ISSN 1851-1317

Fascículo 7

Cursos de grado

Julián Fernández Bonder

Ecuaciones Diferenciales Parciales

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

2015

Cursos de grado

Fascículo 7

ISSN 1851-1317 (Versión Electrónica)
ISSN 1851-1295 (Versión Impresa)

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

Ecuaciones Diferenciales Parciales

Julián Fernández Bonder

(30 de julio de 2019)

IMAS - CONICET y Departamento de Matemática, FCEyN - Universidad de Buenos Aires, Ciudad Universitaria, Pabellón I (1428) Buenos Aires, Argentina.

E-mail address: jfbonder@dm.uba.ar

URL: http://mate.dm.uba.ar/~jfbonder

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

Las presentes notas surgen de la materia Ecuaciones Diferenciales que se dicta en la Licenciatura en Cs. Matemáticas en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires.

El curso se dicta en el último año de la carrera y es la primera (y única) vez en que los alumnos se topan con ecuaciones en derivadas parciales y con los modelos de los que surgen.

El curso presupone un buen conocimiento de Teoría de la Medida y rudimentos de Espacios Métricos (o Espacios de Banach). Por ejemplo el libro de R. Wheeden y A. Zygmund [**16**] para Teoría de la Medida y de W. Rudin [**14**] para Espacios Métricos son excelentes referencias y resultan más que suficientes para la buena comprensión del texto, aunque en algunas partes (sobre todo en el Capítulo 9) se utilizan algunas herramientas del Análisis Funcional donde el libro de H. Brezis [**2**] resulta una excelente referencia.

El material presentado en estas notas cubre lo que se puede dictar en un curso de 16 semanas. He incluido las guías con las que se trabaja durante el curso además de una serie de ejercicios que están distribuidos en los capítulos para ayudar a una mejor comprensión del material.

De ninguna manera estas notas pretenden originalidad sobre los temas presentados. Quizás en algunas partes puede haber alguna originalidad en la presentación y, cuando eso ocurre, la originalidad es menor.

Existen excelentes libros sobre el tema y estas notas están basados en varios de ellos. El motivo que me lleva a escribir estas notas es que ninguno de estos libros cubre el mismo material que se estudia en este curso y, en mucha menor medida, que la bibliografía sobre el tema se encuentra mayormente en inglés.

La bibliografía en la que me he basado es el excelente libro de L.C. Evans [**6**], el también excelente y clásico tratado de D. Gilbarg y N. Trudinger [**8**], el libro clásico de F. John [**10**] y el libro de H. Brezis [**2**]. Otro texto que tuvo influencia en ciertas partes de estas notas (fundamentalmente en el capítulo de ecuaciones de primer orden) es el libro de S. Salsa [**15**].

Espero que estas notas tengan algún valor y sean de utilidad para quien las lea.

Seguramente habrá muchos errores y erratas. A quien encuentre alguno de estos, le pido que me escriba a `jfbonder@dm.uba.ar` para poder corregir el manuscrito. Iré haciendo esas (y otras) correcciones a medida que pueda y mantendré una versión actualizada de estas notas en mi página personal, `http://mate.dm.uba.ar/~jfbonder`.

1.1. Descripción

Normalmente un libro de texto cubre mucho más material del que puede ser cubierto en un curso. En estas notas se encuentra exactamente lo que he podido dictar en el curso de Ecuaciones Diferenciales (a excepción de algunas secciones aisladas).

Dado que este es el único curso de la Licenciatura en Cs. Matemáticas (tanto para la orientación pura como aplicada) en que se estudia el tópico de las ecuaciones en derivadas parciales, se intenta empezar con la teoría clásica cubriendo fundamentalmente los ejemplos más relevantes de las mismas:

- la ecuación de Laplace/Poisson,
- la ecuación de difusión (o del calor),
- la ecuación de ondas.

También se dedica un capítulo a las ecuaciones de primer orden (y es ahí donde se ven, de manera muy rudimentaria, los únicos ejemplos de ecuaciones no lineales).

Para el tratamiento de estas ecuaciones se desarrolla también la teoría de series de Fourier y de la transformada de Fourier que, en la Licenciatura de Buenos Aires, no es estudiada en ningún curso previo.

Estos temas cubren aproximadamente las dos terceras partes del curso (unas 12 semanas). La última parte se dedica a estudiar la teoría algo más moderna de soluciones débiles y espacios de Sobolev. Por motivos de restricción temporal, sólo se estudian en este punto las ecuaciones elípticas y se esboza la aplicación a las ecuaciones parabólicas.

1.2. Agradecimientos

Hay varias personas a las que quiero agradecer. Primero a Gisela Bellisomi que sin sus espectaculares notas de clase jamás me hubiera animado a escribir este texto. Después a Juan Pablo Pinasco que hizo un excelente trabajo corrector (mientras él mismo dictaba el curso de EDPs usando parcialmente estas notas). En particular a Juan Pablo se debe la demostración del Teorema 4.4.5 (la original del texto era mucho más tediosa aún). También quiero agradecer a Noemí Wolanski por su ayuda en la demostración del Teorema 10.8.5. Finalmente le agradezco a Juan Dodyk por señalrme un error en la demostración del Teorema 10.7.11 .

Hubo además mucha gente que contribuyó encontrando erratas a las que le estoy muy agradecido. Quiero mencionar a Néstor Aguilera, Pablo Amster, Hernán Centeno, Luis López Rios, Rafael Martín, Mayte Pérez-Llanos, Matías Saucedo, Analía Silva y pedir perdón por anticipado a aquellas personas que no estoy mencionando y que muy gentilmente me enviaron sus comentarios.

Finalmente quiero agradecer a mis hijos, Agustín, Manuel y Facundo quienes sin su ayuda este texto se hubiera escrito mucho más rápido.

1.3. Notaciones

En esta sección listaré las notaciones que se usarán a lo largo de estas notas. He tratado de que la notación sea lo más estándar posible, así que el lector puede sin perjuicio alguno saltear esta sección y volver a ella en caso de que le surja alguna duda.

1.3.1. Puntos. Como es habitual, notaremos por $\mathbb{R}^n$ el espacio Euclídeo de n dimensiones. Un punto típico de $\mathbb{R}^n$ se notará por $x = (x_1, \dots, x_n)$ donde $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$.

En ocasiones será conveniente notar un punto de $\mathbb{R}^n$ como $x = (x', x_n)$ donde $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ y $x_n \in \mathbb{R}$.

El producto interno entre dos puntos de $\mathbb{R}^n$ $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ se nota

$$x \cdot y := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

y la norma asociada

$$|x| := (x \cdot x)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.3.2. Conjuntos. Dado $r > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$ se nota la bola abierta de radio r y centro x como

$$B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \colon |y - x| < r\}$$

Un subconjunto U de $\mathbb{R}^n$ se dice abierto, si dado $x \in U$ existe $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset U$.

Dado $V \subset \mathbb{R}^n$ se define el interior de V como

$$V^\circ := \{x \in V \colon \text{ existe } r > 0 \text{ tal que } B_r(x) \subset V\}.$$

Notar que $V^\circ \subset V$ resulta abierto y es el mayor abierto contenido en V.

El borde de U se nota por ∂U y se define como

$$\partial U := \{x \in \mathbb{R}^n \colon B_r(x) \cap U \neq \emptyset \text{ y } B_r(x) \cap (\mathbb{R}^n \setminus U) \neq \emptyset\}.$$

Un conjunto U se dice cerrado si $\partial U \subset U$. La clausura de un conjunto U se denota por $\bar{U}$ y se define como $\bar{U} := U \cup \partial U$. Notemos que $\bar{U}$ es el menor conjunto cerrado que contiene a U.

Un conjunto V se dice acotado si existe $r > 0$ tal que $V \subset B_r(0)$.

Un conjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ se dice compacto si es cerrado y acotado.

Dado un conjunto abierto U y un subconjunto $V \subset U$, decimos que V está compactamente contenido en U si $V \subset \bar{V} \subset U$ y $\bar{V}$ es compacto. Esta situación se notará como

$$V \subset\subset U.$$

Notaremos por ω_n al volumen de la bola unitaria de $\mathbb{R}^n$, $B_1(0)$. Es decir

$$\omega_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)},$$

donde $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x}\, dx$ es la función Gamma. En consecuencia se tiene que $n\omega_n$ es la superficie de la bola unitaria $\partial B_1(0)$. Ver **[7]** para el cálculo de la constante ω_n.

En ocasiones es importante obtener una descripción de la frontera de un abierto U, ∂U. Para eso es preciso realizar hipótesis sobre el conjunto.

Se dice que ∂U es de clase C^k ($k \in \mathbb{N}$) si para cada $x_0 \in \partial U$ existe $r > 0$ y una función $\phi\colon \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ de clase C^k tal que (salvo un reordenamiento de las variables y una reorientación de los ejes) se tiene

$$U \cap B_r(x_0) = \{x = (x', x_n) \in B_r(x_0)\colon x_n > \phi(x')\}.$$

Observemos que en este caso, la frontera de U se describe localmente como el gráfico de una función C^k, de hecho

$$\partial U \cap B_r(x_0) = \{x = (x', x_n) \in B_r(x_0)\colon x_n = \phi(x')\}.$$

Diremos que ∂U es de clase C^∞ si es de clase C^k para todo $k \in \mathbb{N}$.

Para la definición de una función de clase C^k ver la Sección 1.3.4.

1.3.3. Espacios de funciones continuas.

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ y $u\colon U \to \mathbb{R}$. Escribimos

$$u(x) = u(x_1, \dots, x_n).$$

Usaremos la siguiente notación,

$$u^+ = \max\{u, 0\}, \quad u^- = -\min\{u, 0\}.$$

Luego se tiene que $u = u^+ - u^-$ y $|u| = u^+ + u^-$.

Al conjunto de las funciones continuas en U se lo notará por $C(U) = C^0(U)$. Notaremos también por $C_b(U)$ al conjunto de las funciones continuas y acotadas. Es decir

$$C_b(U) := \{u \in C(U)\colon \sup_U |u| < \infty\}.$$

Si $u \in C(U)$ se llama el soporte de u al conjunto

$$\operatorname{sop}(u) := \overline{\{x \in U\colon u(x) \neq 0\}}.$$

Es decir, $\operatorname{sop}(u)$ es el complemento del abierto más grande donde u se anula.

Un subconjunto importante de las funciones continuas son las de soporte compacto,

$$C_c(U) := \{u \in C(U)\colon \operatorname{sop}(u) \text{ es compacto}\}.$$

Notemos que

$$C_c(U) \subset C_b(U) \subset C(U).$$

En $C_b(U)$ se define la norma

$$\|u\|_\infty := \sup_{x \in U} |u(x)|.$$

Es fácil ver que $C_b(U)$ con la métrica inducida por $\|\cdot\|_\infty$ resulta un espacio métrico completo. A la clausura de $C_c(U)$ con respecto a $\|\cdot\|_\infty$ se lo denota por $C_0(U)$ y son las funciones que se anulan *en el infinito*. Se tiene entonces

$$C_c(U) \subset C_0(U) \subset C_b(U) \subset C(U).$$

Ejercicio 1.3.1. *Probar que si U es acotado, $u \in C_0(U)$ si y sólo si $u \in C(\bar{U})$ y $u = 0$ en ∂U.*

En muchas situaciones se requiere un *módulo de continuidad* para las funciones. Dependiendo de la naturaleza de este módulo de continuidad se da lugar a diferentes espacios de funciones. Los más usuales son las funciones Lipschitz y las Hölder. Dado $0 < \gamma \leq 1$, se define

$$C^{0,\gamma}(U) := \left\{ u \in C(U) \colon \sup_{\substack{x,y \in U \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\gamma}} < \infty \right\}.$$

Cuando $\gamma = 1$ el espacio se lo llama *Lipschitz* y muchas veces se nota $C^{0,1}(U) = Lip(U)$. Cuando $0 < \gamma < 1$ el espacio se lo llama *Hölder* y se nota $C^{0,\gamma}(U) = C^{\gamma}(U)$.

Ejercicio 1.3.2. Probar que si $\gamma > 1$ entonces $C^{0,\gamma}(U)$ consiste exactamente en las funciones que son constantes en cada componente conexa de U.

1.3.4. Diferenciación y espacios de funciones diferenciables. En esta sección consideraremos $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto.

Sea $u \in C(U)$ y $x \in U$. Usaremos la siguiente notación para las derivadas parciales de u:

$$\partial_i u(x) = \partial_{x_i} u(x) = u_{x_i}(x) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) := \lim_{h \to 0} \frac{u(x + he_i) - u(x)}{h},$$

donde e_i es el $i-$ésimo vector canónico, si ese límite existe.

Para derivadas sucesivas, usaremos la *notación de multiíndices* siguiente: Un multiíndice es un vector $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ con $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$, $i = 1, \dots, n$. El orden de un multiíndice se nota por

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Dado un multiíndice α se define

$$D^{\alpha} u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} u.$$

En el caso particular de derivadas segundas usaremos la notación

$$\partial_i(\partial_j u) = \partial_{ij} u, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Dado $k \in \mathbb{N}_0$ se nota

$$D^k u(x) := \{D^{\alpha} u(x) \colon |\alpha| = k\}$$

al conjunto de todas las derivadas parciales de u de orden k en $x \in U$.

Existen dos casos particulares que requieren especial atención:

$k = 1$, en este caso los elementos de $D^1 u(x)$ los pensamos como un vector

$$D^1 u(x) = Du(x) = \nabla u(x) = (\partial_1 u(x), \dots, \partial_n u(x)).$$

Este vector ∇u se lo conoce como el *gradiente* de u.

$k = 2$, en este caso, los elementos de $D^2 u(x)$ los pensamos como una matriz

$$D^2 u(x) = Hu(x) = \begin{pmatrix} \partial_{11} u(x) & \cdots & \partial_{1n} u(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{n1} u(x) & \cdots & \partial_{nn} u(x) \end{pmatrix}$$

Esta matriz Hu se la conoce como la *matriz Hessiana* de u.

En cualquier caso, notamos

$$|D^k u(x)| = \left(\sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha u(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Notaremos los espacios de funciones diferenciables por

$$\begin{aligned}
C^k(U) &:= \{u \in C^0(U) \colon \partial_i u \in C^{k-1}(U),\ i = 1, \dots, n\}, \qquad k \in \mathbb{N},\\
C^{k,\gamma}(U) &:= \{u \in C^k(U) \colon D^\alpha u \in C^{0,\gamma}(U),\ \forall\ |\alpha| = k\}, \qquad 0 < \gamma \le 1,\\
C^k_c(U) &:= C^k(U) \cap C_c(U),\\
C^\infty(U) &:= \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k(U),\\
C^\infty_c(U) &:= C^\infty(U) \cap C_c(U).
\end{aligned}$$

Usualmente, precisaremos trabajar con funciones que sean regulares hasta la frontera de U, ∂U.

$$C^k(\bar U) := \{u \in C^k(U) \colon \text{existe } V \supset \bar U \text{ tal que } u \in C^k(V)\}.$$

En ocasiones se considerarán funciones que dependen de una variable *espacial* $x \in \mathbb{R}^n$ y una variable *temporal* $t \in \mathbb{R}$. En ese caso, definimos

$$C^{k,j}(U \times (a,b)) := \{u \in C^0(U \times (a,b)) \colon D^\alpha_x \partial^i_t u \in C^0(U \times (a,b)),\ |\alpha| \le k, 0 \le i \le j\}.$$

1.3.5. Espacios de Lebesgue. A la medida (exterior) de Lebesgue la notaremos por $|E|$ donde $E \subset \mathbb{R}^n$.

Un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ se dice medible si dado $\varepsilon > 0$, existe un abierto $U \supset E$ tal que $|U \setminus E| < \varepsilon$.

Notamos a la famila de los conjuntos medibles de $\mathbb{R}^n$ como $\mathcal{M}_n$. Esta familia forma una sigma-álgebra (es decir, es cerrada por uniones numerables y por complemento).

Sobre $\mathcal{M}_n$ la medida de Lebesgue es sigma-aditiva. Esto es,

$$\left| \bigcup_{k=1}^\infty E_k \right| = \sum_{k=1}^\infty |E_k|$$

donde $E_k \in \mathcal{M}_n$ y la unión es disjunta dos a dos, i.e. $E_k \cap E_j = \emptyset$ si $k \neq j$.

Una propiedad P que depende de cada punto $x \in E$ ($P = P(x)$) se dice que se verifica en *casi todo punto* (c.t.p.) si el conjunto de puntos $x \in E$ donde $P(x)$ es falsa tiene medida cero.

Sea $E \in \mathcal{M}_n$. Una función $f \colon E \to [-\infty, \infty]$ se dice medible si $\{x \in E \colon f(x) > \lambda\} \in \mathcal{M}_n$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. En particular, toda función continua resulta medible.

Sea f una función medible tal que $f(x) \ge 0$ para todo $x \in E$. Se define la integral de Lebesgue de f por

$$\int_E f\, dx := |\{(x,y) \in E \times \mathbb{R} \colon 0 \le y \le f(x)\}|.$$

Notemos que la integral está bien definida puesto que si f es medible, entonces
$$\{(x, y) \in E \times \mathbb{R} \colon 0 \leq y \leq f(x)\} \in \mathcal{M}_{n+1}.$$
El valor de esta integral, bien puede dar ∞. La función f se dice sumable si
$$\int_E f\, dx < \infty.$$

Dada una función $f \colon E \to [-\infty, +\infty]$, definimos la *parte positiva* f^+ y la *parte negativa* f^- de f respectivamente como
$$f^+(x) := \max\{f(x), 0\} \quad \text{y} \quad f^-(x) := \max\{-f(x), 0\}.$$
Notemos que $f^+, f^- \geq 0$, $f = f^+ - f^-$ y $|f| = f^+ + f^-$.

Si ahora f es una función medible arbitraria tal que f^+ o f^- es sumable, se define su integral como
$$\int_E f\, dx := \int_E f^+\, dx - \int_E f^-\, dx.$$
Si esta integral es finita, se dice que f es integrable. Notemos que f resulta integrable si y sólo si
$$\int_E |f|\, dx < \infty.$$

Una sucesión de funciones medibles $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ se dice que converge en casi todo punto a f (que automáticamente resulta medible), si
$$|\{x \in E \colon f_k(x) \text{ no converge a } f(x)\}| = 0.$$

Dado $0 < p < \infty$ se define el espacio de Lebesgue $L^p(E)$ como
$$L^p(E) := \left\{ f \colon E \to [-\infty, \infty] \text{ medibles} \colon \int_E |f|^p\, dx < \infty \right\}.$$
Cuando $1 \leq p < \infty$ se define la norma
$$\|f\|_{L^p(E)} = \|f\|_{p,E} = \|f\|_p := \left(\int_E |f|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$
Los espacios $(L^p(E), \|\cdot\|_p)$ son espacios de Banach separables. Esto es, la métrica
$$\operatorname{dist}(f, g) = \|f - g\|_p$$
hace de $L^p(E)$ un espacio métrico completo y separable.

Dada $f \colon E \to [-\infty, \infty]$ medible, se define el *supremo esencial* de f por
$$\|f\|_{L^\infty(E)} = \|f\|_{\infty,E} = \|f\|_\infty := \inf\{M \geq 0 \colon |\{x \in E \colon |f(x)| > M\}| = 0\}.$$
Es decir, $\|f\|_\infty$ es la menor constante que verifica $|f(x)| \leq M$ en casi todo punto.

Se define $L^\infty(E)$ por
$$L^\infty(E) := \{f \colon E \to [-\infty, \infty] \text{ medibles} \colon \|f\|_\infty < \infty\}.$$
El espacio $(L^\infty(E), \|\cdot\|_\infty)$ resulta un espacio de Banach que no es separable.

Finalmente, dado $1 \leq p \leq \infty$, se define el espacio de Lebesgue *local*, $L^p_{\text{loc}}(E)$, como
$$L^p_{\text{loc}}(E) = \{f \in L^p(K) \colon \text{ para todo } K \subset E, \text{ compacto}\}.$$

Finalmente dado una función medible $f\colon \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$, se define el soporte de f como el complemento del abierto más grande donde la función se anula en casi todo punto. Es decir,

$$\operatorname{sop}(f) = \mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcup_{\substack{U\subset\mathbb{R}^n \text{ abierto} \\ f|_U=0 \text{ c.t.p.}}} U \right).$$

1.4. Ejercicios

Ejercicio 1.4.1. Revisar los siguientes teoremas:

1. Teorema de la Función Inversa.
   (http://en.wikipedia.org/wiki/Inverse_function_theorem)
2. Teorema de la Función Implícita.
   (http://en.wikipedia.org/wiki/Implicit_function_theorem)
3. Teorema de Arzela – Ascoli.
   (http://en.wikipedia.org/wiki/Arzela-Ascoli_theorem)
4. Teorema de la Partición de la Unidad.
   (http://en.wikipedia.org/wiki/Partition_of_unity)
5. Teorema de la divergencia de Gauss.
   (http://en.wikipedia.org/wiki/Divergence_theorem)

Ejercicio 1.4.2. Revisar los siguientes teoremas:

1. Teorema de convergencia monótona de Beppo Levi.
   (http://en.wikipedia.org/wiki/Monotone_convergence_theorem)
2. Teorema de convergencia dominada de Lebesgue.
   (http://en.wikipedia.org/wiki/Dominated_convergence_theorem)
3. Lema de Fatou.
   (http://en.wikipedia.org/wiki/Fatou's_lemma)

Ejercicio 1.4.3 (Diferenciación bajo el signo integral). Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $V \subset \mathbb{R}^m$ medible, $f\colon U \times V \to \mathbb{R}$ medible y $x_0 \in U$.

1. Si $f(x, \cdot) \in L^1(V)$ para $|x - x_0| < \varepsilon$, $f(\cdot, y)$ es diferenciable en $|x - x_0| < \varepsilon$ para casi todo $y \in V$ y existe $g \in L^1(V)$ tal que $|\partial_{x_j} f(x, y)| \le g(y)$ para todo $|x - x_0| < \varepsilon$ y para casi todo $y \in V$, con $1 \le j \le n$ fijo, entonces la función $F(x) = \int_V f(x, y)\,dy$ es derivable para $|x-x_0| < \varepsilon$ respecto de x_j y se tiene que
$$\partial_j F(x) = \int_V \partial_{x_j} f(x, y)\,dy.$$
2. Verificar que si $\partial_{x_j} f$ es una función continua en $U \times \overline{V}$, con V abierto acotado, entonces verifica las hipótesis del item anterior.

Ejercicio 1.4.4. Sean $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivables.

1. Si $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua, calcular la derivada de
$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(s)\,ds.$$

2. Si $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua y $\partial_1 h$ es continua y acotada, calcular la derivada de
$$G(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(x,s)\,ds.$$

Ejercicio 1.4.5. Demostrar los siguientes resultados.

1. Desigualdad de Hölder: Si $1 \le p \le \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ entonces
$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$
2. Desigualdad de Minkowsky: Si $1 \le p \le \infty$, entonces
$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$
3. Desigualdad integral de Minkowsky: Si $1 \le p < \infty$, entonces
$$\left(\int \left|\int f(x,y)\,dx\right|^p dy\right)^{1/p} \le \int \left(\int |f(x,y)|^p\,dy\right)^{1/p} dx.$$

Ejercicio 1.4.6. Sean $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $h \in \mathbb{R}^n$. Se define $\tau_{-h} f(x) := f(x+h)$. Probar los siguientes resultados.

1. Para $1 \le p < \infty$, $\lim_{h\to 0} \|\tau_{-h} f - f\|_p = 0$.
   Pista: usar que $C_c(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$.
2. Mostrar que el item anterior no vale para $p = \infty$.

Ejercicio 1.4.7 (Desigualdad de Young). Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$. Probar que entonces $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \|g\|_p$, donde el producto de convolución $f * g$ se define como
$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\,dy.$$

Ejercicio 1.4.8. Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$. Entonces $f*g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y se tiene que $\|f*g\|_\infty \le \|f\|_p \|g\|_{p'}$. Más aún, $f*g$ es uniformemente continua.

Ejercicio 1.4.9. Sean $f \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$ $(k \in \mathbb{N})$, $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Entonces $f*g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ y $D^\alpha(f*g) = (D^\alpha f) * g$, para todo $|\alpha| \le k$.

Ejercicio 1.4.10 (Núcleo regularizante estándar). Se define la función $\rho\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como
$$\rho(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t^2}} & |t| < 1 \\ 0 & |t| \ge 1 \end{cases}$$
Probar que $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

Mostrar que si se define $\rho_\varepsilon\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como
$$\rho_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \rho\left(\frac{|x|}{\varepsilon}\right),$$
entonces $\rho_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\operatorname{sop}(\rho_\varepsilon) \subset B_\varepsilon(0)$. A la familia $\{\rho_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ se la denomina *núcleo regularizante estándar*.

EJERCICIO 1.4.11 (Regularización por convolución). Sea $\rho \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\, dx = 1,$$

y para todo $\varepsilon > 0$ se define

$$\rho_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\rho(\tfrac{x}{\varepsilon}).$$

Probar que

1. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n),\ 1 \le p < \infty \Rightarrow \|f * \rho_\varepsilon - f\|_p \to 0$ si $\varepsilon \to 0$.
2. Si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y f es uniformemente continua en $V \subset \mathbb{R}^n$, entonces
$$\sup_{x\in V'} |f * \rho_\varepsilon(x) - f(x)| \to 0 \text{ si } \varepsilon \to 0,$$
para todo $V' \subset\subset V$.
3. Si f es continua y acotada en $\mathbb{R}^n$, entonces $f * \rho_\varepsilon$ tiende uniformemente a f en cada compacto de $\mathbb{R}^n$.
4. Si además $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),\ f \in L^p(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f * \rho_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
5. Calcular $f * \rho_\varepsilon$ si $f = \chi_{[a,b]}$ y ρ es la función del Ejercicio 1.4.10.

EJERCICIO 1.4.12. Demostrar que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p < \infty)$. Pista: las funciones de $L^p(\mathbb{R}^n)$ con soporte compacto son densas en $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p < \infty)$.

EJERCICIO 1.4.13. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ medible. Probar que si $f \in L^1_{\text{loc}}(U)$ y $\int_U f\varphi\, dx = 0$ para toda $\varphi \in C_c^\infty(U)$, entonces $f = 0$ en casi todo punto.

EJERCICIO 1.4.14. Probar que si $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ y $\int_{\mathbb{R}} f\varphi'\, dx = 0$ para toda $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, entonces f resulta constante.

Pista: tomar $g \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\int_{\mathbb{R}} g = 1$ y para cada $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, se verifica que $\varphi(x) - (\int \varphi)g(x)$ es la derivada de una función $C_c^\infty(\mathbb{R})$.

EJERCICIO 1.4.15 (Fórmulas de Green). Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ con frontera de clase C^1.

1. Si $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x) = (v_1(x), \dots, v_n(x)),\ v_i \in C^1(U) \cap C^0(\bar{U}),\ 1 \le i \le n$, entonces
$$\int_U \operatorname{div} \mathbf{v}\, dx = \int_{\partial U} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, dS,$$
donde $\mathbf{n} = \mathbf{n}(x)$ es el vector normal exterior unitario a ∂U y
$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \partial_i v_i.$$
2. Si $u, v \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$
$$\int_U (v\Delta u + \nabla u \cdot \nabla v)\, dx = \int_{\partial U} v\partial_{\mathbf{n}} u\, dS_x,$$
$$\int_U (v\Delta u - u\Delta v)\, dx = \int_{\partial U} (v\partial_{\mathbf{n}} u - u\partial_{\mathbf{n}} v)\ dS_x,$$
donde $\partial_{\mathbf{n}} u = \nabla u \cdot \mathbf{n}$ y
$$\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u) = \nabla \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^n \partial_{ii} u.$$

Capítulo 2

Introducción

2.1. Modelos matemáticos y ejemplos de ecuaciones diferenciales

¿Qué es un modelo matemático? ¿Cómo se construye? ¿Cuál es el aporte que pueden hacer los matemáticos?

En este curso, por un modelo matemático entenderemos un conjunto de ecuaciones o relaciones capaces de capturar las características esenciales de un sistema complejo. Se busca que este modelo sirva para predecir y controlar su evolución.

Los modelos clásicos provienen de la física, química e ingeniería. Los modelos más recientes provienen de las finanzas, la biología, ecología, sociología, etc.

Para la construcción de un modelo se precisan de dos ingredientes básicos:

- Leyes generales.
- Relaciones constitutivas.

Las leyes generales provienen en general de la mecánica del continuo (conservación de la masa, de la energía, del momento, etc.). En cambio, las relaciones constitutivas son de naturaleza experimental. Dependen de las características del fenómeno en observación (ley de Fourier de conducción del calor, ley de Fick de difusión, etc.).

La combinación de estos ingredientes da como resultado una Ecuación en Derivadas Parciales (EDP) o un sistema de EDPs. Pero, ¿qué es una EDP?

Definición 2.1.1. Una EDP es una ecuación de la forma

$$F(x_1, \dots, x_n, , u, \partial_1 u, \dots, \partial_n u, \partial_1^2 u, \dots, \partial_n^2 u, \dots) = 0,$$

donde $u = u(x_1, \dots, x_n)$ es la incógnita.

El *orden de una ecuación* es el orden de derivación más alto que aparece en ella.

Si la función F es lineal en u y sus derivadas, la ecuación se dice *lineal*, i.e.

$$b(x) + a_0(x)u + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\partial_i u + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{ij} u + \cdots = 0,$$

$x = (x_1, \dots, x_n)$. Caso contrario, la ecuación se dice *no lineal*.

A modo de ejemplos, daremos un listado de las EDPs más estudiadas.

Ejemplo 2.1.2. Ejemplos de ecuaciones lineales.

1. Ecuación de transporte (primer orden)

$$u_t + \mathbf{v} \cdot \nabla u = 0,$$

donde $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ es un vector constante.

Esta ecuación describe el transporte de una sustancia en un medio, por ejemplo, una gota de aceite en un recipiente con agua que se desplaza a velocidad $\mathbf{v}$ constante. Nos encontraremos con estas ecuaciones en el Capítulo 7.

2. Ecuación de difusión (segundo orden)

$$u_t - \kappa\Delta u = 0,$$

donde $u = u(t, x_1, \dots, x_n)$ y $\Delta u = \mathrm{div}(\nabla u) = \nabla \cdot \nabla u = \nabla^2 u = \sum_{i=1}^n \partial_{ii} u$.

Esta ecuación modela la difusión de una cierta cantidad en un medio, por ejemplo la temperatura, la concentración de un solvente en un soluto, etc. La constante $\kappa > 0$ es la *difusividad*. Nos encontraremos con esta ecuación en el Capítulo 6.

3. Ecuación de ondas (segundo orden)

$$u_{tt} - c^2\Delta u = 0.$$

Esta ecuación modela la vibración de una cuerda ($n = 1$), de una membrana ($n = 2$) o de un sólido ($n = 3$), donde u representa el desplazamiento respecto de la posición de equilibrio. Estudiaremos esta ecuación en el Capítulo 8.

4. Ecuación de Laplace (segundo orden)

$$\Delta u = 0.$$

Esta ecuación modela la posición de equilibrio de una membrana ($n = 2$) o el estado final de la evolución del problema de difusión.

Una función u que satisface la ecuación de Laplace se la llama *armónica*.

Cuando el problema es no homogéneo, i.e.

$$\Delta u = f(x),$$

se la llama *Ecuación de Poisson*. Estas ecuaciones serán estudiadas en el Capítulo 4.

5. Ecuación de Black-Scholes (segundo orden)

$$u_t + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 u_{xx} + rxu_x - ru = 0.$$

Esta ecuación modela la evaluación de una opción y u representa el valor de la opción. El parámetro σ representa la volatilidad mientras que r es el interés. La variable x representa el precio. Luego, en este modelo, si se conoce el valor de la opción a tiempo final T, el problema consiste en determinar cuál es el valor de compra de esa opción a tiempo $t = 0$.

Esta ecuación es un ejemplo de ecuación parabólica. Veremos brevemente esta familia en el Capítulo 10.

6. Ecuación de la placa vibrante (cuarto orden)

$$u_{tt} - \Delta^2 u = 0,$$

donde $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$.

Esta ecuación modela las pequeñas vibraciones de una placa rígida. Estudiaremos el problema estacionario asociado en el Ejercicio 10.9.2.

7. Ecuación de Schröedinger (segundo orden)

$$-iu_t = \Delta u + V(x)u,$$

donde i es la unidad imaginaria, $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es el potencial de interacción y $u\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $u = u(x,t)$. En esta ecuación, $|u|^2$ es la densidad de probabilidad de encontrar la partícula en una región dada. En el caso $V = 0$ veremos formalmente la deducción de sus soluciones en el Capítulo 5 (c.f. Ejercicio 5.5.14). En el Ejercicio 10.9.8 veremos el problema de autovalores asociado a esta ecuación.

Ejemplo 2.1.3. Ejemplos de ecuaciones no lineales.

1. Ecuación de Fisher (segundo orden)
$$u_t - D\Delta u = ru(M-u),$$
donde $D, r, M > 0$ son constantes. Esta ecuación es usada en dinámica de poblaciones donde se considera un crecimiento logístico y difusión espacial. La ecuación es semilineal, dado que es lineal en las derivadas de u pero es no lineal en u.
2. Ecuación de los medios porosos (segundo orden)
$$u_t = \kappa \Delta u^m, \quad m > 1.$$
Esta ecuación modela la difusión de un gas en un medio poroso. Es cuasilineal, dado que la no linealidad aparece en las derivadas de u.
3. Ecuación de Burgers (primer orden)
$$u_t + uu_x = 0.$$
Esta ecuación modela el transporte de un gas donde la velocidad es proporcional a la densidad del mismo gas. La ecuación es cuasilineal. En el Capítulo 7 nos encontraremos con esta ecuación.

2.2. Problemas bien puestos

Para determinar la solución de una ecuación diferencial, se requiere de ciertos datos adicionales:

- datos de contorno, que representa la interacción con el exterior,
- datos iniciales.

Uno de los objetivos fundamentales de la teoría es lograr que el modelo posea las siguientes propiedades:

- existencia de solución,
- unicidad de solución,
- dependencia continua de la solución con respecto a los datos del problema.

Un problema que posea estas propiedades se dice que está *bien puesto en el sentido de Hadamard*, mientras que un problema que no posea alguna de estas propiedades, se dice que está *mal puesto*.

2.3. Ley de conservación y la ecuación de continuidad

Como comentamos al principio del capítulo, un modelo matemático se basa en ciertas leyes fundamentales que provienen de principios básicos y leyes constitutivas que son de origen experimental y resultan ser más específicas del fenómeno particular que se busque modelar.

En esta sección deduciremos la ecuación de continuidad a partir de un principio básico llamada la *ley de conservación*. Esta ley postula que existe alguna cantidad que es conservada (por ejemplo, masa, energía, momento, etc).

Sólo por motivos pedagógicos, supondremos que la cantidad conservada es la energía.

2.3.1. Ley de conservación de la energía. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ una porción del espacio físico y $V \subset U$ una subregión. Llamemos $Q(V)$ a la energía contenida en V a tiempo t, medido en segundos. Notemos que las unidades de Q son, por ejemplo $[Q(V)] = cal$.

Notaremos por $\Phi(\partial V)$ al flujo de energía saliente por unidad de tiempo, donde $[\Phi(\partial V)] = \frac{cal}{seg}$.

Notaremos por $\mathcal{F}(V)$ a la energía creada (o perdida) en V por unidad de tiempo, donde $[\mathcal{F}(V)] = \frac{cal}{seg}$.

La ley de conservación de la energía, postula entonces que la siguiente relación es válida

$$\frac{d}{dt}Q(V) = -\Phi(\partial V) + \mathcal{F}(V). \tag{2.3.1}$$

Esta ecuación postula entonces que la variación de la energía encerrada en una región V es igual a la energía que se pierde por su frontera por unidad de tiempo más la energía creada en su interior por unidad de tiempo.

2.3.2. Ecuación de continuidad. Para deducir la ecuación de continuidad a partir de la ley de conservación (2.3.1), se realizan las siguientes suposiciones:

$$\begin{aligned} Q(V) &= \int_V e\rho\, dx, \\ \Phi(\partial V) &= \int_{\partial V} \phi \cdot \mathbf{n}\, dS, \\ \mathcal{F}(V) &= \int_V r\, dx, \end{aligned}$$

donde dx es el diferencial de volumen, dS es el diferencial de superficie, e es la densidad de energía por unidad de masa, ρ es la densidad de masa por unidad de volumen, ϕ es la tasa de flujo por unidad de tiempo, $\mathbf{n}$ es la normal exterior unitaria a ∂V y r es la densidad de energía creada por unidad de volumen por unidad de tiempo.

Las unidades de estas cantidades son

$$[e] = \frac{cal}{g}, \quad [\rho] = \frac{g}{cm^3},$$
$$[\phi] = \frac{cal}{seg \times cm^2}, \quad [r] = \frac{cal}{cm^3 \times seg}.$$

Notemos que $e, \rho, r \colon U \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ y $\phi \colon U \times [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$. Suponemos ρ y r datos mientras que ϕ y e son las incógnitas.

Luego, la ley de conservación de energía (2.3.1) se escribe como

$$\frac{d}{dt}\left(\int_V e\rho\, dx\right) = -\int_{\partial V} \phi \cdot \mathbf{n}\, dS + \int_V r\, dx. \tag{2.3.2}$$

Asumiendo que se pueden intercambiar la diferenciación con la integral y que ϕ y V tienen las hipótesis del Teorema de la Divergencia de Gauss, de (2.3.2) se obtiene

$$\int_V \left(\frac{\partial}{\partial t}(e\rho) + \operatorname{div}\phi - r\right) dx = 0, \quad \forall V \subset U,\ \forall 0 < t < T. \tag{2.3.3}$$

De (2.3.3), se deduce fácilmente que

$$\frac{\partial}{\partial t}(e\rho) + \operatorname{div}\phi - r = 0, \quad \text{en } U \times (0, T). \tag{2.3.4}$$

La ecuación (2.3.4) se llama la *ecuación de continuidad.*

2.4. Leyes constitutivas y la ecuación de difusión

En esta sección ilustraremos, con un ejemplo, como a partir de la ecuación de continuidad (2.3.4), deducida de principios generales, si se realizan suposiciones adicionales de carácter experimental, que implican relaciones entre las variables desconocidas, llamadas *leyes constitutivas*, se pueden deducir algunas de las ecuaciones fundamentales de la física–matemática.

A modo de ejemplo, mostraremos como se deduce la ecuación de difusión del ejemplo (2.1.2)-2, a partir de la ecuación de continuidad y un conjunto adicional de hipótesis de naturaleza experimental.

Asumiremos en consecuencia que:

- la densidad es constante $\rho = \rho_0$,
- la energía es térmica, y por ende $e = cT$ donde T es la temperatura, $[T] = deg$, y c es una constante llamada *calor específico*, $[c] = \frac{cal}{deg}$ (la energía es proporcional a la temperatura),
- la Ley de difusión de Fourier, $\phi = -k\nabla T$ donde k es la conductividad térmica, $[k] = \frac{cal}{deg \times seg \times cm}$, $[\nabla T] = \frac{deg}{cm}$ (notar que $[k] \times [\nabla T] = [\phi]$). Esta es la ley constitutiva donde se relacionan dos variables, la energía y el flujo. La ley de Fourier postula que el flujo de energía sigue la línea de mayor decaimiento (el calor se difunde de donde hay más calor hacia donde hay menos calor),
- la conductividad térmica k se supone constante.

Haciendo uso de estas hipótesis, la ecuación de continuidad (2.3.4) se convierte en

$$T_t = \frac{k}{\rho_0 c}\Delta T + \frac{r}{\rho_0 c}.$$

Llamando $\kappa = \frac{k}{\rho_0 c}$ (constante de difusividad térmica) y $f = \frac{r}{\rho_0 c}$ (se asume conocido), se llega a la ecuación de difusión, o *ecuación del calor*

$$T_t = \kappa \Delta T + f. \tag{2.4.1}$$

Si bien esta ecuación modela la evolución de la temperatura, es claro que depende de la temperatura inicial. Es decir, para que el problema pueda ser resuelto, es necesario conocer $T|_{t=0}$.

2.5. Condiciones de contorno

Para resolver una ecuación diferencial en una región del espacio $U \subset \mathbb{R}^n$, es necesario conocer cómo es la interacción de esas soluciones con el entorno. Esa interacción se ve reflejada en las llamadas *condiciones de contorno*. Las hay de varios tipos, dependiendo de como sea esa interacción.

Daremos a continuación, siguiendo con el ejemplo de la ecuación de difusión de la sección previa, los ejemplos más usuales de condiciones de contorno.

Luego, para ejemplificar, asumiremos que se está intentando resolver la ecuación

$$T_t = \kappa \Delta T + f \quad \text{en } U \times (0, \infty),$$

con dato iniciál $T|_{t=0} = T_0$.

2.5.1. Condición de Dirichlet. En este tipo de condición, lo que se supone es que la temperatura en el exterior de la región es conocida. Es decir

$$T(x,t) = h(x,t), \quad x \in \partial U,\ t > 0,$$

donde h es dato.

En el caso en que $h = 0$ se llama condición de Dirichlet *homogénea*.

Notemos que toda condición de Dirichlet se puede llevar a una condición de Dirichlet homogénea. En efecto, si llamamos $u = T - h$, entonces $u_t = T_t - h_t$ y $\Delta u = \Delta T - \Delta h$, de donde

$$u_t - \kappa \Delta u = (T_t - \kappa \Delta T) - (h_t - \kappa \Delta h) = f - (h_t - \kappa \Delta h) = \tilde{f},$$
$$u(x,t) = T(x,t) - h(x,t) = 0 \quad x \in \partial U,\ t > 0,$$
$$u|_{t=0} = T|_{t=0} - h|_{t=0} = T_0 - h(\cdot, 0) = u_0.$$

2.5.2. Condición de Neumann. Para este tipo de condición se supone conocido el flujo de temperatura a través de la frontera. Es decir

$$\nabla T \cdot \mathbf{n} = \partial_{\mathbf{n}} T = g \quad \text{en } \partial U \times (0, \infty).$$

Si $g = 0$ la condición se dice de Neumann homogénea y se usa para modelar la situación en que la región U se encuentra térmicamente aislada del exterior.

2.5.3. Condición de Robin. En este tipo de condición es también conocida como *condición de radiación*. Se supone conocida la temperatura exterior y se asume que el flujo de temperatura es proporcional a la diferencia de temperatura existente entre U y el exterior. Es decir,

$$\partial_{\mathbf{n}} T = \gamma (g - T) \quad \text{en } \partial U \times (0, \infty).$$

Equivalentemente, si llamamos $\tilde{g} = \gamma g$,

$$\partial_{\mathbf{n}} T + \gamma T = \tilde{g} \quad \text{en } \partial U \times (0, \infty).$$

Capítulo 3

El método de separación de variables

El método de separación de variables fue desarrollado por J. Fourier en su tesis doctoral de 1822, *Théorie analytique de la chaleur*. Vamos a presentar la idea y motivación principal de este método en la ecuación de difusión, que es la misma ecuación donde Fourier la desarrolló.

3.1. La ecuación del calor homogénea

En esta sección, estudiaremos la ecuación

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{en } U \times (0,\infty), \tag{3.1.1}$$

$$u = 0 \quad \text{en } \partial U \times (0,\infty), \tag{3.1.2}$$

$$u = u_0 \quad \text{en } U \times \{t=0\}. \tag{3.1.3}$$

El método de separación de variables, consiste en primero dejar de lado la condición inicial (3.1.3) y buscar soluciones particulares para (3.1.1)–(3.1.2) de la forma

$$u(x,t) = v(t)w(x),$$

donde $v\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ y $w\colon U \to \mathbb{R}$. Observemos que, de (3.1.2), sigue que $w = 0$ en ∂U.

Ahora, por (3.1.1), tenemos que

$$v'w - v\Delta w = 0 \quad \text{en } U \times (0,\infty)$$

y si suponemos que $v, w \neq 0$,

$$\frac{v'}{v} = \frac{\Delta w}{w}.$$

Como el lado izquierdo depende sólo de $t > 0$ y el lado derecho depende sólo de $x \in U$ se concluye que ambos son constantes. Luego, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{v'}{v} = \frac{\Delta w}{w} = -\lambda.$$

De esta ecuación, es muy sencillo deducir que

$$v(t) = ce^{-\lambda t}, \tag{3.1.4}$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es una constante.

La ecuación para w queda de la siguiente forma:

$$\begin{cases} -\Delta w = \lambda w & \text{en } U, \\ w = 0 & \text{en } \partial U. \end{cases} \tag{3.1.5}$$

Este problema se conoce como el *problema de autovalores de Dirichlet para el Laplaciano* y aparece en infinidad de aplicaciones. A esta altura, no podemos estudiarlo con total generalidad (cf. Capítulo 10).

Para poder resolverlo con las herramientas a disposición, haremos la suposición de que la dimensión del espacio físico es 1, es decir $U \subset \mathbb{R}^1$. Luego, podemos suponer que $U = (0, \ell)$.

El problema de autovalores (3.1.5) se traduce en

$$w'' + \lambda w = 0 \quad \text{en } (0, \ell), \tag{3.1.6}$$

$$w(0) = w(\ell) = 0. \tag{3.1.7}$$

Esta es una ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden con coeficientes constantes que es fácilmente resuelta con las herramientas vistas en los cursos previos. Ver, por ejemplo, [**17**].

Queda a cargo del lector verificar que si $\lambda \le 0$ entonces la única solución de (3.1.6)–(3.1.7) es la solución trivial $w \equiv 0$.

Supondremos entonces que $\lambda > 0$. En este caso, w es solución de (3.1.6) si y sólo si

$$w(x) = a \sin(\sqrt{\lambda} x) + b \cos(\sqrt{\lambda} x)$$

Ahora, por (3.1.7),

$$w(0) = b = 0,$$

y entonces

$$w(\ell) = a \sin(\sqrt{\lambda}\ell) = 0,$$

de donde $\sqrt{\lambda}\ell = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Luego

$$\lambda = \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 \tag{3.1.8}$$

son los autovalores de (3.1.6)–(3.1.7) y sus autofunciones resultan

$$w(x) = w_k(x) = \sin(\sqrt{\lambda_k} x) = \sin(\frac{k\pi}{\ell} x). \tag{3.1.9}$$

Combinando (3.1.4), (3.1.8) y (3.1.9) obtenemos las siguientes soluciones particulares de (3.1.1)–(3.1.2)

$$u_k(x,t) = e^{-\lambda_k t} \sin(\sqrt{\lambda_k} x) = \exp(-\frac{k^2\pi^2}{\ell^2} t) \sin(\frac{k\pi}{\ell} x).$$

Usando la linealidad de la ecuación de difusión (3.1.1)–(3.1.2), es claro que cualquier combinación lineal de las soluciones $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ será solución, por ende resulta natural buscar soluciones de la forma

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \exp(-\frac{k^2\pi^2}{\ell^2} t) \sin(\frac{k\pi}{\ell} x). \tag{3.1.10}$$

Si los coeficientes $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ son tales que la serie converge y se puede intercambiar la diferenciación con la sumatoria, entonces u será solución de (3.1.1)–(3.1.2).

EJERCICIO 3.1.1. Sea $M > 0$ tal que $|c_k| \le M$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Entonces la función u dada por (3.1.10) es $C^\infty([0,\ell] \times [\delta,\infty))$ para todo $\delta > 0$, sus derivadas se calculan derivando término a término la serie y, por ende, u verifica (3.1.1)–(3.1.2).

¿Qué sucede con la condición inicial (3.1.3)? Formalmente, si reemplazamos $t = 0$ en la serie (3.1.10), se obtiene

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^\infty c_k \sin(\frac{k\pi}{\ell} x)$$

Así que, al menos formalmente, de (3.1.3) se debe tener

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^\infty c_k \sin(\frac{k\pi}{\ell} x). \tag{3.1.11}$$

Es fácil ver que se tiene la siguiente *relación de ortogonalidad*

$$\int_0^\ell \sin(\frac{k\pi}{\ell}x)\sin(\frac{j\pi}{\ell}x)\,dx = \ell\int_0^1 \sin(k\pi t)\sin(j\pi t)\,dt = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ \frac{\ell}{2} & k = j \end{cases}$$

de donde, integrando la identidad (3.1.11) y asumiendo que se puede intercambiar la sumatoria con la integral,

$$\int_0^\ell u_0(x)\sin(\frac{j\pi}{\ell}x)\,dx = \sum_{k=1}^\infty c_k \int_0^\ell \sin(\frac{k\pi}{\ell}x)\sin(\frac{j\pi}{\ell}x)\,dx = \frac{\ell}{2}c_j$$

y por ende

$$c_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell u_0(x)\sin(\frac{k\pi}{\ell}x)\,dx \tag{3.1.12}$$

Los coeficientes c_k dados por (3.1.12) se denominan *coeficientes de Fourier* y están bien definidos si $u_0 \in L^1([0,\ell])$.

Si se desea realizar ahora un razonamiento riguroso, se parte de $u_0 \in L^1([0,\ell])$, se definen los coeficientes c_k por la fórmula (3.1.12) y la función u por la expresión (3.1.10).

Observemos que

$$|c_k| \le \frac{2}{\ell}\|u_0\|_{L^1([0,\ell])} < \infty$$

y por ende las conclusiones del Ejercicio 3.1.1 se aplican. Por lo tanto se tiene que u es una solución de (3.1.1)–(3.1.2).

Queda luego investigar el problema más delicado de bajo qué condiciones y en qué sentido es cierto que

$$\lim_{\substack{y\to x\\ t\to 0}} u(y,t) = u_0(x).$$

3.2. Espacios de Hilbert

En esta sección desarrollaremos la teoría de series de Fourier en el contexto abstracto de espacios de Hilbert. Más adelante aplicaremos estas herramientas al caso de $L^2([0,\ell])$ y nos abocaremos al estudio de la convergencia puntual.

Comencemos con las definiciones básicas.

Definición 3.2.1. Sea H un $\mathbb{R}-$espacio vectorial (en el futuro todos nuestros espacios vectoriales estarán definidos sobre $\mathbb{R}$ y no haremos mención a esto). Un producto interno en H es una aplicación

$$(\cdot,\cdot)\colon H\times H\to\mathbb{R}$$

tal que

1. $(\cdot,\cdot)$ es simétrica y bi-lineal.
2. $(\cdot,\cdot)$ es definida positiva.

Observación 3.2.2. 1. Simétrica y bi-lineal significa que

$$(x,y)=(y,x) \quad \text{y} \quad (\lambda_1x_1+\lambda_2x_2,y)=\lambda_1(x_1,y)+\lambda_2(x_2,y)$$

2. Definida positiva significa que

$$(x,x)\geq 0 \text{ para todo } x\in H \text{ y } (x,x)=0 \text{ si y sólo si } x=0.$$

Un producto interno en un espacio vectorial, induce una norma. Ese es el contenido de la siguiente proposición.

Proposición 3.2.3. *Sea H un espacio vectorial con producto interno $(\cdot,\cdot)$. Luego, la expresión*

$$\|x\|:=(x,x)^{\frac{1}{2}}$$

define una norma en H.

Demostración. Para ver que $\|\cdot\|$ define efectivamente una norma, debemos verificar que

1. $\|x\|\geq 0$ para todo $x\in H$ y que $\|x\|=0$ si y sólo si $x=0$.
2. $\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$ para todo $\lambda\in\mathbb{R}$ y $x\in H$.
3. $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ para todo $x,y\in H$.

Las propiedades 1–2 son inmediatas a partir de la definición. Queda entonces por verificar la propiedad 3. Esta propiedad es consecuencia de la *desigualdad de Cauchy-Schwarz*

$$|(x,y)|\leq\|x\|\|y\|. \tag{3.2.1}$$

Posponemos la demostración de (3.2.1) y la usamos para ver la desigualdad triangular 3. De hecho, por la bilinealidad del producto interno,

$$\|x+y\|^2=(x+y,x+y)=(x,x)+2(x,y)+(y,y)=\|x\|^2+2(x,y)+\|y\|^2.$$

Ahora, se usa la desigualdad de Cauchy-Schwarz (3.2.1) y se concluye que

$$\|x+y\|^2\leq\|x\|^2+2\|x\|\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2,$$

como se quería demostrar. □

Veamos ahora la demostración de la desigualdad de Cauchy-Schwarz

LEMA 3.2.4 (Desigualdad de Cauchy–Schwarz). *Sea H un espacio vectorial con producto interno $(\cdot,\cdot)$ y norma dada por $\|x\| = (x,x)^{\frac{1}{2}}$. Se tiene entonces*

$$|(x,y)| \le \|x\|\|y\|.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $x, y \in H$ y observamos que

$$0 \le \|x-y\|^2 = (x-y, x-y) = \|x\|^2 - 2(x,y) + \|y\|^2,$$

de donde

$$(x,y) \le \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2. \tag{3.2.2}$$

Por otro lado

$$0 \le \|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = \|x\|^2 + 2(x,y) + \|y\|^2,$$

de donde

$$-(x,y) \le \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2. \tag{3.2.3}$$

De (3.2.2) y (3.2.3) se obtiene

$$|(x,y)| \le \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2. \tag{3.2.4}$$

Veamos que (3.2.4) implica la desigualdad de Cauchy-Schwarz. En efecto, si tomamos $\lambda > 0$ y aplicamos (3.2.4) al par λx, $\lambda^{-1}y$, obtenemos

$$|(x,y)| = |(\lambda x, \lambda^{-1}y)| \le \frac{1}{2}\lambda^2\|x\|^2 + \frac{1}{2}\frac{\|y\|^2}{\lambda^2}.$$

Finalmente, elegimos $\lambda^2 = \|y\|\|x\|^{-1}$ y se obtiene la desigualdad de Cauchy-Schwarz. $\square$

EJERCICIO 3.2.5. Mostrar que si se asume la desigualdad de Cauchy-Schwarz como válida, esa implica la desigualdad (3.2.4).

