parte, la restricción de ϕ a $\mathcal{M}_n(E)$ manda $\alpha\beta^* \mapsto f_{s(\alpha)}\alpha\beta^* f^*_{s(\beta)} \in \mathcal{M}_{n+1}(E)$. Dado que la clase en $K_0(\mathcal{M}_n(E))$ de $\alpha\alpha^*$ depende sólo de $r(\alpha)$ y que el isomorfismo $K_0(k)^{E^0} \to K_0(\mathcal{M}_n(E))$ manda $[p]\chi_v$ en $[p\alpha\alpha^*]$, se sigue que $\phi : \mathcal{M}_n(E) \to \mathcal{M}_{n+1}(E)$ induce $\psi_n : K_0(\mathcal{M}_n(E)) \to K_0(\mathcal{M}_{n+1}(E))$. Luego en el colímite, $K_0(\phi)$ es la multiplicación por t^{-1}. $\square$

Conjetura (Hazrat, [17, Conjecture 1]). Sean E y F grafos regulares finitos y sea k un cuerpo. Sea $\xi : \overline{\mathfrak{BF}}(E) \to \overline{\mathfrak{BF}}(F)$ un isomorfismo de $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$-módulos que manda $\iota(M_{\tilde{E}}) \to \iota(M_{\tilde{F}})$ y $\sum_{v \in E^0}(v, 0) \mapsto \sum_{w \in F^0}(w, 0)$. Entonces existe un isomorfismo de álgebras $\mathbb{Z}$-graduadas $\phi : L(E) \xrightarrow{\sim} L(F)$.

Un automorfismo g de un álgebra R se dice *interior* si existe $u \in R^*$ tal que para todo $x \in R$, $g(x) = uxu^{-1}$. Decimos que g es *localmente interior* si para todo subconjunto finito $F \subset R$ existe un isomorfismo interior h de R tal que $g(x) = h(x)$ para todo $x \in F$.

Ejercicio 7.9.4. Sean R un álgebra, $\phi : R \to R$ un isomorfismo de esquina y $u \in R^*$. Sea $\mathrm{ad}(u) : R \to R$, $x \mapsto uxu^{-1}$. Probar que las álgebras $R[t_\pm; \phi]$, $R[t_\pm; \mathrm{ad}(u) \circ \phi]$ y $R[t_\pm; \phi \circ \mathrm{ad}(u)]$ son isomorfas.

Teorema 7.9.5 (Ara-Pardo, [5, Theorem 4.1]). *Sean k un cuerpo, E y F grafos finitos esenciales y ξ como en la Conjetura 7.9. Sea $\phi : \mathcal{M}(F) \to \mathcal{M}(F)$ como en (7.8.4). Entonces existe un automorfismo localmente interior $g : \mathcal{M}(F) \to \mathcal{M}(F)$ tal que $L(E) \cong \mathcal{M}(F)[t_+, t_-, g \circ \phi]$.*

Bibliografía

[1] Gene Abrams, Pere Ara, and Mercedes Siles Molina, *Leavitt path algebras*, Lecture Notes in Math., vol. 2008, Springer, 2017. ↑45, 46, 51, 54, 86

[2] Gene Abrams, Adel Louly, Enrique Pardo, and Christopher Smith, *Flow invariants in the classification of Leavitt path algebras*, J. Algebra **333** (2011), 202–231. MR2785945 ↑75, 83

[3] Pere Ara and Guillermo Cortiñas, *Tensor products of Leavitt path algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **141** (2013), no. 8, 2629–2639. ↑83

[4] Pere Ara, María de los Ángeles González Barroso, Kenneth R. Goodearl, and Enrique Pardo, *Fractional skew monoid rings*, J. of Algebra **278** (2004), 104-126. ↑96

[5] Pere Ara and Enrique Pardo, *Towards a K-theoretic characterization of graded isomorphisms between Leavitt path algebras*, J. *K*-Theory **14** (2014), 203–245. ↑99

[6] Pere Ara, Enrique Pardo, and Kenneth R. Goodearl, *K_0 of purely infinite simple regular rings*, *K*-theory **26** (2002), 69–100. ↑62, 73

[7] Hyman Bass, *Algebraic K-theory*, W. A. Benjamin, 1968. ↑65

[8] Nathan Brownlowe and Adam P.W. Sørensen, *Leavitt R-algebras over countable graphs embed into $L_{2,R}$*, J. Algebra **454** (2016), 334–356. ↑51, 94

[9] ———, *$L_{2,\mathbb{Z}} \otimes L_{2,\mathbb{Z}}$ does not embed in $L_{2,\mathbb{Z}}$*, J. Algebra **456** (2016), 1–22. ↑83

[10] S.U. Chase, *Direct products of modules*, Trans. Amer. Math. Soc. **97** (1960), 457–473. ↑27

[11] G. Cortiñas, *Notas de Álgebra II*, Cursos de grado, Departamento de Matemática, FCEyN, UBA, 2020. ↑9, 22, 23, 24, 26, 27, 37, 69, 71

[12] Guillermo Cortiñas and Diego Montero, *Algebraic bivariant K-theory and Leavitt path algebras*, J. Noncommut. Geom., to appear, available at `arXiv:1806.09204`. ↑89

[13] J. Cuntz and W. Krieger, *A class of C^*-algebras and topological Markov chains*, Invent. Math. **56** (1980), 251–268. ↑51

[14] J. Cuntz and D. Quillen, *Algebra extensions and nonsingularity*, J. Amer. Math. Soc. **8** (1995), 251–289. ↑31

[15] J. Franks, *Flow equivalence of subshifts of finite type*, Ergodic Theory Dynam. Systems **4** (1984), 53–66. ↑82

[16] Kenneth Goodearl, *Von Neumann regular rings*, Pitman Publishing Limited, Belmont, CA, 1979. ↑95

[17] Roozbeh Hazrat, *The graded Grothendieck group and the classification of Leavitt path algebras*, Math. Ann. **355** (2013), 273–325. ↑99

[18] Rune Johansen and Adam P.W. Sørensen, *The Cuntz splice does not preserve $*$-isomorphism of Leavitt path algebras over $\mathbb{Z}$*, J. Pure Appl. Algebra **220** (2016), 3966–3983. ↑83

[19] Eberhard Kirchberg, *The classification of purely infinite C^*-algebras using Kasparov theory*, Preprint. ↑83

[20] N.C. Phillips, *A classification theorem for nuclear purely infinite simple C^*-algebras*, Doc. Math. **5** (2000), 49–114. ↑83

[21] Mikael Rørdam, *Classification of Cuntz-Krieger algebras*, K-theory **9** (1995), no. 1, 31–58. ↑83

[22] ———, *A short proof of Elliott's theorem*, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada **16** (1994), 31–36. ↑83

[23] M. Tomforde, *Leavitt path algebras with coefficients in a commutative ring*, J. Pure Appl. Algebra **215** (2011), 471–484. ↑54