Una noción fundamental en el estudio de estos espacios es el de la completitud. Ese es el contenido de la próxima definición.

DEFINICIÓN 3.2.6. Un espacio vectorial H con producto interno $(\cdot,\cdot)$ se dice un *Espacio de Hilbert* si es completo. Es decir, dada una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H$ que verifica

$$\lim_{k,j\to\infty} \|x_k - x_j\| = 0,$$

entonces existe $x \in H$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x\| = 0.$$

Antes de continuar, veamos algunos de los ejemplos más importantes de espacios de Hilbert.

EJEMPLO 3.2.7. $H = \mathbb{R}^n$ con producto interno $(x,y) = x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Ejemplo 3.2.8. $H = \ell^2 := \{\mathbf{x} = \{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \colon x_i \in \mathbb{R} \text{ y } \sum_{i=1}^\infty x_i^2 < \infty\}$. En este caso, el producto interno viene dado por

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{i=1}^\infty x_i y_i.$$

Ejemplo 3.2.9. Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto medible, $H = L^2(U)$ con producto interno

$$(f, g) = \int_U f(x) g(x)\, dx.$$

En un espacio de Hilbert, se tiene el concepto de ortogonalidad.

Definición 3.2.10. Sea H un espacio de Hilbert con producto interno $(\cdot, \cdot)$. Un conjunto $\mathcal{B} \subset H$ se dice un sistema *ortonormal* si

$$\|x\| = 1 \text{ para todo } x \in \mathcal{B} \text{ y } (x, y) = 0 \text{ para todo } x, y \in \mathcal{B},\ x \neq y.$$

Definición 3.2.11. Sea H un espacio de Hilbert con producto interno $(\cdot, \cdot)$ y $\mathcal{B} = \{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema ortonormal. Dada $f \in H$ se define la *serie de Fourier* de f como la expresión formal

$$f \sim \sum_{n=1}^\infty c_n \phi_n, \quad c_n := (f, \phi_n).$$

Observemos que la serie de Fourier de $f \in H$ siempre está bien definido como un elemento del mismo espacio H. Esto es una consecuencia de la *desigualdad de Bessel* que afirma que

$$\sum_{n=1}^N c_n^2 \leq \|f\|^2, \text{ para todo } N \in \mathbb{N}. \tag{3.2.5}$$

En efecto, dados $N, M \in \mathbb{N}$

$$\left\| \sum_{n=M}^N c_n \phi_n \right\|^2 = \left(\sum_{n=M}^N c_n \phi_n, \sum_{k=M}^N c_k \phi_k \right) = \sum_{n,k=M}^N c_n c_k (\phi_n, \phi_k) = \sum_{n=M}^N c_n^2,$$

de donde se deduce fácilmente, por (3.2.5), que la serie $\sum_{n=1}^\infty c_n \phi_n$ es convergente en H.

Demostremos entonces la desigualdad (3.2.5)

Lema 3.2.12 (Desigualdad de Bessel). *Sea H un espacio de Hilbert con producto interno $(\cdot, \cdot)$. Sea $\mathcal{B} = \{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ un sistema ortonormal. Dada $f \in H$, se tiene*

$$\sum_{n=1}^N (f, \phi_n)^2 \leq \|f\|^2, \text{ para todo } N \in \mathbb{N}.$$

Demostración. La desigualdad de Bessel es una consecuencia inmediata de la identidad

$$0 \leq \left\| f - \sum_{n=1}^N (f, \phi_n) \phi_n \right\|^2 = \|f\|^2 - 2\sum_{n=1}^N (f, \phi_n)^2 + \sum_{n=1}^N (f, \phi_n)^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^N (f, \phi_n)^2,$$

lo que finaliza la demostración. □

Un punto importante es que la suma parcial de la serie de Fourier de un elemento $f \in H$ es el elemento del subespacio generado por los primeros N elementos de $\mathcal{B}$ que mejor aproxima a f. Ese es el contenido de la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 3.2.13. *Sea H un espacio de Hilbert con producto interno $(\cdot,\cdot)$ y sea $\mathcal{B} = \{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ un sistema ortonormal. Dada $f \in H$ notemos por S_N a la suma parcial de la serie de Fourier de f,*

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} c_n\phi_n, \quad c_n = (f, \phi_n).$$

Entonces

$$\|f - S_N\| \leq \left\| f - \sum_{n=1}^{N} d_n\phi_n \right\|, \quad \textit{para todo } \{d_n\}_{n=1}^{N} \subset \mathbb{R}.$$

DEMOSTRACIÓN. Es fácil verificar que

$$(f - S_N, \phi_n) = 0, \quad \text{para todo } n = 1, \ldots, N,$$

de donde

$$(f - S_N, x) = 0, \quad \text{para todo } x \in \text{gen}\{\phi_1, \ldots, \phi_N\}.$$

Ahora, si $x \in \text{gen}\{\phi_1, \ldots, \phi_N\}$, como $S_N - x \in \text{gen}\{\phi_1, \ldots, \phi_N\}$ se obtiene

$$\|f - S_N\|^2 - \|f - x\|^2 = 2(f - S_N, x - S_N) - \|S_N - x\|^2 \leq 0,$$

de donde

$$\|f - S_N\| \leq \|f - x\|, \quad \text{para todo } x \in \text{gen}\{\phi_1, \ldots, \phi_N\},$$

como queríamos demostrar. □

La pregunta que se intenta responder en consecuencia es cuándo la serie de Fourier de un elemento $f \in H$ nos da el mismo elemento.

DEFINICIÓN 3.2.14. Sea H un espacio de Hilbert con producto interno $(\cdot,\cdot)$. Un sistema ortonormal $\mathcal{B} = \{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ se dice completo si

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n \text{ para toda } f \in H.$$

Es decir, para toda $f \in H$ se tiene que

$$\lim_{N\to\infty} \left\| f - \sum_{n=1}^{N} c_n\phi_n \right\| = 0,$$

donde $c_n = (f, \phi_n)$ son los coeficientes de Fourier de f.

DEFINICIÓN 3.2.15. Sea H un espacio de Hilbert con producto interno $(\cdot,\cdot)$. Un sistema ortonormal $\mathcal{B} = \{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ se dice cerrado si

$$(f, \phi_n) = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \text{ implica que } f = 0.$$

Se tiene entonces la siguiente proposición

PROPOSICIÓN 3.2.16. *Sea H un espacio de Hilbert con producto interno $(\cdot,\cdot)$ y $\mathcal{B} = \{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ un sistema ortonormal. Entonces $\mathcal{B}$ es completo si y sólo si es cerrado.*

Demostración. La demostración de esta proposición es simple y queda de ejercicio para el lector. $\square$

Terminemos esta sección con un ejercicio sencillo.

Ejercicio 3.2.17 (Identidad de Parseval). Sea H un espacio de Hilbert con producto interno $(\cdot,\cdot)$ y $\mathcal{B} = \{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ un sistema ortonormal completo. Si $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi_n$ y $g = \sum_{n=1}^{\infty} d_n\phi_n$, entonces

$$(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n d_n.$$

3.3. Convergencia puntual de la serie de Fourier

Comenzamos con un ejercicio de simple verificación.

Ejercicio 3.3.1. Sean, para $n \in \mathbb{N}$,

$$\phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\ell}},\ \phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell}}\cos(\frac{n\pi}{\ell}x),\ \psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell}}\sin(\frac{n\pi}{\ell}x). \tag{3.3.1}$$

Entonces $\mathcal{B} = \{\phi_0, \phi_n, \psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un sistema ortonormal en $L^2([-\ell,\ell])$.

En la sección 3.5 veremos que $\mathcal{B}$ es un sistema ortonormal completo.

Empecemos con un resultado fundamental

Lema 3.3.2 (Lema de Riemann–Lebesgue). *Sea $f \in L^1([-\ell,\ell])$. Entonces se tiene*

$$\left|\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\phi_n(x)\,dx\right| + \left|\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\psi_n(x)\,dx\right| \to 0, \quad n\to\infty.$$

Demostración. Demostremos el lema para las funciones ϕ_n. La otra parte es completamente análoga. Supongamos primero que $f \in C_c^1([-\ell,\ell])$ y observemos que

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell}}\cos(\frac{n\pi}{\ell}x) = \frac{1}{\sqrt{\ell}}\left(\frac{\ell}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)\right)'.$$

Luego, como $f'(\ell) = f'(-\ell) = 0$,

$$\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\phi_n(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\ell}}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\left(\frac{\ell}{n\pi}\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)\right)'dx = -\frac{\sqrt{\ell}}{n\pi}\int_{-\ell}^{\ell} f'(x)\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)\,dx,$$

de donde

$$\left|\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\phi_n(x)\,dx\right| \le \frac{\sqrt{\ell}}{n\pi}\int_{-\ell}^{\ell}|f'(x)|\,dx \to 0, \ \text{ cuando } n\to\infty.$$

Para el caso general, se usa que dada $f \in L^1([-\ell,\ell])$ y dado $\varepsilon > 0$ existe $g \in C_c^1([-\ell,\ell])$ tal que

$$\int_{-\ell}^{\ell}|f(x)-g(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Entonces, dado que $|\phi_n(x)| \leq 1$ para todo $x \in [-\ell, \ell]$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\left|\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\phi_n(x)\,dx\right| &\leq \left|\int_{-\ell}^{\ell} g(x)\phi_n(x)\,dx\right| + \left|\int_{-\ell}^{\ell} (f(x)-g(x))\phi_n(x)\,dx\right| \\ &\leq \left|\int_{-\ell}^{\ell} g(x)\phi_n(x)\,dx\right| + \int_{-\ell}^{\ell} |f(x)-g(x)|\,dx \\ &\leq \left|\int_{-\ell}^{\ell} g(x)\phi_n(x)\,dx\right| + \varepsilon.\end{aligned}$$

Luego, por el caso anterior,

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\phi_n(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, el resultado queda demostrado. □

EJERCICIO 3.3.3. Demostrar el Lema de Riemann–Lebesgue para un sistema ortonormal arbitrario $\mathcal{B}$, tal que $\|\phi\|_{L^2([-\ell,\ell])} \leq M$ para toda $\phi \in \mathcal{B}$.

Sugerencia: usar la desigualdad de Bessel para funciones de $L^2([-\ell,\ell])$ y la densidad de funciones de $L^2([-\ell,\ell])$ en $L^1([-\ell,\ell])$.

Sea ahora $f \in L^1([-\ell,\ell])$ y definimos sus coeficientes de Fourier

$$\bar{a}_0 = (f,\phi_0),\ \bar{a}_n = (f,\phi_n),\ \bar{b}_n = (f,\psi_n),$$

y luego la suma parcial de Fourier queda definida por

$$S_N(f) = \bar{a}_0\phi_0 + \sum_{n=1}^{N} \bar{a}_n\phi_n + \bar{b}_n\psi_n.$$

Por comodidad, es conveniente definir los siguientes coeficientes,

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos(\frac{n\pi}{\ell}x)\,dx,\ n \in \mathbb{N}_0 \text{ y } b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)\,dx,\ n \in \mathbb{N}.$$

y la suma parcial de Fourier se escribe entonces como

$$S_N(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n\cos(\frac{n\pi}{\ell}x) + b_n\sin(\frac{n\pi}{\ell}x). \tag{3.3.2}$$

Luego, por la teoría desarrollada en la sección anterior, si podemos probar que $\{\phi_0,\phi_n,\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un sistema ortonormal completo, tendremos que

$$\|f - S_N(f)\|_{L^2([-\ell,\ell])} \to 0 \text{ si } n \to \infty,$$

es decir

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(\frac{n\pi}{\ell}x) + b_n\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)$$

donde la igualdad se entiende en sentido $L^2([-\ell,\ell])$.

Para entender la convergencia de la serie de Fourier, procedemos de la siguiente forma

$$\begin{aligned} S_N(f) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(\frac{n\pi}{\ell}x) + b_n \sin(\frac{n\pi}{\ell}x) \\ &= \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\,dt + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(t)\left[\cos(\frac{n\pi}{\ell}t)\cos(\frac{n\pi}{\ell}x) + \sin(\frac{n\pi}{\ell}t)\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)\right] dt \\ &= \int_{-\ell}^{\ell} f(t)\left[\frac{1}{2\ell} + \frac{1}{\ell}\sum_{n=1}^{N}\cos\Big(\frac{n\pi}{\ell}(x-t)\Big)\right] dt. \end{aligned}$$

Luego, si llamamos $K_N(x) = \frac{1}{2\ell} + \frac{1}{\ell}\sum_{n=1}^{N}\cos(\frac{n\pi}{\ell}x)$, tenemos que

$$S_N(f) = f * K_N$$

Notar que si llamamos $y = \frac{\pi}{\ell}(x-t)$, entonces

$$K_N(x-t) = \frac{1}{2\ell} + \frac{1}{\ell}\sum_{n=1}^{N}\cos(ny)$$

Si multiplico ambos miembros por $\sin(\frac{y}{2})$ y se usa la identidad trigonométrica

$$\cos(ny)\sin(\tfrac{y}{2}) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})y) - \sin((n-\frac{1}{2})y)}{2},$$

obtenemos

$$2\ell K_N(x-t)\sin(\tfrac{y}{2}) = \sin(\tfrac{y}{2}) + \sum_{n=1}^{N} \sin((n+\tfrac{1}{2})y) - \sin((n-\tfrac{1}{2})y) = \sin((N+\tfrac{1}{2})y).$$

Luego, llegamos a

$$K_N(x-t) = \frac{\sin((N+\frac{1}{2})y)}{2\ell\sin(\frac{y}{2})} =: D_N(y).$$

La función $D_N(y)$ se la llama el *núcleo de Dirichlet*.

Necesitamos ahora un resultado que dejamos como ejercicio

Ejercicio 3.3.4. Verificar que

$$\int_{-\ell}^{\ell} D_N(\frac{\pi y}{\ell})\,dy = 1.$$

Sugerencia: Usar la identidad $D_N(y) = \frac{1}{2\ell} + \frac{1}{\ell}\sum_{n=1}^{N}\cos(ny)$.

Ahora bien, por el Ejercicio 3.3.4, se tiene

$$
\begin{aligned}
|f(x) - S_N(f)(x)| &= \left| f(x) - \int_{-\ell}^{\ell} f(t) \frac{\sin((N+\frac{1}{2})\frac{\pi}{\ell}(x-t))}{2\ell \sin(\frac{\pi}{\ell}\frac{(x-t)}{2})}\, dt \right| \\
&= \left| \int_{-\ell}^{\ell} (f(x) - f(t)) \frac{\sin((N+\frac{1}{2})\frac{\pi}{\ell}(x-t))}{2\ell \sin(\frac{\pi}{\ell}\frac{(x-t)}{2})}\, dt \right| \\
&= \left| \int_{x-\ell}^{x+\ell} (f(x) - f(x-\tau)) \frac{\sin((N+\frac{1}{2})\frac{\pi}{\ell}\tau)}{2\ell \sin(\frac{\pi}{\ell}\frac{\tau}{2})}\, d\tau \right|.
\end{aligned}
$$

Si extendemos a f a $\mathbb{R}$ como una función periódica de período 2ℓ, la última expresión coincide con

$$
\left| \int_{-\ell}^{\ell} (f(x) - f(x-\tau)) \frac{\sin((N+\frac{1}{2})\frac{\pi}{\ell}\tau)}{2\ell \sin(\frac{\pi}{\ell}\frac{\tau}{2})}\, d\tau \right|
$$

Si llamamos ahora

$$
\Phi_N(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \sin((N+\tfrac{1}{2})\frac{\pi}{\ell}\tau) \quad \text{y} \quad g(\tau) = \frac{f(x) - f(x-\tau)}{2\sqrt{\ell} \sin(\frac{\pi}{\ell}\frac{\tau}{2})},
$$

tenemos que $\{\Phi_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ es un sistema ortonormal en $L^2([-\ell,\ell])$, luego si $g \in L^1([-\ell,\ell])$ sigue que, por el ejercicio 3.3.3 que extiende el Lema de Riemann–Lebesgue,

$$
\int_{-\ell}^{\ell} g(\tau)\Phi_N(\tau)\, d\tau \to 0 \quad \text{si } N \to \infty,
$$

de donde se obtendría que

$$
|f(x) - S_N(f)(x)| \to 0 \quad \text{si } N \to \infty.
$$

Observemos que $g \in L^1([-\ell,\ell])$ resulta equivalente a

$$
\int_{-\ell}^{\ell} \left| \frac{f(x) - f(x-\tau)}{\tau} \right| d\tau < \infty. \tag{3.3.3}
$$

Esto motiva la siguiente definición.

Definición 3.3.5. Sea $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Decimos que f verifica la *condición de Dini* en $x \in \mathbb{R}$ si verifica (3.3.3).

Recapitulando todo lo hecho, hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 3.3.6. *Sea $f \in L^1([-\ell,\ell])$ tal que verifica la condición de Dini en $x \in (-\ell,\ell)$. Entonces la serie de Fourier de f converge en x. Es decir,*

$$
|f(x) - S_N(f)(x)| \to 0 \quad \textit{cuando } N \to \infty.
$$

Cabe entonces preguntarse qué funciones son las que verifican la condición de Dini. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 3.3.7. Sea f derivable en $x \in \mathbb{R}$. Entonces f verifica la condición de Dini en x.

Ejemplo 3.3.8. Sea $f \in C^{0,\gamma}(\mathbb{R})$ para algún $\gamma \in (0,1]$. Entonces f verifica la condición de Dini en todo $x \in \mathbb{R}$.

Queda como ejercicio del lector verificar ambos ejemplos.

3.4. Convergencia uniforme de la serie de Fourier

En esta sección buscaremos condiciones suficientes sobre f para que la serie de Fourier converja uniformemente en $[-\ell,\ell]$. Observemos que como $S_N(f)$ es una función $2\ell-$periódica para todo N, si converge uniformemente su límite será necesariamente $2\ell-$periódica, por lo que eso es una condición necesaria.

Comencemos con una definición

Definición 3.4.1. Decimos que $f\colon[-\ell,\ell]\to\mathbb{R}$ es absolutamente continua si existe $g\in L^1([-\ell,\ell])$ y $c\in\mathbb{R}$ tales que

$$f(x)=c+\int_{-\ell}^{x} g(t)\,dt,\quad x\in[-\ell,\ell].$$

Este conjunto se nota por $AC[-\ell,\ell]$.

Observación 3.4.2. Si $f\in AC[-\ell,\ell]$ entonces f resulta continua. Más aún, por el teorema de diferenciación de Lebesgue (ver **[16]**), f resulta diferenciable en casi todo punto y

$$f'(x)=g(x),\quad \text{c.t.p.}$$

Observación 3.4.3. Obviamente, $C^1([-\ell,\ell])\subset AC[-\ell,\ell]$.

Necesitaremos los siguientes resultados de sencilla demostración que dejamos de ejercicio al lector.

Ejercicio 3.4.4 (Densidad de funciones regulares). Sea $f\in AC[-\ell,\ell]$. Entonces existe $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset C^1([-\ell,\ell])$ tal que

$$f_n\rightrightarrows f\quad \text{y}\quad f_n'\to f' \text{ en } L^1([-\ell,\ell]).$$

Ejercicio 3.4.5 (Fórmula de integración por partes). Sean $f,g\in AC[-\ell,\ell]$. Entonces

$$\int_{-\ell}^{\ell} f'(x)g(x)\,dx=f(\ell)g(\ell)-f(-\ell)g(-\ell)-\int_{-\ell}^{\ell} f(x)g'(x)\,dx.$$

Sea ahora $f\in AC[-\ell,\ell]$ tal que $f(\ell)=f(-\ell)$. Esta última condición es equivalente a

$$\int_{-\ell}^{\ell} f'(x)\,dx=0.$$

Supongamos que f tiene su serie de Fourier dada por

$$f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(\frac{n\pi}{\ell}x)+b_n\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)$$

y que f' tiene su serie de Fourier dada por

$$f'\sim\frac{\tilde a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} \tilde a_n\cos(\frac{n\pi}{\ell}x)+\tilde b_n\sin(\frac{n\pi}{\ell}x).$$

Busquemos la relación existente entre ambas series. En efecto,

$$\begin{aligned}\tilde{a}_n &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f'(x)\cos(\frac{n\pi}{\ell}x)\,dx = \frac{1}{\ell}f(x)\cos(\frac{n\pi}{\ell}x)\Big|_{-\ell}^{\ell} + \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)\frac{n\pi}{\ell}\,dx\\ &= \frac{n\pi}{\ell}b_n.\end{aligned}$$

De manera análoga se concluye que

$$\tilde{a}_0 = 0 \quad \text{y} \quad \tilde{b}_n = -\frac{n\pi}{\ell}a_n.$$

De estos cálculos concluimos que

$$f' \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{\ell}b_n\cos(\frac{n\pi}{\ell}x) - \frac{n\pi}{\ell}a_n\sin(\frac{n\pi}{\ell}x).$$

Es decir, la serie de Fourier asociada a f' es la que se obtiene de derivar término a término la serie de Fourier de f.

Si asumimos ahora que $f' \in L^2([-\ell,\ell])$ entonces podemos usar la desigualdad de Bessel (3.2.5) y concluir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2(b_n^2 + a_n^2) \le \frac{\ell^2}{\pi^2}\|f'\|^2_{L^2([-\ell,\ell])} < \infty.$$

Ahora bien,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|\frac{1}{n} \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Análogamente

$$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n| < \infty.$$

Con todos estos preliminares ya podemos demostrar el teorema fundamental de la sección

Teorema 3.4.6 (Convergencia uniforme de la serie de Fourier). *Sea $f \in AC[-\ell,\ell]$ tal que $f' \in L^2([-\ell,\ell])$ y $f(\ell) = f(-\ell)$. Entonces la serie de Fourier asociada a f converge uniformemente a f en $[-\ell,\ell]$. i.e.*

$$S_N(f) \rightrightarrows f.$$

Demostración. Como $f' \in L^2([-\ell,\ell])$, por la desigualdad de Hölder, se tiene que

$$|f(x) - f(y)| = \left|\int_x^y f'(t)\,dt\right| \le \left(\int_{-\ell}^{\ell} f'(t)^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}|x-y|^{\frac{1}{2}}.$$

Es decir, $f \in C^{0,\frac{1}{2}}([-\ell,\ell])$. Luego, por el Teorema 3.3.6, se tiene que

$$S_N(f)(x) \to f(x) \quad \text{para todo } x \in [-\ell,\ell]. \tag{3.4.1}$$

Por otro lado,

$$|S_N(f)| \le \left|\frac{a_0}{2}\right| + \sum_{n=1}^{\infty}|a_n| + |b_n| < \infty,$$

luego por el criterio de Weierstrass para la convergencia de series de funciones, se tiene que existe $S(x)$ definida en $[-\ell,\ell]$ tal que

$$S_N(f) \rightrightarrows S$$

y por la convergencia puntual (3.4.1), se concluye el teorema. $\square$

3.5. Convergencia en $L^2([-\ell,\ell])$

Finalmente en esta sección veremos que el sistema trigonométrico $\{\phi_0,\phi_n,\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un sistema ortonormal completo y por lo tanto, la serie de Fourier de una función $f\in L^2([-\ell,\ell])$ converge en norma L^2 a la misma función.

En efecto, sea $f\in L^2([-\ell,\ell])$ y, dado $\varepsilon>0$, consideremos $g\in C_c^1([-\ell,\ell])$ tal que

$$\|f-g\|_{L^2([-\ell,\ell])}<\varepsilon.$$

Observemos que, como $C_c^1([-\ell,\ell])\subset AC[-\ell,\ell]$ y $g(-\ell)=g(\ell)=0$ se tiene que

$$g=\lim_{N\to\infty} S_N(g),$$

donde la convergencia es uniforme por el Teorema 3.4.6.

Ahora, por el Teorema 3.2.13,

$$\begin{aligned}\|f-S_N(f)\|_{L^2([-\ell,\ell])} &\le \|f-S_N(g)\|_{L^2([-\ell,\ell])}\\ &\le \|f-g\|_{L^2([-\ell,\ell])}+\|g-S_N(g)\|_{L^2([-\ell,\ell])}\\ &\le \varepsilon+\sqrt{2\ell}\|g-S_N(g)\|_\infty\end{aligned}$$

Luego

$$\limsup_{N\to\infty}\|f-S_N(f)\|_{L^2([-\ell,\ell])}\le\varepsilon,$$

y como $\varepsilon>0$ es arbitrario, queda demostrado el siguiente Teorema

Teorema 3.5.1. *El sistema trigonométrico $\{\phi_0,\phi_n,\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dado por* (3.3.1) *es un sistema ortonormal completo en $L^2([-\ell,\ell])$. Luego, dada $f\in L^2([-\ell,\ell])$ la serie de Fourier asociada a f converge en $L^2([-\ell,\ell])$.*

Ejercicio 3.5.2. Dar una demostración alternativa del Teorema 3.5.1 usando el Teorema de Stone–Weierstrass en lugar del Teorema 3.4.6.

Sugerencia: Si $\mathbb{S}=\text{gen}\{\phi_0,\phi_n,\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, probar que $\mathbb{S}$ es un álgebra que separa puntos y contiene a las constantes. Luego $\mathbb{S}$ resulta denso en $C([-\ell,\ell])$. A partir de ahí la demostración es análoga a la del Teorema 3.5.1.

3.6. Representación por medio de una serie de senos

Si recordamos lo hecho en la sección 3.1, la condición inicial era una función u_0 definida en el intervalo $[0,\ell]$ y para poder resolver la ecuación (3.1.1)–(3.1.3), era necesario desarrollar u_0 como una serie de senos (cf. (3.1.11)).

Luego en esta sección supondremos que tenemos una función $f\in L^2([0,\ell])$ e intentaremos responder a la pregunta ¿Cómo es posible escribir f como una serie de senos?

Para responder a esta pregunta, suponemos primero que extendemos a f a todo el intervalo $[-\ell,\ell]$. Luego tenemos $\tilde f\in L^2([-\ell,\ell])$ tal que $\tilde f|_{[0,\ell]}=f$.

Desarrollamos entonces $\tilde{f}$ en su serie de Fourier y tenemos

$$\tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{\ell}x) + b_n \sin(\frac{n\pi}{\ell}x),$$

donde

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} \tilde{f}(x)\cos(\frac{n\pi}{\ell}x)\,dx,\ n \in \mathbb{N}_0 \text{ y } b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} \tilde{f}(x)\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)\,dx,\ n \in \mathbb{N}.$$

Como buscamos que en la serie de Fourier de $\tilde{f}$ sólo intervengan los senos, precisamos que $a_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Una forma posible de garantizar eso es definir $\tilde{f}$ de manera tal que sea *impar*, dado que como $\cos(\frac{n\pi}{\ell}x)$ es una función par y estamos integrando en un intervalo simétrico respecto del origen, la integral valdrá 0. Luego, se define $\tilde{f}$ como

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [0,\ell], \\ -f(-x) & x \in [-\ell, 0). \end{cases}$$

Por lo arriba expuesto, es claro que $a_n = 0$ para $n \in \mathbb{N}_0$. Ahora

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} \tilde{f}(x)\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)\,dx = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)\,dx,$$

dado que el integrando resulta ser una función par.

Resumimos todo esto en el siguiente teorema.

TEOREMA 3.6.1. *Sea $f \in L^2([0,\ell])$. Luego se tiene que*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{\ell}x),$$

donde los coeficientes b_n se calculan como

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin(\frac{n\pi}{\ell}x)\,dx.$$

y la igualdad se entiende en sentido $L^2([0,\ell])$. Más aún, si $f \in AC[0,\ell]$ con $f(0) = f(\ell) = 0$ y $f' \in L^2([0,\ell])$, entonces la convergencia es uniforme.

DEMOSTRACIÓN. La demostración es evidente de la discusión previa y de los teoremas 3.5.1 y 3.4.6. $\square$

3.7. Vuelta a la ecuación de difusión

Completemos finalmente nuestra discusión sobre la ecuación de difusión (3.1.1)–(3.1.3).

Recordemos que por (3.1.10) tenemos que la solución propuesta viene dada por la fórmula

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \exp(-\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}t)\sin(\frac{k\pi}{\ell}x),$$

donde los coeficientes c_k vienen dados por (3.1.12)

$$c_k = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell u_0(x)\sin(\frac{k\pi}{\ell}x)\,dx.$$

Si asumimos que $u_0 \in L^2([0,\ell]) \subset L^1([0,\ell])$, por el Ejercicio 3.1.1, sabemos que $u \in C^\infty([0,\ell]\times(0,\infty))$ y verifica (3.1.1)–(3.1.2).

Falta entonces analizar en qué sentido u verifica la condición inicial (3.1.3).

TEOREMA 3.7.1. *Si $u_0 \in L^2([0,\ell])$, entonces*

$$\|u(\cdot,t) - u_0\|_{L^2([0,\ell])} \to 0, \qquad \textit{cuando } t \to 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema 3.6.1, sabemos que

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^\infty c_k \sin(\frac{k\pi}{\ell}x),$$

donde la igualdad es en el sentido de $L^2([0,\ell])$. Luego

$$\begin{aligned}
\|u(\cdot,t) - u_0\|^2_{L^2([0,\ell])} &= \left\|\sum_{k=1}^\infty c_k \exp(-\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}t)\sin(\frac{k\pi}{\ell}x) - \sum_{k=1}^\infty c_k \sin(\frac{k\pi}{\ell}x)\right\|^2_{L^2([0,\ell])} \\
&= \left\|\sum_{k=1}^\infty c_k\Big(\exp(-\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}t) - 1\Big)\sin(\frac{k\pi}{\ell}x)\right\|^2_{L^2([0,\ell])} \\
&= \frac{\ell}{2}\sum_{k=1}^\infty c_k^2\Big(\exp(-\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}t) - 1\Big)^2,
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos utilizado la identidad de Parseval (Ejercicio 3.2.17).

Observemos que por la desigualdad de Bessel (Lema 3.2.12),

$$\sum_{k=1}^\infty c_k^2 < \infty,$$

luego dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=N+1}^\infty c_k^2 < \varepsilon.$$

Por otro lado, $\Big(\exp(-\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}t) - 1\Big)^2 \le 4$, luego

$$\|u(\cdot,t) - u_0\|^2_{L^2([0,\ell])} \le \frac{\ell}{2}\sum_{k=1}^N c_k^2\Big(\exp(-\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}t) - 1\Big)^2 + 2\ell\varepsilon,$$

de donde

$$\limsup_{t\to 0}\|u(\cdot,t) - u_0\|^2_{L^2([0,\ell])} \le 2\ell\varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, el teorema queda demostrado. □

En el caso en que el dato inicial u_0 es más regular, se tiene una mejor convergencia.

TEOREMA 3.7.2. *Si* $u_0 \in AC[0,\ell]$ *con* $u_0' \in L^2([0,\ell])$ *y* $u_0(0) = u_0(\ell) = 0$*, entonces se tiene que* $u \in C([0,\ell] \times [0,\infty))$ *y* $u(x,0) = u_0(x)$*.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración es una consecuencia inmediata del criterio de Weierstrass para la convergencia uniforme de series de funciones.

En efecto, por las hipótesis en u_0, tenemos que si

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(\frac{k\pi}{\ell}x)$$

(en sentido $L^2([0,\ell])$), entonces

$$u_0'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{\ell} c_k \cos(\frac{k\pi}{\ell}x)$$

y, por la desigualdad de Bessel aplicada a la serie de Fourier de u_0',

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 c_k^2 < \infty.$$

De esta última desigualdad se deduce que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| = \sum_{k=1}^{\infty} k|c_k|\frac{1}{k} \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 c_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Como

$$\left| c_k \exp(-\frac{k^2\pi^2}{\ell^2}t) \sin(\frac{k\pi}{\ell}x) \right| \le |c_k|, \; t \ge 0, x \in [0,\ell],$$

por el mencionado criterio de Weierstrass, se concluye lo deseado. □

3.8. Ejercicios

EJERCICIO 3.8.1. Sea f integrable en $[-p,p]$ y tal que $f(x+2p) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Verificar los siguientes resultados.

1. Para todo $a \in \mathbb{R}$, se verifica
$$\int_{a-p}^{a+p} f(t)\,dt = \int_{-p}^{p} f(t)\; dt.$$
2. Para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica
$$\int_{2p}^{2p+x} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} f(t)\,dt.$$
3. Si se define g como
$$g(x) := \int_0^x f(t)\,dt,$$
entonces $g(x+2p) = g(x)$ si y sólo si
$$\int_{-p}^{p} f(t)\,dt = 0.$$

4. Si además para $f \in L^2([-p,p])$, verificar la siguiente identidad:
$$\frac{1}{2p}\int_0^{2p} f(x)(p-x)\,dx = \sum_{n\geq 1}\frac{b_n}{n\omega_0},$$
donde b_n es un coeficiente de Fourier de f y $\omega_0 = \pi/p$.

Ejercicio 3.8.2. Calcular el desarrollo en serie de Fourier de senos de f y estudiar la convergencia puntual de la serie hallada para

1. $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2} & x = \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$
2. $f(x) = x$ $(0 \leq x < \pi)$

Ejercicio 3.8.3. Resolver, separando variables, el problema de Dirichlet para el rectángulo:
$$\begin{cases} \Delta u = 0 & 0 < x < \pi,\ 0 < y < A \\ u(0,y) = 0 \\ u(\pi,y) = 0 \\ u(x,A) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

Ejercicio 3.8.4. Hallar, usando el método de separación de variables, una solución del problema de la cuerda vibrante con dos extremos fijos:
$$\begin{cases} u_{xx} - \frac{1}{c^2}u_{tt} = 0 & 0 < x < \ell,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0 & t > 0 \\ u(\ell,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & 0 < x < \ell \\ u_t(x,0) = g(x) & 0 < x < \ell \end{cases}$$

Ejercicio 3.8.5. Resolver, usando separación de variables, el problema: Si D es el cuadrado $[0,1]\times[0,1]$, se busca $u = u(x,y)$ tal que
$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } D \\ u(x,0) = f_1(x) \\ u(1,y) = f_2(y) \\ u(x,1) = f_3(x) \\ u(0,y) = f_4(y) \end{cases}$$

Ejercicio 3.8.6. Resolver:
$$\begin{cases} u_t - k^2\partial_{xx}u + cu = 0 & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u(0,t) = 0 \\ u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$
Sugerencia: Proponer $v(x,t) = u(x,t)e^{ct}$.

Ejercicio 3.8.7. En los ejercicios 3.8.1 a 3.8.3, imponer condiciones sobre las funciones f, g o f_i (según corresponda), de modo tal que las series obtenidas sean efectívamente soluciones del problema.

Ejercicio 3.8.8. Resolver en $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$:

$$\begin{cases} \Delta u + u_x = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u(x,\pi) = 0 \\ u(0,y) = 0 \\ u(\pi,y) = \sin(y) \end{cases}.$$

Ejercicio 3.8.9. Resolver en $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u(x,0) = x^2 \\ u(x,\pi) = 0 \\ u_x(0,y) = 0 \\ u_x(\pi,y) = 0 \end{cases}$$

Mostrar que la serie obtenida es solución del problema.

Ejercicio 3.8.10. Resolver, analizando la validez de la solución, la ecuación de Laplace en un disco en $\mathbb{R}^2$.

1. $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } |x| < 1 \\ u = f & \text{en } |x| = 1 \end{cases}$ donde $f \in C^1(\{|x| = 1\})$.
   (Sugerencia: pasar a coordenadas polares).
2. $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } |x| < 1 \\ \partial_{\mathbf{n}} u = f & \text{en } |x| = 1 \end{cases}$
   donde f es como en el item 1, $\int_{|x|=1} f\,dS = 0$ y u se anula en el origen.

Probar que el item 2 no tiene solución si $\int_{|x|=1} f\,dS \neq 0$.

Ejercicio 3.8.11. Consideremos el siguiente problema en $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = 0 & \text{en } B_1(0) \times (0,\infty) \\ u = f & \text{en } B_1(0) \times \{t = 0\} \\ u_t = 0 & \text{en } B_1(0) \times \{t = 0\} \\ u = 0 & \text{en } \partial B_1(0) \times (0,\infty) \end{cases}$$

(la solución representa el pequeño movimiento transversal de una membrana circular fija en sus extremos)

Mostrar que, cuando se buscan soluciones de la forma $R(r)\Theta(\theta)T(t)$ al aplicar el método de separación de variables, se obtiene para R la ecuación:

$$(rR')' - \frac{m^2}{r} R + \lambda r R = 0.$$

EJERCICIO 3.8.12. Aplicar el método de separación de variables para resolver el siguiente problema de conducción de calor en un cilindro circular infinito.

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en } B_1(0) \times (0, \infty) \\ u = 0 & \text{en } \partial B_1(0) \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = f(|x|) & x \in B_1(0) \end{cases}$$

donde $B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$.

Sugerencia: Pasar a coordenadas polares y, dado que el dato inicial es independiente de θ, buscar soluciones independientes de θ.

EJERCICIO 3.8.13. Verificar por el método de separación de variables, que el problema de autovalores

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en } Q := (0, 1) \times (0, 1) \\ u = 0 & \text{en } \partial Q \end{cases}$$

tiene como soluciones a

$$u_{k,j}(x, y) = \sin(\pi j x) \sin(\pi k y), \qquad \lambda_{k,j} = \pi^2(j^2 + k^2).$$

para todo $j, k \in \mathbb{N}$.

Demostrar, además, que las funciones $\{u_{k,j}\}_{k,j\in\mathbb{N}}$ son las únicas soluciones de este problema.

Capítulo 4

La ecuación de Laplace y de Poisson

En este capítulo estudiaremos la ecuación de Laplace

$$\Delta u = 0$$

y su contraparte no homogénea, la ecuación de Poisson

$$\Delta u = f.$$

4.1. Motivación

De las múltiples motivaciones existentes para estudiar tanto la ecuación de Laplace como la ecuación de Poisson, en esta sección haremos mención a dos de ellas.

La primera proviene del estudio de la ecuación de difusión que fuera estudiada tanto en el Capítulo 2 como en el Capítulo 3. Si en la ecuación de difusión, uno hace la suposición (que en muchos casos es justificable rigurosamente) de que la evolución de la temperatura converge cuando $t \to \infty$ a una distribución de equilibrio, ese *estado estacionario* será independiente de t, y luego debe verificar la ecuación de Laplace si se considera la ecuación del calor (3.1.1), o la ecuación de Poisson, si se considera la ecuación de difusión (2.4.1).

Daremos ahora otra motivación para el estudio de la ecuación de Laplace. La misma proviene del estudio de las *superficies mínimas*.

Supongamos que se tiene un anillo de alambre y lo sumergimos en agua jabonosa. Al sacarlo, se forma una película de jabón adherida al alambre. ¿Cómo es el gráfico que tiene esta película?

Para modelar este problema matemáticamente, asumimos que la película de jabón se describe mediante el gráfico de una función de la forma $z = u(x, y)$, con $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ y tal que $u(x, y) = g(x, y)$ cuando $(x, y) \in \partial D$. Esto último corresponde a que la posición en el borde corresponde a la posición del anillo de alambre que se supone conocido.

La teoría de superficies mínimas postula que la función u que resuelve el problema, será aquella que minimice el área entre todas las superficies posibles.

Recordemos que el área del gráfico de la función u se calcula mediante la integral

$$\mathcal{A}(u) = \int_D \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\, dxdy$$

Luego el problema consiste en encontrar una función u que minimice el funcional $\mathcal{A}$ entre todas las funciones que coinciden con g en ∂D.

Este problema resulta muy complejo de tratar por varios motivos que serán evidentes más tarde (entre otros, el funcional no es uniformemente convexo). Es por eso que resulta conveniente linealizarlo. Es decir, se usa la expresión

$$\sqrt{1+t^2} = 1 + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2),$$

y si se supone que una superficie mínima no tendrá oscilaciones grandes, y por ende $|\nabla u|$ va a ser pequeño,

$$\mathcal{A}(u) = \int_D \sqrt{1+|\nabla u|^2}\,dx \simeq \int_D \Big(1 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2\Big)\,dx = \text{Área}(D) + \frac{1}{2}\int_D |\nabla u|^2\,dx.$$

Luego si llamamos

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\int_D |\nabla u|^2\,dx,$$

el problema se convierte en minimizar $\mathcal{J}$ entre todas las funciones v que coinciden con g en ∂D. El funcional $\mathcal{J}$ se lo llama la *integral de Dirichlet*.

Supongamos que existe u que realiza el mínimo de $\mathcal{J}$ y consideremos $\phi \in C^1_c(D)$. Luego, si $t \in \mathbb{R}$, $u + t\phi = g$ en ∂D y por ende

$$\mathcal{J}(u) \le \mathcal{J}(u+t\phi), \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Llamemos $j(t) = \mathcal{J}(u+t\phi)$, luego $j\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene un mínimo en $t = 0$ y en consecuencia, $j'(0) = 0$. Calculemos esa derivada.

$$\begin{aligned} j(t) &= \mathcal{J}(u+t\phi) \\ &= \frac{1}{2}\int_D |\nabla u + t\nabla\phi|^2\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_D |\nabla u|^2\,dx + t\int_D \nabla u\cdot\nabla\phi\,dx + \frac{t^2}{2}\int_D |\nabla\phi|^2\,dx. \end{aligned}$$

De ahí se ve que, por el teorema de la divergencia,

$$0 = j'(0) = \int_D \nabla u\cdot\nabla\phi\,dx = -\int_D \Delta u\,\phi\,dx.$$

Como $\phi \in C^1_c(D)$ es arbitraria, se concluye que

$$\Delta u = 0 \text{ en } D.$$

4.2. Solución fundamental

En esta sección, estudiaremos la ecuación de Laplace

$$\Delta u = 0. \tag{4.2.1}$$

Empecemos buscando algunas soluciones particulares de (4.2.1). Es claro que las funciones lineales, $u(x) = a\cdot x + b$ con $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$ son soluciones de (4.2.1). Por otro lado, si $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función holomorfa, $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$, con $u, v\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, entonces u y v son soluciones de (4.2.1). Esto nos da una forma de construirnos soluciones en dimensión 2. Por ejemplo $u(x,y) = e^x \cos y$, etc.

Ejercicio 4.2.1. Hallar todos los polinomios de grado 2 en dos variables que son armónicos en $\mathbb{R}^2$.

Para construir soluciones más generales, observemos primero que si u_1 y u_2 son dos soluciones de (4.2.1) y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$ también es solución de (4.2.1). Esto se debe al hecho de que la ecuación de Laplace es una ecuación lineal.

Más interesante es que si u es una solución de (4.2.1) y $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz ortogonal (i.e. $O \cdot O^\top = I_n$, con I_n la matriz identidad) entonces se tiene que

$$v(x) = u(Ox)$$

también es solución de (4.2.1). Ver el Ejercicio 4.8.1. Es decir, la ecuación de Laplace es *invariante por rotaciones*.

Este último hecho sugiere que deben existir soluciones que dependan sólo de $|x|$ y no de sus variables angulares. Luego buscamos una función $\phi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que

$$u(x) = \phi(|x|),$$

sea solución de (4.2.1). Si llamamos $r = |x|$ es un ejercicio sencillo verificar que

$$\Delta u = \phi'' + \frac{n-1}{r}\phi' = 0 \tag{4.2.2}$$

donde $\phi'(r) = \frac{d}{dr}\phi(r)$. Si asumimos que $\phi' \neq 0$, de (4.2.2) se deduce que

$$\frac{d}{dr}\log(\phi') = \frac{\phi''}{\phi'} = \frac{1-n}{r},$$

de donde

$$\phi'(r) = \frac{a}{r^{n-1}},$$

para alguna constante $a \in \mathbb{R}$. Integrando una vez más, se concluye que

$$\phi(r) = \begin{cases} b\log r + c & \text{si } n = 2 \\ \frac{b}{r^{n-2}} + c & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$$

para algunas constantes $b, c \in \mathbb{R}$.

Esto motiva la siguiente definición.

Definición 4.2.2. Se define la *solución fundamental* del laplaciano a la función

$$\Phi\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ \text{dada por } \Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\log|x| & \text{si } n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n}\frac{1}{|x|^{n-2}} & \text{si } n \geq 3, \end{cases}$$

donde ω_n es la medida de la bola unitaria de $\mathbb{R}^n$.

Observación 4.2.3. La constante ω_n se puede calcular explícitamente. De hecho,

$$\omega_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)},$$

y Γ es la función Gamma definida como

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\,dt.$$

Ver [**7**].

Observación 4.2.4. La elección de las constantes será evidente en el Teorema 4.2.6.

Observación 4.2.5. Por medio de cálculos elementales, se verifica que

$$|\partial_i \Phi(x)| \le \frac{C}{|x|^{n-1}},$$

de donde se deduce que $\partial_i \Phi \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Por otro lado,

$$|\partial_{ij} \Phi(x)| \le \frac{C}{|x|^{n}},$$

y es fácil verificar que $\partial_{ij}\Phi \notin L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ para todo $i, j = 1, \dots, n$.

Finalmente, se tiene que $\Delta\Phi = 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Veamos ahora que mediante la solución fundamental es posible resolver la ecuación de Poisson.

Teorema 4.2.6. *Sea $f \in C^2_c(\mathbb{R}^n)$ y definimos*

$$u(x) := \Phi * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\, dy.$$

Entonces $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ y u resuelve la ecuación de Poisson

$$-\Delta u = f, \quad \text{en } \mathbb{R}^n. \tag{4.2.3}$$

Demostración. Veamos primero que $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Para eso, observemos que

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y) f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) f(x-y)\, dy,$$

luego

$$\frac{u(x+he_i) - u(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \frac{f(x+he_i-y) - f(x-y)}{h}\, dy.$$

Ahora

$$\frac{f(x+he_i-y) - f(x-y)}{h} \rightrightarrows \partial_i f(x-y) \text{ cuando } h \to 0 \text{ en } \mathbb{R}^n,$$

de donde

$$\partial_i u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \partial_i f(x-y)\, dy.$$

Análogamente,

$$\partial_{ij} u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \partial_{ij} f(x-y)\, dy,$$

lo que prueba que $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$.

Veamos que u resuelve la ecuación de Poisson (4.2.3). En efecto,

$$\begin{aligned}
\Delta u(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y) \Delta f(x-y)\, dy \\
&= \int_{B_\varepsilon(0)} \Phi(y) \Delta f(x-y)\, dy + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \Phi(y) \Delta f(x-y)\, dy \\
&= I_\varepsilon + J_\varepsilon.
\end{aligned}$$

Es fácil ver que $I_\varepsilon \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$, dado que

$$|I_\varepsilon| \leq \|\Delta f\|_\infty \int_{B_\varepsilon(0)} \Phi(y)\, dy \leq \begin{cases} C\varepsilon^2 |\log \varepsilon| & \text{si } n = 2, \\ C\varepsilon^2 & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

Para estimar J_ε hagamos primero la siguiente observación, $\Delta f(x-y) = \Delta_x(f(x-y)) = \Delta_y(f(x-y))$, donde el subíndice indica respecto de qué variable se están realizando las diferenciaciones. Luego

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \Phi(y) \Delta_y(f(x-y))\, dy \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \nabla\Phi(y) \cdot \nabla_y(f(x-y))\, dy + \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \Phi(y) \partial_{\mathbf{n}} f(x-y)\, dS_y \\ &= K_\varepsilon + L_\varepsilon, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado el Teorema de la divergencia de Gauss y $\partial_{\mathbf{n}} f = \nabla f \cdot \mathbf{n}$ es la derivada direccional de f en la dirección de $\mathbf{n} = -\frac{y}{\varepsilon}$ que es el vector normal unitario interior a $B_\varepsilon(0)$ (que es exterior a $\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)$).

Al igual que con el término I_ε, es fácil verificar que $L_\varepsilon \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$, dado que

$$|L_\varepsilon| \leq \|\nabla f\|_\infty \int_{\partial B_\varepsilon(0)} |\Phi(y)|\, dS \leq \begin{cases} C\varepsilon |\log \varepsilon| & \text{si } n = 2, \\ C\varepsilon & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

Finalmente, usando nuevamente el Teorema de la divergencia de Gauss,

$$\begin{aligned} K_\varepsilon &= -\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \nabla\Phi(y) \cdot \nabla_y(f(x-y))\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)} \Delta\Phi(y) f(x-y)\, dy - \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \partial_{\mathbf{n}} \Phi(y) f(x-y)\, dS_y \\ &= -\int_{\partial B_\varepsilon(0)} \partial_{\mathbf{n}} \Phi(y) f(x-y)\, dS_y, \end{aligned}$$

donde hemos usado que Φ resuelve la ecuación de Laplace (4.2.1) en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ por la Observación 4.2.5.

Nuevamente por la Observación 4.2.5, tenemos que

$$\nabla\Phi(y) = -\frac{1}{n\omega_n} \frac{y}{|y|^n} = \frac{-y}{n\omega_n \varepsilon^n}, \quad \text{si } y \in \partial B_\varepsilon(0),$$

luego

$$\partial_{\mathbf{n}} \Phi(y) = \nabla\Phi(y) \cdot \mathbf{n}(y) = \frac{-y}{n\omega_n \varepsilon^n} \cdot \frac{-y}{\varepsilon} = \frac{1}{n\omega_n \varepsilon^{n-1}}.$$

En consecuencia,

$$K_\varepsilon = -\frac{1}{n\omega_n \varepsilon^{n-1}} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} f(x-y)\, dS_y = -⨍_{\partial B_\varepsilon(x)} f(y)\, dS_y,$$

puesto que $n\omega_n \varepsilon^{n-1}$ es la superficie de la bola de radio ε. De la última igualdad se deduce fácilmente que

$$K_\varepsilon \to -f(x), \quad \text{cuando } \varepsilon \to 0.$$

Esto concluye la demostración. □

4.3. Teorema del valor medio y consecuencias

Supongamos que tenemos el siguiente juego: Tomamos el cuadrado unitario de $\mathbb{R}^2$, $Q = [0,1] \times [0,1]$ y hacemos una partición regular. Es decir, dado $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$x_i = \frac{i}{n},\ y_j = \frac{j}{n},\ i,j = 0,\dots,n.$$

Se toma una función de pago $g \in C(\partial Q)$, y un punto de la partición $(x,y) \in Q$. Luego el juego consiste en moverse por la grilla al azar con probabilidad $\frac{1}{4}$ en cada una de las 4 direcciones posibles hasta que se llega a un punto de la frontera de Q, ∂Q. Cuando esto sucede, el jugador cobra el valor de g en ese punto (se supone que si g es negativa, el jugador debe pagar).

La pregunta que se quiere responder es: ¿Cuál es el precio justo que hay que pagar para poder jugar el juego?

Para responder a esta pregunta, se razona de la siguiente manera. Llamemos $u(x,y)$ al valor que tiene el juego si comenzamos en el punto $(x,y) \in Q$. Obviamente, si $(x,y) \in \partial Q$, el valor del juego debe ser $u(x,y) = g(x,y)$.

Por otro lado, el valor de empezar en un punto (x,y) debe ser igual al promedio de los valores de empezar en cualquiera de los puntos vecinos. Es decir, si llamamos $h = \frac{1}{n}$,

$$u(x,y) = \frac{u(x+h,y) + u(x-h,y) + u(x,y+h) + u(x,y-h)}{4}.$$

Ahora, para valores pequeños de h, se tiene

$$\begin{aligned}
u(x+h,y) &= u(x,y) + \partial_x u(x,y)h + \partial_{xx}u(x,y)\frac{h^2}{2} + o(h^2),\\
u(x-h,y) &= u(x,y) - \partial_x u(x,y)h + \partial_{xx}u(x,y)\frac{h^2}{2} + o(h^2),\\
u(x,y+h) &= u(x,y) + \partial_y u(x,y)h + \partial_{yy}u(x,y)\frac{h^2}{2} + o(h^2),\\
u(x,y-h) &= u(x,y) - \partial_y u(x,y)h + \partial_{yy}u(x,y)\frac{h^2}{2} + o(h^2),
\end{aligned}$$

de donde

$$u(x,y) = \frac{4u(x,y) + \partial_{xx}u(x,y)h^2 + \partial_{yy}u(x,y)h^2 + o(h^2)}{4}.$$

Luego

$$0 = \frac{h^2}{4}\Delta u(x,y) + o(h^2).$$

Dividiendo por h^2 y tomando límite cuando $h \to 0$, obtenemos que u debe satisfacer la ecuación de Laplace (4.2.1) junto con la condición de borde de Dirichlet, $u = g$ en ∂Q.

Esta discusión lleva a pensar que una función armónica u debe valer en un punto (x,y) lo mismo que el promedio de sus valores en un entorno de dicho punto. Esto es lo que dice el Teorema del valor medio que demostramos a continuación.

TEOREMA 4.3.1 (Teorema del valor medio). *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y sea $u \in C^2(U)$. Si u es una función armónica en U, entonces se verifica que*

$$u(x) = \fint_{\partial B_r(x)} u(y)\, dS_y = \fint_{B_r(x)} u(y)\, dy,$$

para todo $x \in U$ y para todo $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset\subset U$.

Recíprocamente, si u verifica

$$u(x) = \fint_{\partial B_r(x)} u(y)\, dS_y,$$

para todo $x \in U$ y para todo $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset\subset U$, entonces u es armónica en U.

DEMOSTRACIÓN. Sean $x \in U$ y $r_0 > 0$ tal que $B_{r_0}(x) \subset\subset U$. Definimos entonces $\phi\colon (0, r_0) \to \mathbb{R}$ como

$$\phi(r) := \fint_{\partial B_r(x)} u(y)\, dS_y = \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y)\, dS_y.$$

Hacemos ahora el cambio de variables $y = x + rz$. Este cambio de variables, transforma $\partial B_r(x)$ en $\partial B_1(0)$ y $dS_y = r^{n-1} dS_z$. Luego

$$\phi(r) = \frac{1}{n\omega_n} \int_{\partial B_1(0)} u(x + rz)\, dS_z = \fint_{\partial B_1(0)} u(x + rz)\, dS_z.$$

Diferenciamos esta fórmula, notando que es posible intercambiar la diferenciación con la integral puesto que $u \in C^2(U)$, y obtenemos

$$\frac{d}{dr}\phi(r) = \fint_{\partial B_1(0)} \partial_r u(x + rz)\, dS_z = \fint_{\partial B_1(0)} \nabla u(x + rz) \cdot z\, dS_z$$

Si volvemos a realizar el mismo cambio de variables, se llega a

$$\frac{d}{dr}\phi(r) = \fint_{\partial B_r(x)} \nabla u(y) \cdot \left(\frac{y - x}{r}\right) dS_y.$$

Ahora, se observa que $\mathbf{n} = \frac{y-x}{r}$ es el vector normal exterior unitario de $B_r(x)$, y por el Teorema de la divergencia de Gauss, la última integral coincide con

$$\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}} \int_{B_r(x)} \operatorname{div}(\nabla u)(y)\, dy = \frac{r}{n} \fint_{B_r(x)} \Delta u(y)\, dy.$$

Luego, hemos demostrado que

$$\frac{d}{dr}\phi(r) = \frac{r}{n} \fint_{B_r(x)} \Delta u(y)\, dy. \tag{4.3.1}$$

Ahora, si asumimos que $\Delta u = 0$ en U, entonces $\phi'(r) = 0$ de donde ϕ resulta constante. Como $\lim_{r\to 0} \phi(r) = u(x)$ se concluye que

$$u(x) = \fint_{\partial B_r(x)} u(y)\, dS_y.$$

Recíprocamente, si $\phi'(r) = 0$, entonces

$$\int_{B_r(x)} \Delta u(y)\, dy = 0, \quad \text{para todo } B_r(x) \subset\subset U,$$

de donde $\Delta u = 0$ en U.

Para terminar la demostración, falta ver que si

$$u(x) = \fint_{\partial B_r(x)} u(y)\, dS_y,$$

entonces

$$u(x) = \fint_{B_r(x)} u(y)\, dy.$$

Pero

$$\begin{aligned}
\int_{B_r(x)} u(y)\, dy &= \int_0^r \left(\int_{\partial B_t(x)} u(y)\, dS_y \right) dt \\
&= \int_0^r n\omega_n t^{n-1} u(x)\, dt \\
&= \omega_n r^n u(x) = |B_r(x)| u(x).
\end{aligned}$$

Esto concluye la demostración. $\square$

En la demostración del recíproco, estamos asumiendo que la función u es de clase C^2, sin embargo para testear la validez de la propiedad del valor medio, eso no es necesario. Una pregunta válida es qué sucede si se tiene una función u continua que verifica la propiedad del valor medio. Ese es el contenido del próximo teorema.

TEOREMA 4.3.2. *Sea $u \in C(U)$ tal que*

$$u(x) = \fint_{\partial B_r(x)} u(y)\, dS_y, \quad \textit{para toda bola } B_r(x) \subset\subset U.$$

Entonces $u \in C^\infty(U)$ y por ende $\Delta u = 0$ en U.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ el núcleo regularizante estándar y definimos $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\rho(\frac{x}{\varepsilon})$. Recordemos que ρ es radial, luego $\rho(x) = \eta(|x|)$ donde $\eta\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$.

Luego, regularizamos u convolucionando con ρ_ε

$$u_\varepsilon(x) = u * \rho_\varepsilon(x),$$

entonces se tiene que $u_\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$ donde $U_\varepsilon = \{x \in U\colon\ \operatorname{dist}(x, \partial U) > \varepsilon\}$.

El teorema quedará demostrado si vemos que $u = u_\varepsilon$ en U_ε. En efecto, si $x \in U_\varepsilon$, se tiene que

$$\begin{aligned}
u_\varepsilon(x) &= \int_U u(y)\rho_\varepsilon(x-y)\, dy = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_U u(y)\rho(\tfrac{x-y}{\varepsilon})\, dy \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_{B_\varepsilon(x)} u(y)\eta(\tfrac{|x-y|}{\varepsilon})\, dy = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\varepsilon \int_{\partial B_r(x)} u(z)\eta(\tfrac{r}{\varepsilon})\, dS_z\, dr \\
&= \frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\varepsilon \eta(\tfrac{r}{\varepsilon}) \left(\int_{\partial B_r(x)} u(z)\, dS_z \right) dr = \frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\varepsilon \eta(\tfrac{r}{\varepsilon}) n\omega_n r^{n-1} u(x)\, dr \\
&= u(x) \left(\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\varepsilon \eta(\tfrac{r}{\varepsilon}) n\omega_n r^{n-1}\, dr \right).
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\frac{1}{\varepsilon^n}\int_0^\varepsilon \eta(\tfrac{r}{\varepsilon})n\omega_n r^{n-1}\,dr = \int_{B_1(0)} \rho(y)\,dy = 1,$$

lo que concluye la demostración. □

El corolario que sigue es uno de los resultados más importantes sobre funciones armónicas.

COROLARIO 4.3.3 (Principio del máximo). *Sea $u \in C^2(U)\cap C(\bar U)$, con $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado tal que $\Delta u = 0$ en U. Entonces*

1. $\max_{\bar U} u = \max_{\partial U} u$ *(esto se conoce como el* principio débil*).*
2. *Si U es conexo y existe $x_0 \in U$ tal que $u(x_0) = \max_{\bar U} u$, entonces u es constante en U (esto se conoce como el* principio fuerte*).*

DEMOSTRACIÓN. Queda como ejercicio para el lector verificar que el principio fuerte implica el principio débil. Luego, sólo demostraremos este último.

Supongamos que existe $x_0 \in U$ tal que $u(x_0) = \max_{\bar U} u =: M$. Definimos el siguiente conjunto:

$$A := \{x \in U : u(x) = M\},$$

y debemos verificar que $A = U$.

Como u es continua, sigue que A es un cerrado relativo a U ($A = u^{-1}(\{M\})$). Al ser U conexo, nos queda verificar que A es abierto. Pero esto es una consecuencia inmediata del Teorema del valor medio 4.3.1. En efecto, sea $x \in A$ y $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset\subset U$, luego, como $u(y) \le M$ para todo $y \in B_r(x)$ y

$$0 = u(x) - M = ⨍_{B_r(x)} (u(y) - M)\,dy,$$

se desprende que $u(y) = M$ para todo $y \in B_r(x)$ y por ende $B_r(x) \subset A$. □

OBSERVACIÓN 4.3.4. El corolario 4.3.3 sigue siendo válido si se reemplaza máx por mín y es llamado, en consecuencia, el *principio del mínimo*. Esto puede observarse, o bien rehaciendo la demostración que es exactamente igual a la vista, o bien observando que si u es armónica, entonces $-u$ también lo es y que

$$\max(-u) = -\min u.$$

OBSERVACIÓN 4.3.5. Si bien el principio débil del máximo se deduce del principio fuerte, puede darse una demostración alternativa que resulta muy útil a la hora de extenderla a otro tipo de ecuaciones diferenciales (ver el Ejercicio 4.8.18).

En efecto, si $x_0 \in U$ es tal que $u(x_0) = \max_{\bar U} u$ entonces se tiene que $\partial_i u(x_0) = 0$ y $\partial_{ii} u(x_0) \le 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. Luego $\Delta u(x_0) \le 0$.

Si definimos $u_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon|x|^2$, entonces $\Delta u_\varepsilon = \Delta u + 2n\varepsilon$ por lo que si u es armónica, entonces se tiene que $\Delta u_\varepsilon = 2n\varepsilon > 0$. Por la cuenta hecha al principio, concluimos que

$$\max_{\bar U} u_\varepsilon = \max_{\partial U} u_\varepsilon.$$

Ahora, como $u_\varepsilon \rightrightarrows u$ en $\bar U$, podemos pasar al límite en la igualdad de arriba y concluir que

$$\max_{\bar U} u = \max_{\partial U} u.$$

Veamos ahora algunas consecuencias fundamentales del principio del máximo.

Corolario 4.3.6 (Unicidad del problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson). *Existe a lo sumo una única función* $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ *solución de*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } U \\ u = g & \text{en } \partial U \end{cases} \tag{4.3.2}$$

Demostración. Sean u_1 y u_2 dos soluciones de (4.3.2). Si llamamos $w = u_1 - u_2$ entonces w verifica

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{en } U \\ w = 0 & \text{en } \partial U. \end{cases} \tag{4.3.3}$$

Luego, por el principio débil del máximo, se tiene que $\max_{\bar{U}} w = \max_{\partial U} w = 0$. De donde $w \leq 0$ en U, es decir, $u_1 \leq u_2$ en U.

De manera completamente análoga se obtiene que $u_2 \leq u_1$ en U y en consecuencia $u_1 = u_2$ como queríamos demostrar. □

Es interesante ver en este punto una demostración alternativa de este corolario usando *métodos de energía*. Es decir, una demostración por métodos de integración en lugar de utilizar el principio del máximo.

Demostración del Corolario 4.3.6 por métodos de energía. El corolario queda demostrado si probamos que si $w \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ verifica (4.3.3), entonces $w = 0$ en U.

Para esto se multiplica por w la ecuación (4.3.3) y se integra para obtener

$$\begin{aligned} 0 &= \int_U \Delta w w \, dx \\ &= -\int_U \nabla w \cdot \nabla w \, dx + \int_{\partial U} w \partial_{\mathbf{n}} w \, dS \\ &= -\int_U |\nabla w|^2 \, dx, \end{aligned}$$

de donde se deduce que $\nabla w = 0$ en U y por ende w resulta constante en U. Como $w = 0$ en ∂U sigue que $w = 0$ en U como queríamos demostrar. □

Corolario 4.3.7 (Velocidad de propagación infinita). *Sea* $U \subset \mathbb{R}^n$ *un abierto acotado y conexo y sea* $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ *una función armónica tal que* $u = g$ *en* ∂U *con* $g \geq 0$ *en* ∂U *y* $g \not\equiv 0$. *Entonces* $u > 0$ *en* U.

Demostración. Por el principio débil del mínimo, se tiene que

$$\min_{\bar{U}} u = \min_{\partial U} u = \min_{\partial U} g \geq 0,$$

luego $u \geq 0$ en U.

Ahora, si existe $x_0 \in U$ tal que $u(x_0) = 0$, por el principio fuerte del mínimo se concluye que $u \equiv 0$ en $\bar{U}$ que contradice el hecho de que $g \not\equiv 0$. □

El Corolario 4.3.7 nos dice que una perturbación pequeña en el borde del dominio se propaga inmediatamente a todo su interior. Pensemos en un dato de frontera g que sea idénticamente cero, salvo en un pequeño entorno de un punto donde $g > 0$. Luego la función armónica que toma ese valor de frontera debe ser automáticamente positiva en todo su domino, sin importar que tan lejos estemos de esa perturbación. De ahí el nombre de *velocidad de propagación infinita*.

Terminemos esta sección con otra consecuencia del Teorema del valor medio.

TEOREMA 4.3.8 (Desigualdad de Harnack). *Sea $u \in C^2(U)$ una función armónica tal que $u \geq 0$ en U. Dado $V \subset\subset U$ abierto y conexo, existe $C = C(n, V)$ tal que*

$$\sup_V u \leq C \inf_V u.$$

OBSERVACIÓN 4.3.9. Este Teorema lo que nos provee es de un *control universal* de la oscilación de todas las funciones armónicas. Para funciones armónicas veremos que es una consecuencia de la fórmula del valor medio, pero para ecuaciones más generales su demostración es muy compleja y es la clave en la teoría de regularidad de ecuaciones diferenciales tanto elípticas como parabólicas. Establecer el Teorema de Harnack para problemas elípticos y parabólicos fue uno de los problemas abiertos más importantes de la primera mitad del siglo XX en ecuaciones diferenciales (el problema número 19 de la famosa lista de Hilbert) y fue finalmente resuelto de manera simultánea por Ennio De Giorgi en [**3**] (¡a la edad de 24 años!) y por John Nash en [**13**]. La prueba fue luego simplificada por Jürgen Moser en [**12**] y hoy se conoce como el Teorema de *De Giorgi–Nash–Moser*. Una demostración detallada de este teorema se encuentra en [**8**].

DEMOSTRACIÓN. Sea $x \in U$ y $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset\subset U$. Observemos que si $y \in B_{\frac{r}{2}}(x)$, entonces $B_{\frac{r}{2}}(y) \subset B_r(x)$.

Luego, por el Teorema del valor medio, si $y \in B_{\frac{r}{2}}(x)$ y como $u \geq 0$,

$$\begin{aligned} u(x) &= \fint_{B_r(x)} u(z)\,dz = \frac{1}{r^n\omega_n}\int_{B_r(x)} u(z)\,dz \\ &\geq \frac{1}{r^n\omega_n}\int_{B_{\frac{r}{2}}(y)} u(z)\,dz = \frac{1}{2^n}\fint_{B_{\frac{r}{2}}(y)} u(z)\,dz \\ &= \frac{1}{2^n}u(y). \end{aligned}$$

En consecuencia, si $B_{2r}(x_0) \subset\subset U$ y $x \in B_r(x_0)$, se tiene que $B_r(x) \subset B_{2r}(x_0)$, entonces $u(y) \leq 2^n u(x)$ para todo $y \in B_{\frac{r}{2}}(x)$, de donde

$$u(y) \leq 2^n u(x) \quad \text{para todo } |x - y| < \frac{r}{2}$$

El teorema se concluye ahora por un argumento de compacidad. En efecto, si $V \subset\subset U$ es conexo y $r < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(V, \partial U)$, como $\bar{V}$ es compacto lo podemos cubrir con bolitas $\{B_i\}_{i=1}^N$ de radio $\frac{r}{2}$.

Luego, si $x, y \in V$, tenemos una curva $\gamma\colon [0,1] \to V$ tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma(1) = y$. Entonces existen $\{B_{i_k}\}_{k=1}^M \subset \{B_i\}_{i=1}^N$, tal que $\gamma([0,1]) \subset \cup_{k=1}^M B_{i_k}$ y $B_{i_k} \cap B_{i_{k+1}} \neq \emptyset$. Finalmente, si elegimos $x_k \in B_{i_k} \cap B_{i_{k+1}}$ se tiene que

$$u(x) \leq 2^n u(x_1) \leq (2^n)^2 u(x_2) \leq \cdots \leq (2^n)^M u(x_{i_M}) \leq (2^n)^{M+1} u(y) \leq (2^n)^{N+1} u(y).$$

Esto finaliza la demostración. □

4.4. Estimaciones de las derivadas

Ya hemos demostrado en el Teorema 4.3.2 que si u es armónica en U, entonces resulta $u \in C^\infty(U)$. El objetivo de esta sección es obtener estimaciones cuantitativas de esta afirmación y explorar algunas de las consecuencias de dichas estimaciones.

Empecemos por el teorema principal de la sección.

TEOREMA 4.4.1 (Estimaciones de las derivadas). *Sea $u \in C^2(U)$ una función armónica en U. Se tiene entonces la siguiente estimación:*

$$|\partial_i u(x)| \le \frac{c_n}{r^{n+1}} \|u\|_{L^1(B_r(x))},$$

para todo $x \in U$ y todo $r > 0$ tal que $B_r(x) \subset\subset U$, donde

$$c_n = \frac{2^{n+1} n}{\omega_n}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad lo demostraremos para $i = 1$. Como u es armónica, es fácil ver que $\partial_1 u$ también lo es. Luego $\partial_1 u$ verifica el Teorema del valor medio 4.3.1,

$$\partial_1 u(x) = \fint_{B_{\frac{r}{2}}(x)} \partial_1 u(y)\, dy = \frac{2^n}{r^n \omega_n} \int_{\partial B_{\frac{r}{2}}(x)} u(y) \mathbf{n}_1 \, dS_y,$$

donde hemos usado el Teorema de la divergencia de Gauss aplicado a $(u, 0, \dots, 0)$ y $\mathbf{n}_1$ denota la primera coordenada del vector $\mathbf{n}$.

De la igualdad de arriba se obtiene fácilmente que

$$|\partial_1 u(x)| \le \frac{2^n}{r^n \omega_n} \int_{\partial B_{\frac{r}{2}}(x)} |u(y)|\, dS_y \le \frac{2^n}{r^n \omega_n} \frac{r^{n-1}}{2^{n-1}} n \omega_n \|u\|_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}}(x))},$$

es decir

$$|\partial_1 u(x)| \le \frac{2n}{r} \|u\|_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}}(x))}. \tag{4.4.1}$$

Ahora, si $y \in B_{\frac{r}{2}}(x)$, entonces $B_{\frac{r}{2}}(y) \subset B_r(x) \subset\subset U$ y por el Teorema del valor medio 4.3.1 se tiene

$$|u(y)| \le \fint_{B_{\frac{r}{2}}(y)} |u(z)|\, dz \le \frac{2^n}{r^n \omega_n} \int_{B_r(x)} |u(z)|\, dz,$$

de donde

$$\|u\|_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}}(x))} \le \frac{2^n}{r^n \omega_n} \|u\|_{L^1(B_r(x))}. \tag{4.4.2}$$

Juntando (4.4.1) y (4.4.2) se obtiene lo pedido. □

Con las estimaciones del Teorema 4.4.1 se deduce fácilmente el siguiente corolario.

COROLARIO 4.4.2 (Teorema de Liouville). *Sea $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ una función armónica y acotada. Entonces u es constante.*

Demostración. En vista de (4.4.1) se tiene que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$,

$$|\partial_i u(x)| \leq \frac{2n}{r} \|u\|_{L^\infty(B_{\frac{r}{2}}(x))} \leq \frac{2nC}{r},$$

donde $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C$.

Tomando límite cuando $r \to \infty$ se concluye que $\partial_i u(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y para todo $i = 1, \dots, n$. Luego u es constante. □

Ejercicio 4.4.3. Demostrar que la conclusión del Teorema de Liouville (Corolario 4.4.2) se mantiene si sólo se asume que $u(x) > -C$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $C > 0$.

Veamos ahora como se extienden las estimaciones del Teorema 4.4.1 a derivadas de mayor orden.

Teorema 4.4.4. *Sea u una función armónica en U. Entonces*

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{C_k}{r^{n+k}} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))}, \tag{4.4.3}$$

para cada bola $B_r(x_0) \subset U$ y cada multiíndice α de orden $|\alpha| = k$. La constante C_k viene dada por

$$C_k = \frac{(2^{n+1}nk)^k}{\omega_n}. \tag{4.4.4}$$

Demostración. Se prueba el teorema por inducción en k. El caso $k = 1$ es el contenido del Teorema 4.4.1.

Supongamos ahora $k \geq 2$ y que (4.4.3)–(4.4.4) es válida para toda bola en U y todo multiíndice α de orden menor o igual a $k-1$. Sea entonces $B_r(x_0) \subset U$ fija y α un multiíndice de orden k. Luego $D^\alpha u = \partial_i(D^\beta u)$ para algún $i = 1, \dots, n$ y $|\beta| = k - 1$.

Razonando de manera completamente análoga a (4.4.1) es fácil ver que

$$|D^\alpha u(x_0)| \leq \frac{nk}{r} \|D^\beta u\|_{L^\infty(\partial B_{\frac{r}{k}}(x_0))}.$$

Por otro lado, si $x \in \partial B_{\frac{r}{k}}(x_0)$, entonces $B_{\frac{k-1}{k}r}(x) \subset B_r(x_0) \subset U$. Luego, aplicando la hipótesis inductiva,

$$|D^\beta u(x)| \leq \frac{(2^{n+1}n(k-1))^{k-1}}{\omega_n(\frac{k-1}{k}r)^{n+k-1}} \|u\|_{L^1(B_r(x_0))}.$$

Combinando estas dos últimas estimaciones se concluye fácilmente lo pedido. □

Para terminar esta sección, veamos como las estimaciones del Teorema 4.4.4 implican la analiticidad de las funciones armónicas. Recordemos que una función $u \in C^\infty(U)$ es analítica si su serie de Taylor converge a u. Es decir

$$u(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n} \frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!}(x - x_0)^\alpha,$$

donde $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$ y $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$

Teorema 4.4.5. *Sea u una función armónica en U. Entonces u es analítica en U.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x_0 \in U$. Debemos entonces ver que u se representa por su serie de Taylor en un entorno de x_0. Sea $r = \frac{1}{4}\operatorname{dist}(x_0, \partial U)$ y $M := \frac{1}{\omega_n r^n}\|u\|_{L^1(B_{2r}(x_0))}$.

Como $B_r(x) \subset B_{2r}(x_0) \subset U$, para cada $x \in B_r(x_0)$ obtenemos por el Teorema 4.4.4

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty(B_r(x_0))} \leq M\left(\frac{2^{n+1}n}{r}\right)^{|\alpha|}|\alpha|^{|\alpha|}.$$

Asumamos por un momento que, para todo multiíndice α, se tiene la desigualdad

$$|\alpha|^{|\alpha|} \leq e^{|\alpha|}n^{|\alpha|}\alpha!. \tag{4.4.5}$$

Luego, de (4.4.5) se obtiene la estimación

$$\|D^\alpha u\|_{L^\infty(B_r(x_0))} \leq M\left(\frac{2^{n+1}n^2 e}{r}\right)^{|\alpha|}\alpha!. \tag{4.4.6}$$

Para ver entonces la convergencia de la serie de Taylor, debemos estimar el término de error

$$\begin{aligned} R_N(x) &:= u(x) - \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{|\alpha|=k}\frac{D^\alpha u(x_0)}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha \\ &= \sum_{|\alpha|=N}\frac{D^\alpha u(x_0 + t(x-x_0))}{\alpha!}(x-x_0)^\alpha, \end{aligned}$$

donde $t \in [0,1]$ depende de x. Finalmente, de (4.4.6) obtenemos, si $|x - x_0| < R$,

$$\begin{aligned} |R_N(x)| &\leq M\sum_{|\alpha|=N}\left(\frac{2^{n+1}n^2 e}{r}\right)^N R^N \\ &= M\left(\frac{2^{n+1}n^2 eR}{r}\right)^N \#\{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \colon |\alpha| = N\}. \end{aligned}$$

Observemos que $\{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \colon |\alpha| = N\} \subset \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \colon 0 \leq \alpha_i \leq N\}$, de donde

$$\#\{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \colon |\alpha| = N\} \leq (N+1)^n \leq 2^N$$

para N suficientemente grande. Luego,

$$|R_N(x)| \leq M\left(\frac{2^{n+2}n^2 eR}{r}\right)^N \to 0$$

si $R < \frac{r}{2^{n+2}n^2 e}$, cuando $N \to \infty$.

Queda entonces probar (4.4.5). Pero

$$n^k = (1 + \cdots + 1)^k = \sum_{|\alpha|=k}\frac{|\alpha|!}{\alpha!},$$

con lo cual $|\alpha|! \leq n^{|\alpha|}\alpha!$.

Ahora,

$$e^x = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!} > \frac{x^k}{k!}$$

y evaluando en $x = |\alpha| = k$, más la desigualdad anterior, se obtiene

$$|\alpha|^{|\alpha|} \le e^{|\alpha|}|\alpha|! \le e^{|\alpha|}n^{|\alpha|}\alpha!.$$

Esto finaliza la demostración. $\square$

4.5. Fórmulas de representación y funciones de Green

En esta sección intentaremos encontrar fórmulas de representación para las soluciones de la ecuación de Poisson en un dominio acotado U. Es decir, dadas $f\colon U \to \mathbb{R}$ y $g\colon \partial U \to \mathbb{R}$ buscaremos encontrar una fórmula cerrada que nos permita calcular u en términos de f y g. Veremos las limitaciones de esa idea aunque también muchas de las importantes consecuencias que tiene.

Empecemos recordando que si $f \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ y Φ es la solución fundamental dada en la definición 4.2.2, por el Teorema 4.2.6 se tiene que

$$u(x) = \Phi * f(x) \tag{4.5.1}$$

es una solución de la ecuación de Poisson

$$-\Delta u = f \quad \text{en } \mathbb{R}^n.$$

Observación 4.5.1. Observemos que u definida en (4.5.1) es acotada, en consecuencia, por el Teorema de Liouville (Corolario 4.4.2) se tiene que si v es acotada y verifica que $-\Delta v = f$ en $\mathbb{R}^n$ entonces $u - v$ es constante.

Recordemos ahora la segunda fórmula de Green (c.f. Ejercicio 1.4.15)

$$\int_U (v\Delta u - u\Delta v)\,dx = \int_{\partial U} (v\partial_{\mathbf{n}} u - u\partial_{\mathbf{n}} v)\,dS, \tag{4.5.2}$$

válida para $u, v \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$.

Tomemos ahora $u \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$, un punto $x \in U$ y $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x) \subset\subset U$. Si evaluamos entonces la fórmula de Green (4.5.2) en el dominio $U \setminus B_\varepsilon(x)$ y como v tomamos

$$v(y) = \Phi(x - y) = \Phi_x(y),$$

obtenemos, dado que $\Delta\Phi = 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$\int_{U\setminus B_\varepsilon(x)} \Phi_x \Delta u\,dy = \int_{\partial U} (\Phi_x\partial_{\mathbf{n}} u - u\partial_{\mathbf{n}}\Phi_x)\,dS_y - \int_{\partial B_\varepsilon(x)} (\Phi_x\partial_{\mathbf{n}} u - u\partial_{\mathbf{n}}\Phi_x)\,dS_y, \tag{4.5.3}$$

donde hemos tomado en ambas integrales $\mathbf{n}$ como la normal exterior al dominio de integración (observemos que la normal exterior a $B_\varepsilon(x)$ es la normal interior a $U \setminus B_\varepsilon(x)$).

Queremos estudiar ahora el límite en la última expresión cuando $\varepsilon \to 0$. Para eso, observemos primero que si $y \in \partial B_\varepsilon(x)$, entonces

$$\Phi_x(y) = \frac{c_n}{|x-y|^{n-2}} = \frac{c_n}{\varepsilon^{n-2}}$$

cuando $n \ge 3$ (realizaremos los cálculos suponiendo que $n \ge 3$, el caso $n = 2$ queda como ejercicio al lector). Luego

$$\left|\int_{\partial B_\varepsilon(x)} \Phi_x\partial_{\mathbf{n}} u\,dS_y\right| \le \frac{c_n}{\varepsilon^{n-2}}\|\nabla u\|_{L^\infty(U)} n\omega_n\varepsilon^{n-1} \to 0, \quad \text{cuando } \varepsilon \to 0. \tag{4.5.4}$$

Ahora, observemos que $\mathbf{n} = \frac{y-x}{\varepsilon}$ y luego, para $y \in \partial B_\varepsilon(x)$,

$$\partial_{\mathbf{n}} \Phi_x = \nabla\Phi(x-y) \cdot \mathbf{n} = c_n(2-n)\frac{y-x}{|x-y|^n} \cdot \mathbf{n} = -\frac{c_n(n-2)}{\varepsilon^{n-1}}.$$

Recordemos, de la definición 4.2.2, que $c_n = \frac{1}{n(n-2)\omega_n}$, en consecuencia,

$$\partial_{\mathbf{n}} \Phi_x = \frac{1}{n\omega_n \varepsilon^{n-1}}.$$

Luego

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} u \partial_{\mathbf{n}} \Phi_x \, dS_y = ⨍_{\partial B_\varepsilon(x)} u(y)\, dS_y \to u(x), \quad \text{cuando } \varepsilon \to 0. \tag{4.5.5}$$

Si se combinan (4.5.3), (4.5.4) y (4.5.5), se prueba el siguiente teorema.

Teorema 4.5.2. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado con frontera de clase C^1 y sea $u \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$. Entonces se tiene*

$$u(x) = \int_U \Phi(x-y)(-\Delta u(y))\, dy + \int_{\partial U} \big(\Phi(x-y)\partial_{\mathbf{n}} u(y) - u(y)\partial_{\mathbf{n}}\Phi(x-y)\big)\, dS_y. \tag{4.5.6}$$

Supongamos ahora que se conocen los valores de Δu y de $u|_{\partial U}$. ¿Es posible entonces reconstruir u mediante el Teorema 4.5.2?

De la fórmula de representación (4.5.6) parece ser que se precisa, además, conocer $\partial_{\mathbf{n}} u|_{\partial U}$. Sin embargo, de acuerdo a lo que vimos hasta el momento, esto no ocurre en las aplicaciones. Luego, debemos tratar de modificar la fórmula de representación (4.5.6) para que el valor de $\partial_{\mathbf{n}} u$ no aparezca en la misma.

Para eso, se busca una función auxiliar $\varphi_x \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$ que verifique

$$\begin{cases} \Delta \varphi_x(y) = 0 & \text{en } U \\ \varphi_x(y) = \Phi(x-y) & \text{en } \partial U. \end{cases} \tag{4.5.7}$$

Asumamos por el momento que tal función auxiliar existe. Si aplicamos la fórmula de Green (4.5.2) al par u, φ_x, se obtiene

$$-\int_U \varphi_x \Delta u\, dy = \int_{\partial U} (u\partial_{\mathbf{n}}\varphi_x - \varphi_x \partial_{\mathbf{n}} u)\, dS_y.$$

Si recordamos que $\varphi_x(y) = \Phi(x-y)$ para $y \in \partial U$ y llamamos $G(x,y) = \Phi(x-y) - \varphi_x(y)$, del Teorema 4.5.2 se obtiene

$$u(x) = \int_U G(x,y)(-\Delta u(y))\, dy - \int_{\partial U} u(y)\partial_{\mathbf{n}} G(x,y)\, dS_y.$$

En consecuencia, si $u \in C^2(u) \cap C^1(\bar{U})$ verifica que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } U \\ u = g & \text{en } \partial U, \end{cases}$$

entonces

$$u(x) = \int_U G(x,y) f(y)\, dy - \int_{\partial U} g(y)\partial_{\mathbf{n}} G(x,y)\, dS_y. \tag{4.5.8}$$

Definición 4.5.3. La función recién definida $G(x,y)$ se la denomina la función de Green del laplaciano en U.

Ejercicio 4.5.4. Determinar cuál debe ser la función auxiliar $\tilde{\varphi}_x$ para que en la fórmula de representación no aparezca el valor de u en la frontera, pero si su derivada normal. Obtener luego la fórmula

$$u(x) = \int_U \tilde{G}(x,y) f(y)\, dy - \int_{\partial U} h(y) \tilde{G}(x,y)\, dS_y.$$

con $\tilde{G}(x,y) = \Phi(x-y) - \tilde{\varphi}_x(y)$, donde u verifica

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } U \\ \partial_{\mathbf{n}} u = h & \text{en } \partial U, \end{cases}$$

Definición 4.5.5. A la función

$$P(x,y) = -\partial_{\mathbf{n}} G(x,y), \quad x \in U, \; y \in \partial U,$$

se la llama el núcleo de Poisson.

Veamos ahora algunas propiedades de la función de Green y del núcleo de Poisson.

Proposición 4.5.6. *Con las hipótesis y notaciones de arriba, se tiene que*

$$\int_{\partial U} P(x,y)\, dS_y = 1, \quad \text{para todo } x \in U.$$

Demostración. La demostración es una consecuencia inmediata de la fórmula (4.5.8), tomando $u \equiv 1$. □

Proposición 4.5.7. *Con las hipótesis y notaciones de arriba, se tiene que*

$$G(x,y) = G(y,x).$$

Demostración. De la definición de la función de Green se tiene que

$$G(x,y) = \Phi(x-y) - \varphi_x(y), \quad G(y,x) = \Phi(y-x) - \varphi_y(x).$$

Observemos que por la definición de Φ, tenemos que $\Phi(x-y) = \Phi(y-x)$.

Fijemos $x, y \in U$, $x \neq y$ y definimos $v(z) = G(x,z)$, $w(z) = G(y,z)$ con $z \in U$. Luego debemos ver que $v(y) = w(x)$.

De la definición de G, sabemos que

$$\begin{aligned} \Delta v = 0, &\quad \text{en } U \setminus \{x\}, \\ \Delta w = 0, &\quad \text{en } U \setminus \{y\}, \\ v = w, &\quad \text{en } \partial U. \end{aligned}$$

Si ahora tomamos $\varepsilon > 0$ pequeño de manera tal que $B_\varepsilon(x), B_\varepsilon(y) \subset\subset U$ y llamamos $V_\varepsilon = U \setminus (B_\varepsilon(x) \cup B_\varepsilon(y))$, por la fórmula de Green (4.5.2) aplicada a v, w en V_ε se tiene que

$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} (w \partial_{\mathbf{n}} v - v \partial_{\mathbf{n}} w)\, dS_z = \int_{\partial B_\varepsilon(y)} (v \partial_{\mathbf{n}} w - w \partial_{\mathbf{n}} v)\, dS_z.$$

Calculemos el límite cuando $\varepsilon \to 0$ en la última expresión. Observemos primero que

$$\|\nabla w\|_{L^\infty(B_\varepsilon(x))} \le C, \quad \text{para todo } \varepsilon \le \varepsilon_0$$

y
$$\|\nabla v\|_{L^\infty(B_\varepsilon(y))} \le C, \quad \text{para todo } \varepsilon \le \varepsilon_0.$$
Por otro lado
$$|w(z)| \le C\left(1 + \frac{1}{\varepsilon^{n-2}}\right), \quad \text{para } z \in \partial B_\varepsilon(y)$$
y
$$|v(z)| \le C\left(1 + \frac{1}{\varepsilon^{n-2}}\right), \quad \text{para } z \in \partial B_\varepsilon(x).$$
Luego
$$\left|\int_{\partial B_\varepsilon(x)} v\partial_{\mathbf{n}} w\, dS_z\right| \le \int_{\partial B_\varepsilon(x)} |\nabla w||v|\, dS_z \le C\varepsilon \to 0, \text{ cuando } \varepsilon \to 0.$$
Análogamente
$$\left|\int_{\partial B_\varepsilon(y)} w\partial_{\mathbf{n}} v\, dS_z\right| \to 0, \quad \text{cuando } \varepsilon \to 0.$$
Finalmente,
$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} w\partial_{\mathbf{n}} v\, dS_z = \int_{\partial B_\varepsilon(x)} w(z)\partial_{\mathbf{n}}\Phi(z-x)\, dS_z - \int_{\partial B_\varepsilon(x)} w\partial_{\mathbf{n}}\varphi_x\, dS_z.$$
Pero
$$\left|\int_{\partial B_\varepsilon(x)} w\partial_{\mathbf{n}}\varphi_x\, dS_z\right| \to 0, \quad \text{cuando } \varepsilon \to 0,$$
dado que w y φ_x son regulares en U y
$$\int_{\partial B_\varepsilon(x)} w(z)\partial_{\mathbf{n}}\Phi(z-x)\, dS_z = \fint_{\partial B_\varepsilon(x)} w\, dS_z \to w(x), \quad \text{cuando } \varepsilon \to 0.$$
De manera análoga
$$\int_{\partial B_\varepsilon(y)} v\partial_{\mathbf{n}} w\, dS_z \to v(y), \quad \text{cuando } \varepsilon \to 0.$$
Esto concluye la demostración. □

Observación 4.5.8. Antes de proseguir, hagamos la siguiente observación. Digamos que se tiene un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ y funciones $f\colon U \to \mathbb{R}$ y $g\colon \partial U \to \mathbb{R}$. Se quiere resolver la ecuación de Poisson
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } U \\ u = g & \text{en } \partial U \end{cases} \tag{4.5.9}$$

Asumamos que $f \in C^2(U)$ y que existe $\bar f \in C^2_c(\mathbb{R}^n)$ tal que $\bar f|_U = f$. Luego, por lo visto en el Teorema 4.2.6, si definimos $v = \Phi * \bar f$ se tiene que $-\Delta v = \bar f$ en $\mathbb{R}^n$. Luego, si llamamos $w = u - v$ se tiene que w verifica
$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{en } U \\ w = g - v & \text{en } \partial U. \end{cases} \tag{4.5.10}$$

Recíprocamente, si podemos resolver la ecuación de Laplace (4.5.10), entonces la función $u = w + v$ será una solución de (4.5.9). Luego, nos concentraremos en buscar una expresión integral para la solución de (4.5.10).

4.6. Cálculo de la función de Green en dominios con simetría

En esta sección consideraremos dominios con simetría y haremos uso de esa simetría para dar una fórmula explícita de la función de Green.

Consideraremos dos casos,

1. Cuando el dominio es el semiespacio superior, i.e.
$$U = \mathbb{R}^n_+ = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n > 0\}.$$
2. Cuando el dominio es una bola,
$$U = B_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |x| < r\}.$$

4.6.1. El semiespacio superior.

Dado $x \in \mathbb{R}^n_+$ se define la reflexión de x por
$$\bar{x} = (x', -x_n), \quad \text{si } x = (x', x_n).$$
Observemos que si $x \in \mathbb{R}^n_+$, entonces $\bar{x} \notin \mathbb{R}^n_+$ y que si $x \in \partial\mathbb{R}^n_+$, entonces $x = \bar{x}$.

Definimos entonces
$$\varphi_x(y) = \Phi(y - \bar{x}) = \frac{1}{n(n-2)\omega_n} \frac{1}{(|y' - x'|^2 + |y_n + x_n|^2)^{\frac{n-2}{2}}}.$$
Observemos que si $y \in \partial\mathbb{R}^n_+$, entonces $y_n = 0$ y luego $\Phi(y - \bar{x}) = \Phi(y - x)$. Por otro lado, como $\bar{x} \notin \mathbb{R}^n_+$ sigue que $\Delta\varphi_x(y) = 0$ en $\mathbb{R}^n_+$.

Luego tenemos

Definición 4.6.1. Se define la función de Green de $\mathbb{R}^n_+$ a
$$G(x, y) = \Phi(x - y) - \varphi_x(y) = c_n \left(\frac{1}{|x - y|^{n-2}} - \frac{1}{(|x' - y'|^2 + |x_n + y_n|^2)^{\frac{n-2}{2}}} \right),$$
donde $c_n = \frac{1}{n(n-2)\omega_n}$.

Observación 4.6.2. El núcleo de Poisson de $\mathbb{R}^n_+$ se calcula entonces como
$$P(x, y) = -\partial_{\mathbf{n}} G(x, y) = \partial_n G(x, y)|_{y_n=0} = \frac{2x_n}{n\omega_n} \frac{1}{|x - y|^n},$$
con $x \in \mathbb{R}^n_+$ e $y \in \partial\mathbb{R}^n_+$.

Tenemos entonces el siguiente teorema,

Teorema 4.6.3. *Sea $g \in L^\infty(\mathbb{R}^{n-1}) \cap C^0(\mathbb{R}^{n-1})$ y definimos*
$$u(x) := \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} P(x, y) g(y)\, dS_y = \frac{2x_n}{n\omega_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{g(y)}{(|x' - y|^2 + x_n^2)^{\frac{n}{2}}}\, dy.$$
Entonces

1. $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$,
2. $\Delta u = 0$ *en* $\mathbb{R}^n_+$ *y*
3. *para* $x_0 \in \partial\mathbb{R}^n_+$,
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathbb{R}^n_+}} u(x) = g(x_0).$$

Demostración. Observemos primero que, para $y \in \partial\mathbb{R}^n_+$, el núcleo de Poisson es armónico en $\mathbb{R}^n_+$ como función de x. En efecto,

$$\Delta_x P(x,y) = \Delta_x \left(\partial_{y_n} G(x,y)\right) = \partial_{y_n} \left(\Delta_x G(x,y)\right) = 0,$$

dado que la función de Green $G(x,y)$ es armónica como función de x. Recordemos también que, por la Proposición 4.5.6, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} P(x,y)\,dy = \int_{\partial\mathbb{R}^n_+} P(x,y)\,dS_y = 1, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n_+.$$

Ahora bien,

$$|u(x)| \le \|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}^{n-1}} P(x,y)\,dy = \|g\|_\infty, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n_+.$$

Esto prueba 1. Por otro lado,

$$\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Delta_x(P(x,y))g(y)\,dy = 0,$$

lo que prueba 2.

Finalmente, dado $\varepsilon > 0$ sea $\delta > 0$ tal que $|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon$ si $|y - x_0| < \delta$. Luego,

$$\begin{aligned}
|u(x) - g(x_0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^{n-1}} P(x,y)(g(y) - g(x_0))\,dy \right| \\
&\le \int_{\mathbb{R}^{n-1}} P(x,y)|g(y) - g(x_0)|\,dy \\
&= \int_{B_\delta(x_0)} P(x,y)|g(y) - g(x_0)|\,dy + \int_{\mathbb{R}^{n-1}\setminus B_\delta(x_0)} P(x,y)|g(y) - g(x_0)|\,dy \\
&= (I) + (II).
\end{aligned}$$

Para (I) se tiene

$$(I) \le \varepsilon \int_{B_\delta(x_0)} P(x,y)\,dy \le \varepsilon \int_{\mathbb{R}^{n-1}} P(x,y)\,dy = \varepsilon.$$

Ahora, si $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$ y $|y - x_0| > \delta$, se tiene que

$$|y - x_0| \le |y - x'| + |x' - x_0| < |y - x'| + \frac{\delta}{2} < |y - x'| + \frac{|y - x_0|}{2},$$

de donde

$$\frac{1}{2}|y - x_0| < |y - x'|.$$

Luego

$$\frac{1}{|y - x'|^n} \le \frac{2^n}{|y - x_0|^n}.$$

Ahora, si $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$ estimamos (II) como

$$(II) \le 2\|g\|_\infty \frac{2x_n}{n\omega_n} 2^n \int_{\mathbb{R}^{n-1}\setminus B_\delta(x_0)} \frac{1}{|y - x_0|^n}\,dy \le Cx_n \to 0$$

si $x_n \to 0$.

Esta última estimación concluye la demostración de 3, y por ende del Teorema. $\square$

4.6.2. La bola. En esta sección calcularemos la función de Green de la bola unitaria $B_1(0)$. Por simplicidad de notación, escribiremos $B = B_1(0)$.

Al igual que en el caso del semiespacio, se precisa una reflexión que realice una biyección entre los puntos de la bola y los del complemento, manteniendo el borde fijo. Esa simetría se realiza a través de la *transformación de Moebius*

$$\bar{x} := \frac{x}{|x|^2}, \quad \text{para } x \neq 0.$$

Observemos ahora que si $y \in \partial B$ y $x \in B$, $x \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} |y - \bar{x}|^2 = |y|^2 - 2y \cdot \bar{x} + |\bar{x}|^2 &= 1 - 2\frac{y \cdot x}{|x|^2} + \frac{1}{|x|^2} \\ &= \frac{1}{|x|^2}(|x|^2 - 2x \cdot y + 1) = \frac{1}{|x|^2}|x - y|^2, \end{aligned}$$

de donde

$$|x||y - \bar{x}| = |x - y|.$$

Luego, si definimos la función auxiliar

$$\varphi_x(y) = \Phi(|x|(y - \bar{x})),$$

con $x \in B$, $x \neq 0$, entonces se tiene que

$$\begin{cases} \Delta\varphi_x = 0 & \text{en } B \\ \varphi_x(y) = \Phi(x - y) & \text{en } \partial B. \end{cases}$$

Con todo esto se tiene

Definición 4.6.4 (Función de Green de la bola). La función de Green de la bola se define como

$$G(x, y) = \Phi(x - y) - \varphi_x(y) = \Phi(x - y) - \Phi(|x|(y - \bar{x}))$$

Calculemos ahora el núcleo de Poisson $P(x, y)$. Observemos que el vector normal exterior a B en un punto $y \in \partial B$ es $\mathbf{n} = y$. Luego

$$P(x, y) = -\partial_{\mathbf{n}} G(x, y) = -\nabla_y G(x.y) \cdot y = -\sum_{i=1}^{n} \partial_{y_i} G(x, y) y_i \tag{4.6.1}$$

Ahora, es una fácil verificación que

$$\begin{aligned} \partial_{y_i}\Phi(x - y) &= \frac{1}{n\omega_n}\frac{x_i - y_i}{|x - y|^n}, \\ \partial_{y_i}\Phi(|x|(y - \bar{x})) &= \frac{1}{n\omega_n}\frac{x_i - |x|^2 y_i}{|x - y|^n}, \end{aligned}$$

y reemplazando en (4.6.1) se llega a la expresión

$$P(x, y) = \frac{1}{n\omega_n}\frac{1 - |x|^2}{|x - y|^n} \tag{4.6.2}$$

Definición 4.6.5. El núcleo de Poisson de la bola unitaria B se define por la expresión (4.6.2) para $x \in B$ e $y \in \partial B$.

EJERCICIO 4.6.6. Encontrar la expresión de la función de Green y del núcleo de Poisson de la bola $B_R(x_0)$.

Veamos ahora que, efectivamente, podemos utilizar la expresión del núcleo de Poisson para resolver la ecuación de Laplace en la bola.

TEOREMA 4.6.7. *Sea $g \in C(\partial B)$ y definimos $u\colon B \to \mathbb{R}$ por la fórmula*

$$u(x) = \int_{\partial B} g(y)P(x,y)\,dS_y.$$

Entonces se tiene que

1. $u \in C^\infty(B) \cap C(\bar{B})$,
2. $\Delta u = 0$ *en* B,
3. *para todo* $x_0 \in \partial B$,

$$\lim_{\substack{x \to x_0\\ x \in B}} u(x) = g(x_0).$$

OBSERVACIÓN 4.6.8. Este teorema es el análogo al Teorema 4.6.3 para la bola.

DEMOSTRACIÓN. Los puntos 1 y 2 a esta altura son estándar y quedan de ejercicio. Queda entonces verificar el punto 3.

Por la Proposición 4.5.6, se tiene que

$$|u(x) - g(x_0)| = \left| \int_{\partial B} (g(y) - g(x_0))P(x,y)\,dS_y \right| \le \int_{\partial B} |g(y) - g(x_0)|P(x,y)\,dS_y.$$

Ahora, tomamos $\varepsilon > 0$ y sea $\delta > 0$ tal que $|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon$ si $|y - x_0| < \delta$. Luego, la última integral la partimos como

$$\int_{\partial B \cap \{|y-x_0|<\delta\}} |g(y)-g(x_0)|P(x,y)\,dS_y + \int_{\partial B \cap \{|y-x_0|\ge\delta\}} |g(y)-g(x_0)|P(x,y)\,dS_y = A+B$$

Para A se acota

$$A \le \varepsilon \int_{\partial B \cap \{|y-x_0|<\delta\}} P(x,y)\,dS_y \le \varepsilon.$$

Ahora, para B, si asumimos que $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$, tenemos que

$$\delta \le |y - x_0| \le |y - x| + |x - x_0| < |y - x| + \frac{\delta}{2},$$

de donde

$$|y - x| \ge \frac{\delta}{2}.$$

Luego

$$P(x,y) \le \frac{2^n}{n\omega_n} \frac{1 - |x|^2}{\delta^n},$$

de donde

$$B \le \frac{2^n}{\delta^n} 2\|g\|_\infty (1 - |x|^2) \to 0, \quad \text{cuando } x \to x_0, \text{ dado que } |x_0| = 1.$$

Esto termina la demostración del teorema. $\square$

4.7. El método de Perron

En esta sección estudiaremos el problema de existencia para la ecuación de Laplace en dominios generales. Luego, nuestro propósito será demostrar que, dado $U \subset \mathbb{R}^n$ y $g \in C(\partial U)$, existe una función $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$ que verifique

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } U \\ u = g & \text{en } \partial U. \end{cases} \tag{4.7.1}$$

Recordemos que, por la Observación 4.5.8, esto implicará la existencia de una solución de la ecuación de Poisson

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } U \\ u = g & \text{en } \partial U. \end{cases}$$

para toda $f \in C^2(\bar{U})$ y $g \in C(\partial U)$.

La idea del método de Perron es que la solución de (4.7.1) se construye como el supremo de las funciones subarmónicas v tales que $v \leq g$ en ∂U. Recordemos que $v \in C^2(U)$ se dice subarmónica en U si

$$\Delta v \geq 0 \text{ en } U.$$

Es fácil ver que si u verifica (4.7.1) y v es subarmónica en U y verifica que $v \leq g$ en ∂U, entonces $v \leq u$ en U.

En general es complejo construirse funciones subarmónicas debido al requerimiento de que las mismas sean de clase C^2. Sin embargo, es posible relajar esa hipótesis definiendo a las funciones subarmónicas como aquellas que se comparen con las funciones armónicas.

Definición 4.7.1 (Funciones subarmónicas). Sea $v \in C(U)$. Decimos que v es *subarmónica en* U si para toda bola $B \subset\subset U$ y h armónica en B tal que $v \leq h$ en ∂B se verifica que $v \leq h$ en B.

De manera análoga, se define una función superarmónica invirtiendo las desigualdades en la definición anterior.

En el Ejercicio 4.8.17 se repasan algunas de las propiedades elementales de las funciones sub y superarmónicas.

Se tiene entonces el siguiente teorema:

Teorema 4.7.2. *Sea $g \in C(\partial U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ acotado. Se definen*

$$S_g := \{v \in C(\bar{U}) \colon v \leq g \text{ en } \partial U \text{ y } v \text{ es subarmónica}\} \text{ y } u(x) := \sup\{v(x) \colon v \in S_g\}.$$

Entonces u es armónica en U.

Demostración. Observemos primero que $S_g \neq \emptyset$. En efecto, la función constante $v(x) = \operatorname{ínf}_{\partial U} g \in S_g$.

Por otro lado, la función constante $w(x) = \sup_{\partial U} g$ es superarmónica y $w \geq g$ en ∂U, luego, por el Ejercicio 4.8.17, $w \geq v$ para toda $v \in S_g$, de donde

$$\operatorname*{ínf}_{\partial U} g \leq u(x) \leq \sup_{\partial U} g \quad \text{para todo } x \in U.$$

Luego, u está bien definida.

Sea $y \in U$ y sea $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset S_g$ tal que $v_k(y) \to u(y)$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que la sucesión $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es uniformemente acotada, dado que $v_k \le \sup_{\partial U} g$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y, eventualmente, podemos reemplazar v_k por

$$\bar{v}_k(x) := \max\{v_k(x), \inf_{\partial U} g\}.$$

Sea $R > 0$ tal que $B_R(y) \subset\subset U$ y se define el *levantamiento armónico* de v_k en $B_R(y)$ como

$$V_k(x) := \begin{cases} v_k(x) & \text{si } x \in U \setminus B_R(y) \\ \bar{v}_k(x) & \text{si } x \in B_R(y), \end{cases}$$

donde $\bar{v}_k$ es la solución de

$$\begin{cases} \Delta \bar{v}_k = 0 & \text{en } B_R(y) \\ \bar{v}_k = v_k & \text{en } \partial B_R(y), \end{cases}$$

dada por el núcleo de Poisson de $B_R(y)$.

Es fácil ver que V_k resulta subarmónica en U (cf. Ejercicio 4.8.17). Luego, se tiene que $V_k \in S_g$ y $v_k(y) \le V_k(y) \le u(y)$, de donde $V_k(y) \to u(y)$ cuando $k \to \infty$.

Como $|V_k(x)| \le \sup_{\partial U} |g|$, para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in B_R(y)$, por el Teorema de estimación de las derivadas (Teorema 4.4.1), se tiene que

$$\sup_{B_\rho(y)} |\partial_i V_k| \le c(n,\rho)\|V_k\|_{L^\infty(B_R(y))} = c(n,\rho) \sup_{\partial U} |g|,$$

(puede comprobarse, ¡hágalo!, que $c(n,\rho) \le 2^{n+2} n (R-\rho)^{-1}$).

Estas estimaciones dicen que la sucesión $\{V_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es equiacotada y equicontinua en cada bola $B_\rho(y)$ con $\rho < R$. Luego, por el Teorema de Arzela-Áscoli, existe v y una subsucesión $\{V_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{V_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $V_{k_j} \rightrightarrows v$ sobre compactos de $B_R(y)$.

En consecuencia, esta función v resulta armónica en $B_R(y)$ y verifica que $v(x) \le u(x)$ para todo $x \in B_R(y)$ y $v(y) = u(y)$.

El teorema quedará entonces demostrado si logramos probar que $u = v$ en $B_r(y)$. Razonemos por el absurdo y supongamos que existe $z \in B_R(y)$ tal que $v(z) < u(z)$., luego existe $\tilde{u} \in S_g$ tal que $v(z) < \tilde{u}(z) \le u(z)$. Sea $w_j := \max\{\tilde{u}, V_{k_j}\}$ y sea W_j el levantamiento armónico de w_j en $B_R(y)$.

Razonando exactamente igual que antes, se concluye que existe w y $\{W_{j_i}\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \{W_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $W_{j_i} \rightrightarrows w$ sobre compactos de $B_R(y)$ y w es armónica en $B_R(y)$.

Pero, como $V_{k_{j_i}} \le W_{j_i} \le u$, sigue que $v \le w \le u$ en $B_R(y)$ y como $v(y) = w(y) = u(y)$ y tanto v como w son armónicas en $B_R(y)$ por el principio fuerte del máximo concluimos que $w = v$ en $B_R(y)$. Pero esto es un absurdo puesto que $v(z) < \tilde{u}(z) \le w_{j_i}(z) \le W_{j_i}(z)$, de donde $v(z) < \tilde{u}(z) \le w(z)$. □

EJERCICIO 4.7.3. Demuestre que si existe una función w tal que $\Delta w = 0$ en U y $w = g$ en ∂U entonces $w = u$, donde u es la función construida por el método de Perron en el Teorema 4.7.2.

Luego, el problema (4.7.1) es resoluble si y sólo si la función u construida por el método de Perron en el Teorema 4.7.2 es la solución del mismo. Para chequear que efectivamente u resuelve (4.7.1) basta con verificar que $u = g$ en ∂U y sabemos, por la construcción, que $u \leq g$ en ∂U.

Para poder verificar la condición de contorno, es necesario hacer alguna suposición sobre la frontera de U, ∂U.

DEFINICIÓN 4.7.4. Sea $y \in \partial U$. Una función $w \in C(\bar{U})$ se dice una *barrera en y relativa a U* si,

1. w es superarmónica en U,
2. $w > 0$ en $\bar{U} \setminus \{y\}$ y $w(y) = 0$.

OBSERVACIÓN 4.7.5. El concepto de barrera introducido en la Definición 4.7.4 es *local*. Es decir, si se define una barrera local en $y \in \partial U$ a una función w que verifique la definición 4.7.4 en $N \cap U$, donde N es un entorno de y, entonces se puede construir una barrera *global* de la forma: $B = B_r(y) \subset\subset N$, $m = \operatorname{ínf}_{N \setminus B} w > 0$

$$\bar{w}(x) = \begin{cases} \operatorname{mín}\{m, w(x)\} & \text{en } \bar{U} \cap B \\ m & \text{en } \bar{U} \setminus B. \end{cases}$$

DEFINICIÓN 4.7.6. Un punto $y \in \partial U$ se dice *regular* con respecto al laplaciano si existe una barrera en y relativa a U.

En consecuencia se tiene el siguiente lema.

LEMA 4.7.7. *Sea u la función armónica dada por el método de Perron en el Teorema 4.7.2. Si $y \in \partial U$ es regular con respecto al laplaciano, entonces $u(x) \to g(y)$ cuando $U \ni x \to y \in \partial U$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varepsilon > 0$ y $M = \sup_{\partial U} |g|$. Como $y \in \partial U$ es regular con respecto al laplaciano, existe entonces w una barrera en y. Sean $\delta, k > 0$ tales que

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &< \varepsilon \qquad && \text{si } |x - y| < \delta,\ x, y \in \partial U \\ kw(x) &\geq 2M \qquad && \text{si } |x - y| \geq \delta,\ x \in \bar{U},\ y \in \partial U. \end{aligned}$$

Es fácil ver que $\bar{v}(x) := kw(x) + \varepsilon + g(y)$ resulta superarmónica en U y $\bar{v}(x) \geq g(x)$ para $x \in \partial U$.

Por otro lado, resulta también fácil ver que $\underline{v}(x) := -kw(x) - \varepsilon + g(y)$ es subarmónica en U y $\underline{v}(x) \leq g(x)$ para $x \in \partial U$.

En consecuencia, se tiene que

$$\underline{v} \leq u \leq \bar{v},$$

de donde

$$|u(x) - g(y)| \leq \varepsilon + kw(x).$$

Como w es continua y $w(y) = 0$ se concluye lo deseado. □

Con la ayuda de este lema se tiene el siguiente resultado,

COROLARIO 4.7.8. *El problema de Dirichlet* (4.7.1) *es resoluble para toda $g \in C(\partial U)$ si y sólo si todo $y \in \partial U$ es regular con respecto al laplaciano.*

Demostración. El recíproco es consecuencia inmediata del Lema previo.

Supongamos ahora que para toda $g \in C(\partial U)$, existe u solución de (4.7.1). Entonces, dado $y \in \partial U$ tomamos $g(x) = |x - y|$ y llamamos w a la solución de (4.7.1) con dato g. Luego es fácil verificar que w es una barrera en y. □

Para finalizar daremos una condición geométrica que garantice que un punto $y \in \partial U$ es regular con respecto al laplaciano.

Proposición 4.7.9. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ acotado e $y \in \partial U$. Si existe una bola exterior tangente a U en y, entonces y es regular con respecto al laplaciano.*

Observación 4.7.10. Una bola exterior tangente a U en y es una bola $B \subset \mathbb{R}^n \setminus U$ tal que $\bar{B} \cap \bar{U} = \{y\}$.

Observación 4.7.11. Es relativamente sencillo ver que si $\partial U \in C^2$ entonces existe una bola exterior tangente a U en y en todo punto $y \in \partial U$. Ver Ejercicio 4.8.22.

Demostración de la Proposición 4.7.9. Sea $B = B_R(x_0)$ la bola exterior tangente a U en $y \in \partial U$. Entonces se define

$$w(x) := \begin{cases} \log \frac{|x-x_0|}{R} & \text{si } n = 2 \\ \frac{1}{R^{n-2}} - \frac{1}{|x-x_0|^{n-2}} & \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

Esta función w verifica que $\Delta w = 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus B$ y $w = 0$ en $\partial B \ni y$. Luego, es una barrera. □

4.8. Ejercicios

Ejercicio 4.8.1. Probar que la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ es invariante por rotaciones.

Esto es, si $O \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz ortogonal (i.e. $O \cdot O^\top = I_n$) y definimos $v(x) = u(Ox)$, entonces $\Delta v = 0$.

Ejercicio 4.8.2. Verificar las siguientes afirmaciones indicando en cada caso las hipótesis de regularidad sobre u necesarias para su validez.

1. *Combinaciones lineales:* Si u_1 y u_2 son funciones armónicas, entonces $\alpha u_1 + \beta u_2$ es armónica.
2. *Homotecias:* Si u es armónica, entonces $u_\lambda(x) = u(\lambda x)$ es armónica.
3. *Traslaciones:* Si u es armónica, entonces $u(x - \xi)$ es armónica.
4. *Diferenciación respecto a parámetros:* Si $u(x, \gamma)$ es armónica para cada γ, entonces $\frac{\partial u}{\partial \gamma}(x, \gamma)$ es armónica para cada γ.
5. *Integración respecto a parámetros:* Si $u(x, \gamma)$ es armónica para cada γ, entonces $\int_a^b u(x, \gamma)d\gamma$ es armónica.
6. *Diferenciación respecto a x:* Si u es armónica, entonces $D^\alpha u$ es armónica para todo multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}^n$.
7. *Convoluciones:* Si u es armónica, entonces $\int u(x - \xi)\varphi(\xi)d\xi$ es armónica.

Ejercicio 4.8.3. Sea u armónica en $U \subseteq \mathbb{R}^2$, abierto simplemente conexo. Probar que entonces existe v armónica en U tal que $u + iv$ es holomorfa.

Ejercicio 4.8.4. Decimos que $v \in C^2(U)$ es subarmónica si $\Delta v \geq 0$ en U.

1. Probar que si $v \in C(\bar{U})$ entonces $\max_{\bar{U}} \; v = \max_{\partial U} \; v$.
   Sugerencia: Probarlo primero suponiendo que v satisface que $\Delta v > 0$ y luego probarlo para $v_\varepsilon(x) := v(x) + \varepsilon |x|^2$ y hacer $\varepsilon \to 0$.
2. Probar que si $x_0 \in U$ y $r < d(x_0, \partial U)$, entonces
$$v(x_0) \leq \fint_{B(x_0,r)} v(\xi) d\xi$$
3. Probar que v verifica el principio fuerte del máximo.
4. Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función convexa y regular. Si u es armónica y $v = \phi(u)$, entonces v es subarmónica.
5. Probar que $v = |\nabla u|^2$ es subarmónica, si u es armónica.

Ejercicio 4.8.5. Sea $u \in C^2(B_1(0)) \cap C(\overline{B_1(0)})$ una solución regular de
$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } B_1(0) \\ u = g & \text{en } \partial B_1(0). \end{cases}$$
Probar que existe una constante C, que depende sólo de la dimensión del espacio, tal que
$$\max_{B_1(0)} |u| \leq C \left(\max_{\partial B_1(0)} |g| + \max_{B_1(0)} |f| \right).$$
¿Es cierta la conclusión del ejercicio si cambiamos $B_1(0)$ por U un dominio acotado cualquiera?

Ejercicio 4.8.6. Notemos por B_1^+ a la semi bola $\{x \in \mathbb{R}^n / \ |x| < 1, x_n > 0\}$. Sea $u \in C(\overline{B_1^+})$, armónica en B_1^+ con $u = 0$ en $\partial B_1^+ \cap \{x_n = 0\}$ y notamos $x = (x', x_n)$ con $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Definimos
$$U(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x_n \geq 0, \\ -u(x', -x_n) & \text{si } x_n < 0, \end{cases}$$
para $x \in B_1(0)$. Probar que U es armónica en $B_1(0)$. Concluir que u es C^∞ hasta $\{x_n = 0\}$.

Ejercicio 4.8.7.

1. Sea u una función armónica en $B_1(0)$. Probar que
$$\sup_{B_{1/2}(0)} |\nabla u(x)| \leq C \sup_{B_1(0)} |u(x)|,$$
   donde C depende sólo de la dimensión del espacio.
2. Sea u armónica en U y sea $V \subset\subset U$. Probar que entonces se tiene
$$\sup_V |\nabla u| \leq C \sup_U |u|,$$
   donde C es una constante positiva que sólo depende de la dimensión del espacio y de $\operatorname{dist}(V, \partial U)$.
3. Deducir del item 1 que si u es armónica en $B_R(0)$, entonces
$$\sup_{B_{R/2}(0)} |\nabla u(x)| \leq \frac{C}{R} \sup_{B_R(0)} |u(x)|,$$
   donde C es la constante del item 1.
4. Concluir que si u es armónica en $\mathbb{R}^n$ y acotada, entonces u es constante.

Ejercicio 4.8.8. Probar que existe a lo sumo una solución acotada del problema

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \mathbb{R}^n_+, \\ u = g & \text{en } \partial\mathbb{R}^n_+. \end{cases}$$

¿Sigue valiendo la unicidad si eliminamos la hipótesis de que u sea acotada?

Ejercicio 4.8.9. Sea $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ una sucesión de funciones armónicas en U que converge uniformemente sobre los compactos de U a una función u. Probar que u es armónica.

Ejercicio 4.8.10. Sea $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in C^2(U)\cap C(\bar{U})$ (U acotado), las soluciones de los siguientes problemas,

$$\begin{cases} \Delta u_k = 0 & \text{en } U \\ u_k = g_k & \text{en } \partial U. \end{cases}$$

Probar que si $g_k \rightrightarrows g$ uniformemente en ∂U, entonces existe $u \in C^2(U)\cap C(\bar{U})$ tal que $u_k \rightrightarrows u$ uniformemente en U y $\Delta u = 0$ en U.

Ejercicio 4.8.11 (Teorema de Harnack de convergencia monótona). Sea $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ una sucesión monótona de funciones armónicas en un dominio U, entonces la sucesión converge en todo punto o diverge en todo punto. En el primer caso, la convergencia es uniforme sobre compactos y el límite es una función armónica.

Ejercicio 4.8.12. Probar que si u es armónica en $\mathbb{R}^n$ y $|u(x)| \le C(1+|x|^k)$, entonces u es un polinomio de grado a lo sumo k.

Ejercicio 4.8.13. Probar que si el problema de Neumann

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } U, \\ \partial_{\mathbf{n}} u = g & \text{en } \partial U, \end{cases}$$

tiene una solución en U acotado ($u \in C^2(U)\cap C^1(\bar{U})$) entonces

$$\int_U f(x)dx = \int_{\partial U} g(x)\,dS.$$

Relacionar con el Ejercicio 3.8.10.

Ejercicio 4.8.14. Sea U un dominio con borde regular. Probar que si $u \in C^2(U)\cap C^1(\bar{U})$ es solución de

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } U, \\ \partial_{\mathbf{n}} u = 0 & \text{en } \partial U, \end{cases}$$

entonces u es constante.

Ejercicio 4.8.15. Determinar la función de Green para la región $U = B_R(0)\setminus B_r(0)$ con $0 < r < R$.

Ejercicio 4.8.16. Sea $u \in C^2(B_R(0)) \cap C(\overline{B_R(0)})$ una función armónica y no negativa. Probar la siguiente forma de la *desigualdad de Harnack*

$$\frac{R^{n-2}(R-|x|)}{(R+|x|)^{n-1}}u(0) \le u(x) \le \frac{R^{n-2}(R+|x|)}{(R-|x|)^{n-1}}u(0).$$

EJERCICIO 4.8.17. Una función $u \in C(U)$ se dice subarmónica (superarmónica) en U si para cada bola $B \subset\subset U$ y para cada función h armónica en B que satisface $u \leq h$ ($u \geq h$) en ∂B, se tiene que $u \leq h$ ($u \geq h$) en B.

1. Mostrar que si $u \in C^2(U)$, u es subarmónica (según esta definición) si y sólo si $\Delta u \geq 0$.
2. Si u es subarmónica en U, entonces satisface el principio fuerte del máximo; y si v es superarmónica en U acotado, con $v \geq u$ en ∂U, entonces $v > u$ en U o $v \equiv u$.
3. Sea u subarmónica en U y $B \subset\subset U$. Notamos con $\tilde{u}$ la función armónica en B (dada por la integral de Poisson) que satisface $\tilde{u} = u$ en ∂B. Definimos el *levantamiento armónico* de u en B por
$$v(x) = \begin{cases} \tilde{u}(x), & x \in B, \\ u(x), & x \in U \setminus B. \end{cases}$$
Entonces v es subarmónica en U.
4. Si $u_1, \dots, u_N$ son subarmónicas en U, entonces
$$u(x) = \max\{u_1(x), \dots, u_N(x)\}$$
es subarmónica en U.
5. Enunciar y demostrar los correspondientes resultados para funciones superarmónicas.

EJERCICIO 4.8.18 (Principio débil del máximo). Sea
$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_{ij}u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\partial_i u + c(x)u,$$
donde a_{ij}, b_i y c son funciones continuas en $\bar{U}$ y $u \in C^2(U) \cap C(\bar{U})$. La matriz $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ es simétrica y definida positiva para cada $x \in \bar{U}$ (un operador $\mathcal{L}$ con estas propiedades se dice *elíptico*). Probar que si $\mathcal{L}u \leq 0$ en U y $c \equiv 0$ entonces el máximo de u se alcanza en ∂U.

Sugerencia: Usar que si A, B son matrices simétricas y semidefinidas positivas de $n \times n$, entonces $\operatorname{tr}(A \cdot B) \geq 0$. ¡Demostrar este hecho!

EJERCICIO 4.8.19.
1. Sea $\mathcal{L}$ un operador elíptico (como fuera definido en el ejercicio anterior) y supongamos que $c \geq 0$ en U. Si $\mathcal{L}u \leq 0$, entonces
$$\max_{\bar{U}} u \leq \max_{\partial U} u^+$$
donde $u^+ = \max\{u, 0\}$.
2. Dar un contraejemplo para el item 1 si $c < 0$.
3. Sea U acotado y $c \geq 0$. Si $\mathcal{L}u = \mathcal{L}v$ en U y $u = v$ en ∂U entonces $u = v$ en U.
4. Dar un contraejemplo para el item 3 si U no es acotado.

EJERCICIO 4.8.20 (Lema de Hopf). Sea U un dominio con la propiedad que para todo $x_0 \in \partial U$, existe una bola $B_r(y) \subset U$ tal que $x_0 \in \partial B_r(y)$ (esto se conoce como la propiedad de bola tangente interior). Sea $u \in C^2(U) \cap C^1(\bar{U})$ tal que $\Delta u \geq 0$ en U, $x_0 \in \partial U$ y $u(x_0) > u(x)$ para todo $x \in U$. Entonces
$$\partial_{\mathbf{n}} u(x_0) > 0$$

Ejercicio 4.8.21. Usar el lema de Hopf para dar otra demostración del principio fuerte del máximo.

Ejercicio 4.8.22. Demostrar que si $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto con frontera de clase C^2 entonces posee la propiedad de la bola tangente exterior.

Ejercicio 4.8.23. Mostrar que el problema de Dirichlet es resoluble para todo dominio $U \subset \mathbb{R}^n$ que satisface la propiedad del *cono exterior*; esto es, para todo $y \in \partial U$ existe un cono circular finito K con vértice en y tal que $\bar{K} \cap \bar{U} = \{y\}$.

Sugerencia: Mostrar que en cada punto $y \in \partial U$ puede elegirse una barrera de la forma $w = r^\lambda f(\theta)$ donde $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times S^{n-1}$ son las variables polares centradas en y.

Capítulo 5

Transformada de Fourier

En este capítulo estudiaremos una herramienta fundamental en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales lineales en $\mathbb{R}^n$, la *Transformada de Fourier*. Esta herramienta es también fundamental en otras ramas del análisis y de la matemática en general, pero en este curso nos enfocaremos en sus aplicaciones a la resolución de ecuaciones en derivadas parciales.

A lo largo de este capítulo asumiremos que todas nuestras funciones son a valores complejos, es decir

$$u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$$

y todos los espacios vectoriales se entenderán como $\mathbb{C}-$espacios vectoriales.

5.1. Definición y propiedades elementales

Empecemos con la definición de la transformada

Definición 5.1.1. Dada $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ se define la *transformada de Fourier* de u como

$$\mathcal{F}[u](y) = \hat{u}(y) := \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-2\pi i x\cdot y}\, dx. \tag{5.1.1}$$

Observemos que si $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $\hat{u}$ está bien definida y se tiene la estimación

$$\|\hat{u}\|_\infty \le \|u\|_1.$$

Es decir,

$$\mathcal{F}\colon L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n),$$

resulta un operador lineal y continuo.

Ejercicio 5.1.2. Demostrar que si $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces $\hat{u} \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Es decir, $\hat{u}$ es continua y $\hat{u}(y) \to 0$ cuando $|y| \to \infty$. Comparar con el Lema de Riemann–Lebesgue, Lema 3.3.2.

La transformada de Fourier se comporta muy bien respecto de la convolución como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 5.1.3. *Sean* $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n)$. *Entonces* $\mathcal{F}[u * v](y) = \hat{u}(y)\hat{v}(y)$.

DEMOSTRACIÓN. El resultado es una consecuencia inmediata del Teorema de Fubini. En efecto

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[u*v](y) &= \int_{\mathbb{R}^n}(u*v)(x)e^{-2\pi i x\cdot y}\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}u(z)v(x-z)\,dz\right)e^{-2\pi i x\cdot y}\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}u(z)\left(\int_{\mathbb{R}^n}v(x-z)e^{-2\pi i x\cdot y}\,dx\right)dz\end{aligned}$$

Si se realiza ahora el cambio de variables $t = x - z$, se llega a

$$\int_{\mathbb{R}^n}u(z)\left(\int_{\mathbb{R}^n}v(t)e^{-2\pi i t\cdot y}\,dt\right)e^{-2\pi i z\cdot y}\,dz = \hat{u}(y)\hat{v}(y),$$

como queríamos demostrar. □

Veamos ahora dos propiedades fundamentales de la transformada de Fourier. Las mismas vinculan la regularidad de la transformada con el decaimiento de la función y viceversa.

TEOREMA 5.1.4. *Sea $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $|x|^k u \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces $\hat{u} \in C^k(\mathbb{R}^n)$ y se tiene la fórmula*

$$D^\alpha \hat{u}(y) = \mathcal{F}[(-2\pi i x)^\alpha u](y), \quad \textit{para todo multiíndice } |\alpha| \le k.$$

DEMOSTRACIÓN. Probaremos el teorema para $k = 1$. El caso general sale por inducción y es dejado de ejercicio.

Ahora bien,

$$\begin{aligned}\partial_{y_j}\hat{u}(y) &= \partial_{y_j}\int_{\mathbb{R}^n}u(x)e^{-2\pi i x\cdot y}\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}u(x)(-2\pi i x_j)e^{-2\pi i x\cdot y}\,dx\\ &= \mathcal{F}[(-2\pi i x_j)u](y),\end{aligned}$$

donde el intercambio de la diferenciación con la integral se verifca fácilmente con la ayuda del Teorema de Convergencia Mayorada y queda también de ejercicio.

Esto concluye la demostración. □

TEOREMA 5.1.5. *Sea $u \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$ tal que $D^\alpha u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para todo multiíndice $|\alpha| \le k$. Entonces se tiene*

$$\mathcal{F}[D^\alpha u](y) = (2\pi i y)^\alpha \hat{u}(y).$$

DEMOSTRACIÓN. Al igual que el teorema anterior, sólo haremos la demostración para el caso $k = 1$. El caso general se concluye por inducción y queda de ejercicio.

Ahora,

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\partial_{x_j} u](y) &= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{x_j} u(x) e^{-2\pi i x\cdot y}\, dx \\ &= 2\pi i y_j \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-2\pi i x\cdot y}\, dx \\ &= 2\pi i y_j \hat{u}(y),\end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad hemos usado el hecho de que u tiene soporte compacto.

Esto concluye la demostración. □

Observación 5.1.6. Observar que la conclusión del Teorema 5.1.5 sigue siendo válida si en lugar de soporte compacto se requiere que u decaiga rápidamente cuando $|x| \to \infty$.

Esta relación que existe entre regularidad y decaimiento a través de la transformada de Fourier da lugar a la definición de la *clase de Schwartz*.

Definición 5.1.7 (Clase de Schwartz). Se define la clase de Schwartz como

$$\mathcal{S} := \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \colon \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|^j)|D^\alpha u(x)| < \infty, \text{ para todo } j \in \mathbb{N}_0,\ \alpha \in \mathbb{N}_0^n \right\}.$$

Observación 5.1.8. Obviamente, se tiene que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}$. Un ejemplo no trivial de una función en la clase de Schwartz es la función gaussiana $u(x) = e^{-|x|^2}$. Queda de ejercicio verificar ese hecho.

Dentro de la clase $\mathcal{S}$ se define la siguiente noción de convergencia

Definición 5.1.9. Sea $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}$ y $u \in \mathcal{S}$. Decimos que u_k converge a u en $\mathcal{S}$, y se nota por $u_k \stackrel{\mathcal{S}}{\to} u$, si

$$\begin{aligned}& D^\alpha u_k \rightrightarrows D^\alpha u, \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{N}_0^n \text{ y} \\ & \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|^j)|D^\alpha u_k(x)| \le C_{j,\alpha}, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Como consecuencia inmediata de los Teoremas 5.1.4 y 5.1.5 se tiene

Corolario 5.1.10. *Sea $u \in \mathcal{S}$. Entonces $\hat{u} \in \mathcal{S}$. Más aún, $\mathcal{F} \colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ resulta continua con la noción de convergencia dada por la Definición 5.1.9.*

Demostración. Si $u \in \mathcal{S}$, de los Teoremas 5.1.4 y 5.1.5 es inmediato obtener que $\hat{u} \in \mathcal{S}$. La continuidad con respecto a la convergencia en $\mathcal{S}$ queda como ejercicio. □

Enunciamos ahora un ejercicio sencillo que será de utilidad en lo que sigue.

Ejercicio 5.1.11. Sea $u \in \mathcal{S}$. Probar que $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $1 \le p \le \infty$.

El siguiente ejercicio, si bien no lo necesitaremos en lo que sigue, resulta interesante.

Ejercicio 5.1.12. Probar que se puede definir una métrica en $\mathcal{S}$ que defina la noción de convergencia dada en la Definición 5.1.9.

De hecho, para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ y $j \in \mathbb{N}$, se define

$$[u]_{\alpha,j} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} (1+|x|^j)|D^\alpha u(x)|.$$

Cada aplicación $[\cdot]_{\alpha,j}$ resulta una seminorma. Verificar que $[u]_{\alpha,j} = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$ y para todo $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ si y sólo si $u = 0$ (es decir, la familia de seminormas $\{[\cdot]_{\alpha,j}\}_{\alpha,j}$ es completa).

Probar luego que si se tiene un espacio vectorial X con una familia numerable de seminormas $\{[\cdot]_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ entonces si la familia $\{[\cdot]_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es completa, la función

$$d(u, v) := \sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^j} \frac{[u - v]_j}{1 + [u - v]_j}$$

define una métrica en X con la propiedad de que $d(u_k, u) \to 0$ si y sólo si $[u_k - u]_j \to 0$ cuando $k \to \infty$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Concluir el enunciado el ejercicio.

Ejercicio 5.1.13. Probar que $\mathcal{S}$ con la métrica del Ejercicio 5.1.12 es completo.

5.2. El Teorema de Plancherel y la teoría L^2

En esta sección demostraremos el Teorema de Plancherel que afirma que dada una función $u \in \mathcal{S}$, su norma L^2 coincide con la norma L^2 de su transformada de Fourier, $\hat{u}$.

Este hecho nos permitirá extender la definición de la transformada de Fourier para funciones de $L^2(\mathbb{R}^n)$ a las que, a priori, la fórmula (5.1.1) no es aplicable.

Para eso necesitamos el siguiente lema

Lema 5.2.1. *Se tiene*

$$\mathcal{F}[\exp(-t|x|^2)](y) = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{\pi^2|y|^2}{t}\right), \ \textit{para todo } t > 0.$$

Demostración. Observemos primero que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[\exp(-t|x|^2)](y) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-t(x_1^2+\cdots+x_n^2)} e^{-2\pi i(x_1y_1+\cdots+x_ny_n)}\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} e^{-tx_1^2-2\pi i x_1y_1} \cdots e^{-tx_n^2-2\pi i x_ny_n}\, dx_1 \cdots dx_n \\
&= \mathcal{F}[e^{-tx^2}](y_1) \cdots \mathcal{F}[e^{-tx^2}](y_n).
\end{aligned}$$

Ahora, observemos que si $\varphi(x) = e^{-tx^2}$, entonces $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifica

$$\begin{cases} \varphi'(x) + 2tx\varphi(x) = 0, & \text{para } x \in \mathbb{R} \\ \varphi(0) = 1. \end{cases}$$

Por otro lado, de los Teoremas 5.1.4 y 5.1.5, se tiene que $\mathcal{F}[\varphi'](y) = 2\pi i y\hat{\varphi}(y)$ y $(\hat{\varphi})'(y) = \mathcal{F}[(-2\pi i x)\varphi](y)$. Luego, se deduce que $\hat{\varphi}$ verifica la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$(\hat{\varphi})'(y) + 2\frac{\pi^2}{t} y\hat{\varphi}(y) = 0, \ \text{para } y \in \mathbb{R},$$

de donde sigue que

$$\hat{\varphi}(y) = ce^{-\frac{\pi^2}{t}y^2}$$

para alguna constante $c \in \mathbb{R}$.

Para determinar el valor de la constante c se procede como sigue,

$$c = \hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2}\, dx = I.$$

El valor de I es bien conocido, pero realicemos el cálculo de todas formas. Para eso se realiza el siguiente truco

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2}\, dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ty^2}\, dy\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-t(x^2+y^2)}\, dxdy \\ &= \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-tr^2} r\, d\theta dr \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} e^{-tr^2} r\, dr \\ &= \frac{\pi}{t}. \end{aligned}$$

Luego $I = \sqrt{\frac{\pi}{t}}$ y en consecuencia

$$\hat{\varphi}(y) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{\pi^2}{t}y^2}.$$

De todo esto se deduce que

$$\mathcal{F}[\exp(-t|x|^2)](y) = \prod_{i=1}^{n} \hat{\varphi}(y_i),$$

que prueba el lema. □

Veamos ahora el Teorema de Plancherel

TEOREMA 5.2.2 (Teorema de Plancherel). *Sea $u \in \mathcal{S}$. Entonces se tiene que*

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Observemos primero que si $u, v \in \mathcal{S}$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} u\hat{v}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}v\, dx.$$

En efecto, por el Teorema de Fubini, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\hat{v}(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\left(\int_{\mathbb{R}^n} v(y)e^{-2\pi i y\cdot x}\, dy\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} v(y)\left(\int_{\mathbb{R}^n} u(x)e^{-2\pi i y\cdot x}\, dx\right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(y)v(y)\, dy \end{aligned}$$

Tomemos ahora $u(x) = u_t(x) = e^{-t|x|^2}$ en la identidad de arriba y, por el Lema 5.2.1, obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{v}(x)e^{-t|x|^2}\,dx = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} v(x)e^{-\frac{\pi^2}{t}|x|^2}\,dx.$$

Es fácil verificar (queda de ejercicio al lector) que se tienen los siguientes límites

$$\begin{aligned}
\lim_{t\downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{v}(x)e^{-t|x|^2}\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{v}(x)\,dx \\
\lim_{t\downarrow 0} \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} v(x)e^{-\frac{\pi^2}{t}|x|^2}\,dx &= v(0)
\end{aligned}$$

de donde se concluye que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{v}(x)\,dx = v(0), \tag{5.2.1}$$

para toda $v \in \mathcal{S}$.

Sea ahora $u \in \mathcal{S}$ y definamos $v(x) = \overline{u(-x)}$ y $w = u * v$. Observemos que $v, w \in \mathcal{S}$. Ahora

$$w(0) = u * v(0) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)v(-x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2\,dx = \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Por otro lado, por la Proposición 5.1.3, $\hat{w} = \hat{u}\hat{v}$ y

$$\begin{aligned}
\hat{v}(y) &= \int_{\mathbb{R}^n} v(x)e^{-2\pi i x\cdot y}\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{u(-x)}e^{-2\pi i x\cdot y}\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \overline{u(x)}e^{2\pi i x\cdot y}\,dx \\
&= \overline{\int_{\mathbb{R}^n} u(x)e^{-2\pi i x\cdot y}\,dx} \\
&= \overline{\hat{u}(y)},
\end{aligned}$$

de donde $\hat{w} = |\hat{u}|^2$ y aplicando (5.2.1) a w se obtiene el teorema. □

Observación 5.2.3. Observemos que el Teorema de Plancherel nos dice que la transformada de Fourier es una isometría en L^2. En efecto, si pensamos $\mathcal{F}\colon \mathcal{S} \subset L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces se tiene que

$$\|\mathcal{F}[u] - \mathcal{F}[v]\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u - v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

luego, como $\mathcal{S}$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$ (sólo basta recordar que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}$), $\mathcal{F}$ tiene una única extensión continua a $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Ejercicio 5.2.4. Demostrar que si $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, entonces la transformada de Fourier de u viene dada por

$$\mathcal{F}[u] = \lim_{R\to\infty} \int_{B_R(0)} u(x)e^{-2\pi i x\cdot y}\,dx,$$

donde la igualdad se entiende en sentido L^2.

Concluimos esta sección con dos teoremas sobre la transformada de Fourier en L^2.

TEOREMA 5.2.5. *Sean $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces se tiene*

1. ($\mathcal{F}$ preserva ángulos)
$$\int_{\mathbb{R}^n} u\bar{v}\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}\bar{\hat{v}}\,dx,$$
2. $\mathcal{F}[u * v] = \hat{u}\hat{v}$

DEMOSTRACIÓN. Para ver 2, sólo observemos que en la Proposición 5.1.3 lo probamos para funciones en $\mathcal{S}$ y usamos la densidad de esas funciones en L^2.

El punto 1 es inmediato del Teorema de Plancherel y queda como ejercicio. $\square$

TEOREMA 5.2.6 (Fórmula de inversión). *Para $u \in \mathcal{S}$ se define*
$$\check{u}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)e^{2\pi i x\cdot y}\,dy.$$
Entonces se tiene que
$$\mathcal{F}[\check{u}](y) = u(y). \tag{5.2.2}$$
Es decir, $\check{u} = \mathcal{F}^{-1}[u]$.

Finalmente, $\mathcal{F}^{-1}$ se extiende de manera única como una isometría a $L^2(\mathbb{R}^n)$ y resulta la inversa de la transformada de Fourier $\mathcal{F}$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

DEMOSTRACIÓN. Sólo mostraremos la validez de (5.2.2). El resto es un sencillo ejercicio.

Sea $\varepsilon > 0$, $z \in \mathbb{R}^n$ y definimos $v_\varepsilon(x) = \exp(2\pi i x \cdot z - \varepsilon|x|^2)$. Del Lema 5.2.1, es fácil ver que
$$\hat{v}_\varepsilon(y) = \left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right)^{\frac{n}{2}} \exp(-\frac{\pi^2}{\varepsilon}|y - z|^2)$$
(sólo hay que observar que $\mathcal{F}[\exp(2\pi i x \cdot z)u](y) = \hat{u}(y - z)$).

Sea ahora $u \in \mathcal{S}$ y razonando de manera completamente análoga a la demostración del Teorema de Plancherel, calculamos
$$\int_{\mathbb{R}^n} u\hat{v}_\varepsilon\,dx = \left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\exp(-\frac{\pi^2}{\varepsilon}|y - z|^2)\,dy \to u(z), \quad \text{cuando } \varepsilon \downarrow 0.$$
Por otra parte,
$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}v_\varepsilon\,dx \to \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(x)e^{2\pi i x\cdot z}\,dx = \mathcal{F}^{-1}[\hat{u}](z), \quad \text{cuando } \varepsilon \downarrow 0.$$
Como se tiene que
$$\int_{\mathbb{R}^n} u\hat{v}_\varepsilon\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}v_\varepsilon\,dx,$$
se concluye la demostración. $\square$

5.3. Espacio de distribuciones y distribuciones temperadas

En esta sección daremos una breve introducción a la teoría de distribuciones y de distribuciones temperadas que son necesarias para extender la transformada de Fourier a objetos más generales que funciones de $L^2(\mathbb{R}^n)$ (por ejemplo a la función $u \equiv 1$).

Dado que no presenta ninguna dificultad adicional y que nos será de utilidad más adelante (cf. Capítulo 9) trabajaremos en un abierto arbitrario $U \subset \mathbb{R}^n$. En las siguientes secciones de este capítulo sólo estaremos interesados en el caso en que $U = \mathbb{R}^n$.

Empecemos con las definiciones básicas.

Definición 5.3.1 (Funciones test). Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Se denomina el *espacio de las funciones test* al conjunto $\mathcal{D}(U) = C_c^\infty(U)$ cuando está dotado de la siguiente noción de convergencia: Decimos que $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(U)$ converge a $u \in \mathcal{D}(U)$ si existe un compacto $K \subset U$ tal que $\operatorname{sop}(u_k) \subset K$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $D^\alpha u_k \rightrightarrows D^\alpha u$, para todo multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Observación 5.3.2. Cuando el abierto que se considera es $\mathbb{R}^n$ es usual notar $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{D}$.

Ejercicio 5.3.3. Sea $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de abiertos de $\mathbb{R}^n$ tales que $U_i \subset\subset U$, $U_i \subset U_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y $U = \bigcup_{i=1}^n U_i$.

Definimos $\mathcal{D}_i = \{f \in \mathcal{D}(U) \colon \operatorname{sop}(f) \subset \overline{U_i}\}$. (Observar que $\mathcal{D}(U_i) \subsetneq \mathcal{D}_i$).

1. Probar que $\mathcal{D}(U) = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{D}_i$.
2. En cada $\mathcal{D}_i$ definimos la siguiente noción de convergencia: dada $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_i$ y $f \in \mathcal{D}_i$ decimos que $f_k \to f$ en $\mathcal{D}_i$ si y sólo si $D^\alpha f_k \rightrightarrows D^\alpha f$ uniformemente en U_i.

   Probar que $\mathcal{D}_i$ resulta metrizable y que $\mathcal{D}_i$ resulta un espacio métrico completo. Sugerencia: razonar de manera análoga al Ejercicio 5.1.12.
3. Probar que $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(U)$ converge a $f \in \mathcal{D}(U)$ en el sentido de la Definición 5.3.1 si y sólo si existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_i$, $f \in \mathcal{D}_i$ y $f_k \to f$ en $\mathcal{D}_i$ con la métrica definida en el item previo.
4. Concluir que $\mathcal{D}(U)$ no es metrizable. Sugerencia: Usar el Teorema de Baire.

Ahora si, definamos el espacio de distribuciones

Definición 5.3.4. Se define el *espacio de distribuciones* (o funciones generalizadas) al dual topológico de $\mathcal{D}(U)$, $\mathcal{D}'(U)$, es decir

$$\mathcal{D}'(U) := \{T \colon \mathcal{D}(U) \to \mathbb{C} \colon T \text{ es lineal y continua}\}.$$

Se usa la siguiente notación para la aplicación de dualidad: Si $T \in \mathcal{D}'(U)$ y $u \in \mathcal{D}(U)$, se nota

$$\langle T, u\rangle_{\mathcal{D}'(U),\mathcal{D}(U)} = \langle T, u\rangle := T(u).$$

Observación 5.3.5. Al igual que para el espacio de las funciones test, cuando el abierto en consideración es $\mathbb{R}^n$ notaremos $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) = \mathcal{D}'$.

En el espacio de distribuciones $\mathcal{D}'(U)$ se define de manera natural una noción de convergencia dada por la convergencia puntual.

Definición 5.3.6. Sean $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(U)$ y $T \in \mathcal{D}'(U)$. Decimos que T_k converge a T en $\mathcal{D}'(U)$ y se nota por $T_k \overset{\mathcal{D}'(U)}{\to} T$ si $\langle T_k, u\rangle \to \langle T, u\rangle$ cuando $k \to \infty$ para toda $u \in \mathcal{D}(U)$.

El espacio de distribuciones es, en algún sentido, el espacio más grande donde uno puede trabajar. Esto significa que este espacio contiene a todas las funciones "razonables". Esto se ve en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.3.7. Sea $f \in L^1_{\text{loc}}(U)$. Luego f induce una aplicación $T_f \in \mathcal{D}'(U)$ dada por la fórmula

$$\langle T_f, u\rangle := \int_U fu\,dx.$$

En efecto, si $\text{sop}(u) \subset K \subset U$ entonces

$$|\langle T_f, u\rangle| \le \int_K |f||u|\,dx \le \|u\|_\infty \int_K |f|\,dx < \infty.$$

Luego T_f está bien definido, es claramente lineal y la misma cuenta muestra que resulta continuo sobre $\mathcal{D}(U)$. En este sentido, haremos un pequeño abuso de notación e indicaremos que $f \in \mathcal{D}'(U)$.

Notemos además que para todo $1 \le p \le \infty$ se tiene que $L^p_{\text{loc}}(U) \subset L^1_{\text{loc}}(U)$ y, por ende, $L^p_{\text{loc}}(U) \subset \mathcal{D}'(U)$ para todo $1 \le p \le \infty$. En particular, $C(U) \subset \mathcal{D}'(U)$.

Ejercicio 5.3.8. Sea μ una medida de Radon sobre U (es decir, una medida de Borel regular tal que $\mu(K) < \infty$ para todo compacto $K \subset U$). Probar que la aplicación T_μ definida por

$$\langle T_\mu, u\rangle := \int_U u\,d\mu,$$

verifica que $T_\mu \in \mathcal{D}'(U)$. Concluir que $\mathcal{M}(U) \subset \mathcal{D}'(U)$ donde $\mathcal{M}(U)$ denota el conjunto de las medidas de Radon sobre U.

En este caso también se hará el abuso de notación $T_\mu = \mu$.

Supongamos por un momento que tenemos $f \in C^1(U)$, luego $\partial_i f \in C(U) \subset \mathcal{D}'(U)$ (con el abuso de notación del Ejemplo 5.3.7). Luego

$$\langle \partial_i f, u\rangle = \int_U \partial_i f u\,dx = -\int_U f\partial_i u\,dx = -\langle f, \partial_i u\rangle.$$

Como $\partial_i u \in \mathcal{D}(U)$ si $u \in \mathcal{D}(U)$, esto motiva la siguiente definición,

Definición 5.3.9. Sea $T \in \mathcal{D}'(U)$. Se define $\partial_i T \in \mathcal{D}'(U)$, $i = 1, \dots, n$, como

$$\langle \partial_i T, u\rangle := -\langle T, \partial_i u\rangle.$$

A la distribución $\partial_i T$ se la denomina la $i-$ésima derivada parcial débil de T.

Las derivadas débiles poseen muy buenas propiedades como lo muestra el siguiente ejercicio.

Ejercicio 5.3.10. Sean $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(U)$ y $T \in \mathcal{D}'(U)$. Se tiene entonces

1. $\partial_i(\partial_j T) = \partial_j(\partial_i T)$, para todo $i, j = 1, \dots, n$.
2. $\langle D^\alpha T, u\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha u\rangle$, para todo multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

3. Si $T_k \overset{\mathcal{D}'(U)}{\to} T$ entonces $D^\alpha T_k \overset{\mathcal{D}'(U)}{\to} D^\alpha T$, para todo multiíndice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Antes de proseguir, veamos alguno ejemplos de derivadas débiles.

Ejemplo 5.3.11.

1. Es claro que si $f \in C^1(U)$, entonces su derivada débil y clásica coinciden.
2. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} = x\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x).$$
Calculemos entonces su derivada débil f'.
$$\langle f', u\rangle = -\langle f, u'\rangle = -\int_0^\infty xu'(x)\,dx = \int_0^\infty u(x)\,dx,$$
donde hemos usado la fórmula de integración por partes en la última igualdad, junto con el hecho de que u tiene soporte compacto.
De la última expresión, se deduce que
$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} = \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x).$$
3. Calculemos ahora f'' donde $f(x) = x\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)$.
$$\langle f'', u\rangle = -\langle f', u'\rangle = -\int_0^\infty u'(x)\,dx = u(0),$$
donde hemos usado que u tiene soporte compacto y el item anterior.
Observemos que
$$\langle \delta_0, u\rangle = u(0),$$
donde δ_0 es la delta de Dirac soportada en el origen que es una medida de Radon sobre $\mathbb{R}$ (y por ende, un elemento de $\mathcal{D}'$ según el Ejercicio 5.3.8). En consecuencia, se tiene que
$$f'' = \delta_0.$$
4. Calculemos una derivada más, es decir $f''' = \delta_0'$.
$$\langle \delta_0', u\rangle = -\langle \delta_0, u'\rangle = -u'(0).$$
Es fácil ver que esta distribución no es una medida, y por ende $\mathcal{M}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{D}'$.
5. Sea ahora $f = \mathbf{1}_{B_1(0)}$ donde $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ y calculemos su derivada parcial débil.
$$\langle \partial_i f, u\rangle = -\langle f, \partial_i u\rangle = -\int_{B_1(0)} \partial_i u\,dx = -\int_{\partial B_1(0)} ux_i\,dS,$$
donde hemos usado el Teorema de la divergencia de Gauss (observemos que x_i es la $i-$ésima componente del vector normal).
Luego, $\partial_i f = -x_i dS\lfloor_{\partial B_1(0)} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

¿Es posible extender la transormada de Fourier al espacio de distribuciones $\mathcal{D}'$?

Para intentar responder esta pregunta, tomemos $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y veamos qué distribución definiría $\hat{f}$.
$$\langle \hat{f}, u\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}u\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} f\hat{u}\,dx = \langle f, \hat{u}\rangle.$$

Ahora, esta fórmula no define una distribución por el hecho de que $\hat{u} \notin \mathcal{D}$.

La manera de solucionar este inconveniente es ampliar la clase de funciones test de manera que $\hat{u}$ sea una función test cada vez que u lo sea. Luego, como hemos visto en el Corolario 5.1.10 el conjunto *natural* de funciones test para la transformada de Fourier no es $\mathcal{D}$ sino la clase de Schwartz $\mathcal{S}$.

Esta discusión motiva la siguiente definición

Definición 5.3.12 (Distribuciones temperadas). Se define el espacio de las distribuciones temperadas $\mathcal{S}'$ como el dual topológico de la clase de Schwartz $\mathcal{S}$. Es decir,

$$\mathcal{S}' := \{T\colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}\colon T \text{ es lineal y continua}\}.$$

Al producto de dualidad se lo nota

$$\langle T, u\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \langle T, u\rangle := T(u).$$

Observación 5.3.13. Observemos que $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ y que la inclusión resulta continua. Es decir, si $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}$ es tal que $u_k \stackrel{\mathcal{D}}{\to} 0$ entonces $u_k \stackrel{\mathcal{S}}{\to} 0$. En consecuencia toda distribución temperada $T \in \mathcal{S}'$ define automáticamente una distribución por restricción, i.e. $T|_{\mathcal{D}} \in \mathcal{D}'$.

Las verificaciones de estas afirmaciones quedan de ejercicio al lector.

Ejemplo 5.3.14. Al igual que para el espacio de distribuciones $\mathcal{D}'$, se tienen las siguientes inclusiones

$$L^1(\mathbb{R}^n), \mathcal{M}_b(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}',$$

donde $\mathcal{M}_b(\mathbb{R}^n) := \{\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)\colon |\mu|(\mathbb{R}^n) < \infty\}$.

De la Observación 5.3.13 se tiene la siguiente cadena de inclusiones

$$\mathcal{D} \subsetneq \mathcal{S} \subsetneq \mathcal{S}' \subsetneq \mathcal{D}'. \tag{5.3.1}$$

Como consecuencia de toda esta discución, llegamos a la siguiente definición de la Transformada de Fourier para distribuciones temperadas.

Definición 5.3.15. Se define la transformada de Fourier para distrbuciones temperadas al operador $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ definido por

$$\langle \hat{T}, u\rangle := \langle T, \hat{u}\rangle,$$

donde, como es usual, $\mathcal{F}[T] = \hat{T}$.

Veamos algunos ejemplos. Para eso precisaremos del siguiente ejercicio

Ejercicio 5.3.16. Sea $u \in \mathcal{S}$. Entonces se tiene que

$$\mathcal{F}^2[u](x) = \mathcal{F}[\hat{u}](x) = u(-x).$$

Ahora si,

Ejemplo 5.3.17. 1. Calculemos $\hat{\delta}_0$. Si $u \in \mathcal{S}$, se tiene

$$\langle \hat{\delta}_0, u\rangle = \langle \delta_0, \hat{u}\rangle = \hat{u}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\,dx = \langle 1, u\rangle,$$

es decir, $\hat{\delta}_0 = 1$.

2. Calculemos ahora $\hat{1}$. Sea $u \in \mathcal{S}$, entonces, por el Ejercicio 5.3.16 y el item anterior,
$$\langle \hat{1}, u\rangle = \langle 1, \hat{u}\rangle = \langle \hat{\delta}_0, \hat{u}\rangle = \langle \delta_0, \mathcal{F}^2[u]\rangle = u(0) = \langle \delta_0, u\rangle.$$
Es decir, $\hat{1} = \delta_0$.

5.4. Aplicación a la ecuación de difusión en $\mathbb{R}^n$

Para terminar este capítulo, en esta sección nos dedicaremos a mostrar como puede aplicarse la transformada de Fourier a la resolución de ecuaciones en derivadas parciales lineales y con coeficientes constantes cuando están planteadas en $\mathbb{R}^n$. A modo de ejemplo, y por motivos pedagógicos, estudiaremos la resolución de la ecuación de difusión

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{5.4.1}$$

Para simplificar la exposición todos los cálculos que haremos serán *formales*, es decir, no nos ocuparemos por justificar rigurosamente los cálculos y más adelante, *a posteriori*, veremos cómo puede mostrarse que la función hallada es efectivamente una solución de (5.4.1).

Luego, definimos $\hat{u}(y,t) = \mathcal{F}[u(\cdot,t)](y)$ la transformada de Fourier de u en la variable x para t constante, i.e.
$$\hat{u}(y,t) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)e^{-2\pi i x\cdot y}\,dx.$$

En consecuencia, y recordando que los cálculos son meramente formales, se tiene que
$$\begin{aligned} \widehat{u_t}(y,t) &= (\hat{u})_t(y,t) \\ \widehat{\Delta u}(y,t) &= \sum_{j=1}^n \widehat{\partial_j^2 u}(y,t) = \sum_{j=1}^n (-2\pi i y_j)^2 \hat{u}(y,t) = -4\pi^2|y|^2\hat{u}(y,t). \end{aligned}$$
Entonces, si transformamos Fourier la ecuación (5.4.1), obtenemos que $\hat{u}$ verifica
$$(\hat{u})_t + 4\pi^2|y|^2\hat{u} = 0, \quad \text{para } y \in \mathbb{R}^n,\ t > 0.$$
Esta ecuación, es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden a coeficientes constantes para cada $y \in \mathbb{R}^n$ fijo que se integra fácilmente y nos da
$$\hat{u}(y,t) = ce^{-4\pi^2|y|^2 t}.$$
Para calcular el valor de la constante $c \in \mathbb{R}$ se evalúa en $t = 0$ y se obtiene
$$c = \hat{u}(y,0) = \hat{f}(y).$$

Observemos que, por el Lema 5.2.1,
$$\exp(-4\pi^2|y|^2 t) = \mathcal{F}\left[(4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)\right](y),$$

de donde, gracias a la Proposición 5.1.3, obtenemos

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \left(f * (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|\cdot|^2}{4t} \right) \right)(x) \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\, dy \end{aligned} \tag{5.4.2}$$

EJERCICIO 5.4.1. Verificar que si $f \in \mathcal{S}$, $u(\cdot, t) \in \mathcal{S}$ para cada $t > 0$ y $u(x, \cdot)$ es de clase C^1 para cada $x \in \mathbb{R}^n$ entonces puede justificarse cada paso en la deducción de la fórmula (5.4.2)

5.5. Ejercicios

EJERCICIO 5.5.1. Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y sean $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Si $g(x) = f(x)e^{2\pi i\alpha x}$, entonces $\hat{g}(y) = \hat{f}(y - \alpha)$.
2. Si $g(x) = f(x - \alpha)$, entonces $\hat{g}(y) = \hat{f}(y)e^{-2\pi i\alpha y}$.
3. Si $g(x) = f(\frac{x}{\lambda})$, entonces $\hat{g}(y) = \lambda^n \hat{f}(\lambda y)$.
4. Si $g(x) = -2\pi i x_k f(x)$ y $g \in L^1$, entonces $\hat{f}$ es derivable respecto a y_k y $\partial_{y_k} \hat{f} = \hat{g}$.

EJERCICIO 5.5.2. Mostrar que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces $\hat{f} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|\hat{f}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

EJERCICIO 5.5.3. Probar que si $f \in \mathcal{S}$, entonces $\mathcal{F}[\mathcal{F}[f(x)]] = f(-x)$. Concluir que si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ es tal que $\hat{f} = \lambda f$ para algún $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces λ es una raíz cuarta de la unidad.

EJERCICIO 5.5.4. Probar que la transformada de Fourier de una función f será una función real si y sólo si f es par.

EJERCICIO 5.5.5. Hallar las transformadas de Fourier de las siguientes funciones:

$$\mathbf{1}_{[-1,1]}, \quad \exp(-a|x|), \quad \frac{1}{(1+x^2)}, \quad \exp(-\pi x^2).$$

EJERCICIO 5.5.6. Sea $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función L^1. Se definen

1. La Transformada-coseno de Fourier como
$$\mathcal{F}_c[f](y) = \int_0^\infty f(x)\cos(2\pi xy)\, dx.$$
2. La Transformada-seno de Fourier como
$$\mathcal{F}_s[f](y) = \int_0^\infty f(x)\sin(2\pi xy)\, dx.$$

Mostrar que si se extiende f como una función par a toda la recta, tenemos

$$\mathcal{F}_c[f](y) = \frac{1}{2}\mathcal{F}[f](y),$$

y que si se extiende a f como una función impar, se tiene

$$\mathcal{F}_s[f](y) = \frac{1}{2i}\mathcal{F}[f](y).$$

EJERCICIO 5.5.7. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz no singular. ¿Cómo se relacionan la transformada de Fourier de $f(Ax)$ con la de $f(x)$? ($f \in L^1(\mathbb{R}^n)$). Usar este resultado para mostrar que la transformada de Fourier transforma funciones radiales en funciones radiales.

EJERCICIO 5.5.8. Probar que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ es de soporte compacto, entonces $\mathcal{F}[f] \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

EJERCICIO 5.5.9. Probar que si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ es tal que $\hat{f} = 0$ entonces $f = 0$.

EJERCICIO 5.5.10. Sea $f \in \mathcal{S}$. Probar que $f * f = f$ si y sólo si $f = 0$ a.e. ¿Qué sucede si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$?

EJERCICIO 5.5.11.

1. Probar que si ϕ, ϕ' y ϕ'' pertenecen al conjunto
$$L^1(\mathbb{R}) \cap \{g \in C(\mathbb{R})\colon \lim_{|x|\to\infty} g(x) = 0\}$$
entonces existe $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{F}[f] = \phi$.
2. Sea $K \subset \mathbb{R}$ compacto y $U \subset \mathbb{R}$ abierto tal que $K \subset U$. Probar que existe $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{F}[f](y) = 1$ para todo $y \in K$ y $\mathcal{F}[f](y) = 0$ para todo $y \in \mathbb{R} - U$.
3. Probar que $\mathcal{F}[L^1(\mathbb{R})]$ es denso en el conjunto de funciones continuas que tienden a cero en el infinito. (Sug.: Stone-Weierstrass)

EJERCICIO 5.5.12. Utilizar la transformada de Fourier para obtener una solución explícita de la siguiente ecuación:
$$\begin{cases} \Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{en } \mathbb{R}^2_+ = \{y > 0\}, \\ u(x,0) = f(x) & \text{en } \mathbb{R}, \end{cases}$$
donde $f \in L^2(\mathbb{R})$.

EJERCICIO 5.5.13. Utilizar la transformada de Fourier para obtener una solución explícita de la siguiente ecuación:
$$-\Delta u + u = f \qquad \text{en } \mathbb{R}^n,$$
donde $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

EJERCICIO 5.5.14. Idem el ejercicio anterior para la ecuación de Schrödinger
$$\begin{cases} iu_t + \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u = g & \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases}$$
donde u y g son funciones a valores complejos y $g \in L^2$.

EJERCICIO 5.5.15. Obtener la expresión integral de la solución de la ecuación de ondas unidimensional
$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$
donde $f, g \in \mathcal{S}$.

Capítulo 6

La ecuación de difusión

En este capítulo nos dedicaremos al estudio de la ecuación de difusión

$$u_t - \Delta u = f$$

tanto en dominios acotados de $\mathbb{R}^n$, $U \times (0,T)$ como en todo el espacio.

Si bien esta ecuación ya ha sido motivada en los capítulos previos (cf. Capítulo 2, Sección 2.4), daremos una nueva deducción de la ecuación de difusión mostrando su conexión con la teoría de probabilidades.

6.1. La ecuación de difusión, el movimiento Browniano y el paseo al azar

6.1.1. El movimiento Browniano. En su artículo de 1905, [**5**], Einstein descubrió la asombrosa conexión existente entre la ecuación de difusión y el movimiento Browniano.

El razonamiento de Einstein fue aproximadamente el siguiente:

Supongamos que se tiene un recipiente con agua y se deja caer una gota de tinta, digamos en el punto $x = 0$. Entonces se tiene una función $u(x,t)$ que nos da la densidad de tinta en el punto x a tiempo t. Sobre esta función, sabemos que $u(x,0) = \delta_0$ (es decir, inicialmente toda la tinta está concentrada en el origen $x = 0$).

Supondremos que se tiene una cierta densidad de probabilidad ρ de manera tal que $\rho(y,\tau)$ representa la densidad de probabilidad de que una partícula de tinta que ocupa la posición x pase a la posición $x + y$ después de un tiempo τ.

Sobre ρ resultan naturales las siguientes hipótesis: La misma es independiente de la posición x (la probabilidad de moverse de un lugar a otro de una partícula de tinta no depende de su posición). La densidad ρ es no nula sólo para valores pequeños de $|y|$ (la probabilidad de que en un período corto de tiempo una partícula de tinta se desplace demasiado es cero). La densidad ρ es radialmente simétrica, es decir $\rho(y,\tau)$ depende sólo de $|y|$ (la probabilidad de desplazamiento no depende de la dirección del mismo sino de la distancia a recorrer).

Bajo estas suposiciones se tiene entonces la siguiente ecuación

$$u(x,t+\tau) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y,t)\rho(y,\tau)\,dy. \tag{6.1.1}$$

Esta ecuación nos dice que la densidad de las partículas de tinta en la posición x a tiempo $t + \tau$ es la suma de las partículas que se encontraban en la posición $x - y$ a tiempo t y pasaron a x después de τ segundos.

Suponemos que se puede expandir u por Taylor de la forma

$$u(x-y,t) = u(x,t) - \sum_{i=1}^{n} \partial_i u(x,t) y_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{ij} u(x,t) y_i y_j + o(|y|^2).$$

Observemos ahora que, dado que $\rho(\cdot,\tau)$ es radial para cada $\tau > 0$ fijo, sigue que

$$\int_{\mathbb{R}^n} y_i \rho(y,\tau)\, dy = 0 \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{R}^n} y_i y_j \rho(y,\tau)\, dy = 0, \tag{6.1.2}$$

para todo $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$.

Por otro lado,

$$\int_{\mathbb{R}^n} y_i^2 \rho(y,\tau)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} y_1^2 \rho(y,\tau)\, dy, \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n,$$

y por ende

$$\int_{\mathbb{R}^n} y_i^2 \rho(y,\tau)\, dy = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^n} |y|^2 \rho(y,\tau)\, dy.$$

Finalmente, es esperable que la varianza de ρ dependa linealmente de τ, dado que para tiempos cortos, $\tau \ll 1$, las partículas de tinta sólo podrán moverse a lugares cercanos, esto significa que

$$\frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^n} |y|^2 \rho(y,\tau)\, dy \simeq D\tau. \tag{6.1.3}$$

Ahora, juntando (6.1.1), (6.1.2) y (6.1.3) concluimos que

$$u(x, t+\tau) \simeq u(x,t) + D\tau \Delta u(x,t),$$

de donde

$$\frac{u(x,t+\tau) - u(x,t)}{\tau} \simeq D\Delta u(x,t).$$

Haciendo ahora $\tau \to 0$ concluimos que u verifica la ecuación de difusión

$$u_t = D\Delta u.$$

6.1.2. Paseo al azar. Veamos ahora la versión discreta del movimiento Browniano, el llamado *paseo al azar*, y su vinculación con la ecuación de difusión. Para simplificar la exposición, supondremos que estamos en una dimensión espacial.

Luego, en la recta real, tenemos una partícula que ocupa una posición (digamos $x = 0$) y se puede mover con probabilidad $\frac{1}{2}$ a derecha o a izquierda una longitud h después de un cierto intervalo de tiempo τ.

Llamemos $p(m,n)$ a la probabilidad de que la partícula se encuentre en la posición mh a tiempo $n\tau$. Luego, la función p verifica

$$p(m, n+1) = \frac{1}{2} p(m-1, n) + \frac{1}{2} p(m+1, n).$$

Equivalentemente,

$$p(m, n+1) - p(m,n) = \frac{1}{2}(p(m-1,n) - 2p(m,n) + p(m+1,n)).$$

Supongamos que p es la evaluación de una cierta función u definida en $\mathbb{R}\times(0,\infty)$ sobre los puntos de la grilla $\{(mh, n\tau)\}_{m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}}$. Luego, si llamamos $x = mh$ y $t = n\tau$ se tiene que u verifica

$$\frac{u(x,t+\tau)-u(x,t)}{\tau} = \frac{1}{2}\frac{h^2}{\tau}\frac{u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)}{h^2}.$$

Finalmente, si asumimos que las variables h y τ se relacionan por $\frac{h^2}{\tau} = D$, entonces pasando al límite $h,\tau\to 0$ se llega a

$$\partial_t u = \frac{D}{2}\partial_x^2 u,$$

es decir, u es solución de la ecuación de difusión.

6.1.3. Paseo al azar asimétrico.

Consideremos ahora un paseo al azar *no simétrico*. Es decir que la probabilidad de moverse de una partícula no es la misma en todas las direcciones.

Para fijar ideas, consideraremos el caso de una dimensión espacial y haremos las siguientes suposiciones:

- La partícula empieza en $x = 0$.
- La partícula se mueve, luego de un cierto tiempo τ, a la derecha con probabilidad $p_0 \neq \frac{1}{2}$ y a la izquierda con probabilidad $q_0 = 1 - p_0$ una longitud h de manera independiente en cada paso.

La segunda suposición, rompe la simetría del paseo y da una tendencia a la partícula a moverse, ya sea a la izquierda o a la derecha, dependiendo de si $p_0 < q_0$ o $p_0 > q_0$.

Notaremos con $p(x,t)$ la probabilidad de que la partícula este ubicada en $x = nh$ a tiempo $t = m\tau$ y para $p(x,t)$ se tiene

$$p(x,t+\tau) = p_0 p(x-h,t) + q_0 p(x+h,t). \tag{6.1.4}$$

Si expandimos p por Taylor, se obtiene

$$\begin{aligned} p(x,t+\tau) &= p(x,t) + p_t(x,t)\tau + o(\tau) \\ p(x\pm h,t) &= p(x,t) \pm \partial_x p(x,t)h + \frac{1}{2}\partial_{xx}p(x,t)h^2 + o(h^2). \end{aligned}$$

Reemplazando en (6.1.4) se obtiene

$$p_t\tau + o(\tau) = \frac{1}{2}\partial_{xx}p h^2 + (q_0 - p_0)h\partial_x p + o(h^2).$$

Luego, si dividimos todo por τ se llega a

$$p_t + o(1) = \frac{1}{2}\frac{h^2}{\tau}\partial_{xx}p + \frac{(q_0-p_0)h}{\tau}\partial_x p + o\left(\frac{h^2}{\tau}\right).$$

Ahora, para poder pasar al límite $h,\tau\to 0$ es necesario, como en la Sección 6.1.2 imponer

$$\frac{h^2}{\tau} = 2D$$

para cierta constante $D > 0$. Pero esto por si solo no basta, dado que entonces el término de *transporte* $\frac{(q_0-p_0)h}{\tau}\partial_x p$ tiende a ∞. Observemos que

$$\frac{(q_0-p_0)h}{\tau} = \frac{(q_0-p_0)}{h}\frac{h^2}{\tau} = 2D\frac{(q_0-p_0)}{h},$$

luego resulta natural imponer además la condición

$$\frac{(q_0-p_0)}{h} \to \beta \in \mathbb{R}, \text{ cuando } h \to 0.$$

Observemos que, como $p_0 + q_0 = 1$, se tiene que

$$p_0 = \frac{1}{2} - \frac{\beta}{2}h + o(h) \quad \text{y} \quad q_0 = \frac{1}{2} + \frac{\beta}{2}h + o(h).$$

El signo de β dependerá de qué sentido de movimiento es más probable. Observemos que $\beta > 0$ indica que la partícula tiende a moverse hacia la izquierda mientras que $\beta < 0$ indica que la partícula tiende a moverse hacia la derecha.

Finalmente, si llamamos $b := 2D\beta$ se obtiene en el límite la ecuación

$$p_t = D\partial_{xx}p + b\partial_x p. \tag{6.1.5}$$

Esta es una ecuación de *convección–difusión* donde se tienen dos términos coexistiendo en la ecuación, el término de difusión $D\partial_{xx}p$ y un término convectivo $b\partial_x p$.

6.2. Solución fundamental y resolución de la ecuación de difusión en $\mathbb{R}^n$

Según lo visto en el Capítulo 5, Sección 5.4, una solución de la ecuación de difusión

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{6.2.1}$$

se encuentra, al menos formalmente, mediante la fórmula

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\, dy = (g * \Phi(\cdot,t))(x), \tag{6.2.2}$$

donde

$$\Phi(x,t) := \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right). \tag{6.2.3}$$

Esto motiva la siguiente definición,

Definición 6.2.1. La función Φ definida en (6.2.3) se la llama la *solución fundamental* de la ecuación del calor.

Empecemos con un lema elemental sobre la solución fundamental Φ.

Lema 6.2.2. *Sea Φ la solución fundamental definida por* (6.2.3). *Entonces se tiene*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x,t)\, dx = 1 \quad \textit{para todo } t > 0.$$

Demostración. Llamemos

$$\varphi(x) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4}},$$

y se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx = 1.$$

Ver la demostración del Lema 5.2.1 para una prueba de este hecho.

Ahora, si $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$, entonces por el Teorema de cambio de variables,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x)\, dx = 1.$$

El Lema queda entonces probado una vez que se observa que $\varphi_{\sqrt{t}}(x) = \Phi(x,t)$. $\square$

Con la ayuda del Lema 6.2.2 se obtiene el siguiente corolario

Corolario 6.2.3. *Sea $u(x,t)$ la función definida por* (6.2.2). *Entonces,*

1. *si $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, se tiene que $u(x,t) \to g(x)$ cuando $t \downarrow 0$ en todo punto x de continuidad de g,*
2. *si $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ se tiene que $\|u(\cdot,t) - g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \to 0$ cuando $t \downarrow 0$.*

Ahora sí, veamos que efectivamente la función u dada por (6.2.2) es solución de la ecuación de difusión (6.2.1).

Teorema 6.2.4. *Sea $g \in C_b(\mathbb{R}^n)$. Entonces la función $u\colon \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por* (6.2.2) *verifica*

1. $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$,
2. $u_t - \Delta u = 0$ *en* $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$,
3. $u(x,t) \to g(x_0)$ *cuando* $x \to x_0$ *y* $t \downarrow 0$, *para todo* $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Los ítems 1 y 2 son de fácil verificación y quedan de ejercicio.

Verifiquemos 3. Como, por el Lema 6.2.2, Φ tiene integral 1 se tiene que

$$\begin{aligned}
|u(x,t) - g(x_0)| &\le \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)|g(y) - g(x_0)|\, dy \\
&= \int_{B_\delta(x_0)} \Phi(x-y,t)|g(y) - g(x_0)|\, dy \\
&\qquad + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x_0)} \Phi(x-y,t)|g(y) - g(x_0)|\, dy \\
&= A + B.
\end{aligned}$$

Como g es continua en x_0, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon$ si $|y - x_0| < \delta$ y luego se tiene

$$A < \varepsilon \int_{B_\delta(x_0)} \Phi(x-y,t)\, dy \le \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\, dy = \varepsilon.$$

Para acotar B, observemos que si $|x - x_0| < \frac{\delta}{2}$ y $|y - x_0| > \delta$, entonces se tiene que $|x - y| \geq \frac{1}{2}|x_0 - y|$, de donde

$$\begin{aligned} B &\leq 2\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x_0)} \Phi(x - y, t)\, dy \\ &\leq 2\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta(x_0)} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x_0 - y|^2}{16t}}\, dy. \end{aligned}$$

Finalmente, observemos que, por el Teorema de convergencia dominada, la última integral tiende a 0 cuando $t \downarrow 0$, dado que $|x_0 - y| \geq \delta > 0$.

Esto concluye la demostración. $\square$

Observación 6.2.5 (Velocidad de propagación infinita). Consideremos, en (6.2.1), $g \geq 0$, $g \not\equiv 0$. Entonces, de (6.2.2) es claro que $u(x, t) > 0$ para todo $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Es decir que cualquier perturbación inicial, por más pequeña que sea, es instantáneamente transportada a cualquier lugar del espacio.

Por ejemplo, en nuestro modelo de difusión de tinta en agua, si depósitamos una gota de tinta en un punto, automáticamente en cualquier lugar del estanque tendremos densidad positiva de tinta.

Ejercicio 6.2.6. Enunciar y demostrar el análogo del Teorema 6.2.4 para dato inicial $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Vamos ahora a considerar el problema de difusión no homogéneo

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = 0 & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{6.2.4}$$

Para resolver el mismo, usaremos el llamado *principio de Duhamel* que dice que el problema no homogéneo (6.2.4) se resuelve *superponiendo* las soluciones del problema homogéneo asociado. Más precisamente, si llamamos $u(x, t; s)$ a la solución de

$$\begin{cases} v_t - \Delta v = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times (s, \infty) \\ v(x, s) = f(x, s) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{6.2.5}$$

entonces la solución de (6.2.4) viene dado por

$$u(x, t) = \int_0^t u(x, t; s)\, ds. \tag{6.2.6}$$

En efecto, veamos, formalmente, que u dada por (6.2.6) efectivamente resuelve (6.2.4). Diferenciando (6.2.6) respecto a t, se obtiene

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= u(x, t; t) + \int_0^t u_t(x, t; s)\, ds \\ &= f(x, t) + \int_0^t \Delta u(x, t; s)\, ds \\ &= f(x, t) + \Delta \int_0^t u(x, t; s)\, ds \\ &= f(x, t) + \Delta u(x, t), \end{aligned}$$

como queríamos ver.

El método de Duhamel es un método general para obtener soluciones de un problema de evolución lineal no homogéneo a partir de la solución del homogéneo como lo muestra el siguiente problema.

EJERCICIO 6.2.7 (Método de Duhamel para ecuaciones diferenciales ordinarias). Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y llamemos $\phi(t,x)$ a la solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$u' = Au, \qquad u(0) = x \in \mathbb{R}^n.$$

Sea $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ una función continua y definimos

$$\varphi(t) := \int_0^t \phi(t-s, f(s))\, ds.$$

Verificar que $\varphi(t)$ es la solución del problema

$$u' = Au + f, \qquad u(0) = 0.$$

Observar que $\phi(t-s, f(s))$ es la solución de

$$v' = Av,\ t > s, \qquad v(s) = f(s).$$

Volveremos a encontrarnos con el método de Duhamel en nuestro estudio de la ecuación de ondas en el Capítulo 8.

La función propuesta por el método de Duhamel en (6.2.6) se rescribe como

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} f(y,s) \frac{1}{(4\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}\, dyds. \tag{6.2.7}$$

Demostremos, ahora de manera rigurosa, que u efectivamente resuelve el problema no homogéneo (6.2.4).

TEOREMA 6.2.8. *Sea $f \in C_c^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ y sea u la función definida por* (6.2.7). *Entonces se tiene*

1. $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$,
2. $u_t - \Delta u = f$ *en* $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ *y*
3. $u(x,t) \to 0$ *cuando* $t \downarrow 0$ *uniformemente en* $x \in \mathbb{R}^n$.

OBSERVACIÓN 6.2.9. Observemos que el Teorema 6.2.8 dice que la función u definida por (6.2.7) es una solución clásica de (6.2.4).

OBSERVACIÓN 6.2.10. $f \in C^{2,1}(U \times (a,b))$ significa que $f_t, \partial_{ij} f \in C(U \times (a,b))$ para todo $i,j = 1,\dots,n$.

DEMOSTRACIÓN. Es fácil ver, mediante un sencillo cambio de variables, que u puede escribirse como

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y, t-s)\Phi(y,s)\, dyds,$$

de donde, por el Teorema de convergencia mayorada,

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} f_t(x-y,t-s)\Phi(y,s)\,dyds + \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y,0)\Phi(y,t)\,dy \\ \partial_{ij}u(x,t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{ij} f(x-y,t-s)\Phi(y,s)\,dyds. \end{aligned}$$

Luego $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$.

Ahora,

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) =& \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s)\left(\partial_t f(x-y,t-s) - \Delta_x f(x-y,t-s)\right) dyds \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) f(x-y,0)\,dy \\ =& \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s)\left(-\partial_s f(x-y,t-s) - \Delta_y f(x-y,t-s)\right) dyds \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s) f(x-y,0)\,dy \\ =& A + B. \end{aligned}$$

Para estimar A se procede como sigue

$$\begin{aligned} A =& \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s)\left(-\partial_s f(x-y,t-s) - \Delta_y f(x-y,t-s)\right) dyds \\ &+ \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s)\left(-\partial_s f(x-y,t-s) - \Delta_y f(x-y,t-s)\right) dyds \\ =& I_\varepsilon + J_\varepsilon. \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} |J_\varepsilon| &\leq \left(\|\partial_t f\|_\infty + \sum_{i=1}^n \|\partial_{ii} f\|_\infty \right) \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s)\,dyds \\ &= C\varepsilon \end{aligned}$$

y para calcular I_ε, usando la fórmula de integración por partes, se tiene

$$\begin{aligned} I_\varepsilon =& \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \left(\partial_s \Phi(y,s) - \Delta_y \Phi(y,s)\right) f(x-y,t-s)\,dyds \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,\varepsilon) f(x-y,t-\varepsilon)\,dy - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,t) f(x-y,0)\,dy \\ =& \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,\varepsilon) f(x-y,t-\varepsilon)\,dy - B. \end{aligned}$$

Luego,

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,\varepsilon) f(x-y,t-\varepsilon)\,dy = f(x,t).$$

Finalmente,

$$|u(x,t)| \leq \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(y,s)|f(x-y,t-s)|\,dyds \leq \|f\|_\infty t \to 0$$

cuando $t \downarrow 0$ uniformemente en $x \in \mathbb{R}^n$. $\square$

Si combinamos el Teorema 6.2.4 y el Teorema 6.2.8 obtenemos el siguiente corolario.

COROLARIO 6.2.11. *Sea* $g \in C_b(\mathbb{R}^n)$ *y* $f \in C_c^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$. *Entonces la función* $u\colon \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$u(x,t) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)g(y)\,dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t-s)f(y,s)\,dyds$$

verifica que $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ *y es solución de*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{6.2.8}$$

¿Es la función u dada en el Corolario 6.2.11 la única solución del problema (6.2.8)?

En [**10**] se exhibe una construcción de una solución no trivial para

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

lo que muestra que la unicidad de soluciones es falsa en general. Sin embargo si es cierto que es la única solución *físicamente razonable* (c.f. Corolario 6.3.10). Observemos que algo similar sucede con la ecuación de Poisson en $\mathbb{R}^n$ dado que la función $u(x) = x_1$ verifica que $\Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^n$, luego $u \equiv 0$ no es la única solución del problema.

6.3. La ecuación de difusión en dominios acotados

Veamos que si en lugar de trabajar en todo el espacio nos restringimos a dominios acotados, entonces se recupera la unicidad para la ecuación de difusión. A lo largo de esta sección usaremos la siguiente notación: $U \subset \mathbb{R}^n$ representará un abierto acotado, $T > 0$ y

$$U_T := U \times (0,T],$$
$$\partial_p U_T := \overline{U_T} \setminus U_T = (U \times \{t=0\}) \cup (\partial U \times [0,T]).$$

Al conjunto $\partial_p U_T$ se lo llama la *frontera parabólica* de U_T.

Empecemos demostrando el principio débil del máximo para este problema.

TEOREMA 6.3.1 (Principio débil del máximo en dominios acotados). *Sea* $u \in C^{2,1}(U_T)$ *que verifica* $u_t - \Delta u = 0$ *en* U_T, *entonces*

$$\max_{\overline{U_T}} u = \max_{\partial_p U_T} u.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que $u_t - \Delta u < 0$ en U_T y supongamos que existe $(x_0,t_0) \in U_T$ tal que $u(x_0,t_0) = \max_{\overline{U_T}} u$.

Entonces tenemos que $\partial_{ii}u(x_0,t_0) \le 0$ para todo $i = 1,\dots,n$. Por otro lado, si $t_0 < T$ se tiene que $u_t(x_0,t_0) = 0$ y si $t_0 = T$, $u_t(x_0,t_0) \ge 0$. En cualquiera de los casos, concluimos que $u_t(x_0,t_0) - \Delta u(x_0,t_0) \ge 0$ que es una contradicción. Luego

$$\max_{\overline{U_T}} u = \max_{\partial_p U_T} u.$$

Ahora, si $u_t - \Delta u = 0$ en U_T, definimos $u^\varepsilon(x,t) = u(x,t) - \varepsilon t$. Luego $u^\varepsilon_t - \Delta u^\varepsilon = -\varepsilon < 0$ y por ende

$$\max_{\overline{U_T}} u^\varepsilon = \max_{\partial_p U_T} u^\varepsilon.$$

Como $u^\varepsilon \rightrightarrows u$ en U_T se concluye el resultado. □

Con la ayuda del principio (débil) del máximo se deduce fácilmente la unicidad del problema de Dirichlet para la ecuación de difusión en dominios acotados.

Corolario 6.3.2. *Existe a lo sumo una solución $u \in C^{2,1}(U_T)$ del problema*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{en } U_T \\ u = g & \text{en } \partial_p U_T. \end{cases} \tag{6.3.1}$$

Demostración. Supongamos que $u_1, u_2 \in C^{2,1}(U_T)$ son dos soluciones de (6.3.1). Luego su diferencia, $w := u_1 - u_2$, verifica

$$w_t - \Delta w = 0 \text{ en } U_T, \quad w = 0 \text{ en } \partial_p U_T.$$

En consecuencia, por el Teorema 6.3.1, se tiene que

$$\max_{\overline{U_T}} w = 0,$$

es decir, $u_1 \leq u_2$. La otra desigualdad se demuestra de manera análoga. □

Nuestro objetivo ahora es probar el principio del máximo fuerte para la ecuación de difusión. Cuando demostramos el principio fuerte del máximo para la ecuación de Laplace (Corolario 4.3.3), la demostración se basó en la fórmula del valor medio para funciones armónicas, Teorema 4.3.2.

Si bien es posible encontrar una suerte de fórmula del valor medio para soluciones de la ecuación de difusión (ver [**6**]) y en consecuencia deducir de ella el principio fuerte del máximo, elegimos dar otra demostración basándonos en la desigualdad de Harnack. La ventaja de este enfoque es que el mismo es muy sencillo de generalizar tanto a operadores elípticos como parabólicos, una vez que la desigualdad de Harnack sea demostrada para esos operadores (ver los ejercicios 4.8.18 y 6.7.19 para la definición de operador elíptico y parabólico respectivamente).

Antes de hacer la demostración para la ecuación de difusión, veamos como se puede deducir el principio fuerte del máximo para la ecuación de Laplace a partir de la desigualdad de Harnack.

Teorema 6.3.3. *Sea $u \in C^2(U) \cap C(\bar U)$ una función armónica en $U \subset \mathbb{R}^n$, con U conexo. Si existe $x_0 \in U$ tal que $u(x_0) = \max_{\bar U} u$, entonces u es constante en U.*

Demostración. Sea $M = \max_{\bar U} u$ y definimos $v(x) := M - u(x)$. Entonces, v resulta armónica y $v \geq 0$. Luego, por la desigualdad de Harnack, Teorema 4.3.8, si $V \subset\subset U$,

$$\max_{\bar V} v \leq C \min_{\bar V} v.$$

Luego, si $x_0 \in V$, sigue que $\max_{\bar V} v \leq 0$ y como $v \geq 0$, $v = 0$ en V.

Como V es arbitrario, concluimos que $v \equiv 0$ en U y por ende u es constante. □

Veamos ahora la desigualdad de Harnack para la ecuación de difusión.

TEOREMA 6.3.4 (Desigualdad de Harnack para la ecuación de difusión). *Sea* $u \in C^{2,1}(U_T)$ *tal que* $u \geq 0$ *y* $u_t - \Delta u = 0$ *en* U_T. *Luego, si* $V \subset\subset U$ *y* $0 < t_1 < t_2 \leq T$, *entonces existe una constante* C *que depende sólo de* $\operatorname{dist}(V, \partial U), t_1, t_2$ *y* n, *tal que*

$$\max_{\bar{V}} u(\cdot, t_1) \leq C \min_{\bar{V}} u(\cdot, t_2).$$

OBSERVACIÓN 6.3.5. La demostración del Teorema 6.3.4 si bien usa herramientas elementales es bastante tediosa. Aconsejamos al lector a omitir su prueba en una primera lectura y volver a ella sólo si lo considera estríctamente necesario.

Con las mismas ideas se puede demostrar la desigualdad de Harnack para soluciones de operadores parabólicos de la forma

$$u_t - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\partial_{ij} u = 0,$$

donde la matriz $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ es uniformemente elíptica y los coeficientes a_{ij} son suaves (ver [**6**, Theorem 10, pág. 370]).

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $u > 0$ en U_T (sino fuera así, se considera $u + \varepsilon$ y se hace $\varepsilon \downarrow 0$). Consideremos entonces $v := \log u$. Mediante cálculos elementales, se deduce que v verifica

$$v_t - \Delta v = |\nabla v|^2 \quad \text{en } U_T. \tag{6.3.2}$$

Afirmamos ahora que, dado $V \subset\subset U$ y $0 < t_1 < t_2 \leq T$, existe $\gamma > 0$ (que depende sólo de V, t_1 y t_2) y $0 < \theta < 1$ tal que

$$\Delta v \geq \theta |\nabla v|^2 - \gamma \quad \text{en } V \times [t_1, t_2]. \tag{6.3.3}$$

Supongamos (6.3.3) cierta y veamos como de ahí se deduce el teorema.

En efecto, supongamos V convexo, $x_1, x_2 \in V$ y $0 < t_1 < t_2 \leq T$ y escribimos

$$\begin{aligned}
v(x_2,t_2) - v(x_1,t_1) &= \int_0^1 v(sx_2 + (1-s)x_1, st_2 + (1-s)t_1)\, ds \\
&= \int_0^1 \nabla v \cdot (x_2 - x_1) + v_t(t_2 - t_1)\, ds \\
&\geq \int_0^1 [-|\nabla v||x_2 - x_1| + ((1-\theta)|\nabla v|^2 - \gamma)(t_2 - t_1)]\, ds,
\end{aligned}$$

donde hemos usado (6.3.2) y (6.3.3) en la desigualdad. De esta desigualdad es fácil ver que existe $\alpha > 0$ que depende sólo de $|x_2 - x_1|$, $(t_2 - t_1)$ y γ tal que

$$v(x_2,t_2) - v(x_1,t_1) \geq -\alpha.$$

Si ahora recordamos que $v = \log u$, obtenemos

$$u(x_2,t_2) \geq e^{-\alpha} u(x_1,t_1).$$

Esto demuestra la desigualdad de Harnack para dominios V convexos. El caso general se deduce de este cubriendo el dominio por bolas al igual que en el Teorema de Harnack para la ecuación de Laplace, Teorema 4.3.8.

Queda entonces demostrar la estimación (6.3.3). Llamemos $w := \Delta v$, $\tilde{w} = |\nabla v|^2$ y veamos que ecuación diferencial verifica $\hat{w} := w + \frac{1}{2}\tilde{w}$. De (6.3.2), se tiene

$$\partial_{ij} v_t = \partial_{ij} w + 2\sum_{k=1}^n (\partial_{ik} v \partial_{jk} v + \partial_k v \partial_{ijk} v).$$

Luego,

$$\begin{aligned}
w_t = \sum_{i=1}^n \partial_{ii} v_t &= \sum_{i=1}^n \left(\partial_{ii} w + 2\sum_{k=1}^n (\partial_{ik} v^2 + \partial_k v \partial_{iik} v) \right) \\
&= \Delta w + 2|D^2 v|^2 + 2\sum_{i,k=1}^n \partial_k v \partial_{iik} v \\
&= \Delta w + 2|D^2 v|^2 + 2\sum_{k=1}^n \partial_k v \sum_{i=1}^n \partial_{iik} v \\
&= \Delta w + 2|D^2 v|^2 + 2\nabla v \cdot \nabla w.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_t - \Delta \tilde{w} &= 2\sum_{i=1}^n \partial_i v \partial_i v_t - 2\sum_{i,j=1}^n (\partial_{ij} v)^2 - 2\sum_{i,j=1}^n \partial_i v \partial_i \partial_{jj} v \\
&= -2|D^2 v|^2 + 2\sum_{i=1}^n \partial_i v \partial_i (v_t - \Delta v) \\
&= -2|D^2 v|^2 + 2\nabla v \cdot \nabla \tilde{w},
\end{aligned}$$

donde hemos usado (6.3.2) y la definición de $\tilde{w}$ en la última igualdad.

Luego, si llamamos $b := -2\nabla v$, tenemos

$$\hat{w}_t - \Delta \hat{w} + b \cdot \nabla \hat{w} = |D^2 v| \geq 0. \tag{6.3.4}$$

Sea ahora $\zeta \in C_c^\infty(U_T)$ tal que $0 \leq \zeta \leq 1$, $\zeta \equiv 1$ en $V \times [t_1, t_2]$. Sea $\mu > 0$ una constante que determinaremos más adelante.

Afirmo ahora que se tiene $\zeta^4 \hat{w} + \mu t \geq 0$ en U_T si μ es elegido adecuadamente. En efecto, asumamos que $\zeta^4 \hat{w} + \mu t$ tiene un mínimo negativo en $(x_0, t_0) \in U_T$. Entonces se tiene

$$0 = \partial_i(\zeta^4 \hat{w} + \mu t) = \zeta^3 (4\partial_i \zeta \hat{w} + \zeta \partial_i \hat{w}) \quad \text{en } (x_0, t_0),\ i = 1, \dots, n. \tag{6.3.5}$$

Más aún,

$$(\zeta^4 \hat{w} + \mu t)_t (x_0, t_0) \leq 0 \quad \text{y} \quad \partial_{ii}(\zeta^4 \hat{w} + \mu t)(x_0, t_0) \geq 0,$$

de donde, evaluando en (x_0, t_0),

$$(\zeta^4 \hat{w} + \mu t)_t - \Delta(\zeta^4 \hat{w} + \mu t) \leq 0.$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
(\zeta^4 \hat{w} + \mu t)_t &= \mu + \zeta^4 \hat{w}_t + 4\zeta^3 \zeta_t \hat{w} \\
\Delta(\zeta^4 \hat{w} + \mu t) &= \zeta^4 \Delta \hat{w} + (12|\nabla \zeta|^2 + 4\zeta \Delta \zeta)\zeta^2 \hat{w} + 8\zeta^4 \nabla \zeta \cdot \nabla \hat{w}.
\end{aligned}$$

Luego
$$0 \geq \mu + \zeta^4(\hat{w}_t - \Delta\hat{w}) - 8\zeta^3\nabla\zeta \cdot \nabla\hat{w} + R_1\zeta^2\hat{w},$$
donde $R_1 = 12|\nabla\zeta|^2 + 4\zeta\Delta\zeta + 4\zeta\zeta_t$.

Si ahora usamos (6.3.4), obtenemos
$$0 \geq \mu - \zeta^4 b \cdot \nabla\hat{w} + \zeta^4|D^2v|^2 - 8\zeta^3\nabla\zeta \cdot \nabla\hat{w} + R_1\zeta^2\hat{w}.$$

Ahora bien
$$8\zeta^3\nabla\zeta \cdot \nabla\hat{w} = 8\sum_{i=1}^n \zeta^3\partial_i\zeta\partial_i\hat{w}$$
y de (6.3.5) concluimos que
$$\zeta^3\partial_i\zeta\partial_i\hat{w} = \zeta^2\partial_i\zeta\zeta\partial_i\hat{w} = -4\zeta^2\partial_i\zeta^2\hat{w}.$$
Es decir
$$8\zeta^3\nabla\zeta \cdot \nabla\hat{w} = -32|\nabla\zeta|^2\zeta^2\hat{w}.$$
Análogamente
$$\zeta^4 b \cdot \nabla\hat{w} = -2\zeta^4\nabla v \cdot \nabla\hat{w} = -2\sum_{i=1}^n \zeta^4\partial_i v\partial_i\hat{w},$$
y de (6.3.5) obtenemos
$$\zeta^4\partial_i v\partial_i\hat{w} = \zeta^3\partial_i v\zeta\partial_i\hat{w} = -4\zeta^3\partial_i v\partial_i\zeta\hat{w}.$$
Así nos queda
$$\zeta^4 b \cdot \nabla\hat{w} = 8\zeta^3\nabla\zeta \cdot \nabla v\hat{w}.$$
Combinando estas estimaciones se llega a
$$0 \geq \mu + \zeta^4|D^2v|^2 - R_2\zeta^2\hat{w}, \tag{6.3.6}$$
donde $R_2 = R_1 + 32|\nabla\zeta|^2 - 8\zeta\nabla\zeta \cdot \nabla v$. Este término R_2 verifica que
$$|R_2| \leq C(1 + \zeta|\nabla v|).$$

Luego, obtenemos que
$$|R_2\zeta^2\hat{w}| \leq C(\zeta^2|\hat{w}| + \zeta^3|\hat{w}||\nabla v|).$$

Por otro lado, como en (x_0, t_0) tenemos que $\zeta^4\hat{w} + \mu t < 0$, sigue que $\hat{w}(x_0, t_0) < 0$ y de la definición de $\hat{w}$ obtenemos entonces
$$|\nabla v|^2 \leq |\Delta v| \quad \text{y} \quad |\hat{w}| \leq 2|\Delta v| \quad \text{en } (x_0, t_0).$$

Luego, llegamos a
$$|R_2\zeta^2\hat{w}| \leq C(\zeta^2|\Delta v| + \zeta^3|\Delta v|^{\frac{3}{2}}).$$
Recordemos ahora la desigualdad de Young con ε. La misma dice que, dado $1 < p < \infty$ y $\varepsilon > 0$, existe $C = C(\varepsilon, p)$ tal que
$$ab \leq \varepsilon a^p + Cb^{p'},$$
para todo $a, b > 0$. (Si no recuerda la demostración de esta desigualdad, ¡hágala!). Puede verse fácilmente que
$$C = C(\varepsilon, p) = \frac{p-1}{p^{p'}\varepsilon^{\frac{p'}{p}}}.$$

Por otro lado, es fácil ver que

$$|\Delta v| \leq \sum_{i=1}^{n} |\partial_{ii} v| \leq n \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\partial_{ii} v|^2} \leq n|D^2 v|$$

Luego, se deduce que

$$\zeta^2 |\Delta v| \leq n\zeta^2 |D^2 v| \leq \varepsilon \zeta^4 |D^2 v|^2 + C(\varepsilon).$$

Análogamente,

$$\zeta^3 |\Delta v|^{\frac{3}{2}} \leq n^{\frac{3}{2}} \zeta^3 |D^2 v|^{\frac{3}{2}} \leq \varepsilon \zeta^4 |D^2 v|^2 + C(\varepsilon).$$

Tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}$, obtenemos de (6.3.6)

$$0 \geq \mu + \frac{1}{2} \zeta^4 |D^2 v|^2 - C \geq \mu - C,$$

que es un absurdo si elegimos μ suficientemente grande.

Luego, concluimos que $\zeta^4 \hat{w} + \mu t \geq 0$ en U_T, de donde $\hat{w} + \mu t \geq 0$ en $V \times [t_1, t_2]$. Si llamamos $\gamma = \mu t_2$ se concluye (6.3.3) y con eso la demostración del teorema. □

Al igual que para la ecuación de Laplace, puede usarse el Teorema 6.3.4 para demostrar el principio fuerte del máximo para la ecuación de difusión.

Teorema 6.3.6 (Principio fuerte del máximo para la ecuación de difusión). *Sea $u \in C^{2,1}(U_T)$ solución de $u_t - \Delta u = 0$ en U_T. Si existe $(x_0, t_0) \in U_T$ tal que $u(x_0, t_0) = \max_{\overline{U_T}} u$, entonces u es constante en U_{t_0}.*

Observación 6.3.7. Observemos que el Teorema 6.3.6 no afirma que u es constante en *todo* U_T, sino que es constante en todo tiempo *anterior* al momento en que alcanzó el máximo.

Demostración. La demostración es similar al Teorema 6.3.3.

En efecto, sea $M := \max_{\overline{U_T}} u = u(x_0, t_0)$ y definimos $v(x, t) = M - u(x, t)$.

Luego, $v \in C^{2,1}(U_T)$ verifica $v_t - \Delta v = 0$ en U_T y $v \geq 0$. Entonces, por el Teorema 6.3.4, sigue que, si $V \subset\subset U$ es tal que $x_0 \in V$ y $0 < t < t_0$,

$$\max_{\bar{V}} v(\cdot, t) \leq C \min_{\bar{V}} v(\cdot, t_0) = 0,$$

en consecuencia, $v = 0$ en V para todo $0 < t < t_0$, de donde la conclusión del teorema sigue. □

Observación 6.3.8 (Velocidad de propagación infinita). El principio fuerte del máximo implica, al igual que para la ecuación de Laplace, la *velocidad de propagación infinita* (c.f. Corolario 4.3.7).

Esto es, supongamos que inicialmente se tiene una función $g \geq 0$ pero $g \not\equiv 0$. Luego, si u resuelve la ecuación de difusión $u_t - \Delta u = 0$ en U_T y $u = g$, en $\partial_p U_T$ entonces por el principio débil del máximo (Teorema 6.3.1) se tiene que $u \geq 0$. Finalmente, por el principio fuerte del máximo (Teorema 6.3.6) concluimos que $u > 0$ en U_T.

Es decir, una leve perturbación en el dato inicial es propagada *instantáneamente* a todo el espacio.

El principio del máximo en dominios acotados implica el principio del máximo en $\mathbb{R}^n$ si se asume que las soluciones no crecen demasiado para $|x|$ grande.

TEOREMA 6.3.9 (Principio del máximo en $\mathbb{R}^n$). *Sea $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ solución de*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

donde $g \in C_b(\mathbb{R}^n)$. Si existen constantes $A, a > 0$ tales que

$$|u(x,t)| \le A e^{a|x|^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n, 0 \le t \le T,$$

entonces

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} g.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que $4aT < 1$. Entonces se tiene que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\gamma > 0$ tal que

$$\frac{1}{4(T+\varepsilon)} = a + \gamma. \tag{6.3.7}$$

Sea $y \in \mathbb{R}^n$ fijo, $\mu > 0$ y definimos

$$v(x,t) = u(x,t) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}\right).$$

Es fácil verificar que $v \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,T])$ verifica que $v_t - \Delta v = 0$ en $\mathbb{R}^n \times (0,T)$.

Tomemos ahora $r > 0$ grande y entonces, por el Teorema 6.3.1, se tiene que, si llamamos $U = B_r(y)$,

$$\max_{\overline{U_T}} v = \max_{\partial_p U_T} v$$

Acotemos entonces v en $\partial_p U_T$.

- Si $t = 0$, $x \in U$, se tiene
$$v(x,0) = u(x,0) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon)}\right) \le u(x,0) = g(x).$$
- Si $t \in (0,T]$, $x \in \partial U$, se tiene que, por (6.3.7) y usando que $|x| \le r + |y|$,
$$\begin{aligned} v(x,t) &= u(x,t) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}\right) \\ &\le A e^{a|x|^2} - \mu(4(a+\gamma))^{\frac{n}{2}} e^{(a+\gamma)r^2} \\ &\le A e^{a(|y|+r)^2} - \mu(4(a+\gamma))^{\frac{n}{2}} e^{(a+\gamma)r^2} \to -\infty \end{aligned}$$
cuando $r \to \infty$.

Luego, hemos obtenido que, si r es suficientemente grande, $v(x,t) \le \sup_{\mathbb{R}^n} g$ para todo $(x,t) \in B_r(y) \times [0,T]$, de donde

$$u(x,t) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}\right) \le \sup_{\mathbb{R}^n} g,$$

para todo $x \in B_r(y)$, $t \in [0,T]$ y $\mu > 0$.

Si hacemos tender $\mu \downarrow 0$ obtenemos

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u \le \sup_{\mathbb{R}^n} g,$$

como queríamos demostrar.

Si se tiene que $4aT > 1$, se define $T_1 = \frac{1}{8a}$ y se aplica el resultado recién demostrado en los intervalos $[0, T_1]$, $[T_1, 2T_1]$, $[2T_1, 3T_1]$, etc. □

Como corolario, tenemos la unicidad de soluciones en $\mathbb{R}^n$ *físicamente razonables*.

COROLARIO 6.3.10. *Sea $g \in C(\mathbb{R}^n)$ y $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$. Existe entonces a lo sumo una solución $u \in C^{2,1}(\mathbb{R}^n \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ de la ecuación de difusión*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{6.3.8}$$

tales que

$$|u(x,t)| \le Ae^{a|x|^2}, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0,T],$$

para algunas constantes $A, a > 0$.

DEMOSTRACIÓN. A esta altura la demostración es estándar. Considerar la diferencia de dos posibles soluciones y aplicar el principio del máximo del Teorema 6.3.9. □

EJERCICIO 6.3.11. Verificar que la solución de (6.3.8) que construimos en el Corolario 6.2.11 verifica las hipótesis del Corolario 6.3.10 y es por ende la única solución *físicamente razonable* de (6.3.8).

6.4. Métodos de energía

En esta sección veremos como algunos de los resultados obtenidos sobre la ecuación de difusión, en particular la unicidad, pueden obtenerse por métodos de energía. Es decir usando sólo técnicas de integración.

Usaremos también estos métodos para obtener otros resultados de interés, como la estabilidad de soluciones y la *unicidad hacia atrás.*

Empecemos con el siguiente resultado que nos da la estabilidad de soluciones con respecto al dato inicial.

TEOREMA 6.4.1 (Estabilidad). *Sea $h \in C(\bar{U})$ y sea $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\partial_p U_T)$ una solución de*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en } U_T \\ u = 0 & \text{en } \partial U \times (0,T) \\ u = h & \text{en } \bar{U} \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{6.4.1}$$

Entonces u verifica la siguiente estimación

$$\int_U u^2(x,t)\,dx \le \int_U h^2(x)\,dx, \quad \text{para todo } t \in [0,T]. \tag{6.4.2}$$

Demostración. Se multiplica la ecuación (6.4.1) por u y se integra sobre U para obtener
$$\int_U uu_t\,dx - \int_U u\Delta u\,dx = 0.$$
Luego, si observamos que $uu_t = \frac{1}{2}(u^2)_t$, intecambiamos la derivada con respecto a t con la integral e usamos la fórmula de integración por partes, llegamos a
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_U u^2\,dx + \int_U |\nabla u|^2\,dx = 0.$$
Si entonces llamamos $e(t) := \int_U u^2(x,t)\,dx$, se obtiene que $\dot e(t) \le 0$ para todo $t \in (0,T)$. En consecuencia, $e(t) \le e(0)$ para todo $t \in [0,T]$ que es lo que se quería demostrar. $\square$

El Teorema 6.4.1 nos da los siguientes corolarios.

Corolario 6.4.2. *Existe a lo sumo una solución de la ecuación*
$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{en } U_T\\ u = g & \text{en } \partial U \times (0,T]\\ u = h & \text{en } \bar U \times \{t=0\}.\end{cases}$$

Demostración. Efectivamente, si u_1 y u_2 son soluciones, entonces $w = u_1 - u_2$ verifica (6.4.1) con $h = 0$. Luego, la estimación (6.4.2) implica que $w = 0$. $\square$

Corolario 6.4.3. *Sean $h_1, h_2 \in C(\bar U)$ y $u_1, u_2 \in C^{2,1}(U_T)\cap C(\partial_p U_T)$ las soluciones de* (6.4.1) *con dato h_1 y h_2 respectivamente. Entonces se verifica*
$$\int_U |u_1(x,t) - u_2(x,t)|^2\,dx \le \int_U |h_1(x) - h_2(x)|^2\,dx.$$

Demostración. La demostración es elemental y queda de ejercicio. $\square$

Observemos que el Corolario 6.4.3 nos dice que si perturbamos levemente el dato inicial entonces la solución de la ecuación de difusión resulta ser una leve perturbación de la solución con el dato sin perturbar. Este hecho es fundamental en aplicaciones dado que resulta imposible en la práctica conocer los datos del problema con precisión infinita.

El siguiente teorema prueba la llamada *unicidad hacia atrás*. Esto dice que si se tienen dos funciones que son soluciones de la ecuación de difusión y ambas coinciden a un cierto tiempo $T > 0$, entonces deben ser iguales para todo $t < T$. En efecto, se tiene

Teorema 6.4.4 (Unicidad hacia atrás). *Sean $u_1, u_2 \in C^2(U_T)$ soluciones de*
$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{en } U_T\\ u = g & \text{en } \partial U \times (0,T).\end{cases}$$
Entonces, si $u_1(x,T) = u_2(x,T)$ para todo $x \in U$, se verifica que $u_1 = u_2$ en U_T.

Demostración. Sea $w = u_1 - u_2$ y, al igual que en el Teorema 6.4.1, definimos la *energía* como
$$e(t) := \int_U w^2(x,t)\,dx.$$

Luego, se tiene

$$\dot{e}(t) = -2\int_U |\nabla w|^2\,dx$$

y

$$\ddot{e}(t) = -4\int_U \nabla w\cdot\nabla w_t\,dx = 4\int_U \Delta w w_t\,dx = 4\int_U (\Delta w)^2\,dx.$$

Ahora, como $w = 0$ en ∂U, se tiene que, por la desigualdad de Hölder,

$$\int_U |\nabla w|^2\,dx = -\int_U w\Delta w\,dx \le \left(\int_U w^2\,dx\right)^{\frac12}\left(\int_U (\Delta w)^2\,dx\right)^{\frac12}.$$

Los cálculos de $\dot{e}$ y $\ddot{e}$, nos dicen entonces que

$$(\dot{e}(t))^2 \le e(t)\ddot{e}(t). \tag{6.4.3}$$

Sólo queda reconocer que esta última desigualdad es una desigualdad de convexidad. En efecto, si llamamos $f(t) = \log e(t)$ (que está bien definida cuando $e(t) > 0$), (6.4.3) implica que $\ddot{f} \ge 0$, es decir, f es una función convexa.

Veamos como usar este hecho para concluir el teorema. Supongamos, que existe $[t_1, t_2] \subset [0, T]$ donde $e(t) > 0$ en (t_1, t_2). Entonces la convexidad de f implica que

$$f((1-\tau)t_1 + \tau t_2) \le (1-\tau)f(t_1) + \tau f(t_2).$$

de donde

$$e((1-\tau)t_1 + \tau t_2) \le e(t_1)^{1-\tau}e(t_2)^{\tau}.$$

Esta desigualdad implica que $e(t) = 0$ para $t \in [t_1, t_2]$ y prueba el teorema. □

6.5. Regularidad

En esta sección veremos que, al igual que lo que sucede con las soluciones de la ecuación de Laplace, las soluciones de la ecuación de difusión resultan más regulares de lo supuesto inicialmente.

Se tiene el siguiente teorema.

Teorema 6.5.1 (Regularidad de la ecuación de difusión). *Sea $u \in C^{2,1}(U_T)$ una solución de la ecuación de difusión $u_t - \Delta u = 0$ en U_T. Entonces $u \in C^\infty(U_T)$.*

Demostración. Definimos los cilindros

$$C(x, t; r) := \{(y, s) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \colon |x - y| \le r,\ t - r^2 \le s \le t\}.$$

Sea $(x_0, t_0) \in U_T$ y $r > 0$ tal que $C := C(x_0, t_0; r) \subset U_T$ y definimos $C' := C(x_0, t_0; \frac34 r)$, $C'' := C(x_0, t_0; \frac12 r)$.

Sea $\xi(x, t)$ una función de corte que verifica

$$\xi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty)),\ 0 \le \xi(x, t) \le 1,\ \xi \equiv 1 \text{ en } C' \text{ y } \xi \equiv 0 \text{ en } (\mathbb{R}^n \times (0, t_0)) \setminus C.$$

Asumamos por un momento que $u \in C^\infty(C)$ y definimos

$$v(x, t) = \xi(x, t)u(x, t).$$

Extendiendo ξ por 0 fuera de C podemos suponer que v está definida en $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ y que $v = 0$ fuera de C.

La función v verifica que

$$\begin{aligned} v_t - \Delta v &= (\xi u_t + \xi_t u) - (\xi \Delta u + 2\nabla \xi \cdot \nabla u + \Delta \xi u) \\ &= \xi(u_t - \Delta u) + u(\xi_t - \Delta \xi) + 2\nabla \xi \cdot \nabla u \\ &= u(\xi_t - \Delta \xi) + 2\nabla \xi \cdot \nabla u =: \tilde{f} \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\xi(u_t - \Delta u) = 0$ en $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ (dado que u verifica la ecuación de difusión en C y $\xi = 0$ en el complemento de C).

Por otro lado, es fácil ver que $v \in C_b(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$, luego es una solución *físicamente razonable* (en el sentido del Corolario 6.3.10) y por ende debe coincidir con la expresión dada en el Corolario 6.2.11, i.e.

$$v(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t - s) \tilde{f}(y, s) \, dyds.$$

Supongamos ahora que $(x, t) \in C''$. Como $\xi \equiv 0$ fuera de C y $\xi \equiv 1$ en C'', sigue que

$$u(x, t) = \iint_C \Phi(x - y, t - s)[(\xi_s(y, s) - \Delta \xi(y, s))u(y, s) - 2\nabla \xi(y, s) \cdot \nabla u(y, s)] \, dyds.$$

Observemos que la expresión entre corchetes se anula en un entorno de la singularidad de Φ. Integramos ahora la última expresión por partes y se obtiene

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \iint_C [\Phi(x - y, t - s)(\xi_s(y, s) - \Delta \xi(y, s)) \\ &\qquad + 2\nabla_y \Phi(x - y, t - s) \cdot \nabla \xi(y, s)] u(y, s) \, dyds. \\ &= \iint_C K(x, t, y, s) u(y, s) \, dyds, \end{aligned}$$

Hemos deducido esta fórmula suponiendo que $u \in C^\infty(C)$. En el caso general se razona de igual manera con $u_\varepsilon := u * \rho_\varepsilon$ donde ρ_ε es el núcleo regularizante estándar en las variables x y t y se hace $\varepsilon \downarrow 0$.

Finalmente, notemos que K es C^∞ en $C \setminus C'$ y por ende $u \in C^\infty(C'')$. □

Finalicemos esta sección con una versión cuantitativa del Teorema 6.5.1.

TEOREMA 6.5.2 (Estimaciones de las derivadas). *Sea $u \in C^\infty(U_T)$ solución de $u_t - \Delta u$ en U_T. Entonces se tiene*

$$\sup_{C'} |D_x^\alpha D_t^k u| \le \frac{C_{k,|\alpha|}}{r^{|\alpha| + 2k + n + 2}} \|u\|_{L^1(C)},$$

donde $C := C(x, t; r) \subset\subset U_T$ y $C' := C(x, t; \frac{r}{2})$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $(x_0, t_0) \in U_T$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $(x_0, t_0) = (0, 0)$ y que $C = C(0, 0; 1) \subset\subset U_T$. En efecto, si definimos $\tilde{u}(x, t) := u(x_0 + rx, t_0 + r^2 t)$, entonces $\tilde{u}$ verifica la ecuación de difusión, $\tilde{u}(0, 0) = u(x_0, t_0)$,

$\tilde{u}(C(0,0;1)) = u(C(x_0,t_0;r))$ y

$$D_x^\alpha D_t^k \tilde{u}(x,t) = r^{|\alpha|+k} D_x^\alpha D_t^k u(x_0 + rx, t_0 + r^2 t)$$

$$\iint_{C(0,0;1)} |\tilde{u}|\, dxdt = \frac{1}{r^{n+2}} \iint_{C(x_0,t_0;r)} |u|\, dxdt$$

Ahora bien, por el Teorema 6.5.1, podemos escribir u como

$$u(x,t) = \iint_C K(x,t,y,s) u(y,s)\, dyds,$$

para $(x,t) \in C' = C(0,0;\frac{1}{2})$. Luego,

$$|D_x^\alpha D_t^k u(x,t)| \le \iint_C |D_x^\alpha D_t^k K(x,t,y,s)||u(y,s)|\, dyds.$$

El teorema queda entonces demostrado, llamando

$$C_{m,k} := \max_{|\alpha|=m} \sup_C |D_x^\alpha D_t^k K|.$$

□

6.6. Vuelta al paseo al azar

Para terminar el capítulo, daremos una demostración rigurosa del vínculo entre la ecuación de difusión y el paseo al azar visto en la Sección 6.1.2. Esta sección presupone cierto conocimiento de la Teoría de Probabilidad y puede ser omitida. Para una buena introducción a la probabilidad matemática, recomendamos el libro de R. Durrett, [**4**].

Tomemos un intervalo de tiempo fijo $\tau > 0$ y un intervalo espacial $h > 0$. Suponemos que se tiene una partícula que inicialmente ocupa la posición $x = 0$ y puede moverse con probabilidad $\frac{1}{2}$ tanto a la izquierda como a la derecha una distancia h luego de un intervalo de tiempo τ. Suponemos también que cada movimiento es independiente de los otros.

Luego, se definen las siguientes variables aleatorias:

$$S_n := \text{cantidad de movimientos a la derecha luego de } n \text{ pasos}$$
$$X_n := \text{posición de la partícula después de } n \text{ pasos.}$$

Estas dos variables aleatorias se relacionan de la forma

$$X_n = S_n h - (n - S_n)h = (2S_n - n)h$$

(es decir, doy S_n pasos a la derecha y $n - S_n$ pasos a la izquierda).

Veamos que es posible calcular la distribución de S_n. En efecto, sea $\{Y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución Bernoulli $\frac{1}{2}$. Es decir $\mathbb{P}(Y_i = 0) = \mathbb{P}(Y_i = 1) = \frac{1}{2}$. Notaremos esto como

$$Y_i \overset{\mathcal{L}}{\sim} \text{Bernoulli}(\tfrac{1}{2}).$$

Luego

$$S_n = \sum_{i=1}^n Y_i.$$

Esto dice que se tiran n monedas equiprobables de manera independiente y cada vez que sale cara me muevo a la derecha, mientras que cada vez que sale seca me muevo a la izquierda.

Recordemos que
$$\mathbb{E}[Y_i] = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \mathrm{Var}[Y_i] = \frac{1}{4}.$$
Luego
$$\mathbb{E}[S_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = \frac{n}{2} \quad \text{y} \quad \mathrm{Var}[S_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}[X_i] = \frac{n}{4},$$
donde hemos usado que la varianza es aditiva para variables aleatorias independientes.

Llamemos ahora $t = n\tau$ y $X(t) = X_n$. Luego, si llamamos $D := \frac{h^2}{\tau}$,
$$\mathrm{Var}[X(t)] = \mathrm{Var}[(2S_n - n)h] = h^2 \,\mathrm{Var}[2S_n - n] = h^2 4\,\mathrm{Var}[S_n] = h^2 n = Dt.$$

Ahora escribimos
$$X(t) = (2S_n - n)h = \frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}}\sqrt{n}h = \frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}}\sqrt{Dt}.$$
Calculemos, finalmente $\mathbb{P}(a \le X(t) \le b)$. Para eso, fijamos t y hacemos de manera simultánea $n \to \infty$, $\tau \to 0$ y $h \to 0$ de manera tal que
$$t = n\tau \quad \text{y} \quad D = \frac{h^2}{\tau}$$
(i.e. $\tau = \tau_n := t/n$ y $h = h_n := \sqrt{Dt/n}$). Luego, por el Teorema Central del Límite,
$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(a \le X(t) \le b) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{a}{\sqrt{Dt}} \le \frac{S_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} \le \frac{b}{\sqrt{Dt}}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\frac{a}{\sqrt{Dt}} \le N(0,1) \le \frac{b}{\sqrt{Dt}}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a}{\sqrt{Dt}}}^{\frac{b}{\sqrt{Dt}}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2Dt}}\,dx.
\end{aligned}$$
Es decir, en el límite, la densidad de X viene dada por la solución fundamental de la ecuación de difusión.

6.7. Ejercicios

Ejercicio 6.7.1. Sea u una solución regular de $u_t - \Delta u = 0$ en $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$.

1. Mostrar que $u_\lambda(x,t) := u(\lambda x, \lambda^2 t)$ también resuelve la ecuación del calor para cada $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Mostrar que $v(x,t) := x \cdot \nabla u(x,t) + 2tu_t(x,t)$ también resuelve la ecuación del calor.

EJERCICIO 6.7.2. Diremos que una función u es *calórica* en U si verifica la ecuación del calor $u_t - \Delta u = 0$ en U. Verificar las siguientes afirmaciones indicando en cada caso las hipótesis de regularidad sobre u necesarias para su validez.

1. *Combinaciones lineales:* Si u_1 y u_2 son funciones calóricas, entonces $\alpha u_1 + \beta u_2$ es calórica.
2. *Traslaciones:* Si $u(x,t)$ es calórica, entonces $u(x-\xi, t-\tau)$ es calórica.
3. *Diferenciación respecto a parámetros:* Si $u(x,t,\lambda)$ es calórica para cada λ, entonces $\partial_\lambda u(x,t,\lambda)$ es calórica para cada λ.
4. *Integración respecto a parámetros:* Si $u(x,t,\lambda)$ es calórica para cada λ, entonces $\int_a^b u(x,t,\lambda)\,d\lambda$ es calórica.
5. *Diferenciación respecto a x y t:* Si $u(x,t)$ es calórica, entonces $D_x^\alpha \partial_t^k u$ es calórica.
6. *Integración respecto x y t:* Si $u(x,t)$ es calórica, $n=1$, entonces $\int_{x_0}^x u(y,t)\,dy$ es calórica si $\partial_x u(x_0,t) = 0$ y $\int_a^t u(x,s)\,ds$ es calórica si $u(x,a) = 0$.
7. *Convoluciones:* Si $u(x,t)$ es calórica, entonces $\int_{\mathbb{R}^n} u(x-y,t)\varphi(y)\,dy$ y $\int_a^b u(x,t-s)\varphi(s)\,ds$ son calóricas.

EJERCICIO 6.7.3.

1. Si $\phi = \phi(x,t),\ x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0$, es una solución con simetría esférica de la ecuación del calor en $\mathbb{R}^3$ (i.e. $\phi(x,t) = w(|x|,t)$ con $w : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$), entonces ϕ satisface

$$\phi_{rr} + \frac{2}{r}\phi_r = \phi_t \quad t > 0,\ r > 0. \tag{6.7.1}$$

2. Mostrar que la ecuación (6.7.1) puede reducirse mediante el cambio $\psi = r\phi$ a la ecuación del calor unidimensional.

EJERCICIO 6.7.4. Para $i = 1, \dots, n$ consideramos $u_i = u_i(x,t),\ x \in \mathbb{R},\ t > 0$, soluciones de

$$\begin{cases} \partial_t u_i = \partial_{xx} u_i \\ u_i(x,0) = \varphi_i(x). \end{cases}$$

Probar que si definimos para $x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0$,

$$u(x,t) = u_1(x_1,t)\cdots u_n(x_n,t)$$
$$\varphi(x) = \varphi_1(x_1)\cdots\varphi_n(x_n)$$

entonces u es solución de la ecuación del calor en $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ con $u(x,0) = \varphi(x)$.

EJERCICIO 6.7.5. Supongamos $n = 1$ y $u(x,t) \equiv v(x^2/t)$.

1. Mostrar que $u_t = \partial_{xx} u$ si y sólo si

$$4zv''(z) + (2+z)v'(z) = 0. \tag{6.7.2}$$

2. Verificar que la solución general de (6.7.2) es

$$v(z) = C_1 \int_0^z e^{-s/4} s^{-1/2} ds + C_2.$$

3. Derivar $v(x^2/t)$ respecto a x y seleccionar C_1 adecuadamente para obtener la solución fundamental Φ.

Ejercicio 6.7.6. Sea

$$u(x,t) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0),$$

donde α y β son constantes.

1. Verificar que u satisface la ecuación del calor si y sólo si v satisface
$$\alpha t^{-(\alpha+1)} v(y) + \beta t^{-(\alpha+1)} y \cdot Dv(y) + t^{-(\alpha+2\beta)} \Delta v(y) = 0,$$
para $y = t^{-\beta} x$.
2. Verificar que si $\beta = 1/2$, v satisface
$$\alpha v + \frac{1}{2} y \cdot Dv + \Delta v = 0.$$
3. Verificar que si v es radial, i.e. $v(y) = w(|y|)$ para $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, entonces w satisface
$$\alpha w + \frac{1}{2} r w' + w'' + \frac{n-1}{r} w' = 0,$$
donde $r = |y|$, $' = \frac{d}{dr}$.
4. Tomar $\alpha = n/2$ y hallar la solución fundamental de la ecuación del calor.

Ejercicio 6.7.7 (Método de similaridad). 1. Hallar todas las soluciones de la ecuación del calor unidimensional que satisfacen
$$\phi(x,t) = \phi(\lambda x, \lambda^2 t),\ \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$
2. Mostrar que el método de similaridad dado en el item anterior también puede aplicarse a la ecuación del calor no lineal
$$\partial_x \left(K(u)\partial_x u\right) = \partial_t u, \quad K \in C^1.$$

Ejercicio 6.7.8. 1. Sea $a(t) > 0$ una función continua y sea $u(x,t)$ una solución regular de $u_t = a\Delta u$. Mostrar que existe un cambio de variables $t = \phi(\tau)$ tal que $U(x,\tau) = u(x,\phi(\tau))$ es solución de la ecuación del calor.
2. Sea $b(t) \in \mathbb{R}^n$ continua y sea $u(x,t)$ solución regular de $u_t = \Delta u + b \cdot \nabla u$. Mostrar que existe un cambio de variables $x = \psi(y,t)$ tal que $U(y,t) = u(\psi(y,t),t)$ es solución de la ecuación del calor.
3. Sea $c(t) \in \mathbb{R}$ continua y sea $u(x,t)$ solución regular de $u_t + cu = \Delta u$. Mostrar que existe $\varphi(t)$ derivable, tal que $U(x,t) = u(x,t)\varphi(t)$ es solución de la ecuación del calor.
4. Escribir una fórmula explícita para una solución de
$$\begin{cases} au_t + cu = \Delta u + b \cdot \nabla u + f & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,+\infty) \\ u = g & \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}, \end{cases}$$
donde $c(t) \in \mathbb{R}, a(t) > 0$ y $b(t) \in \mathbb{R}^n$ son continuas.

Ejercicio 6.7.9 (Principio de Duhamel). Sea u la solución del siguiente problema

$$\begin{cases} u_t - \partial_{xx} u = g(x,t) & \text{en } (0,L) \times (0,+\infty), \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \text{en } t > 0, \\ u(x,0) = 0 & \text{en } (0,L). \end{cases}$$

Probar que u puede ser representada en la forma

$$u(x,t) = \int_0^t \Phi(x,t;s)\,ds,$$

donde Φ es la solución del problema

$$\begin{cases} \Phi_t - \Phi_{xx} = 0 & \text{en } (0,L)\times(s,+\infty), \\ \Phi(0,t;s) = \Phi(L,t;s) = 0 & \text{en } t>s, \\ \Phi(x,s;s) = g(x,s) & \text{en } (0,L). \end{cases}$$

Ejercicio 6.7.10. Usar la transformada de Fourier para resolver el problema

$$\begin{cases} u_t - k\partial_{xx}u = g(x,t), & x\in\mathbb{R},\ t>0, \\ u(x,0) = f(x), & x\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

donde f y $g(\cdot,t)$ para cada t fijo, son funciones de $\mathcal{S}$.

Ejercicio 6.7.11. Deduzca la fórmula explícita

$$u(x,t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi}} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{3/2}} e^{\frac{-x^2}{4(t-s)}} h(s)ds$$

para la solución de

$$\begin{cases} u_t - \partial_{xx}u = 0, & x>0,\ t>0, \\ u(x,0) = 0, \\ u(0,t) = h(t), \end{cases}$$

donde $h(0)=0$. (Pista: defina $v(x,t) = u(x,t) - h(t)$ y extienda a v por imparidad.)

Ejercicio 6.7.12. Mostrar que la solución acotada de

$$\begin{cases} u_t - \partial_{xx}u = 0, & x>0,\ t>0, \\ u_x(0,t) = 0, \\ u(x,0) = f(x), \end{cases}$$

viene dada por la fórmula

$$u(x,t) = \int_0^\infty N(x,\xi,t) f(\xi) d\xi,$$

donde $N(x,\xi,t) = \Phi(x-\xi,t) + \Phi(x+\xi,t)$ y Φ es la solución fundamental de la ecuación del calor. (Pista: Extender f por paridad a $-\infty < x < 0$ y resolver el problema de valores iniciales para la f extendida.)

Ejercicio 6.7.13. Sea $u(x,t)$ solución del problema

$$\begin{cases} u_t = \partial_{xx}u, & x\in\mathbb{R},\ t>0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

dada por la convolución de φ en la variable x con la solución fundamental. Probar que si $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $u(\cdot,t)\in L^1(\mathbb{R})$ $\forall t>0$ y

$$\int_{\mathbb{R}} u(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx, \quad \forall t>0.$$

EJERCICIO 6.7.14. Decimos que $v \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U_T})$ es una *subsolución* de la ecuación del calor si

$$v_t - \Delta v \leq 0 \text{ en } U_T.$$

1. Probar que $\max_{U_T} v = \max_{\Gamma_T} v$.
2. Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un función suave y convexa. Probar que si u es solución de la ecuación del calor y $v = \phi(u)$, entonces v es una subsolución.
3. Probar que $v = |\nabla u|^2 + u_t^2$ es una subsolución si u es una solución de la ecuación del calor.

EJERCICIO 6.7.15.
1. Sea $C(x,t;r) = B(x,r) \times (t-r^2, t]$. Probar que si $u(x,t)$ es solución de la ecuación del calor en $C(0,0;2)$, existe una constante C universal tal que
$$\max_{C(0,0;1)} |\nabla_x u(x,t)| \leq C \max_{C(0,0;2)} |u(x,t)|.$$
2. Con la notación del ejercicio anterior, probar que si $K \subset \overline{U_T} \backslash \partial_p U_T$ es compacto, existe entonces una constante C que depende de $dist(K, \partial_p U_T)$ tal que
$$\max_{K} |\nabla_x u(x,t)| \leq C \max_{U_T} |u(x,t)|.$$

EJERCICIO 6.7.16. Sean u_n soluciones regulares del siguiente problema

$$\begin{cases} (u_n)_t - \Delta u_n = 0 & \text{en } U_T \\ u_n = f_n & \text{en } \partial_p U_T, \end{cases}$$

Probar que si $f_n \rightrightarrows f$ uniformemente en $\partial_p U_T$, entonces existe u regular tal que $u_n \to u$ uniformemente sobre U_T y u es solución de

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en } U_T \\ u = f & \text{en } \partial_p U_T. \end{cases}$$

EJERCICIO 6.7.17. Sea u una solución acotada de la ecuación del calor en $\mathbb{R}^{n+1}$. Probar que u es constante. ¿Es cierto el resultado si eliminamos la hipótesis que u sea acotada?

EJERCICIO 6.7.18. Sea u una solución de la ecuación del calor en $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que $u = 0$ en $x_1 = 0$, uniformemente Lipschitz. Probar que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $u(x,t) = \alpha x_1$.

EJERCICIO 6.7.19 (Principio del máximo para problemas parabólicos). Definimos

$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\partial_{ij}u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\partial_i u,$$

donde los coeficientes a_{ij}, b_i son continuos, $a_{ij} = a_{ji}$ y la matriz $A = (a_{ij})$ es definida positiva. Es decir, $\mathcal{L}$ es un operador elíptico según la definición del Ejercicio 4.8.18.

Probar que si $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U}_T)$ satisface

$$u_t + \mathcal{L}u = 0 \quad \text{en } U_T,$$

entonces

$$\max_{\overline{U}_T} u = \max_{\Gamma_T} u.$$

Al operador $\partial_t + \mathcal{L}$ se lo denomina *operador parabólico*.

EJERCICIO 6.7.20. Sea $u \in C^{2,1}(U_T) \cap C(\overline{U_T})$ solución de

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f(x) & \text{en } U_T, \\ u = 0 & \text{en } \partial_p U_T. \end{cases}$$

Probar que si $f \leq 0$, entonces $u_t \leq 0$.

(Sugerencia: Definir $w(x,t) = u(x, t+\varepsilon) - u(x,t)$, calcular $w_t - \Delta w$ y aplicar el principio del máximo.)

EJERCICIO 6.7.21. Consideremos el paseo aleatorio simétrico. Supongamos que en el punto $L = \bar{m}h + h/2 > 0$ se ubica una barrera perfectamente refractante. Por esto nos referimos que si una partícula llega al punto $L - h/2$ a tiempo t y se mueve hacia la derecha, entonces es reflejada y regresa al punto $L - h/2$ en el tiempo $t + \tau$.

Mostrar que cuando $h, \tau \to 0$ y $h^2/\tau = 2D$, $p = p(x,t)$ es una solución del problema

$$\begin{cases} p_t - Dp_{xx} = 0 & x < L,\ t > 0 \\ p(x,0) = \delta & x < L \\ p_x(L,t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

Más aún $\int_{-\infty}^{L} p(x,t)\, dx = 1$. Calcular explícitamente la solución.

EJERCICIO 6.7.22. Consideremos el paseo aleatorio simétrico. Supongamos que en el punto $L = \bar{m}h > 0$ se ubica una barrera perfectamente absorbente. Por esto nos referimos a que si una partícula llega al punto $L - h$ a tiempo t y se mueve a la derecha, es absorbida y se detiene en L. Mostrar que cuando $h, \tau \to 0$ y $h^2/\tau = 2D$, $p = p(x,t)$ es una solución del problema

$$\begin{cases} p_t - Dp_{xx} = 0 & x < L,\ t > 0 \\ p(x,0) = \delta & x < L \\ p(L,t) = 0 & t > 0 \end{cases}$$

Calcular explícitamente la solución.

Capítulo 7

Ecuaciones de primer orden

Una ecuación en derivadas parciales de primer orden es una ecuación del tipo

$$F(t, x, u, u_t, \nabla u) = 0,$$

donde la incógnita u está definida en un conjunto de la forma $U \times (0, T)$ con $U \subset \mathbb{R}^n$. A lo largo de este capítulo, por ∇u entendemos el gradiente en las derivadas espaciales, $\nabla u = (\partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_n} u)$.

Esta ecuación se dice lineal si F es lineal en u, u_t y ∇u.

Empecemos presentando algunos modelos donde aparecen de manera natural estas ecuaciones.

7.1. Motivación

7.1.1. Paseo al azar asimétrico revisitado. Volvamos a estudiar el paseo al azar asimétrico que vimos en la Sección 6.1.3.

Nuevamente consideraremos el caso unidimensional y haremos las mismas suposiciones que en la Sección 6.1.3, es decir:

- La partícula empieza en $x = 0$.
- La partícula se mueve, luego de un cierto tiempo τ, a la derecha con probabilidad $p_0 \neq \frac{1}{2}$ y a la izquierda con probabilidad $q_0 = 1 - p_0$ una longitud h de manera independiente en cada paso.

Volvemos a notar con $p(x, t)$ la probabilidad de que la partícula este ubicada en $x = nh$ a tiempo $t = m\tau$ y de manera análoga a la Sección 6.1.3, para $p(x, t)$ se tiene

$$p_t + o(1) = \frac{1}{2}\frac{h^2}{\tau}\partial_{xx} p + \frac{(q_0 - p_0)h}{\tau}\partial_x p + o\left(\frac{h^2}{\tau}\right).$$

Ahora, a diferencia de la Sección 6.1.3, para poder pasar al límite $h, \tau \to 0$, suponemos que

$$\frac{h}{\tau} = \beta$$

para cierta constante $\beta > 0$. Luego, obtenemos

$$p_t + o(1) = \frac{1}{2}\beta h \partial_{xx} p + (q_0 - p_0)\beta \partial_x p + o(h).$$

Finalmente, si llamamos $v = (p_0 - q_0)\beta$ y pasamos al límite $h \downarrow 0$ obtenemos la ecuación de *transporte puro*

$$p_t + v\partial_x p = 0.$$

Observemos que $v > 0$ indica que la partícula se mueve hacia la derecha mientras que $v < 0$ indica que la partícula se mueve hacia la izquierda.

Ejercicio 7.1.1. Realizar el razonamiento para el paseo al azar multidimensional y concluir que la función de probabilidad p debe verificar la ecuación

$$p_t + \mathbf{v}\cdot\nabla p = 0,$$

donde $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ representa la dirección en la que se desplaza la partícula.

7.1.2. Contaminación en un canal. Sea $u(x,t)$ la densidad o concentración de una cantidad física Q y $q(u)$ su función de flujo. Si consideramos $U\subset\mathbb{R}^n$, la integral

$$\int_U u(x,t)\,dx$$

nos da la cantidad de Q en la región U a tiempo t. Luego, la ecuación de continuidad (2.3.4) nos dice que, ante la ausencia de fuentes externas se tiene

$$u_t + \operatorname{div}(q(u)) = 0, \quad \text{en } \mathbb{R}^n\times(0,\infty).$$

En este punto, hay que decidir que tipo de *relación constitutiva* vamos a considerar para el flujo q. A diferencia de la ecuación de difusión donde se consideró la Ley de Fourier $q=-k\nabla u$ (c.f. Sección 2.4), se considera la situación de transporte en donde el flujo es una función lineal de u, i.e.

$$q(u) = \mathbf{v}u, \quad \text{donde } \mathbf{v}\in\mathbb{R}^n. \tag{7.1.1}$$

Luego, la ecuación de continuidad, junto con la relación constitutiva (7.1.1) nos da

$$u_t + \mathbf{v}\cdot\nabla u = 0, \quad \text{en } \mathbb{R}^n\times(0,\infty). \tag{7.1.2}$$

Observemos que esta es exactamente la ecuación de transporte que hemos encontrado en la sección previa.

7.2. Resultados de existencia y unicidad

7.2.1. El problema homogéneo. Veamos ahora que es posible integrar la ecuación (7.1.2). En efecto, si llamamos $\mathbf{w}=(\mathbf{v},1)\in\mathbb{R}^{n+1}$ la ecuación (7.1.2) puede rescribirse como

$$\partial_{\mathbf{w}} u = 0,$$

es decir que la función u, vista como una función en $\mathbb{R}^{n+1}$, debe ser constante sobre las líneas $(x_0,0)+s\mathbf{w}$.

Dicho de otra manera, fijemos $x_0\in\mathbb{R}^n$ y consideremos la función $\phi(s)=u(x_0+s\mathbf{v},s)$, luego

$$\phi'(s) = \partial_t u(x_0+s\mathbf{v},s) + \mathbf{v}\cdot\nabla u(x_0+s\mathbf{v},s) = 0.$$

Es decir, ϕ resulta constante, por lo que

$$\phi(s) = \phi(0) = u(x_0,0).$$

Si suponemos que inicialmente u viene dado por $u(x,0)=g(x)$ con $g\in C^1(\mathbb{R}^n)$, concluimos que

$$u(x_0+s\mathbf{v},s) = g(x_0).$$

Ahora, tomamos un punto arbitrario $(x,t)\in\mathbb{R}^n\times(0,\infty)$ y buscamos $x_0\in\mathbb{R}^n$ y $s\in\mathbb{R}$ de manera tal que $(x_0+s\mathbf{v},s)=(x,t)$. Pero trivialmente $s=t$ y $x_0=x-t\mathbf{v}$, de donde

$$u(x,t) = g(x-t\mathbf{v}),$$

por lo que hemos probado el siguiente teorema

TEOREMA 7.2.1. *Sea $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Existe entonces una única solución de la ecuación*

$$\begin{cases} u_t + \mathbf{v} \cdot \nabla u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{7.2.1}$$

y la misma viene dada por la fórmula

$$u(x,t) = g(x - t\mathbf{v}). \tag{7.2.2}$$

A la recta $(x_0 + s\mathbf{v}, s)$ se la llama la *recta característica* de la ecuación (7.2.1).

La solución dada por (7.2.2) se denomina una *onda viajera*. Se interpreta el gráfico de g como una onda y a medida que avanza el tiempo t esa onda es transportada con velocidad $\mathbf{v}$.

7.2.2. El problema no homogéneo. Consideremos ahora la ecuación no homogénea

$$u_t + \mathbf{v} \cdot \nabla u = f(x,t), \text{ en } \mathbb{R}^n \times (0,\infty).$$

En este modelo el término f, en el modelo de contaminación, representa una fuente externa de producción de contaminante medida en $[f] = \frac{\text{concentración}}{\text{tiempo}}$.

Razonemos de manera similar que en la demostración del Teorema 7.2.1. Luego, llamamos $\phi(t) := u(x_0 + t\mathbf{v}, t)$ y calculamos

$$\phi'(t) = u_t(x_0 + t\mathbf{v}, t) + \mathbf{v} \cdot \nabla u(x_0 + t\mathbf{v}, t) = f(x_0 + t\mathbf{v}, t).$$

De donde

$$\begin{aligned} u(x_0 + t\mathbf{v}, t) - u(x_0, 0) &= \int_0^t \phi'(s)\, ds \\ &= \int_0^t f(x_0 + s\mathbf{v}, s)\, ds. \end{aligned}$$

Si u verifica la condición inicial $u(x,0) = g(x)$ con $x \in \mathbb{R}^n$, llegamos a la expresión

$$u(x_0 + t\mathbf{v}, t) = g(x_0) + \int_0^t f(x_0 + s\mathbf{v}, s)\, ds.$$

Si ahora $x \in \mathbb{R}^n$ es arbitrario, se tiene que $x = x_0 + t\mathbf{v}$ si y sólo si $x_0 = x - t\mathbf{v}$ y por ende

$$u(x,t) = g(x - t\mathbf{v}) + \int_0^t f(x - (t-s)\mathbf{v}, s)\, ds.$$

Hemos probado en consecuencia el siguiente teorema.

TEOREMA 7.2.2. *Sea $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ y $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ tal que $\partial_{x_i} f \in C(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ para todo $i = 1, \dots, n$. Luego el problema*

$$\begin{cases} u_t + \mathbf{v} \cdot \nabla u = f & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{7.2.3}$$

tiene una única solución y la misma viene dada por

$$u(x,t) = g(x - t\mathbf{v}) + \int_0^t f(x - (t-s)\mathbf{v}, s)\, ds. \tag{7.2.4}$$

Ejercicio 7.2.3. Deducir el Teorema 7.2.2 a partir del Teorema 7.2.1 usando el método de Duhamel (c.f. Ejercicio 6.2.7 y Teorema 6.2.8).

7.2.3. El problema amortiguado. Supongamos ahora que se tiene un fenómeno de desintegración del contaminante y que la tasa de desintegración es proporcional a la concentración. Esto es, en la ecuación (7.2.3), considerar $f(x,t) = -\gamma u(x,t)$ para una cierta constante $\gamma > 0$.

Luego, el problema a considerar es

$$\begin{cases} u_t + \mathbf{v}\cdot\nabla u = -\gamma u & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{7.2.5}$$

Veamos que este problema puede reducirse a (7.2.1). En efecto, si llamamos

$$v(x,t) = u(x,t)e^{\gamma t},$$

esta función v verifica

$$v_t = (u_t + \gamma u)e^{\gamma t} = (-\mathbf{v}\cdot\nabla u)e^{\gamma t} = -\mathbf{v}\cdot\nabla v$$

Luego v es solución de (7.2.1) con dato inicial $v(x,0) = u(x,0) = g(x)$.

Por el Teorema 7.2.1, tenemos que

$$u(x,t)e^{\gamma t} = v(x,t) = g(x - t\mathbf{v}),$$

luego probamos el siguiente teorema.

Teorema 7.2.4. *Sea $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Luego la ecuación* (7.2.5) *tiene una única solución y la misma viene dada por*

$$u(x,t) = g(x - t\mathbf{v})e^{-\gamma t}. \tag{7.2.6}$$

La solución dada por (7.2.6) se la denomina *onda viajera amortiguada.* A diferencia de la onda viajera vista en la Sección 7.2.1, la amplitud de la onda disminuye con el tiempo a una tasa dada por la constante γ.

Ejercicio 7.2.5. Enunciar y probar un teorema de existencia y unicidad para el problema

$$\begin{cases} u_t + \mathbf{v}\cdot\nabla u = f(x,t) - \gamma u & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

donde $\gamma > 0$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ son constantes, $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ y $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$.

7.2.4. Velocidad variable. En esta sección consideraremos el caso en que la velocidad $\mathbf{v}$ es variable. Por simplicidad, consideraremos el caso en que depende del punto espacial x pero es independiente del tiempo t. Es decir, supondremos que $\mathbf{v}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y supondremos, además, que es una función Lipschitz, i.e.

$$|\mathbf{v}(x) - \mathbf{v}(y)| \le L|x-y|,$$

para alguna constante $L > 0$ y para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

El problema que intentaremos resolver es el siguiente

$$u_t + \mathbf{v}(x)\cdot\nabla u = 0, \ \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,\infty).$$

En este caso, veremos que las características de la ecuación no son más rectas sino *curvas características* determinadas por el campo de velocidades $\mathbf{v}$.

En efecto, consideremos una curva $x(t)$ de clase C^1, $x\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ y definimos, en el espíritu de la sección 7.2.1, $\phi(t) := u(x(t),t)$. Luego, ϕ verifica

$$\phi'(t) = u_t(x(t),t) + x'(t) \cdot \nabla u(x(t),t).$$

En consecuencia, si la curva $x(t)$ verifica

$$x'(t) = \mathbf{v}(x(t)),\ t > 0$$

tendremos que $\phi'(t) = 0$ y por ende $\phi(t)$ es constante.

Esto dice que $u(x(t),t) = u(x(0),0) = g(x(0))$, si asumimos que u verifica la condición inicial $u(x) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Consideremos en consecuencia $\Phi(x,t)$ el flujo asociado al campo $\mathbf{v}$, es decir

$$\begin{cases} \partial_t \Phi(x,t) = \mathbf{v}(\Phi(x,t)) & t \in \mathbb{R} \\ \Phi(x,0) = x & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{7.2.7}$$

Este flujo Φ está bien definido, $\Phi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dado que el campo $\mathbf{v}$ es Lipschitz. Ver [**17**].

Por otro lado, para cada $t \in \mathbb{R}$ fijo, el campo $\Phi(\cdot,t)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ resulta un difeomorfismo (es decir, es de clase C^1, inversible y con inversa de clase C^1). Es también fácil ver que $\Phi(\cdot,t)^{-1} = \Phi(\cdot,-t)$.

Todas estas consideraciones nos llevan a deducir que

$$u(\Phi(x_0,t),t) = g(\Phi(x_0,0)) = g(x_0).$$

Luego, si $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ es arbitrario, llamando $x_0 = \Phi(x,-t)$ concluimos que

$$u(x,t) = g(x_0) = g(\Phi(x,-t)).$$

Hemos probado entonces el siguiente teorema.

TEOREMA 7.2.6. *Sea $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ y sea $\mathbf{v} \in Lip(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. Sea $\Phi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ el flujo asociado al campo $\mathbf{v}$ dado por la ecuación* (7.2.7)*. Entonces el problema*

$$\begin{cases} u_t + \mathbf{v}(x) \cdot \nabla u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{7.2.8}$$

tiene una única solución y la misma viene dada por la fórmula

$$u(x,t) = g(\Phi(x,-t)). \tag{7.2.9}$$

Veamos un par de ejemplos.

EJEMPLO 7.2.7. Claramente, en el caso en que $\mathbf{v}$ es constante, el Teorema 7.2.6 y el Teorema 7.2.1 coinciden.

En efecto, en ese caso, $\Phi(x,t) = x + t\mathbf{v}$ (dado que es claro que esta función Φ verifica (7.2.7)). Luego

$$u(x,t) = g(\Phi(x,-t)) = g(x - t\mathbf{v})$$

como afirma el Teorema 7.2.1.

Ejemplo 7.2.8. Consideremos ahora el caso $n = 1$ y $\mathbf{v}(x) = x$. Es fácil verificar que, en este caso, se tiene

$$\Phi(x,t) = xe^t.$$

Luego, la solución de (7.2.8) viene dada por

$$u(x,t) = g(xe^{-t}).$$

Queda de ejercicio al lector verificar a mano que esta expresión efectivamente es solución de (7.2.8).

Ejercicio 7.2.9. Enunciar y probar un teorema de existencia y unicidad para el problema

$$\begin{cases} u_t + \mathbf{v}(x)\cdot\nabla u = f(x,t) & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

donde $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ y $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$, $\partial_{x_i} f \in C(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$, $i = 1,\dots,n$.

7.3. El problema en la semi recta

En esta sección estudiaremos el problema de transporte en caso de una dimensión espacial $n = 1$ y en la semi recta $x \in (0,\infty)$. En este caso, para poder resolver el problema, es necesario determinar una condición de contorno en $x = 0$. Luego, el problema a estudiar es

$$\begin{cases} u_t + \mathbf{v}u_x = f(x,t) & x > 0,\ t > 0 \\ u(0,t) = h(t) & t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & x > 0, \end{cases} \tag{7.3.1}$$

donde $\mathbf{v} \in \mathbb{R}$ es constante.

Con las técnicas desarrolladas en la sección previa es razonablemente sencillo obtener un teorema de existencia y unicidad para (7.3.1).

Teorema 7.3.1. *Si $f \in C([0,\infty) \times [0,\infty))$, $\partial_x f \in C([0,\infty) \times [0,\infty))$ y $g, h \in C^1([0,\infty))$ verifican las siguientes condiciones de compatibilidad*

$$g(0) = h(0) \quad y \quad h'(0) + \mathbf{v}g'(0) = f(0,0),$$

entonces existe una única solución de (7.3.1).

Ejercicio 7.3.2. Demostrar el Teorema 7.3.1. Sugerencia: Usar el método de las características y separar los casos $x - t\mathbf{v} > 0$ y $x - t\mathbf{v} > 0$. Verificar que las condiciones de compatibilidad garantizan que la solución hallada sea de clase C^1.

Si bien el Teorema 7.3.1 nos garantiza existencia y unicidad para el problema (7.3.1), la fórmula que se obtiene es algo engorrosa. Mostraremos ahora como por métodos de energía es posible obtener no sólo la unicidad de soluciones, sino también la estabilidad de las mismas bajo perturbaciones de los datos f, g y h.

7.3.1. Estimaciones de estabilidad. Si Multiplicamos la ecuación (7.3.1) por u e integramos en el intervalo $(0, R)$ respecto de x, obtenemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^R u^2(x,t)\,dx + \frac{\mathbf{v}}{2}(u^2(R,t) - h^2(t)) = \int_0^R f(x,t)u(x,t)\,dx.$$

Hemos usado que $u_t u = \frac{1}{2}\partial_t(u^2)$, $u_x u = \frac{1}{2}\partial_x(u^2)$ y la condición de contorno $u(0,t) = h(t)$, $t > 0$.

Si llamamos

$$E(t) = \int_0^R u^2(x,t)\,dt$$

y usamos la desigualdad $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$ para acotar el término de la derecha, llegamos a

$$E'(t) - E(t) \leq \mathbf{v}h^2(t) + \int_0^R f^2(x,t)\,dx.$$

Multiplicamos ahora por el *factor integrante* e^{-t} a ambos lados y, notando que

$$(E(t)e^{-t})' = e^{-t}(E'(t) - E(t)),$$

obtenemos

$$(E(t)e^{-t})' \leq \mathbf{v}e^{-t}h^2(t) + e^{-t}\int_0^R f^2(x,t)\,dx.$$

Finalmente, integramos esta desigualdad entre 0 y t y, recordando que $u(x,0) = g(x)$, llegamos a

$$E(t) \leq \int_0^t \mathbf{v}e^{t-s}h^2(s)\,ds + \int_0^t\int_0^R e^{t-s}f^2(x,s)\,dxds + e^t\int_0^R g^2(x)\,dx.$$

En consecuencia, hemos probado el siguiente teorema

TEOREMA 7.3.3. *Sea $u(x,t)$ la solución de* (7.3.1)*. Entonces, para todo $R, t > 0$, se tiene*

$$\int_0^R u^2(x,t)\,dx \leq \int_0^t \mathbf{v}e^{t-s}h^2(s)\,ds + \int_0^t\int_0^R e^{t-s}f^2(x,s)\,dxds + e^t\int_0^R g^2(x)\,dx.$$

Se obtienen entonces los siguiente corolarios

COROLARIO 7.3.4 (Continuidad respecto de los datos). *Sean $u_i(x,t)$, $i = 1,2$, las soluciones de* (7.3.1) *con datos f_i, g_i, h_i, $i = 1,2$. Entonces se tiene el siguiente módulo de continuidad*

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u_1(\cdot,t) - u_2(\cdot,t)\|^2_{L^2([0,R])} \leq C\Big(\|h_1 - h_2\|^2_{L^2([0,T])} + \|f_1 - f_2\|^2_{L^2([0,R]\times[0,T])} + \|g_1 - g_1\|^2_{L^2([0,R])}\Big).$$

donde $C > 0$ depende sólo de T y de $\mathbf{v}$.

COROLARIO 7.3.5 (Unicidad de soluciones). *Existe una única solución de* (7.3.1)

Las demostraciones de ambos corolarios son inmediatas y quedan de ejercicio.

EJERCICIO 7.3.6. Chequear que si en (7.3.1) se considera $f \equiv 0$, se obtiene la estimación de estabilidad

$$\int_0^R u^2(x,t)\,dx \leq \int_0^R g^2(x)\,dx + \mathbf{v}\int_0^t h^2(s)\,ds.$$

7.4. Problemas cuasilineales

En esta sección haremos una muy breve introducción a las ecuaciones de primer orden cuasilineales. No intentaremos desarrollar ninguna teoría general sobre las mismas sino que nos limitaremos a discutir dos ejemplos provenientes de la dinámica del tránsito.

7.4.1. Un modelo de dinámica del tránsito. Intentaremos desarrollar un modelo que nos permita estudiar la dinámica del tránsito vehicular en una ruta. Haremos un estudio muy simplificado para que pueda ser abordado en estas notas.

Las hipótesis que haremos sobre el modelo son las siguientes:

- Los autos no pueden sobrepasarse. Por ejemplo, si hay un solo carril o están muy congestionados.
- No hay ingreso ni egreso de autos, o ese ingreso/egreso es despreciable respecto a la densidad de autos.
- La velocidad de los autos depende sólo de la densidad de autos. Es decir, si llamamos u a la densidad, la velocidad $\mathbf{v}$ tiene la expresión $\mathbf{v} = \mathbf{v}(u)$.
- La velocidad es positiva ($\mathbf{v} \geq 0$) y decreciente ($\mathbf{v}'(u) \leq 0$), dado que si hay mayor densidad de autos, la velocidad es menor.
- Cuando la densidad es 0 los autos circulan a la velocidad máxima permitida: $\mathbf{v}(0) = v_m$.
- Existe una densidad máxima u_m tal que la velocidad es 0 a partir de esa densidad, $\mathbf{v}(u_m) = 0$. Esta es la densidad de estar "paragolpe contra paragolpe".

Un ejemplo de velocidad $\mathbf{v}$ que verifica estas hipótesis es

$$\mathbf{v}(u) = v_m\left(1 - \frac{u}{u_m}\right)_+. \tag{7.4.1}$$

Luego, por la ecuación de continuidad (2.3.4) con flujo $q(u) = \mathbf{v}(u)u$, el modelo resultante es

$$u_t + \partial_x q(u) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}\times(0,\infty).$$

Notemos que la ecuación está igualada a 0 por nuestra segunda hipótesis.

Luego, debemos resolver

$$\begin{cases} u_t + q'(u)u_x = 0 & \text{en } \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & x\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{7.4.2}$$

7.4.2. El método de las características. Apliquemos el método de las características para resolver (7.4.2). Luego, sea $x\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ una curva C^1 tal que $x(0) = x_0$ y calculemos la derivada de $\phi(t) := u(x(t),t)$.

$$\phi'(t) = u_t(x(t),t) + x'(t)u_x(x(t),t).$$

Luego, si $x'(t) = q'(u(x(t), t))$ se tendrá que $\phi'(t) = 0$, pero eso implica que $\phi(t) = \phi(0) = u(x_0, 0) = g(x_0)$ y por ende $x'(t) = q'(g(x_0))$ de donde

$$x(t) = x_0 + tq'(g(x_0)).$$

Entonces, la solución u debe verificar que

$$u(x_0 + tq'(g(x_0)), t) = g(x_0)$$

Para poder concluir se necesita que, dado $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ exista un único $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $x = x_0 + tq'(g(x_0))$. Pero, ¿es cierto esto?

Observemos que en el caso de velocidad constante, teníamos que $q'(u) = \mathbf{v}$ constante y por ende $x_0 = x - t\mathbf{v}$.

Existen dos conflictos posibles que hacen de este problema particularmente difícil:

1. *Colisión de características.*
   Supongamos que para $x_0 > x_1$ se tiene que $q'(g(x_0)) = 1$ y $q'(g(x_1)) = 2$, luego se tiene que para $t = x_0 - x_1 > 0$, las rectas características $x_i + tq'(g(x_i))$ colisionan, luego la función u no resulta bien definida en (x, t) para $x = x_0 + t = x_1 + 2t$.
2. *Ausencia de características.*
   Supongamos que para $x_0 < 0$ se tiene que $q'(g(x_0)) \leq 0$ mientras que para $x_0 > 0$ se tiene que $q'(g(x_0)) \geq 1$. Luego, es fácil ver que si (x, t) está en la región
   $$\{(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \colon 0 \leq x \leq t\}$$
   se tiene que $x \neq x_0 + tq'(g(x_0))$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}$.

7.4.3. El problema del semáforo. En esta sección estudiaremos el llamado *problema del semáforo.* Asumiremos que el dato inicial g viene dado por

$$g(x) = \begin{cases} u_m & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases} \tag{7.4.3}$$

Es decir, los autos están *amontonados* frente al semáforo en rojo y del otro lado la ruta está libre.

Asumiremos que $\mathbf{v}$ viene dada por la fórmula (7.4.1), y por ende tenemos

$$q'(u) = v_m \left(1 - \frac{2u}{u_m}\right), \text{ luego } q'(g(x_0)) = \begin{cases} -v_m & \text{si } x_0 \leq 0 \\ v_m & \text{si } x_0 > 0. \end{cases}$$

Estamos en presencia del fenómeno de *ausencia de características.* De hecho, es fácilmente verificable que la región $\{(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) \colon -v_m t < x < v_m t\}$ no es alcanzada por las rectas características $x_0 + tq'(g(x_0))$.

Una posible estrategia para sobrepasar este conflicto es el de regularizar el dato g. Consideremos entonces

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} u_m & \text{si } x \leq 0 \\ u_m \left(1 - \frac{x}{\varepsilon}\right) & \text{si } 0 < x \leq \varepsilon \\ 0 & \text{si } x > \varepsilon. \end{cases}$$

Para este dato g_ε se verifica que

$$q'(g_\varepsilon(x_0)) = \begin{cases} -v_m & \text{si } x_0 \le 0 \\ v_m\left(-1 + 2\frac{x_0}{\varepsilon}\right) & \text{si } 0 < x_0 \le \varepsilon \\ v_m & \text{si } x_0 > \varepsilon. \end{cases}$$

Luego, si llamamos $u_\varepsilon(x,t)$ a la solución de (7.4.2) con dato g_ε se tiene que, si $x_0 \le 0$, $x = x_0 + tq'(g_\varepsilon(x_0)) = x_0 - v_m t$, de donde $x \le -v_m t$ y $u_\varepsilon(x,t) = g_\varepsilon(x_0) = u_m$.

Por otro lado, si $x_0 > \varepsilon$, $x = x_0 + tq'(g_\varepsilon(x_0)) = x_0 + v_m t$, de donde $x > v_m t + \varepsilon$ y $u_\varepsilon(x,t) = g_\varepsilon(x_0) = 0$.

Finalmente, si $0 < x_0 \le \varepsilon$, $x = x_0 + tq'(g_\varepsilon(x_0)) = x_0 + tv_m\left(-1 + 2\frac{x_0}{\varepsilon}\right)$, luego $x_0 = \varepsilon\frac{x+tv_m}{\varepsilon+2v_m t}$ y por ende $-v_m t < x \le v_m t + \varepsilon$ y $u_\varepsilon(x,t) = g_\varepsilon(x_0) = u_m\left(1 - \frac{x+v_m t}{2v_m t+\varepsilon}\right)$.

Es decir, hemos obtenido la expresión

$$u_\varepsilon(x,t) = \begin{cases} u_m & \text{si } x \le -v_m t \\ u_m\left(1 - \frac{x+v_m t}{2v_m t+\varepsilon}\right) & \text{si } -v_m t < x \le v_m t + \varepsilon \\ 0 & \text{si } x > v_m t + \varepsilon. \end{cases}$$

Si hacemos $\varepsilon \downarrow 0$ obtenemos la siguiente expresión para la solución de (7.4.2) con dato (7.4.3)

$$u(x,t) = \begin{cases} u_m & \text{si } x \le -v_m t \\ u_m\left(1 - \frac{x+v_m t}{2v_m t}\right) & \text{si } -v_m t < x \le v_m t \\ 0 & \text{si } x > v_m t. \end{cases}$$

A las características que *emanan* del punto $(0,0)$ se las llama *abanico de rarefacción.*

7.4.4. El problema del congestionamiento. En esta sección estudiaremos el problema en que los autos vienen circulando por la ruta y deben detenerse por un accidente. Supondremos que el accidente ocurre en el punto $x = 0$ y luego se tiene que

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}u_m & \text{si } x < 0 \\ u_m & \text{si } x \ge 0 \end{cases} \tag{7.4.4}$$

Consideramos, al igual que en la sección anterior y sólo para simplificar los cálculos, que la velocidad $\mathbf{v}$ viene dada por (7.4.1). Al igual que antes, tenemos entonces que

$$q'(u) = v_m\left(1 - \frac{2u}{u_m}\right), \text{ de donde } q'(g(x)) = \begin{cases} \frac{3}{4}v_m & \text{si } x < 0 \\ -v_m & \text{si } x \ge 0. \end{cases}$$

En este caso observamos que todo punto (x,t) en la región

$$R := \{(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \colon -v_m t \le x < \frac{3}{4}v_m t\}$$

es alcanzado por dos rectas características, produciéndose el fenómeno de *colisión de características.*

La idea para construir una solución en esta situación es buscar una curva $s\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ tal que $s(0) = 0$, $(s(t),t) \in R$ para todo $t > 0$ y tal que si $(x,t) \in R$ verifica que

$x < s(t)$ entonces se toma para $u(x,t)$ el valor dado por la característica $x = x_0 + \frac{3}{4}v_m t$, mientras que si $x > s(t)$ se toma el valor dado por la característica $x = x_0 - v_m t$.

¿Cómo determinar entonces la curva $s(t)$ para que la función u sea solución de la ecuación (7.4.2)?

Para eso, observamos la deducción de la ecuación de continuidad (2.3.2). Ahí se tiene

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} u(x,t)\,dx = -q(u(x_2,t)) + q(u(x_1,t)). \tag{7.4.5}$$

Tomemos $t > 0$ y $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tal que $x_1 < s(t) < x_2$. Luego $u(x_1,t) = \frac{1}{8}u_m$, $u(x_2,t) = u_m$ y $q(u(x_1,t)) = \frac{7}{64}u_m v_m$, $q(u(x_2,t)) = 0$.

Por otro lado,

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x,t)\,dx = \int_{x_1}^{s(t)} \tfrac{1}{8}u_m\,dx + \int_{s(t)}^{x_2} u_m\,dx = u_m(x_2 - \tfrac{1}{8}x_1) - \tfrac{7}{8}u_m s(t).$$

Con estas consideraciones, la ecuación (7.4.5) queda

$$-\tfrac{7}{8}u_m s'(t) = \tfrac{7}{64}u_m v_m.$$

Es decir, la curva $s(t)$ verifica

$$s'(t) = -\tfrac{1}{8}v_m, \quad s(0) = 0,$$

de donde se obtiene

$$s(t) = -\tfrac{1}{8}v_m t.$$

Luego, una solución de (7.4.2) con dato (7.4.4) es

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{8}u_m & \text{si } s < -\frac{1}{8}v_m t \\ u_m & \text{si } s \geq -\frac{1}{8}v_m t. \end{cases}$$

7.5. Ejercicios

Ejercicio 7.5.1. Resolver

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \partial_i u = e^{-\sum_{i=1}^n x_i} & x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{x_1=0} = x_2 \end{cases}$$

Ejercicio 7.5.2. Resolver

$$\begin{cases} x \cdot \nabla u = |x|^2 & x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{x_1=1} = 3x_n. \end{cases}$$

Estudiar el dominio de definición de la solución.

Ejercicio 7.5.3. Mostrar, por consideraciones geométricas, que la solución general de

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

es $u(x,y) = f(xy)$ con $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Encontrar la solución cuyo gráfico contiene a la recta de ecuación $y = x$.

¿Qué pasa con el problema de valores iniciales cuando estos se dan sobre la curva $y = 1/x$?

Ejercicio 7.5.4. Probar que no existe solución de la ecuación

$$u_x + u_y = u$$

que satisfaga las condiciones iniciales $u = 1$ en la recta $y = x$.

Ejercicio 7.5.5. Probar que la solución de la ecuación

$$u_x + u_y = u^2$$

cuyo gráfico contiene a la recta $x = -y = u$ no está definida sobre la hipérbola $x^2 - y^2 = 4$.

Ejercicio 7.5.6. Sea $u(x,t)$ la solución clásica del problema

$$\begin{cases} u_t + f(x,t)u_x = \psi(x,t) & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Ver que sobre las trayectorias $(x(t), t)$, u se expresa como

$$u(x(t), t) = u_0(x(0)) + \int_0^t \psi(x(s), s)ds.$$

Ejercicio 7.5.7. Hallar la solución de la ecuación

$$(x^2 + y^2)u_x + 2xyu_y = (x + y)u$$

que satisface $u(0, y) = y$.

Ejercicio 7.5.8. Dado

$$Lu \equiv x\frac{\partial u}{\partial x} + 2y\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} - 3u,$$

resolver:

1. $\begin{cases} Lu = 0 & \text{en } \mathbb{R}^2 \times (0,\infty) \\ u(x,y,0) = xy & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} Lu = 0 & \text{en } \mathbb{R}^2 \times (0,\infty) \\ u(x,y,0) = f(x,y), & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$
   imponiendo condiciones adecuadas de diferenciabilidad a f.

Ejercicio 7.5.9. Usar el principio de Duhamel para resolver el problema

$$\begin{cases} c_t + vc_x = f(x,t) & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ c(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Hallar una fórmula explícita cuando $f(x,y) = e^{-t} \sin x$.

Ejercicio 7.5.10. Considerar la ecuación

$$u_t + uu_x = 0, \quad u(x,0) = u_0(x)$$

para una función $u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}$ y $t \geq 0$.

Una curva $(t, x(t))$ en el plano se dice característica si

$$x'(t) = u(x(t), t).$$

1. Demostrar que u es constante a lo largo de cada curva característica.
2. Demostrar que las pendientes de las curvas características están dadas por $dt/dx = 1/u$ y usarlo para probar que las curvas características son rectas determinadas por los datos iniciales.
3. Suponer que $x_1 < x_2$ y $u_0(x_1) > u_0(x_2) > 0$. Mostrar que las dos características que pasan por los puntos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$ se intersecan en un punto $P = (\bar{x}, \bar{t})$ con $\bar{t} > 0$. Mostrar que esto, junto con la parte 1 implica que la solución no puede ser continua en P.
4. Calcular $\bar{t}$.

Ejercicio 7.5.11. Repetir el ejercicio 7.5.10 para la ecuación

$$u_t + f(u)_x = 0, \tag{7.5.1}$$

donde $f'' > 0$ y $f'(u_0(x_2)) > 0$. Las características se definen ahora mediante

$$x'(t) = f'(u(x(t), t)).$$

Decimos que la ecuación (7.5.1) está en *forma de divergencia.*

Concluir que, en general, es imposible hallar una solución continua, independientemente de la suavidad de f.

Ejercicio 7.5.12. Sea $D = [-a, a] \times [0, T]$ y sea $\phi \in C^1(D)$ tal que

$$\phi(\pm a, t) = 0 \text{ para } 0 \leq t \leq T \text{ y } \phi(x, T) = 0 \text{ para } -a \leq x \leq a. \tag{7.5.2}$$

1. Probar que si u es solución de (7.5.1) entonces verifica

$$\iint_D [u\phi_t + f(u)\phi_x]\, dxdt + \int_{-a}^{a} u_0(x)\phi(x, 0)\, dx = 0. \tag{7.5.3}$$

   Una función $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ tal que $f(u) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ que verifique (7.5.3) para todo rectángulo D y toda $\phi \in C^1(D)$ que verifique (7.5.2) se denomina una solución débil de (7.5.1).
2. Mostrar que si u es una solución débil de (7.5.1) y es de clase C^1 entonces es una solución *clásica* de (7.5.1).

Ejercicio 7.5.13. Considerar la ecuación

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0 \quad \text{con dato inicial } u(x, 0) = \begin{cases} -1 & x \geq 0 \\ - & x < 0 \end{cases}.$$

Mostrar que para todo $\alpha \geq 1$, la función u_α es una solución débil de la ecuación (en el sentido del ejercicio anterior), donde u_α viene dada por

$$u_\alpha(x, t) = \begin{cases} 1 & x \leq \frac{1-\alpha}{2}t \\ -\alpha & \frac{1-\alpha}{2}t \leq x \leq 0 \\ \alpha & 0 \leq x \leq \frac{\alpha-1}{2}t \\ -1 & \frac{\alpha-1}{2}t < x. \end{cases}$$

Capítulo 8

Ecuación de ondas

En este capítulo estudiaremos la ecuación de ondas

$$u_{tt} - \Delta u = f.$$

Empezaremos con una motivación para el estudio de la ecuación, luego veremos cómo el método de separación de variables y series de Fourier nos provee con una solución en un intervalo de la recta real. Finalmente estudiaremos el problema en $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ en los casos $n = 1, 2, 3$.

8.1. Motivación

La ecuación de ondas en el caso de una dimensión espacial puede deducirse a partir de la ley de Hook.

La ley de Hook modela el desplazamiento de una partícula que se encuentra sujetada a un resorte cuando esta se desplaza de su posición de equilibrio.

Es decir, si $x(t)$ denota el desplazamiento de una partícula de masa m (donde $x(t) > 0$ significa que se desplazó hacia la derecha y $x(t) < 0$ significa que se desplazó hacia la izquierda), la ley de Hook sostiene que la fuerza que el resorte aplica sobre la partícula es proporcional al desplazamiento y apunta en dirección opuesta al mismo: $F = -\kappa x$. La constante $\kappa > 0$ depende del resorte. Luego, la segunda ley de Newton ($F = ma$, con a la aceleración), nos dice que

$$mx''(t) + \kappa x(t) = 0.$$

Supongamos ahora que se tiene una cuerda y la imaginamos como un arreglo de pequeñas masas m conectadas por resortes sin masa de longitud h y constante κ.

Si $u(x, t)$ mide la distancia al equilibrio de la masa situada en la posición x a tiempo t tenemos que sobre la partícula situada en x actúan dos fuerzas dadas por los resortes ubicados a derecha y a izquierda. Luego, la fuerza resultante es

$$F = \kappa[u(x+h, t) - u(x, t)] - \kappa[u(x, t) - u(x-h, t)] = \kappa[u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)].$$

La ley de Newton nos da entonces

$$mu_{tt}(x, t) = \kappa[u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)].$$

Si ahora suponemos que se tienen N masas separadas sobre la longitud $L = Nh$ de masa total $M = Nm$ y que la constante total de los resortes viene dada por $k = \frac{\kappa}{N}$, se escribe la ecuación anterior como

$$u_{tt}(x, t) = \frac{L^2 k}{M} \frac{u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)}{h^2}.$$

Finalmente, tomando el límite $h \downarrow 0$ se obtiene

$$u_{tt}(x,t) = c^2 \partial_{xx} u(x,t)$$

donde $c = \sqrt{\frac{L^2 k}{M}}$ es la velocidad de propagación.

Veamos otra deducción de la ecuación de ondas. Para eso consideremos que se tiene una cuerda homogénea de longitud ℓ y densidad $\rho = \rho(x)$. Asumamos que la cuerda se mueve en la dirección transversal, pero no en la dirección longitudinal. Notemos por $u(x,t)$ el desplazamiento en la posición x a tiempo t en la dirección transversal de su equilibrio. Luego, la pendiente de la cuerda a tiempo t en la posición x viene dado por $\partial_x u(x,t)$. Sea $T(x,t)$ la magnitud de la tensión (fuerza) tangencial aplicada sobre la cuerda a tiempo t en la posición x.

Consideremos la porción de la cuerda entre dos puntos próximos x_1 y x_2. La fuerza neta que actúa sobre la cuerda en la dirección longitudinal, notada por F_1 entre los puntos x_1 y x_2 es dada por

$$\begin{aligned} F_1|_{x_1}^{x_2} &= T(x,t)\cos\theta|_{x_1}^{x_2} \\ &= T(x,t)\frac{1}{\sqrt{1+\partial_x u}}\Big|_{x_1}^{x_2} \\ &= T(x_2,t)\frac{1}{\sqrt{1+\partial_x u(x_2,t)}} - T(x_1,t)\frac{1}{\sqrt{1+\partial_x u(x_1,t)}}. \end{aligned}$$

Pero, por hipótesis, la cuerda no se desplaza en la dirección longitudinal, en consecuencia la aceleración en esa dirección debe ser cero. Luego, usando la ley de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, concluimos que

$$F_1|_{x_1}^{x_2} = T(x_2,t)\frac{1}{\sqrt{1+\partial_x u(x_2,t)}} - T(x_1,t)\frac{1}{\sqrt{1+\partial_x u(x_1,t)}} = 0. \tag{8.1.1}$$

En la dirección transversal, la fuerza que actúa sobre la cuerda entre los puntos x_1 y x_2 a tiempo t, notada por F_2, es dada por

$$\begin{aligned} F_2|_{x_1}^{x_2} &= T(x,t)\sin\theta|_{x_1}^{x_2} \\ &= T(x,t)\frac{\partial_x u}{\sqrt{1+\partial_x u}}\Big|_{x_1}^{x_2} \\ &= T(x_2,t)\frac{\partial_x u(x_2,t)}{\sqrt{1+\partial_x u(x_2,t)}} - T(x_1,t)\frac{\partial_x u(x_1,t)}{\sqrt{1+\partial_x u(x_1,t)}}. \end{aligned}$$

Nuevamente, al asumir que todo el desplazamiento ocurre en la dirección transversal, por la ley de Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, concluimos que $F_2(x,t) = ma_2(x,t)$ donde $a_2(x,t)$ denota la componente de la aceleración de la cuerda en la dirección transversal en el punto x a tiempo t. Luego, entre los puntos x_1 y x_2,

$$F_2(x,t)|_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\partial_{tt} u(x,t)\,dx.$$

En consecuencia, obtenemos

$$T(x_2,t)\frac{\partial_x u(x_2,t)}{\sqrt{1+\partial_x u(x_2,t)}} - T(x_1,t)\frac{\partial_x u(x_1,t)}{\sqrt{1+\partial_x u(x_1,t)}} = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) u_{tt}(x,t)\,dx. \tag{8.1.2}$$

Si ahora asumimos que $\partial_x u$ es pequeño (que significa que se consideran pequeñas vibraciones de la cuerda), tenemos

$$\sqrt{1+\partial_x u^2} \simeq 1.$$

Luego, para valores pequeños de $\partial_x u$, por (8.1.2), obtenemos

$$T(x_2,t)\partial_x u(x_2,t) - T(x_1,t)\partial_x u(x_1,t) \simeq \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) u_{tt}(x,t)\, dx.$$

Multiplicando esta equación por $\frac{1}{x_2-x_1}$ y tomando el límite $x_2 \to x_1$ se tiene

$$\partial_x(T\partial_x u) = \rho u_{tt} \tag{8.1.3}$$

Por otro lado, de (8.1.1), para pequeños valores de $\partial_x u$,

$$T(x_2,t) \simeq T(x_1,t),$$

lo que significa que se puede suponer que T es independiente de x. Si hacemos la hipótesis adicional de que T es independiente del tiempo t y que la densidad ρ es constante, la ecuación (8.1.3) se simplifica a

$$u_{tt} = \frac{T}{\rho}\partial_{xx} u.$$

En general T y ρ son no negativas. Luego si llamamos

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}},$$

nuestra ecuación se rescribe como

$$u_{tt} = c^2 \partial_{xx} u.$$

8.2. Resolución de la ecuación de ondas por medio del método de separación de variables

En esta sección mostraremos cómo por el método de separación de variables visto en el Capítulo 3 es posible encontrar una solución a la ecuación de ondas en un intervalo con condiciones de Dirichlet en la frontera.

Observemos que por ser la ecuación de ondas una ecuación de segundo orden en la variable temporal, es necesario tener, no sólo la posición inicial de la cuerda $u(x,0)$, sino también la velocidad inicial de la misma $\partial_t u(x,0)$.

En consecuencia, nos ocuparemos de deducir la expresión de la solución del problema

$$\begin{cases} \partial_{tt} u - c^2 \partial_{xx} u = 0 & \text{en } (0,1)\times(0,\infty) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & t>0 \\ u(x,0) = g(x),\ \partial_t u(x,0) = h(x) & x \in (0,1). \end{cases} \tag{8.2.1}$$

Razonando de manera análoga a lo hecho para la ecuación del calor en el capítulo 3, buscamos una solución particular de la forma

$$u(x,t) = v(x)w(t)$$

y obtenemos que, dado $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$w(x) = w_k(x) = \sin(k\pi x)$$

de donde

$$v(t) = v_k(t) = a_k \sin(ck\pi t) + b_k \cos(ck\pi t).$$

Luego, al menos formalmente, llegamos a que la solución buscada debe ser de la forma

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin(ck\pi t) + b_k \cos(ck\pi t)) \sin(k\pi x). \tag{8.2.2}$$

Ejercicio 8.2.1. Verificar todas las afirmaciones que llevan a la expresión (8.2.2).

Queda entonces determinar los valores de los coeficientes $\{a_k, b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de manera tal que se verifiquen las condiciones iniciales y, no menos importante, que la expresión (8.2.2) defina efectivamente una solución del problema (8.2.1).

Si formalmente evaluamos la fórmula (8.2.2) en $t = 0$ obtenemos

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi x) = g(x),$$

de donde los coeficientes $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ deben ser los coeficientes de Fourier de la función g cuando se desarrolla en una serie de senos. Es decir

$$b_k = 2\int_0^1 g(y)\sin(k\pi y)\,dy.$$

Observemos que si $g \in L^2([0,1])$ entonces sobre los coeficientes $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ se tiene que

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 < \infty.$$

Calculemos ahora los coeficientes $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Para esto derivamos término a término la expresión (8.2.2) y evaluamos en $t = 0$ para obtener

$$\partial_t u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} ck\pi a_k \sin(k\pi x) = h(x),$$

de donde los coeficientes $\{ck\pi a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ resultan los coeficientes de Fourier de h cuando se desarrolla en una serie de senos. Luego

$$a_k = \frac{2}{ck\pi}\int_0^1 h(y)\sin(k\pi y)\,dy.$$

Observemos que los coeficientes $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ se comportan mejor. En efecto, si $h \in L^2([0,1])$, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_k^2 < \infty$$

y por ende, usando la desigualdad de Hölder,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^2 a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Observemos ahora qué es necesario requerir a los coeficientes $\{a_k, b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de manera tal que la función u dada por la expresión (8.2.2) defina efectivamente una función.

Buscamos usar el criterio de Weierstrass de convergencia de series y para eso es necesario acotar cada término de la misma por un término de una serie numérica convergente. Pero

$$|(a_k \sin(ck\pi t) + b_k \cos(ck\pi t)) \sin(k\pi x)| \leq |a_k| + |b_k|.$$

Como la sucesión $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ resulta absolutamente sumable si $h \in L^2([0,1])$, necesitamos ver qué hipótesis son necesarias sobre g para que la sucesión $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ también sea absolutamente sumable.

Ese problema fue estudiado en el Capítulo 3. Más aún, en la Sección 3.4 vimos que una condición suficiente es que $g \in AC[0,1]$, $g(0) = g(1) = 0$ y $g' \in L^2([0,1])$.

Luego, con esas condiciones tenemos que la expresión (8.2.2) define una función continua en $[0,1] \times [0,\infty)$ y $u(x,0) = g(x)$, $x \in [0,1]$.

Ahora, para verificar que u es efectivamente una solución de (8.2.1) falta asegurar que u sea de clase C^2 y que sus derivadas parciales se calculen derivando término a término la serie.

Para eso haremos uso del siguiente resultado cuya demostración queda de ejercicio al lector.

Ejercicio 8.2.2. Sea $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset C^1([0,1])$ tales que $f_k' \rightrightarrows g$ y $f_k \to f$ puntualmente. Entonces $f \in C^1([0,1])$, $f' = g$ y $f_k \rightrightarrows f$.

Haciendo uso del Ejercicio 8.2.2 vemos que para concluir lo deseado basta ver que las series obtenidas de derivar término a término la expresión (8.2.2) son uniformemente convergentes y para eso se utiliza, una vez más, el criterio de Weierstrass (¡verificar esto!)

Luego, si calculamos formalmente las derivadas parciales de u derivando término a término (8.2.2), obtenemos

$$\begin{aligned}
\partial_t u(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} ck\pi(a_k \cos(ck\pi t) - b_k \sin(ck\pi t)) \sin(k\pi x), \\
\partial_x u(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin(ck\pi t) + b_k \cos(ck\pi t)) k\pi \cos(k\pi x), \\
\partial_{tt} u(x,t) &= -\sum_{k=1}^{\infty} c^2k^2\pi^2(a_k \sin(ck\pi t) + b_k \cos(ck\pi t)) \sin(k\pi x), \\
\partial_{xx} u(x,t) &= -\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin(ck\pi t) + b_k \cos(ck\pi t)) k^2\pi^2 \sin(k\pi x), \\
\partial_t\partial_x u(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} ck^2\pi^2(a_k \cos(ck\pi t) - b_k \sin(ck\pi t)) \cos(k\pi x).
\end{aligned}$$

Luego, para que $u \in C^2([0,1]\times[0,\infty))$ precisamos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2(a_k^2+b_k^2) < \infty.$$

Finalmente, si usamos nuevamente los resultados de la sección 3.4 precisamos que

$$\begin{aligned}
&g \in C^2([0,1]),\ g(0)=g(1)=0,\ g'(0)=g'(1),\ g''(1)=g''(0),\ g''\in AC[0,1],\\
&g''' \in L^2([0,1])\\
&h\in C^1([0,1]),\ h(0)=h(1),\ h'(0)=h'(1),\ h'\in AC[0,1],\ h''\in L^2([0,1]).
\end{aligned}$$

Observación 8.2.3. Observemos que, a diferencia de lo que sucede con la ecuación de difusión o con la ecuación de Laplace, la regularidad de la solución de la ecuación de ondas depende de la regularidad de los datos de la ecuación. Es decir, esta ecuación no posee un *efecto regularizante.*

8.3. La ecuación de ondas en $\mathbb{R}$. La fórmula de D'Alembert

En esta sección estudiaremos la ecuación de ondas en $\mathbb{R}\times(0,\infty)$,

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - c^2\partial_{xx}u = 0 & x\in\mathbb{R},\ t>0\\ u(x,0)=g(x) & x\in\mathbb{R}\\ \partial_t u(x,0)=h(x) & x\in\mathbb{R}\end{cases} \tag{8.3.1}$$

Vamos a deducir una fórmula explícita para la solución de esta equación basándonos en la teoría desarrollada para ecuaciones de primer orden desarrollada en el capítulo 7. En efecto, la ecuación de ondas puede factorizarse como sigue

$$\begin{aligned}\partial_{tt}u - c^2\partial_{xx}u &= (\partial_{tt}-c^2\partial_{xx})u\\ &= (\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)u\end{aligned}$$

Luego, si llamamos $v := (\partial_t + c\partial_x)u$, tenemos que v verifica la ecuación de primer orden

$$\partial_t v - c\partial_x v = 0 \qquad v(x,0)=\partial_t u(x,0)+c\partial_x u(x,0) = h(x)+cg'(x),$$

de donde, por el Teorema 7.2.1,

$$v(x,t) = h(x+ct)+cg'(x+ct), \tag{8.3.2}$$

si $h\in C^1(\mathbb{R})$ y $g\in C^2(\mathbb{R})$.

Luego, u verifica la ecuación

$$\partial_t u + c\partial_x u = v(x,t), \qquad u(x,0)=g(x),$$

de donde, por el Teorema 7.2.2 y por (8.3.2), tenemos que u verifica

$$\begin{aligned}u(x,t) &= g(x-ct)+\int_0^t v(x-c(t-s),s)\,ds\\ &= g(x-ct)+\int_0^t (h(x-c(t-s)+cs)+cg'(x-c(t-s)+cs))\,ds\end{aligned}$$

Realizando ahora el cambio de variables $y = x - c(t-s) + cs$, obtenemos

$$\begin{aligned} u(x,t) &= g(x-ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} (h(y) + cg'(y))\, dy \\ &= g(x-ct) + \frac{1}{2}(g(x+ct) - g(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\, dy. \end{aligned}$$

Llegamos finalmente a la expresión

$$u(x,t) = \frac{g(x+ct)+g(x-ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\, dy. \tag{8.3.3}$$

La fórmula (8.3.3) se conoce como la *fórmula de D'Alembert* para la ecuación de ondas.

Observemos que la solución u se puede representar como

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct),$$

donde

$$F(x) := \frac{g(x)}{2} + \frac{1}{2c}\int_0^x h(y)\, dy \quad \text{y} \quad G(x) := \frac{g(x)}{2} - \frac{1}{2c}\int_0^x h(y)\, dy.$$

Esto muestra que la solución de la ecuación de ondas se representa como la superposición de dos ondas viajeras, una viajando hacia la derecha y otra hacia la izquierda, ambas a velocidad c.

Este razonamiento demuestra el siguiente teorema

TEOREMA 8.3.1. *Sea $g \in C^2(\mathbb{R})$ y $h \in C^1(\mathbb{R})$. Entonces la ecuación de ondas* (8.3.1) *tiene una única solución $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ y la misma viene dada por la fórmula de D'Alembert* (8.3.3).

COROLARIO 8.3.2 (Estabilidad de soluciones). *Sean $g \in C^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, $h \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ y $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ la solución de* (8.3.1) *dada por* (8.3.3). *Se tiene entonces la siguiente estimación de estabilidad*

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])} \le \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + T\|h\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

DEMOSTRACIÓN. De (8.3.3), se tiene

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &\le \left|\frac{g(x+ct)+g(x-ct)}{2}\right| + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} |h(y)|\, dy \\ &\le \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + t\|h\|_{L^\infty(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

de donde la conclusión del corolario sigue. □

COROLARIO 8.3.3. *Sean $g_1, g_2 \in C^2(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, $h_1, h_2 \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ y $u_1, u_2 \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ la solución de* (8.3.1) *dada por* (8.3.3) *con datos g_1, h_1 y g_2, h_2 respectivamente. Entonces se tiene*

$$\|u_1 - u_2\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times[0,T])} \le \|g_1 - g_2\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + T\|h_1 - h_2\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración es inmediata del Corolario 8.3.2 y de la linealidad de la ecuación de ondas. □

Terminamos esta sección con el siguiente ejercicio nos será de gran utilidad

EJERCICIO 8.3.4. Problar que si $g \in C^2(\mathbb{R}_+)$, $h \in C^1(\mathbb{R}_+)$, $g(0) = h(0) = 0$, entonces la solución de la ecuación de ondas en la semirecta con condición de Dirichlet homogénea

$$\begin{cases} \partial_{tt} u - \partial_{xx} u = 0 & x > 0,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & x > 0 \\ \partial_t u(x,0) = h(x) & x > 0 \end{cases}$$

viene dado por la fórmula, para $0 \le x \le t$,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(g(t+x) - g(t-x)) + \frac{1}{2}\int_{t-x}^{t+x} h(y)\,dy.$$

8.4. La ecuación de ondas en $\mathbb{R}^3$. La fórmula de Kirchkoff

En esta sección estudiaremos la ecuación de ondas en $\mathbb{R}^3 \times (0,\infty)$. Es decir, buscaremos hallar una expresión para la solución de

$$\begin{cases} \partial_{tt} u - \Delta u = 0 & x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^3 \\ \partial_t u(x,0) = h(x) & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \tag{8.4.1}$$

Empecemos con unas consideraciones generales que son válidas en cualquier dimensión espacial.

Dada $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$, definimos

$$U(x;r,t) := \fint_{\partial B_r(x)} u(y,t)\,dS_y$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ está fijo y consideramos $U(x;r,t)$ como función de $r, t > 0$.

Supongamos que u verifica la ecuación de ondas (8.4.1) en $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ y veamos que ecuación diferencial verifica $U(x;\cdot,\cdot)$.

Las condiciones iniciales son de simple verificación,

$$U(x;r,0) = \fint_{\partial B_r(x)} g(y)\,dS_y =: G(x;r)$$

$$\partial_t U(x;r,0) = \fint_{\partial B_r(x)} h(y)\,dS_y =: H(x;r)$$

Calculemos ahora las derivadas parciales de U. Razonando de manera completamente análoga al Teorema 4.3.1 (el Teorema del valor medio para funciones armónicas), se tiene que

$$\partial_r U(x;r,t) = \frac{r}{n}\fint_{B_r(x)} \Delta u(y,t)\,dy. \tag{8.4.2}$$

Observemos que $\partial_r U(x;r,t) \to 0$ cuando $r \downarrow 0$.

Ahora

$$\begin{aligned}\partial_{rr}U(x;r,t) &= \partial_r\left(\frac{1}{n\omega_n r^{n-1}}\int_{B_r(x)}\Delta u(y,t)\,dy\right)\\ &= \frac{1-n}{n\omega_n r^n}\int_{B_r(x)}\Delta u(y,t)\,dy + \frac{1}{n\omega_n r^{n-1}}\partial_r\left(\int_0^r\int_{\partial B_\rho(x)}\Delta u(y,t)\,dS_y\,d\rho\right)\\ &= \frac{1-n}{n}\fint_{B_r(x)}\Delta u(y,t)\,dy + \fint_{\partial B_r(x)}\Delta u(y,t)\,dS_y.\end{aligned}$$

Usando ahora (8.4.2), el hecho de que u verifica la ecuación de ondas y la definición de U, concluimos que

$$\begin{aligned}\partial_{rr}U(x;r,t) &= \frac{1-n}{r}\partial_r U(x;r,t) + \fint_{\partial B_r(x)}\partial_{tt}u(y,t)\,dS_y\\ &= \frac{1-n}{r}\partial_r U(x;r,t) + \partial_{tt}\left(\fint_{\partial B_r(x)}u(y,t)\,dS_y\right)\\ &= \frac{1-n}{r}\partial_r U(x;r,t) + \partial_{tt}U(x;r,t)\end{aligned}$$

Luego, $U(x;r,t)$ verifica

$$\begin{cases}\partial_{tt}U - \left(\partial_{rr}U + \frac{n-1}{r}\partial_r U\right) = 0 & r>0,\ t>0\\ U(x;r,0) = G(r) & r>0\\ \partial_t U(x;r,0) = H(r) & r>0\\ \partial_r U(x;0,t) = 0 & t>0.\end{cases} \tag{8.4.3}$$

Por otro lado, observemos que

$$\partial_{rr}(rU) = \partial_r(U + r\partial_r U) = 2\partial_r U + r\partial_{rr}U$$

y

$$\partial_{tt}(rU) = r\partial_{tt}U,$$

de donde si tomamos $n=3$, obtenemos que la función $\tilde{U} := rU$ verifica la ecuación de ondas unidimensional

$$\begin{cases}\partial_{tt}\tilde{U} - \partial_{rr}\tilde{U} = 0 & r>0,\ t>0\\ \tilde{U}(r,0) = rG(r) =: \tilde{G}(r) & r>0\\ \partial_t\tilde{U}(r,0) = rH(r) =: \tilde{H}(r) & r>0\\ \tilde{U}(0,t) = 0 & t>0\end{cases} \tag{8.4.4}$$

Ahora aplicamos el Ejercicio 8.3.4 y obtenemos la expresión

$$\tilde{U}(x;r,t) = rU(x;r,t) = \frac{1}{2}(\tilde{G}(t+r) - \tilde{G}(t-r)) + \frac{1}{2}\int_{t-r}^{t+r}\tilde{H}(y)\,dy$$

de donde

$$U(x;r,t) = \frac{\tilde{G}(t+r) - \tilde{G}(t-r)}{2r} + \frac{1}{2r}\int_{t-r}^{t+r}\tilde{H}(y)\,dy.$$

Hacemos ahora $r \downarrow 0$ y obtenemos

$$u(x,t) = \tilde{G}'(t) + \tilde{H}(t). \tag{8.4.5}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\tilde{G}'(t) &= \partial_t \left(t \fint_{\partial B_t(x)} g(y)\, dS_y \right)\\
&= \fint_{\partial B_t(x)} g(y)\, dS_y + t\partial_t \left(\fint_{\partial B_t(x)} g(y)\, dS_y \right)\\
&= \fint_{\partial B_t(x)} g(y)\, dS_y + t \fint_{\partial B_t(x)} \nabla g(y) \cdot \frac{y-x}{t}\, dS_y\\
&= \fint_{\partial B_t(x)} g(y)\, dS_y + \fint_{\partial B_t(x)} \nabla g(y) \cdot (y-x)\, dS_y\end{aligned}$$

Además,

$$\tilde{H}(t) = t \fint_{\partial B_t(x)} h(y)\, dS_y$$

Luego se obtiene la siguiente expresión para u,

$$u(x,t) = \fint_{\partial B_t(x)} (g(y) + \nabla g(y) \cdot (y-x) + t h(y))\, dS_y. \tag{8.4.6}$$

La fórmula (8.4.6) se conoce como la *Fórmula de Kirchkoff* para la ecuación de ondas en dimensión 3.

En síntesis, hemos probado el siguiente teorema.

TEOREMA 8.4.1. *Sea $g \in C^3(\mathbb{R}^3)$ y $h \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Luego, existe una única solución $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ de* (8.4.1) *y la misma viene dada por la fórmula de Kirchkoff* (8.4.6).

8.5. La ecuación de ondas en $\mathbb{R}^2$. La fórmula de Poisson

En esta sección intentaremos deducir la expresión de la solución de la ecuación de ondas en dimensión 2, es decir

$$\begin{cases} \partial_{tt} u - \Delta u = 0 & x \in \mathbb{R}^2,\ t > 0\\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^2\\ \partial_t u(x,0) = h(x) & x \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \tag{8.5.1}$$

La idea para obtener dicha expresión es muy simple. Si $u = u(x_1,x_2,t)$ podemos pensar que esto define una función $\tilde{u}(x_1,x_2,x_3,t) = u(x_1,x_2,t)$ y, claramente, si u verifica (8.5.1), entonces $\tilde{u}$ verifica la ecuación de ondas en $\mathbb{R}^3$ (8.4.1) con datos $\tilde{g}(x_1,x_2,x_3) = g(x_1,x_2)$ y $\tilde{h}(x_1,x_2,x_3) = h(x_1,x_2)$.

Luego, por (8.4.5), tenemos que $\tilde{u}$ verifica

$$\tilde{u}(\tilde{x},t) = \partial_t \left(t \fint_{\partial \tilde{B}_t(\tilde{x})} \tilde{g}(y)\, dS_y \right) + t \fint_{\partial \tilde{B}_t(\tilde{x})} \tilde{h}(y)\, dS_y,$$

donde $\tilde{x} = (x,0)$ para $x \in \mathbb{R}^2$, $\tilde{B}_t(\tilde{x})$ es la bola en $\mathbb{R}^3$ de centro en $\tilde{x}$ y radio t.

Observemos que $|\partial \tilde{B}_t(\tilde{x})| = 4\pi t^2$ y que si parametrizamos la cáscara superior de la bola $\partial \tilde{B}_t(\tilde{x})$ como

$$\psi\colon B_t(x) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \psi(y) = \sqrt{t^2 - |y-x|^2}\ (x, y \in \mathbb{R}^2),$$

se tiene que

$$dS_y = \sqrt{1 + |\nabla\psi(y)|^2}\, dy$$

y, mediante simples cálculos, se obtiene que

$$\sqrt{1 + |\nabla\psi(y)|^2} = \frac{t}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}.$$

Por otro lado, como $\tilde{g}$ no depende de x_3 se tiene que la integral sobre $\partial\tilde{B}_t(\tilde{x})$ es dos veces la integral sobre la cáscara superior y por ende obtenemos

$$t \fint_{\partial\tilde{B}_t(\tilde{x})} \tilde{g}(y)\, dS_y = \frac{1}{2\pi}\int_{B_t(x)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}\, dy = \frac{t^2}{2}\fint_{B_t(x)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}\, dy.$$

Análogamente,

$$t \fint_{\partial\tilde{B}_t(\tilde{x})} \tilde{h}(y)\, dS_y = \frac{t^2}{2}\fint_{B_t(x)} \frac{h(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}\, dy,$$

de donde

$$u(x,t) = \partial_t\left(\frac{t^2}{2}\fint_{B_t(x)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}\, dy\right) + \frac{t^2}{2}\fint_{B_t(x)} \frac{h(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}\, dy.$$

Finalmente, observamos que, mediante el cambio de variables $y = x + tz$, se tiene

$$\frac{t^2}{2}\fint_{B_t(x)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}\, dy = \frac{t}{2}\fint_{B_1(0)} \frac{g(x+tz)}{\sqrt{1-|z|^2}}\, dz,$$

luego

$$\begin{aligned}\partial_t\left(\frac{t^2}{2}\fint_{B_t(x)} \frac{g(y)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}\, dy\right) &= \frac{1}{2}\fint_{B_1(0)} \frac{g(x+tz)}{\sqrt{1-|z|^2}}\, dz + \frac{t}{2}\fint_{B_1(0)} \frac{\nabla g(x+tz)\cdot z}{\sqrt{1-|z|^2}}\, dz\\ &= \frac{t}{2}\fint_{B_t(x)} \frac{g(y) + \nabla g(y)\cdot(y-x)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}\, dy.\end{aligned}$$

En conclusión, hemos encontrado la siguiente fórmula de representación para u,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\fint_{B_t(x)} \frac{tg(y) + t^2h(y) + t\nabla g(y)\cdot(y-x)}{\sqrt{t^2 - |y-x|^2}}\, dy \tag{8.5.2}$$

La expresión (8.5.2) se denomina la *Fórmula de Poisson* para la ecuación de ondas en $\mathbb{R}^2$.

Resumiendo, hemos demostrado el siguiente teorema,

TEOREMA 8.5.1. *Sean $g \in C^3(\mathbb{R}^2)$ y $h \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Luego existe una única solución $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \times [0,\infty))$ de la ecuación de ondas* (8.5.1) *y la misma viene dada por la fórmula de Poisson* (8.5.2).

8.6. La ecuación de ondas no homogénea

En esta sección intentaremos hallar una expresión para la ecuación de ondas no homogénea

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \Delta u = f(x,t) & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R}^n \\ \partial_t u(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{8.6.1}$$

a partir de la solución de la ecuación de ondas homogénea vista en las secciones anteriores. En particular, esto dará la solución a el problema en dimensión $n = 1, 2$ y 3, pero los razonamientos de esta sección aplican a cualquier dimensión espacial una vez que se sepa resolver los correspondientes problemas homogéneos.

Al igual que lo hecho con la ecuación de difusión no homogénea (6.2.4), usaremos el *método de Duhamel*. La dificultad en aplicar el método de Duhamel para la ecuación de ondas es que no resulta claro *a priori* cómo debe tomarse la condición inicial en la resolución del problema homogéneo asociado.

Para entender cómo funcional el método de Duhamel en este caso, analicemos primero este ejemplo sencillo:

Supongamos que queremos resolver la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$x'' = ax + f(t), \quad x(0) = x'(0) = 0$$

usando el método de Duhamel.

Llamamos $y = x'$ y la ecuación anterior se traduce en el sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = ax + f(t) \end{cases}$$

equivalentemente

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Llamemos

$$X := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}, \quad F(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

Luego, la ecuación se escribe como

$$X' = AX + F(t), \quad X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si aplicamos ahora el Ejercicio 6.2.7, obtenemos que $X(t)$ se escribe como

$$X(t) = \int_0^t Z_s(t)\,ds,$$

donde $Z_s = (z_s^1, z_s^2)$ es la solución del problema homogéneo

$$Z_s' = AZ_s, \quad Z_s(s) = F(s).$$

Si rescribimos esto en términos de x, llegamos a

$$x(t) = \int_0^t z_s^1(t)\,ds,$$

donde z_s^1 es la solución de

$$(z_s^1)'' = az_s^1, \quad z_s^1(s) = 0, \quad (z_s^1)'(s) = f(s).$$

Volvemos entonces a la ecuación de ondas y definimos en consecuencia $w^s(x,t)$ a la solución de

$$\begin{cases} \partial_{tt} w^s - \Delta w^s = 0 & x \in \mathbb{R}^n, \ t > s \\ w^s(x,s) = 0 & x \in \mathbb{R}^n \\ \partial_t w^s(x,s) = f(x,s) & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Definimos entonces

$$u(x,t) = \int_0^t w^s(x,t)\,ds. \tag{8.6.2}$$

Verifiquemos efectivamente que u dada por (8.6.2) efectivamente resuelve (8.6.1). En efecto,

$$\partial_t u(x,t) = w^t(x,t) + \int_0^t \partial_t w^s(x,t)\,ds = \int_0^t \partial_t w^s(x,t)\,ds.$$

Diferenciando una vez más respecto de t,

$$\begin{aligned} \partial_{tt} u(x,t) &= \partial_t w^t(x,t) + \int_0^t \partial_{tt} w^s(x,t)\,ds \\ &= f(x,t) + \int_0^t \Delta w^s(x,t)\,ds \\ &= f(x,t) + \Delta\left(\int_0^t w^s(x,t)\,ds\right) \\ &= f(x,t) + \Delta u(x,t). \end{aligned}$$

En consecuencia, hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 8.6.1. *Sea $f \in C^1(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$. El problema* (8.6.1) *tiene una única solución $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ y viene dada por la fórmula* (8.6.2).

8.7. La ecuación de ondas en regiones acotadas

En esta sección estudiaremos algunas propiedades de las soluciones de la ecuación de ondas independientemente de la región en donde la satisfagan y de la dimensión del espacio ambiente.

Usaremos la notación del Capítulo 6 siguiente. Notaremos $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado, $T > 0$ y

$$U_T = U \times (0,T], \quad \Gamma_T = \partial U \times (0,T].$$

Supondremos que se tiene una función $u \in C^2(U_T) \cap C(\overline{U} \times [0,T])$ que verifica

$$\begin{cases} \partial_{tt} u - \Delta u = 0 & \text{en } U_T \\ u = 0 & \text{en } \Gamma_T \\ u = g & \text{en } U \times \{t = 0\} \\ \partial_t u = h & \text{en } U \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{8.7.1}$$

y veremos qué propiedades de u podemos deducir de esto.

8.7.1. Estabilidad. Comencemos por una estimación de estabilidad para las soluciones. Multipliquemos la ecuación (8.7.1) por $\partial_t u$ y notando que $\partial_{tt}u\partial_t u = \frac{1}{2}\partial_t(\partial_t u)^2$ obtenemos

$$\frac{1}{2}\int_U \partial_t(\partial_t u)^2\,dx + \int_U \nabla u\cdot\nabla(\partial_t u)\,dx = 0. \tag{8.7.2}$$

Observemos que no aparece el término de borde, puesto que al ser $u(x,t) = 0$ para $x \in \partial U$ entonces $\partial_t u(x,t) = 0$ para $x \in \partial U$.

Ahora bien, al ser $u \in C^2(U_T)$ se tiene que

$$\nabla u\cdot\nabla(\partial_t u) = \nabla u\cdot\partial_t(\nabla u) = \frac{1}{2}\partial_t(|\nabla u|^2). \tag{8.7.3}$$

Juntando (8.7.2) y (8.7.3) se obtiene

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_U \left((\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2\right)\,dx\right) = 0 \tag{8.7.4}$$

Si llamamos

$$E(t) := \int_U \left((\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2\right)\,dx,$$

obtenemos entonces que la *energía* $E(t)$ es constante, de donde $E(t) = E(0)$ para todo $t > 0$.

Luego hemos probado el siguiente teorema

TEOREMA 8.7.1. *Sea $u \in C^2(U_T)\cap C^1(U\times[0,T])$ solución de (8.7.1). Se verifica entonces la siguiente estimación de estabilidad*

$$\int_U \left((\partial_t u(x,t))^2 + |\nabla u(x,t)|^2\right)\,dx = \int_U \left(h^2(x) + |\nabla g(x)|^2\right)\,dx, \tag{8.7.5}$$

para todo $t \geq 0$.

Se tiene luego el siguiente corolario que a esta altura su demostración resulta evidente.

COROLARIO 8.7.2. *Con las mismas notaciones de la sección, si u_1 y u_2 son dos soluciones de la ecuación*

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = f & \text{en } U_T \\ u = \varphi & \text{en } \Gamma_T \\ u = g & \text{en } U\times\{t=0\} \\ \partial_t u = h & \text{en } U\times\{t=0\}, \end{cases}$$

entonces $u_1 = u_2$.

8.7.2. Dominio de dependencia. El objetivo de esta sección es ver que la ecuación de ondas, a contrario de lo que sucede con la ecuación de difusión, tiene velocidad de propagación finita.

Recordemos que para la ecuación de difusión, si el dato inicial es no idénticamente nulo y es positivo en una región, por más pequeña que esta sea, la solución se vuelve automáticamente positiva para todo valor de $x \in U$ y todo tiempo $t > 0$. Ver la Observación 6.3.8, Sin embargo eso no sucede con la ecuación de ondas. Veremos que si los datos iniciales se anulan en un entorno de un cierto punto $x_0 \in U$ entonces la solución de (8.7.1) sigue siendo cero en un entorno de x_0 para todo tiempo $0 < t < t_0$ para un cierto tiempo t_0.

Para poder precisar esto, introducimos la siguiente notación: dado $x_0 \in U$ y $t_0 > 0$ tal que $B_{t_0}(x_0) \subset U$, se define el cono de centro x_0 y altura t_0 como

$$C(x_0, t_0) := \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty) : 0 < t \le t_0,\ |x - x_0| \le t_0 - t\}.$$

Observemos que $C(x_0, t_0) \subset U_{t_0}$.

Tenemos entonces el siguiente teorema.

TEOREMA 8.7.3. *Sea $u \in C^2(U_T) \cap C^1(\overline{U_T})$ tal que $u(x,0) = \partial_t u(x,0) = 0$ para $x \in B(x_0, t_0)$ y tal que $\partial_{tt} u - \Delta u = 0$ en U_{t_0}.*

Entonces $u = 0$ en $C(x_0, t_0)$.

DEMOSTRACIÓN. La demostración es similar a la del Teorema 8.7.1. El truco consiste en mirar la *energía* de la solución a tiempo t sobre la bola $B_{t_0-t}(x_0)$ que es la sección del cono $C(x_0, t_0)$ a tiempo t.

Luego, si definimos

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_{B_{t_0-t}(x_0)} \left((\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2 \right) dx.$$

Para calcular ahora la derivada de $e(t)$, hacemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} e(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{B_{t_0-t}(x_0)} \left((\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2 \right) dx \right) \\
&= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_0^{t_0-t} \int_{\partial B_r(x_0)} \left((\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2 \right) dS_x \, dr \right) \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\partial B_{t_0-t}(x_0)} \left((\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2 \right) dS_x + \int_{B_{t_0-t}(x_0)} \left(\partial_t u \partial_{tt} u + \nabla u \cdot \partial_t(\nabla u) \right) dx
\end{aligned}$$

Razonando de manera análoga al Teorema 8.7.1, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{B_{t_0-t}(x_0)} \left(\partial_t u \partial_{tt} u + \nabla u \cdot \partial_t(\nabla u) \right) dx &= \int_{B_{t_0-t}(x_0)} \partial_t u (\partial_{tt} u - \Delta u) \, dx \\
&\quad + \int_{\partial B_{t_0-t}(x_0)} \partial_t u \partial_{\mathbf{n}} u \, dS_x \\
&= \int_{\partial B_{t_0-t}(x_0)} \partial_t u \partial_{\mathbf{n}} u \, dS_x
\end{aligned}$$

dado que u es solución de la ecuación de ondas.

Luego obtuvimos que

$$\frac{d}{dt} e(t) = \int_{\partial B_{t_0-t}(x_0)} \left(\partial_t u \partial_{\mathbf{n}} u - \frac{1}{2} (\partial_t u)^2 - \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \right) dS_x.$$

Ahora bien, de la desigualdad $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$ para $a, b > 0$, obtenemos

$$|\partial_t u \partial_{\mathbf{n}} u| \leq |\partial_t u||\nabla u| \leq \frac{1}{2}|\partial_t u|^2 + \frac{1}{2}|\nabla u|^2,$$

y en conclusión

$$\frac{d}{dt}e(t) \leq 0.$$

De esta desigualdad el teorema se concluye fácilmente. En efecto, como $e(t)$ es decreciente, tenemos que $e(t) \leq e(0) = 0$, luego

$$\frac{1}{2}\int_{B_{t_0-t}(x_0)} \left((\partial_t u)^2 + |\nabla u|^2\right)\, dx \leq 0 \quad \text{para todo } 0 < t < t_0,$$

de donde u resulta constante en $C(x_0, t_0)$. Como $u = 0$ en $B_{t_0}(x_0) \times \{t = 0\}$ concluimos que $u = 0$ en $C(x_0, t_0)$. $\square$

De manera inmediata deducimos el siguiente corolario.

Corolario 8.7.4. *Sean $u_1, u_2 \in C^2(U_T) \cap C^1(\overline{U_T})$ dos soluciones de la ecuación de ondas en U_T tales que $u_1(x, 0) = u_2(x, 0)$ para $x \in B_{t_0}(x_0)$ y $\partial_t u_1(x, 0) = \partial_t u_2(x, 0)$ para $x \in B_{t_0}(x_0)$.*

Entonces $u_1 = u_2$ en $C(x_0, t_0)$.

8.8. Ejercicios

Ejercicio 8.8.1. Utilizar la transformada de Fourier para resolver el problema

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - c^2\partial_{xx}u = h(x,t) & \text{en } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = \partial_t u(x, 0) = 0 & \text{en } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ejercicio 8.8.2. Utilizar la transformada de Fourier para hallar la solución de

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g & \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \\ \partial_t u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

donde $g \in \mathcal{S}$.

Sugerencia: Transformar Fourier en la variable x y para la ODE resultante busque soluciones de la forma $\beta e^{t\gamma}$ (β y γ números complejos).

Ejercicio 8.8.3. Verificar que el cambio de variables

$$\xi = x + ct, \qquad \eta = x - ct,$$

transforma la ecuación de ondas $\partial_{tt}u - c^2\partial_{xx}u = 0$ en

$$\partial_\xi \partial_\eta u = 0.$$

Usar este cambio de variables para hallar la fórmula de D'Alembert para la solución de la ecuación de ondas unidimensional.

Ejercicio 8.8.4. Encontrar una fórmula explícita para la solución de

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \partial_{xx}u = 0 & x > 0,\ t > 0 \\ u(0,t) = 0 & t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & x > 0 \\ \partial_t u(x,0) = h(x) & x > 0. \end{cases}$$

Ejercicio 8.8.5. Sean $g \in C^3(\mathbb{R}^3),\ h \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Definamos u por la fórmula de Kirchhoff.

Probar que $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times [0,\infty))$ y satisface el problema de valores iniciales para la ecuación de ondas

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^3 \\ \partial_t u(x,0) = h(x) & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Ejercicio 8.8.6 (Equipartición de la energía). Sea $u \in C^2(\mathbb{R}\times[0,\infty))$ una solución de la ecuación de ondas unidimensional

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \partial_{xx}u = 0 & \text{en } \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R} \\ \partial_t u(x,0) = h(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Supongamos que g y h son suaves con soporte compacto.

La energía cinética $k(t)$ y la energía potencial $p(t)$ se definen como

$$k(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} (\partial_t u)^2\, dx, \qquad p(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} (\partial_x u)^2\, dx.$$

Probar que

1. $k(t) + p(t)$ es constante en t.
2. $k(t) = p(t)$ para tiempos t suficientemente grandes.

(Sugerencia: Usar que u viene dado por $u(x,t) = F(x+t) + G(x-t)$.)

Ejercicio 8.8.7. Sea u la solución de la ecuación de ondas

$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \Delta u = 0 & \text{en } \mathbb{R}^3 \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^3 \\ \partial_t u(x,0) = h(x) & x \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

dada por la fórmula de Kirchhoff, donde g, h son suaves y tienen soporte compacto. Mostrar que existe una constante C tal que

$$|u(x,t)| \leq \frac{C}{t} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0.$$

Ejercicio 8.8.8. Se define una solución débil de la ecuación de ondas unidimensional a una función u tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)(\partial_{tt}\phi(x,t) - \partial_{xx}\phi(x,t))\, dxdt = 0$$

para toda $\phi \in C_c^2(\mathbb{R}^2)$.

1. Mostrar que toda solución clásica de la ecuación de ondas unidimensional es una solución débil y que toda solución débil regular de la ecuación de ondas es solución clásica.
2. Mostrar que las funciones discontinuas
$$u_1(x,t) = H(x-t), \quad u_2(x,t) = H(x+t)$$
donde H es la función de Heaviside
$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$
son soluciones débiles de la ecuación de ondas unidimensional.

Ejercicio 8.8.9. Sea $f \in C_c(\mathbb{R})$. Probar que $u(x,t) \equiv f(x-t)$ es solución débil de la ecuación de ondas unidimensional en el sentido del ejercicio anterior.

Ejercicio 8.8.10. Encontrar una solución de
$$\partial_{tt}u - \partial_{xx}u = \lambda^2 u,$$
$\lambda \in \mathbb{R}$, de la forma $u = f(x^2 - t^2) = f(s)$, donde $f(0) = 1$, en forma de serie de potencias en s.

Ejercicio 8.8.11. Hallar la solución de
$$\begin{cases} \partial_{tt}u - \partial_{xx}u = 0 & x > 0,\ t > 0 \\ u(0,t) = f(t) & t > 0 \\ u(x,0) = g(x) & x > 0 \\ \partial_t u(x,0) = h(x) & x > 0. \end{cases}$$
con $f, g, h \in C^2$ que satisfacen
$$f(0) = g(0), \quad f'(0) = h(0), \quad f''(0) = g''(0).$$

Verificar que la solución obtenida tiene derivadas de segundo orden continuas aún sobre la característica $x = t$.

Ejercicio 8.8.12. Probar que si u es una solución clásica radial de la ecuación de ondas en dimensión 3 (i.e. $u(x,t) = w(|x|,t),\ x \in \mathbb{R}^3$), se tiene que existen F y G tales que
$$u(x,t) = \frac{F(|x|-t) + G(|x|+t)}{|x|}.$$

Capítulo 9

Espacios de Sobolev

En este capítulo daremos una muy breve introducción a la teoría de funciones de Sobolev. Las funciones de Sobolev son aquellas tales que sus derivadas distribucionales se representan por funciones (cf. Definición 9.1.1).

Nos limitaremos a dar una somera idea de estos espacios y demostraremos las propiedades que son estrictamente necesarias para el desarrollo de la teoría de soluciones débiles para problemas uniformemente elípticos que desarrollaremos en el próximo capítulo.

Para un desarrollo completo de la teoría de estos espacios, alentamos al lector a consultar la muy buena bibliografía que existe sobre el tema, en particular los excelentes libros de Adams [**1**] y Maz'ya [**11**]. También en los libros Brezis [**2**], de Evans [**6**] y de Gilbarg-Trudinger [**8**] se encuentra un tratamiento completo de estos espacios.

9.1. Definiciones y propiedades elementales

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Recordemos primero que si $f \in L^1_{\text{loc}}(U)$, entonces se tiene que f induce una distribución (que seguimos notando por f) como

$$\langle f, \phi\rangle = \int_U f\phi\, dx,$$

donde $\phi \in \mathcal{D}(U) = C^\infty_c(U)$ (ver la sección 5.3). Luego, en el sentido de las distribuciones, f posee una derivada parcial distribucional, es decir

$$\langle \partial_i f, \phi\rangle = -\int_U f\partial_i\phi\, dx.$$

Cabe entonces preguntarse si esta derivada distribucional $\partial_i f \in \mathcal{D}'(U)$ puede a su vez representarse por medio de una función. Es decir, si existe una función $g_i \in L^1_{\text{loc}}(U)$ tal que

$$\langle \partial_i f, \phi\rangle = \int_U g_i\phi\, dx.$$

Veremos que, en caso de existir una tal g_i la misma es única y se nota, obviamente, como $g_i = \partial_i f$, de manera tal que, para estas funciones, vale la fórmula de integración por partes

$$\int_U \partial_i f\phi\, dx = -\int_U f\partial_i\phi\, dx$$

para toda $\phi \in C^\infty_c(U)$.

Esto motiva la siguiente definición.

DEFINICIÓN 9.1.1. Una función $f \in L^1_{\text{loc}}(U)$ se dice una *función de Sobolev* si sus derivadas distribucionales $\partial_i f$, $i = 1, \dots, n$ se representan por medio de una función $g_i \in L^1_{\text{loc}}(U)$, $i = 1, \dots, n$.

Notaremos al conjunto de las funciones de Sobolev por $W^{1,1}_{\text{loc}}(U)$.

Veamos que, efectivamente, las funciones g_i están unívocamente determinadas.

PROPOSICIÓN 9.1.2. *Sea $f \in W^{1,1}_{loc}(U)$ y sean g_i y $\tilde{g}_i$ dos funciones en $L^1_{loc}(U)$ que representan a la derivada distribucional $\partial_i f$. Entonces se tiene que $g_i = \tilde{g}_i$ en casi todo punto de U.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración es simple. En efecto, de la definición de g_i y $\tilde{g}_i$ se tiene que

$$\int_U g_i \phi \, dx = -\int_U f \partial_i \phi \, dx = \int_U \tilde{g}_i \phi \, dx.$$

Luego, se tiene que

$$\int_U (g_i - \tilde{g}_i)\phi \, dx = 0$$

para toda $\phi \in C^\infty_c(U)$, de donde se concluye la demostración. □

Notaremos de ahora en más $\partial_i f$ a la función de $L^1_{\text{loc}}(U)$ que representa a la derivada distribucional de f.

DEFINICIÓN 9.1.3. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sea $1 \le p \le \infty$. Se definen los espacios de Sobolev

$$W^{1,p}(U) := \{f \in W^{1,1}_{\text{loc}}(U) \colon f, \partial_i f \in L^p(U),\ i = 1, \dots, n\}.$$

En estos espacios se define de manera *natural* una norma combinando las normas $L^p(U)$ de la función f y de sus derivadas parciales $\partial_i f$. En general, cualquier manera *razonable* de hacerlo nos da normas equivalentes. En estas notas usaremos la siguiente definición.

DEFINICIÓN 9.1.4. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $1 \le p \le \infty$. En el espacio $W^{1,p}(U)$ se define la norma

$$\|f\|_{W^{1,p}(U)} = \|f\|_{1,p} := \begin{cases} \left(\|f\|_p^p + \sum_{i=1}^n \|\partial_i f\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \le p < \infty \\ \|f\|_\infty + \sum_{i=1}^n \|\partial_i f\|_\infty & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

OBSERVACIÓN 9.1.5. En el caso particular $p = 2$ el espacio $W^{1,2}(U)$ tiene una estructura de producto interno. De hecho, si $f, g \in W^{1,2}(U)$, se define

$$(f, g) := \int_U fg \, dx + \sum_{i=1}^n \int_U \partial_i f \partial_i g \, dx.$$

Luego, se tiene que

$$\|f\|_{1,2} = (f, f)^{\frac{1}{2}}.$$

OBSERVACIÓN 9.1.6. Es usual notar al espacio $W^{1,2}(U)$ como $H^1(U)$.

Los espacios $W^{1,p}(U)$ tienen buenas propiedades como lo muestra el siguiente teorema.

TEOREMA 9.1.7. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $1 \leq p \leq \infty$. Entonces el espacio $W^{1,p}(U)$ con su norma asociada $\|\cdot\|_{1,p}$ resulta un espacio de Banach.*

En particular el espacio $H^1(U) = W^{1,2}(U)$ resulta un espacio de Hilbert con el producto interno dado por la Observación 9.1.5.

Más aún, si $1 \leq p < \infty$ entonces $W^{1,p}(U)$ resulta separable.

Finalmente, si $1 < p < \infty$, $W^{1,p}(U)$ resulta reflexivo.

DEMOSTRACIÓN. La demostración es simple aunque algo tediosa. Sólo daremos las indicaciones generales de cómo se procede dejando los detalles de ejercicio al lector.

1) La completitud de $W^{1,p}(U)$ es una consecuencia inmediata de la completitud del espacio de Lebesgue $L^p(U)$. En efecto, si $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset W^{1,p}(U)$ es una sucesión de Cauchy, entonces $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{\partial_i f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ resultan sucesiones de Cauchy en $L^p(U)$ para $i = 1, \dots, n$.

Luego existen $f, g_i \in L^p(U)$, $i = 1, \dots, n$ tales que $f_k \to f$ y $\partial_i f_k \to g_i$ en $L^p(U)$ para $i = 1, \dots, n$. La verificación de que $g_i = \partial_i f$ sigue de la definición de derivada débil.

2) Para verificar que $W^{1,p}(U)$ es separable, se observa que $W^{1,p}(U) \subset [L^p(U)]^{n+1}$, donde la inclusión se da vía la aplicación

$$f \mapsto (f, \partial_1 f, \dots, \partial_n f).$$

Es sencillo verificar que esta aplicación es una isometría y por ende $W^{1,p}(U)$ resulta un subespacio cerrado de $[L^p(U)]^{n+1}$. Dado que este último espacio es separable si $1 \leq p < \infty$, sigue que $W^{1,p}(U)$ es separable.

3) Para ver la reflexividad de $W^{1,p}(U)$ si $1 < p < \infty$ se razona de manera análoga al ítem anterior y, dado que un subespacio cerrado de un espacio de Banach reflexivo resulta reflexivo (ver [**2**]), concluimos que $W^{1,p}(U)$ es reflexivo. $\square$

El siguiente ejemplo es muy ilustrativo.

EJEMPLO 9.1.8. Consideremos $U = B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ y $f(x) = |x|^{-\gamma}$ con $\gamma > 0$. Queremos entonces ver para qué valores de γ se cumple que $f \in W^{1,p}(U)$.

Primero se debe cumplir que $f \in L^p(U)$, es decir $|x|^{-\gamma p} \in L^1(U)$. Es simple chequear, pasando a coordenadas polares, que esto resulta equivalente a $\gamma p < n$ o, equivalentemente, $\gamma < \frac{n}{p}$.

Esta función f resulta de clase $C^1(U \setminus \{0\})$ y su derivada clásica viene dada por

$$\partial_i f(x) = -\gamma \frac{x_i}{|x|^{\gamma+2}}.$$

Luego, se tiene

$$|\partial_i f(x)|^p = \gamma^p \left(\frac{|x_i|}{|x|^{\gamma+2}} \right)^p,$$

de donde

$$\sum_{i=1}^n |\partial_i f(x)|^p = \gamma^p \frac{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}{|x|^{(\gamma+2)p}}.$$

Observemos ahora que

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \leq n(\max_{1\leq i\leq n} |x_i|)^p \leq n|x|^p \tag{9.1.1}$$

y

$$|x|^p \leq n^p(\max_{1\leq i\leq n} |x_i|)^p \leq n^p \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p. \tag{9.1.2}$$

Estas dos desigualdades implican que

$$\sum_{i=1}^{n} |\partial_i f(x)|^p \sim \frac{1}{|x|^{(\gamma+1)p}},$$

de donde se concluye que $\partial_i f \in L^p(U)$ si y sólo si $(\gamma+1)p < n$. Es decir

$$\gamma < \frac{n-p}{p}.$$

Observemos que esta restricción implica, en particular, que $p < n$. Se puede ver, aunque no lo haremos en estas notas, que si $f \in W^{1,p}(U)$ y $p > n$ entonces f coincide en casi todo punto con una función continua en U (ver **[6]**).

Para concluir el ejemplo, falta verificar que la derivada clásica, que está definida en $U \setminus \{0\}$ coincide con la derivada débil. En efecto,

$$\langle \partial_i f, \phi\rangle = -\int_{B_1(0)} f\partial_i\phi\, dx = -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{B_1(0)\setminus B_\varepsilon(0)} f\partial_i\phi\, dx.$$

Ahora

$$\begin{aligned} -\int_{B_1(0)\setminus B_\varepsilon(0)} f\partial_i\phi\, dx &= \int_{B_1(0)\setminus B_\varepsilon(0)} \partial_i f\phi\, dx - \int_{\partial(B_1(0)\setminus B_\varepsilon(0))} f\phi\mathbf{n}_i\, dS \\ &= \int_{B_1(0)\setminus B_\varepsilon(0)} \partial_i f\phi\, dx + \int_{\partial B_\varepsilon(0)} f\phi\mathbf{n}_i\, dS. \end{aligned}$$

Pero

$$\left|\int_{\partial B_\varepsilon(0)} f\phi\mathbf{n}_i\, dS\right| \leq \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \varepsilon^{-\gamma}|\phi|\, dS \leq n\omega_n\|\phi\|_\infty \varepsilon^{n-1-\gamma} \to 0$$

cuando $\varepsilon \downarrow 0$, dado que $\gamma < \frac{n-p}{p} < n-1$ si $p \geq 1$.

Luego la derivada débil y la clásica coinciden y $f \in W^{1,p}(U)$ si $0 < \gamma < \frac{n-p}{p}$.

9.2. Espacios de Sobolev de mayor orden

Si bien no serán usados en estas notas, es posible definir los espacios de Sobolev de mayor orden. Estos espacios se notan $W^{k,p}(U)$ donde $k \in \mathbb{N}$ indica el número de derivadas débiles que se consideran.

Se tiene la siguiente definición.

Definición 9.2.1. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $1 \leq p \leq \infty$ y $k \in \mathbb{N}$. Se define el espacio de Sobolev de orden k inductivamente como

$$W^{k,p}(U) := \{f \in W^{1,p}(U) \colon \partial_i f \in W^{k-1,p}(U), i = 1, \ldots, n\}.$$

Observación 9.2.2. Observemos que, razonando inductivamente, si $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ es un multiíndice, $|\alpha| \le k$, entonces la derivada débil $D^\alpha f$ verifica

$$\int_U D^\alpha f \phi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U f D^\alpha \phi \, dx,$$

para toda $\phi \in C_c^\infty(U)$ y $f \in W^{k,p}(U)$.

Definición 9.2.3. En el espacio de Sobolev $W^{k,p}(U)$ se define la norma

$$\|f\|_{W^{k,p}(U)} = \|f\|_{k,p} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha f\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \le p < \infty \\ \sum_{|\alpha|\le k} \|D^\alpha f\|_\infty & \text{si } p = \infty, \end{cases}$$

donde la suma es tomada sobre el conjunto de multiíndices $\mathbb{N}_0^n$.

De manera análoga al Teorema 9.1.7 se tiene el siguiente teorema para los espacios $W^{k,p}(U)$ cuya demostración queda de ejercicio al lector.

Teorema 9.2.4. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $1 \le p \le \infty$. Entonces el espacio $W^{k,p}(U)$ con su norma asociada $\|\cdot\|_{k,p}$ resulta un espacio de Banach.*

En particular el espacio $W^{k,2}(U) = H^k(U)$ resulta un espacio de Hilbert con el producto interno

$$(f,g) := \sum_{|\alpha|\le k} \int_U D^\alpha f D^\alpha g \, dx.$$

Más aún, si $1 \le p < \infty$ entonces $W^{k,p}(U)$ resulta separable.

Finalmente, si $1 < p < \infty$. $W^{k,p}(U)$ resulta reflexivo.

9.3. El espacio $W_0^{1,p}(U)$

Como ya hemos estudiado en la resolución de distintas EDPs, un hecho de suma importancia es el de poder determinar los valores de frontera de una función (la solución de dicha EDP). Cuando la función es continua, evaluar a la misma en la frontera de una región del espacio no presenta mayores dificultades, mientras que si la función está definida en casi todo punto la evaluación en la frontera no está bien definida a priori dado que, en general, la frontera ∂U tiene medida de Lebesgue 0.

Sin embargo, cuando la función pertenece al espacio de Sobolev $W^{1,p}(U)$ es posible determinar qué significa que la misma se anule sobre ∂U, en un sentido *débil.*

Ese es el contenido de la siguiente definición.

Definición 9.3.1. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $1 \le p \le \infty$. Se define el espacio de las funciones de Sobolev que se anulan en ∂U como

$$W_0^{1,p}(U) := \overline{C_c^\infty(U)},$$

donde la clausura se toma con respecto a la norma $\|\cdot\|_{1,p}$.

Algunas observaciones están en orden.

Observación 9.3.2.
1. Observemos que, como la clausura de un subespacio es un subespacio, por definición $W_0^{1,p}(U)$ es un subespacio cerrado de $W^{1,p}(U)$. Luego hereda las buenas propiedades funcionales de $W^{1,p}(U)$, es decir $W_0^{1,p}(U)$ es un espacio completo, separable para $1 \leq p < \infty$ y reflexivo para $1 < p < \infty$.
2. También por definición se tiene que las funciones regulares $C_c^\infty(U)$ son densas en $W_0^{1,p}(U)$.
3. Dado que, extendiendo por cero las funciones regulares, se tiene $C_c^\infty(U_1) \subset C_c^\infty(U_2)$ si $U_1 \subset U_2$, se concluye que $W_0^{1,p}(U_1) \subset W_0^{1,p}(U_2)$ donde las funciones definidas sobre U_1 se extienden por cero a U_2.

El espacio $W_0^{1,p}(U)$ es, como dijimos anteriormente, el espacio de las funciones de $W^{1,p}(U)$ que se anulan sobre ∂U. Un caso interesante ocurre cuando $U = \mathbb{R}^n$ y luego $\partial U = \emptyset$. En este caso se tiene el siguiente resultado.

Proposición 9.3.3. *Sea $1 \leq p < \infty$. Entonces,*

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) = W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Demostración. La demostración de este resultado se basa en los siguientes dos hechos.

1. Las funciones de soporte compacto son densas en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.
2. La regularización por convolución aproxima funciones de $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ en norma $\|\cdot\|_{1,p}$.

Asumiendo esos hechos la demostración es simple. En efecto, sea $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ y $\delta > 0$. Luego, por 1, existe $g \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{sop}(g)$ compacto, tal que

$$\|f - g\|_{1,p} < \frac{\delta}{2}.$$

Sea ahora ρ el núcleo regularizante estándar y definimos $g_\varepsilon = \rho_\varepsilon * g$. Luego $g_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (dado que $\operatorname{sop}(g)$ es compacto) y, por 2,

$$\|g_\varepsilon - g\|_{1,p} \to 0, \text{cuando } \varepsilon \downarrow 0.$$

Luego, si ε_0 es tal que $\|g_{\varepsilon_0} - g\|_{1,p} < \frac{\delta}{2}$, sigue que

$$\|f - g_{\varepsilon_0}\|_{1,p} \leq \|f - g\|_{1,p} + \|g - g_{\varepsilon_0}\|_{1,p} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

y se concluye la demostración.

Falta entonces demostrar 1 y 2. El ítem 2 es el Ejercicio 9.5.8. Para demostrar el ítem 1, tomamos una función $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi \equiv 1$ en $B_1(0)$, $\varphi \equiv 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus B_2(0)$, $0 \leq \varphi \leq 1$ en $\mathbb{R}^n$ y $|\nabla\varphi| \leq C$ en $\mathbb{R}^n$.

Se define entonces $\varphi_k(x) = \varphi(\frac{x}{k})$. Luego $\varphi_k \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y verifica $\varphi_k \equiv 1$ en $B_k(0)$, $\varphi \equiv 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus B_{2k}(0)$, $0 \leq \varphi_k \leq 1$ en $\mathbb{R}^n$ y $|\nabla\varphi_k| \leq \frac{C}{k}$ en $\mathbb{R}^n$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Si ahora $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, por el Ejercicio 9.5.1, se tiene que $\varphi_k f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ y $\operatorname{sop}(\varphi_k f) \subset B_{2k}(0)$.

Luego,

$$\|f - \varphi_k f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p (1 - \varphi_k)^p \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_k(0)} |f|^p \, dx \to 0 \text{ cuando } k \to \infty.$$

Nuevamente por el Ejercicio 9.5.1, $\partial_i(\varphi_k f) = \partial_i\varphi_k f + \varphi_k\partial_i f$ y por ende

$$\|\partial_i f - \partial_i(\varphi_k f)\|_p \leq \|\partial_i f(1-\varphi_k)\|_p + \|\partial_i\varphi_k f\|_p.$$

Pero,

$$\|\partial_i f(1-\varphi_k)\|_p^p \leq \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_k(0)} |\partial_i f|^p\,dx \to 0 \text{ cuando } k\to\infty$$

y

$$\|\partial_i\varphi_k f\|_p \leq \frac{C}{k}\|f\|_p \to 0 \text{ cuando } k\to\infty.$$

Eso concluye la demostración. □

Observación 9.3.4. Se puede demostrar, aunque no lo haremos en estas notas, que si $\mathbb{R}^n\setminus U$ tiene interior no vacío, entonces $W_0^{1,p}(U) \subsetneq W^{1,p}(U)$.

Veremos a continuación una de las desigualdades más importantes para funciones de Sobolev, la llamada *Desigualdad de Poincaré*.

Teorema 9.3.5 (Desigualdad de Poincaré). *Sea $U\subset\mathbb{R}^n$ un abierto y suponemos que existen constantes $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, tales que $U\subset\{x=(x_1,x')\in\mathbb{R}^n\colon a<x_1<b\}$. Sea $1\leq p<\infty$. Entonces existe una constante C que depende sólo de $(b-a)$ y p tal que*

$$\int_U |f|^p\,dx \leq C\int_U |\nabla f|^p\,dx,$$

para toda $f\in W_0^{1,p}(U)$.

Observación 9.3.6. En la demostración del Teorema 9.3.5 obtenemos $C=(b-a)^p$. Sin embargo esa constante no es óptima.

El valor de la mejor constante en la desigualdad de Poincaré es de gran importancia en numerosas aplicaciones y se han realizado muchos esfuerzos en intentar obtener mejores estimaciones de la misma. Ver **[9]** para una excelente introducción al tema.

Demostración. Dado que $W_0^{1,p}(U)$ es la clausura de las funciones suaves con soporte compacto, basta establecer el teorema para funciones $f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tales que $\operatorname{sop}(f)\subset\{a<x_1<b\}$.

Sea entonces una tal f y escribimos

$$f(x) = f(x_1,x') = \int_a^{x_1} \partial_1 f(t,x')\,dt.$$

De esta identidad, se sigue que

$$\begin{aligned}
|f(x)|^p &\leq \left(\int_a^b |\partial_1 f(t,x')|\,dt\right)^p \\
&\leq (b-a)^{\frac{p}{p'}}\int_a^b |\partial_1 f(t,x')|^p\,dt \\
&\leq (b-a)^{p-1}\int_a^b |\nabla f(t,x')|^p\,dt
\end{aligned}$$

Ahora integramos en $\mathbb{R}^n$ y obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx &\le (b-a)^{p-1}\int_a^b\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_a^b |\nabla f(t,x')|^p\,dt\,dx'\,dx_1\\ &= (b-a)^p\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_a^b |\nabla f(t,x')|^p\,dt\,dx'\\ &= (b-a)^p\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla f(x)|^p\,dx.\end{aligned}$$

Finalmente, observando que $\operatorname{sop}(|\nabla f|)\subset \operatorname{sop}(f)\subset U$, se concluye el teorema. □

Observación 9.3.7. Usaremos la notación $\|\nabla f\|_p$ para la expresión

$$\|\nabla f\|_p^p := \int_U |\nabla f|^p\,dx = \int_U \Big(\sum_{i=1}^n (\partial_i f)^2\Big)^{\frac{p}{2}}\,dx.$$

Observación 9.3.8. Por un argumento análogo al usado en el Ejemplo 9.1.8 (desigualdades (9.1.1), (9.1.2)), es fácil ver que la norma $\|f\|_{1,p}$ resulta equivalente a

$$\|f\|_p + \|\nabla f\|_p.$$

Luego, la desigualdad de Poincaré (Teorema 9.3.5), implica que en el espacio $W_0^{1,p}(U)$ se puede considerar la norma

$$\|f\|_{W_0^{1,p}(U)} := \|\nabla f\|_p,$$

y que la misma resulta equivalente a la norma usual $\|\cdot\|_{1,p}$.

Observación 9.3.9. Como consecuencia de la Observación 9.3.8, se tiene que en el espacio $H_0^1(U) = W_0^{1,2}(U)$ se puede considerar el producto interno

$$(f,g) := \int_U \nabla f\cdot\nabla g\,dx \tag{9.3.1}$$

y el mismo resulta equivalente al producto inducido por el de $H^1(U)$, en el sentido de que las normas que definen ambos productos internos resultan equivalentes.

Cuando se trabaje en el espacio $H_0^1(U)$ siempre se considerará el producto interno dado por (9.3.1).

9.4. Compacidad: el Teorema de Rellich-Kondrachov

Un problema central en el análisis es el de dar condiciones para garantizar la convergencia de una sucesión, o de alguna subsucesión de una sucesión dada.

Es bien conocido el Teorema de Bolzano-Weierstrass en $\mathbb{R}^n$ que dice que una condición suficiente que garantiza la existencia de una subsucesión convergente de una sucesión dada es que la sucesión sea acotada. Este resultado es válido en dimensión finita, pero apenas se trabaja en espacios de dimensión infinita es muy simple encontrar contraejemplos.

Para solucionar este inconveniente hay dos estrategias que suelen utilizarse. Una es la de requerir que la sucesión esté acotada en una norma más exigente, otra es la de debilitar la noción de convergencia.

Un ejemplo de la segunda se encuentra en el estudio de las topologías débiles en un espacio de Banach (ver [**2**]) donde se demuestra que si una sucesión es acotada en un espacio de Banach reflexivo, entonces existe una subsucesión convergente, pero en sentido débil.

Un ejemplo de la primera es el Teorema de Arzela-Ascoli, donde si se requiere que, además de estar acotada en $C(K)$ (donde $K \subset \mathbb{R}^n$ es un compacto), la sucesión sea *uniformemente equicontinua* entonces existe una subsucesión convergente.

El propósito de esta sección es explorar este tema en el contexto de los espacios de Sobolev.

En consecuencia se tiene el siguiente teorema.

Teorema 9.4.1 (Teorema de compacidad de Rellich-Kondrachov). *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y sea $1 < p < \infty$. Si $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,p}(U)$ es acotada (i.e. $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|\nabla f_k\|_p < \infty$), entonces existe una subsucesión $\{f_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y una función $f \in W_0^{1,p}(U)$ tal que*

$$\|f_{k_j} - f\|_p \to 0 \qquad \textit{cuando } j \to \infty.$$

Es decir, la subsucesión es convergente en $L^p(U)$.

Demostración. Extendiendo las funciones por 0, podemos suponer que las funciones $f_k \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ y que existe un abierto acotado $V \subset \mathbb{R}^n$ tal que $\text{sop}(f_k) \subset V$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Recordemos que, por hipótesis,

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|\nabla f_k\|_p < \infty$$

y que, por la desigualdad de Poincaré,

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \|f_k\|_p < \infty.$$

Consideremos ahora las funciones regularizadas

$$f_k^\varepsilon := \rho_\varepsilon * f_k, \quad (\varepsilon > 0,\ k \in \mathbb{N}),$$

donde ρ es el núcleo regularizante estándar y $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\rho(\frac{x}{\varepsilon})$. Podemos suponer que

$$\text{sop}(f_k^\varepsilon) \subset V, \qquad \text{para todo } \varepsilon > 0,\ k \in \mathbb{N}.$$

La demostración ahora se basa en dos hechos:

1. $f_k^\varepsilon \to f_k$ en $L^p(V)$ cuando $\varepsilon \downarrow 0$ uniformemente en $k \in \mathbb{N}$ y
2. para cada $\varepsilon > 0$ fijo, la sucesión $\{f_k^\varepsilon\}_{k\in\mathbb{N}}$ verifica las hipótesis del Teorema de Arzela-Ascoli.

Asumiendo estos hechos, la demostración del teorema sigue de la siguiente forma:

Fijemos $\delta > 0$ y elegimos $\varepsilon > 0$ tal que

$$\|f_k^\varepsilon - f_k\|_p < \frac{\delta}{2} \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Esto es posible gracias a la primera afirmación.

Ahora, por la segunda afirmación, tenemos que existe una subsucesión $\{f_{k_j}^\varepsilon\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{f_k^\varepsilon\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $f_{k_j}^\varepsilon$ es uniformemente convergente. Esto sumado a que los soportes de las funciones estan todos contenidos en V implica que

$$\limsup_{j,l\to\infty} \|f_{k_j}^\varepsilon - f_{k_l}^\varepsilon\|_p = 0.$$

Luego, se tiene que

$$\|f_{k_j} - f_{k_l}\|_p \le \|f_{k_j} - f_{k_j}^\varepsilon\|_p + \|f_{k_j}^\varepsilon - f_{k_l}^\varepsilon\|_p + \|f_{k_l}^\varepsilon - f_{k_l}\|_p < \delta + \|f_{k_j}^\varepsilon - f_{k_l}^\varepsilon\|_p,$$

de donde

$$\limsup_{j,l\to\infty} \|f_{k_j} - f_{k_l}\|_p < \delta.$$

Finalmente, se aplica este último razonamiento para $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ y se usa el argumento diagonal de Cantor para obtener una subsucesión $\{f_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\limsup_{i,l\to\infty} \|f_{k_i} - f_{k_l}\|_p = 0.$$

Queda pues demostrar las afirmaciones 1 y 2.

Para ver 1, asumamos primero que $f_k \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ y entonces se tiene la estimación

$$\begin{aligned} f_k^\varepsilon(x) - f_k(x) &= \int_{B_1(0)} \rho(y)(f_k(x-\varepsilon y) - f_k(x))\,dy \\ &= \int_{B_1(0)} \rho(y) \int_0^1 \frac{d}{dt}(f_k(x-\varepsilon t y))\,dtdy \\ &= -\varepsilon \int_{B_1(0)} \rho(y) \int_0^1 \nabla f_k(x-\varepsilon t y)\cdot y\,dtdy. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} |f_k^\varepsilon(x) - f_k(x)|^p &\le \varepsilon^p \left(\int_{B_1(0)} \rho(y) \int_0^1 |\nabla f_k(x-\varepsilon t y)|\,dtdy \right)^p \\ &= \varepsilon^p \left(\int_{B_1(0)} \rho(y)^{\frac{1}{p'}} \rho(y)^{\frac{1}{p}} \int_0^1 |\nabla f_k(x-\varepsilon t y)|\,dtdy \right)^p \\ &\le \varepsilon^p \left(\int_{B_1(0)} \rho(y) \right)^{\frac{p}{p'}} \int_{B_1(0)} \rho(y) \left(\int_0^1 |\nabla f_k(x-\varepsilon t y)|\,dt \right)^p dy \\ &= \varepsilon^p \int_{B_1(0)} \rho(y) \left(\int_0^1 |\nabla f_k(x-\varepsilon t y)|\,dt \right)^p dy \\ &\le \varepsilon^p \int_{B_1(0)} \rho(y) \int_0^1 |\nabla f_k(x-\varepsilon t y)|^p\,dtdy. \end{aligned}$$

Integrando, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_V |f_k^\varepsilon(x) - f_k(x)|^p\,dx &\le \varepsilon^p \int_V \int_{B_1(0)} \rho(y) \int_0^1 |\nabla f_k(x-\varepsilon t y)|^p\,dtdydx \\ &= \varepsilon^p \int_{B_1(0)} \rho(y) \int_0^1 \int_V |\nabla f_k(x-\varepsilon t y)|^p\,dxdtdy \\ &\le \varepsilon^p \int_V |\nabla f_k(x)|^p\,dx, \end{aligned}$$

es decir
$$\|f_k^\varepsilon - f_k\|_p \leq \varepsilon \|\nabla f_k\|_p.$$
Esta estimación la hemos demostrado suponiendo que $f_k \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, pero usando la densidad de las funciones suaves con soporte compacto, se deduce que la misma vale para $f_k \in W_0^{1,p}(U)$.

Ahora, como $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ está acotada en $W_0^{1,p}(U)$, queda demostrada la afirmación 1.

Para finalizar la demostración del teorema, verifiquemos la afirmación 2. Pero eso es una consecuencia inmediata de las siguientes estimaciones *crudas*,
$$\|f_k^\varepsilon\|_\infty \leq \|\rho_\varepsilon\|_\infty \|f_k\|_1 \leq \frac{C}{\varepsilon^n}\|f_k\|_p \leq \frac{C}{\varepsilon^n} < \infty,$$
y
$$\|\nabla f_k^\varepsilon\|_\infty \leq \|\nabla \rho_\varepsilon\|_\infty \|f_k\|_1 \leq \frac{C}{\varepsilon^{n+1}} < \infty,$$
para todo $k \in \mathbb{N}$. □

Ejercicio 9.4.2 (sólo para los que tengan conocimiento de topologías débiles). Verificar, usando la compacidad débil de sucesiones acotadas en espacios reflexivos, que la función límite f dada por el teorema anterior pertenece a $W_0^{1,p}(U)$.

Ejercicio 9.4.3. Mostrar mediante un ejemplo, que el Teorema 9.4.1 es falso sin la hipótesis de que U sea acotado.

El Teorema 9.4.1 está demostrado para el espacio $W_0^{1,p}(U)$. Pero ¿qué sucede en $W^{1,p}(U)$? Veremos ahora que es posible extender el Teorema 9.4.1 a $W^{1,p}(U)$ cuando el abierto U tiene cierta regularidad.

Para esto usaremos el siguiente teorema de extensión cuya demostración omitimos.

Teorema 9.4.4 (Teorema de extensión). *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado tal que $\partial U \in C^1$. Entonces dado $V \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado tal que $U \subset\subset V$, existe un* operador de extensión
$$E\colon W^{1,p}(U) \to W_0^{1,p}(V)$$
tal que

1. $E(f)|_U = f$
2. *E es lineal y continua, es decir existe C que depende sólo de p, n, U y V tal que*
$$\|\nabla E(f)\|_{L^p(V)} \leq C\|f\|_{W^{1,p}(U)} \quad \textit{para toda } f \in W^{1,p}(U).$$

La demostración del Teorema 9.4.4 se encuentra en cualquier texto que hemos dado como bilbliografía sobre espacios de Sobolev. En particular, se encuentra en [**6**].

Ahora si, con la ayuda del Teorema 9.4.4 podemos extender el Teorema 9.4.1 a $W^{1,p}(U)$.

Teorema 9.4.5. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado tal que $\partial U \in C^1$. Entonces, si $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset W^{1,p}(U)$ es acotada, existe una subsucesión $\{f_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $f \in W^{1,p}(U)$ tal que*
$$\|f_{k_j} - f\|_p \to 0 \quad \textit{cuando } j \to \infty.$$

Demostración. Sea V un abierto acotado tal que $U \subset\subset V$ y sea $E\colon W^{1,p}(U) \to W_0^{1,p}(V)$ el operador de extensión dado por el Teorema 9.4.4.

La acotación de E implica que la sucesión $\{E(f_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotada en $W_0^{1,p}(V)$ y luego, por el Teorema 9.4.1, existe $f \in W_0^{1,p}(V)$ y una subsucesión $\{E(f_{k_j})\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{E(f_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\|E(f_{k_j}) - f\|_{L^p(V)} \to 0 \quad \text{cuando } k \to \infty.$$

Pero entonces

$$\|f_{k_j} - f\|_{L^p(U)}^p = \int_U |f_{k_j} - f|^p\,dx \leq \int_V |E(f_{k_j}) - f|^p\,dx = \|E(f_{k_j}) - f\|_{L^p(V)}^p \to 0$$

cuando $k \to \infty$. Esto finaliza la demostración. □

9.5. Ejercicios

Ejercicio 9.5.1. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sean $u,\ v \in W^{k,p}(U),\ |\alpha| \leq k$. Entonces:

1. $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(U)$ y $D^\beta\left(D^\alpha u\right) = D^\alpha\left(D^\beta u\right) = D^{\alpha+\beta}u$ para todo par de multi-índices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ tales que $|\alpha| + |\beta| \leq k$.
2. Para cada $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(U)$ y $D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu D^\alpha v$.
3. Si $V \subset U$, entonces $u \in W^{k,p}(V)$.
4. Si $\zeta \in C_c^\infty(U)$, entonces $\zeta u \in W^{k,p}(U)$ y
$$D^\alpha(\zeta u) = \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\alpha\zeta D^{\alpha-\beta}u.$$

Ejercicio 9.5.2. Probar que en cada clase de $W^{k,p}(U)$ existe a lo sumo una función continua.

Ejercicio 9.5.3. Sea $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervalo.

1. Probar que si $u \in W^{1,p}(I)$, $1 \leq p < \infty$ entonces $u \in AC(I)$.
2. Probar que si $u \in W^{1,p}(I)$, $p > 1$, entonces
$$|u(x) - u(y)| \leq \left(\int_a^b |u'|^p dt\right)^{1/p} |x - y|^{1-\frac{1}{p}}.$$

Ejercicio 9.5.4. Sea $f \in H^1(\mathbb{R})$, probar que $h^{-1}(\tau_h f - f)$ converge a f' en $L^2(\mathbb{R})$ cuando $h \to 0$, donde $\tau_h f(x) = f(x + h)$.

Sugerencia: escribir $h^{-1}(\tau_h f - f)$ como $f' * \varphi_h$.

Ejercicio 9.5.5. Sea $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervalo.

1. Probar que existe una constante C tal que para toda $f \in H^1(I)$,
$$|f(x)| \leq C\|f\|_{1,2}.$$
2. Probar que existe una constante C tal que para toda $f \in H_0^1(I)$,
$$|f(x)| \leq C\|f'\|_2.$$
3. Concluir que $\|f'\|_2$ es una norma equivalente a $\|f\|_{1,2}$ en $H_0^1(I)$.
4. Mostrar que el ítem 1 es falso en $U \subset\subset \mathbb{R}^2$.

5. Usando el teorema de Arzela-Ascoli, probar que un conjunto acotado de $H^1(I)$ es precompacto en $C(\bar{I})$, y por lo tanto en $L^2(I)$.

Ejercicio 9.5.6. Sea $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f \in L^2(I)$. Probar que $f \in H^1(I)$ si y sólo si

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 |\hat{f}(k)|^2 < \infty,$$

donde $\hat{f}(k)$ son los coeficientes del desarrollo de f en series de Fourier.

Ejercicio 9.5.7. Sea $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f \in H^1(I)$. Sea $\{I_j\}_{j\in J}$ una colección de intervalos disjuntos en I, $I_j = (a_j, b_j)$. Probar que

$$\sum_{j\in J} |f(b_j) - f(a_j)| \le \|f\|_{1,2} \left(\sum_{j\in J} |b_j - a_j| \right)^{1/2}.$$

Concluir que $H^1(I) \subset VA(I)$.

Ejercicio 9.5.8. Sea $u \in W^{k,p}(U)$, $1 \le p < \infty$. Definimos $u^\varepsilon \equiv \rho_\varepsilon * u$ en U_ε, donde ρ es el núcleo regularizante, ρ_ε las aproximaciones de la identidad y

$$U_\varepsilon := \{x \in U\colon \operatorname{dist}(x, \partial U) > \varepsilon\}.$$

Entonces:

1. $u^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon)$, para cada $\varepsilon > 0$.
2. $u^\varepsilon \to u$ en $W^{k,p}_{\mathrm{loc}}(U)$ cuando $\varepsilon \to 0$.

Ejercicio 9.5.9. Probar que si $u \in H^2(U) \cap H^1_0(U)$ entonces

$$\int_U |Du|^2\,dx \le C \left(\int_U |u|^2\,dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_U |\Delta u|^2\,dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Concluir que en $H^2_0(U)$, $\|\Delta u\|_2$ es una norma equivalente a la usual.

Ejercicio 9.5.10. Sea $u \in W^{1,p}(U)$ tal que $\nabla u = 0$ a.e. en U. Probar que u es constante en cada componente conexa de U.

Ejercicio 9.5.11. Mostrar que las conclusiones del Teorema 9.4.1 se mantienen si en lugar de asumir que $U \subset \mathbb{R}^n$ es acotado se asume que $|U| < \infty$.

Ejercicio 9.5.12 (Desigualdad de Poincaré). Sea U un abierto conexo y acotado de $\mathbb{R}^n$ con borde C^1. Probar que existe una constante $C > 0$ que depende sólo de n y U tal que

$$\|u - (u)_U\|_2 \le C \|\nabla u\|_2$$

para cada $u \in H^1(U)$, donde

$$(u)_U = \fint_U u\,dx.$$

Sugerencia: Razonar por el absurdo y usar el Teorema 9.4.5.

EJERCICIO 9.5.13. Sea $\alpha > 0$. Probar que existe una constante $C > 0$ que depende sólo de α y de la dimensión del espacio, tal que

$$\int_U u^2\,dx \leq C\int_U |\nabla u|^2\,dx,$$

para toda $u \in H^1(U)$ tal que $|\{x \in U\colon u(x) = 0\}| \geq \alpha$.

EJERCICIO 9.5.14. Sea $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 con F' acotada. Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado y $u \in W^{1,p}(U)$ con $1 < p < \infty$. Probar que

$$F(u) \in W^{1,p}(U) \quad \text{y} \quad \partial_i F(u) = F'(u)\partial_i u \ (i = 1, \dots, n).$$

EJERCICIO 9.5.15. Sea $1 < p < \infty$ y $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado.

1. Probar que si $u \in W^{1,p}(U)$, entonces $|u| \in W^{1,p}(U)$.
2. Probar que si $u \in W^{1,p}(U)$, entonces $u^+, u^- \in W^{1,p}(U)$ y

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u & \text{c.t.p. en } \{u > 0\} \\ 0 & \text{a.e. en } \{u \leq 0\}, \end{cases}$$

$$\nabla u^- = \begin{cases} 0 & \text{c.t.p. en } \{u \geq 0\} \\ -\nabla u & \text{c.t.p. en } \{u < 0\}. \end{cases}$$

   Sugerencia: $u^+ = \lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(u)$ para

$$F_\varepsilon(t) = \begin{cases} \sqrt{t^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

3. Probar que si $u \in W_0^{1,p}(U)$ entonces $u^+, u^- \in W_0^{1,p}(U)$.
4. Probar que si $u \in W^{1,p}(U)$, entonces

$$\nabla u = 0 \text{ c.t.p. en } \{u = 0\}.$$

Capítulo 10

Soluciones débiles

En este capítulo usaremos la teoría de los espacios de Sobolev desarrollada en el Capítulo 9 para hacer una teoría de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales elípticas lineales.

10.1. Motivación

Para introducir las ideas que usaremos veamos primero el caso de la ecuación de Poisson

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } U \subset \mathbb{R}^n \\ u = 0 & \text{en } \partial U, \end{cases} \tag{10.1.1}$$

donde U es un abierto.

Observemos primero que si $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ es una solución de (10.1.1), entonces multiplicando la ecuación por $\phi \in C_c^\infty(U)$ e integrando sobre U obtenemos

$$\int_U -\Delta u \phi \, dx = \int_U f \phi \, dx.$$

Integrando por partes la primera integral y usando que ϕ tiene soporte compacto en U llegamos a

$$\int_U \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = \int_U f \phi \, dx. \tag{10.1.2}$$

Recíprocamente, observemos que si $u \in C^2(U) \cap C(\overline{U})$ verifica (10.1.2) para toda $\phi \in C_c^\infty(U)$ y además se tiene que $u = 0$ en ∂U, entonces u es solución de (10.1.1).

Observemos ahora, por un lado, que por la densidad de las funciones regulares en el espacio de Sobolev $H_0^1(U)$, la expresión (10.1.2) sigue siendo válida para toda $\phi \in H_0^1(U)$. Por otro lado, observamos que la ecuación (10.1.2), si se considera $\phi \in H_0^1(U)$, tiene perfecto sentido si sólo se requiere que $u \in H_0^1(U)$.

Esto motiva la siguiente definición.

Definición 10.1.1. Decimos que $u \in H_0^1(U)$ es una solución débil de (10.1.1) si verifica (10.1.2) para toda $\phi \in H_0^1(U)$.

Toda esta discusión puede fácilmente generalizarse para *operadores elípticos en forma de divergencia.*

Definición 10.1.2. Un operador elíptico en forma de divergencia es la expresión formal

$$\mathcal{L}u := -\sum_{i,j=1}^n \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u) + \sum_{j=1}^n b_j(x)\partial_j u + c(x)u, \tag{10.1.3}$$

donde los coeficientes verifican $a_{ij}, b_j, c \in L^\infty(U)$ y la matriz $(a_{ij}(x))_{1\le i,j\le n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ verifica la *condición de elipticidad*

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \theta|\xi|^2, \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^n,$$

con $\theta > 0$ independiente de $\xi \in \mathbb{R}^n$ y de $x \in U$.

Algunas observaciones están en orden.

Observación 10.1.3. El operador $\mathcal{L}$ extiende al operador de Laplace $-\Delta$. En efecto, basta tomar $(a_{ij}(x))_{1\le i,j\le n}$ como la matriz identidad, $b_j(x) = c(x) = 0$ en U, $j = 1, \dots, n$.

Observación 10.1.4. Si notamos $A(x) = (a_{ij}(x))_{1\le i,j\le n}$, $\mathbf{b}(x) = (b_1(x), \dots, b_n(x))$, el operador $\mathcal{L}$ puede rescribirse como

$$\mathcal{L}u = -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + \mathbf{b}(x)\cdot\nabla u + c(x)u.$$

Tenemos entonces, en analogía con la Definición 10.1.1, la siguiente definición.

Definición 10.1.5. Sea $f \in L^2(U)$. Decimos que $u \in H_0^1(U)$ es una solución débil del problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{en } U \\ u = 0 & \text{en } \partial U, \end{cases} \tag{10.1.4}$$

si u verifica que

$$\sum_{i,j=1}^n \int_U a_{ij}(x)\partial_j u\partial_i\phi\,dx + \sum_{j=1}^n \int_U b_j(x)\partial_j u\phi\,dx + \int_U c(x)u\phi\,dx = \int_U f\phi\,dx, \tag{10.1.5}$$

para toda $\phi \in H_0^1(U)$.

Observación 10.1.6. Observemos que, dado que $a_{ij}, b_j, c \in L^\infty(U)$, que $f \in L^2(U)$ y que $u, \phi \in H_0^1(U)$, todas las integrales en (10.1.5) están bien definidas.

Observación 10.1.7. En vista de la Observación 10.1.4, la ecuación (10.1.5) puede escribirse como

$$\int_U A(x)\nabla u\cdot\nabla\phi\,dx + \int_U \mathbf{b}(x)\cdot\nabla u\phi\,dx + \int_U c(x)u\phi\,dx = \int_U f\phi\,dx.$$

10.2. Preliminares sobre espacios de Hilbert

Para estudiar el problema de existencia y unicidad de soluciones débiles se requieren de ciertas herramientas sobre espacios de Hilbert. Las mismas complementan lo visto en la Sección 3.2.

Todo lo que se ve en esta sección es usualmente cubierto por cualquier curso básico de Análisis Funcional, así que el lector que haya tenido ese curso puede tranquilamente saltear esta sección.

10.2.1. Teorema de proyección. Empecemos con la definición de convexidad.

DEFINICIÓN 10.2.1. Sea H un espacio de Hilbert y $K \subset H$ un conjunto no vacío. Decimos que K es *convexo* si dados $x, y \in K$ y $t \in [0,1]$ se tiene que $tx + (1-t)y \in K$.

Demostraremos entonces uno de los teoremas centrales en la teoría de espacios de Hilbert, el Teorema de proyección.

TEOREMA 10.2.2 (Teorema de proyección). *Sea H un espacio de Hilbert con producto interno $(\cdot,\cdot)$ y sea $K \subset H$ un conjunto convexo, cerrado y no vacío. Entonces, dada $f \in H$, existe un único $u \in K$ tal que*

$$\|f-u\| = \inf_{v\in K} \|f-v\|.$$

Más aún, u se caracteriza por

$$u \in K, \quad (f-u, v-u) \le 0 \text{ para todo } v \in K.$$

Decimos entonces que u es la proyección de f sobre K y se nota por

$$u = P_K(f).$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración se basa en la llamada *identidad del paralelogramo*

$$\left\|\frac{a+b}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{a-b}{2}\right\|^2 = \frac{\|a\|^2+\|b\|^2}{2}, \quad a, b \in H.$$

Queda de ejercicio al lector verificar la validez de esta identidad.

Sea $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ una suesión minimizante. Es decir,

$$d_n := \|f-v_n\| \to d := \inf_{v\in K}\|f-v\|.$$

Aplicamos ahora la identidad del paralelogramo a los puntos $a = f - v_n$ y $b = f - v_m$. Luego

$$\left\|f - \frac{v_n+v_m}{2}\right\|^2 + \frac{1}{4}\|v_n - v_m\|^2 = \frac{1}{2}(d_n^2 + d_m^2).$$

Como $v_n, v_m \in K$ y K es convexo, sigue que $\frac{1}{2}(v_n+v_m) \in K$, luego

$$d \le \left\|f - \frac{v_n+v_m}{2}\right\|,$$

de donde

$$\|v_n - v_m\| \le 2d_n^2 + 2d_m^2 - 4d^2 \to 0 \quad \text{si } n, m \to \infty.$$

Luego, hemos probado que $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y por ende, existe $u \in H$ tal que $u = \lim_{n\to\infty} v_n$.

Como K es cerrado, se tiene que $u \in K$ y, claramente,

$$\|f-u\| = d = \inf_{v\in K}\|f-v\|.$$

Sea ahora $w \in K$ arbitrario y consideramos $v = tw + (1-t)u = u + t(w-u) \in K$ si $0 < t < 1$. Entonces, como u minimiza la distancia entre f y K se tiene

$$\|f-u\|^2 \le \|f-v\|^2 = \|(f-u)+t(w-u)\|^2 = \|f-u\|^2 - 2t(f-u, w-u) + t^2\|w-u\|^2.$$

Reagrupando términos, obtenemos

$$2(f-u, w-u) \leq t\|w-u\|^2.$$

Haciendo ahora $t \downarrow 0$ se obtiene la caracterización pedida en el teorema.

Resta ver la unicidad. Supongamos que tenemos $u_1, u_2 \in K$ que verifican

$$(f-u_i, v-u_i) \leq 0 \quad \text{para todo } v \in K,\ i=1,2.$$

De ahí se obtiene

$$(f-u_1, u_2-u_1) \leq 0 \quad \text{y} \quad (f-u_2, u_1-u_2) \leq 0,$$

y, equivalentemente,

$$(f-u_1, u_2-u_1) \leq 0 \quad \text{y} \quad (u_2-f, u_2-u_1) \leq 0.$$

Sumando estas desigualdades,

$$(f-u_1+u_2-f, u_2-u_1) = \|u_2-u_1\|^2 \leq 0.$$

Luego $u_1 = u_2$ y el teorema queda demostrado. □

Ejercicio 10.2.3. Con las mismas hipótesis que el Teorema 10.2.2, se tiene que el operador P_K verifica

$$\|P_K(f) - P_K(g)\| \leq \|f-g\|,$$

para todas $f, g \in H$.

Ejercicio 10.2.4. Sea $M \subset H$ un subespacio cerrado. Probar que entonces el operador de proyección P_M dado por el Teorema 10.2.2 resulta ser un operador lineal y continuo. Más aún, se tiene que

$$(f - P_M(f), w) = 0 \quad \text{para todo } w \in M.$$

10.2.2. El espacio dual de H. En esta sección estudiaremos el espacio dual de un espacio de Hilbert H. El objetivo es demostrar el Teorema de representación de Riesz que dice que el espacio dual de H se identifica con el mismo H.

Definición 10.2.5. Sea H un espacio de Hilbert. Se define el espacio dual de H, H', como

$$H' := \{\varphi\colon H \to \mathbb{R}\colon \varphi \text{ es lineal y continua}\}.$$

A los elementos $\varphi \in H'$ se los denomina *funcionales*.

Usaremos la notación

$$\varphi(u) = \langle \varphi, u \rangle,$$

para denotar la aplicación de un funcional $\varphi \in H'$ sobre un elemento $u \in H$.

Definición 10.2.6. Sea H un espacio de Hilbert con producto interno $(\cdot,\cdot)$ y sea H' su dual. Se define en H' la norma

$$\|\varphi\|_* := \sup_{\substack{v \in H \\ \|v\| \leq 1}} \langle \varphi, v \rangle.$$

Ejercicio 10.2.7. Verificar que $\|\cdot\|_*$ efectivamente define una norma sobre H' y que H' resulta un espacio de Banach (es decir, completo) con respecto a esta norma.

Veamos algunos ejemplos de espacios de Hilbert y funcionales definidos en los mismos.

Ejemplo 10.2.8. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto medible y definimos $H := L^2(U)$. Luego, si tomamos $g \in L^2(U)$, esta g induce un funcional $\varphi_g \in H'$ dado por

$$\langle \varphi_g, f \rangle := \int_U f g \, dx.$$

Queda de ejercicio verificar que, efectivamente, $\varphi_g \in (L^2(U))'$.

Ejemplo 10.2.9. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y definimos ahora $H := H^1(U)$. Sean $f_0, f_1, \dots, f_n \in L^2(U)$ y definimos

$$\langle \varphi, u \rangle := \int_U f_0 u \, dx + \sum_{i=1}^n \int_U f_i \partial_i u \, dx.$$

Luego $\varphi \in H'$ (¡verificar esta afirmación!).

Ejemplo 10.2.10. Como caso particular del Ejemplo 10.2.9, se tiene que los funcionales definidos en el Ejemplo 10.2.8 sobre $L^2(U)$, resultan también funcionales sobre $H^1(U)$.

Esto es una consecuencia directa del hecho que $H^1(U) \subset L^2(U)$ y la inclusión definida por

$$i \colon H^1(U) \to L^2(U),$$

$$i(u) = u,$$

es continua.

Ejemplo 10.2.11. Otro caso particular del Ejemplo 10.2.9 resulta cuando se considera $f_0 = v$, $f_i = \partial_i v$ $(i = 1, \dots, n)$ con $v \in H^1(U)$. En ese caso, el funcional $\varphi = \varphi_v$ se escribe como

$$\langle \varphi_v, u \rangle := \int_U \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_U uv \, dx = (u, v),$$

donde $(\cdot, \cdot)$ es el producto interno usual en $H^1(U)$.

Observación 10.2.12. Al espacio dual de $H_0^1(U)$ se lo suele notar por $H^{-1}(U)$. En vista del Ejemplo 10.2.8 se tiene que $L^2(U) \subset H^{-1}(U)$, identificando las funciones $f \in L^2(U)$ con el funcional que inducen.

Más aún, en vista del Ejemplo 10.2.9 se tiene que las derivadas distribucionales de funciones en $L^2(U)$ son también elementos de $H^{-1}(U)$.

Veamos ahora el Teorema de representación de Riesz.

Teorema 10.2.13 (Teorema de representación de Riesz). *Sea H un espacio de Hilbert. Entonces, dado un funcional $\varphi \in H'$ existe un único $u \in H$ tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = (u, v) \quad \textit{para todo } v \in H.$$

Más aún, la aplicación $T \colon H' \to H$ dada por $T\varphi = u$ resulta una isometría lineal. En particular,

$$\|\varphi\|_* = \|u\|.$$

Demostración. Sea $\varphi \in H'$ y definimos $M = \mathrm{Nu}(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0\})$. Luego $M \subset H$ es un subespacio cerrado.

Si $M = H$ entonces $\varphi = 0$. Luego $u = 0$. Podemos entonces suponer que $M \subsetneq H$.

Sea $g_0 \in H \setminus M$ y definimos $g_1 = P_M(g_0)$ la proyección de g_0 sobre M. Entonces $g := \|g_1 - g_0\|^{-1}(g_1 - g_0)$ es perpendicular a M, es decir $(g, v) = 0$ para todo $v \in M$ (ver el Ejercicio 10.2.4) y, por construcción, $\|g\| = 1$.

Sea ahora $v \in H$ arbitraria y defino $\lambda := \frac{\langle\varphi,v\rangle}{\langle\varphi,g\rangle}$ (verificar que $\langle\varphi, g\rangle \neq 0$). Entonces, si $w = v - \lambda g$ se tiene que $w \in M = \mathrm{Nu}(\varphi)$.

En resumen, hemos probado que todo elemento $v \in H$ se descompone como un múltiplo de $g \in M^\perp$ y un elemento de $w \in M$, $v = \lambda g + w$.

Finalmente,

$$0 = (g, w) = (g, v - \lambda g) = (g, v) - \lambda\|g\|^2,$$

pero $\|g\| = 1$ y, recordando la definición de λ, obtenemos

$$\langle\varphi, v\rangle = \langle\varphi, g\rangle(g, v).$$

Luego, tomando $u = \langle\varphi, g\rangle g$ se concluye lo pedido.

La unicidad de u, y las propiedades del operador T quedan de ejercicio. □

Se tiene el siguiente corolario.

Corolario 10.2.14. *Sea H un espacio de Hilbert y $B\colon H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal, continua, simétrica y coersiva. Entonces, dada $\varphi \in H'$ existe un único $u \in H$ tal que*

$$\langle\varphi, v\rangle = B[u, v] \quad \text{para todo } v \in H.$$

Observación 10.2.15. Recordemos que:

1. bilineal significa $B[\alpha u_1 + \beta u_2, v] = \alpha_1 B[u_1, v] + \beta B[u_2, v]$ y $B[u, \alpha v_1 + \beta v_2] = \alpha B[u, v_1] + \beta B[u, v_2]$,
2. continua significa que existe una constante $C > 0$ tal que $|B[u, v]| \leq C\|u\|\|v\|$,
3. simétrica significa $B[u, v] = B[v, u]$ y
4. coersiva significa que existe $\gamma > 0$ tal que $B[u, u] \geq \gamma\|u\|^2$.

Demostración. Las hipótesis en $B[\cdot,\cdot]$ implican que la forma bilineal define un nuevo producto interno en H y que la norma inducida por él, $\|u\|_B := B[u, u]^{\frac{1}{2}}$, resulta equivalente a la original, $\|\cdot\|$.

Luego, se pueden aplicar las conclusiones del Teorema 10.2.13 al espacio de Hilbert H con producto interno $B[\cdot,\cdot]$. Esto prueba el corolario. □

10.3. Ecuaciones elípticas simétricas

En esta sección aplicaremos el Teorema de Riesz 10.2.13 y el Corolario 10.2.14 para demostrar existencia y unicidad de ciertos problemas elípticos.

Para fijar ideas, comenzaremos con el problema de Poisson (10.1.1) y luego extenderemos ese resultado a problemas más generales.

Recordemos que, según la Definición 10.1.1 una función $u \in H_0^1(U)$ es solución débil de (10.1.1) si y sólo si verifica

$$\int_U \nabla u \cdot \nabla v\, dx = \int_U fv\, dx,$$

para toda $v \in H_0^1(U)$.

Ahora, si $f \in L^2(U)$ entonces f define un elemento en $H^{-1}(U)$ (recordar que esta es la notación para el dual de $H_0^1(U)$, ver la Observación 10.2.12) de la forma

$$\langle f, v\rangle := \int_U fv\, dx$$

(ver el Ejemplo 10.2.10).

Por otro lado, recordemos que en $H_0^1(U)$ se tiene que el producto interno viene dado por

$$(u, v) := \int_U \nabla u \cdot \nabla v\, dx.$$

Ver la Observación 9.3.9.

Luego, si aplicamos el Teorema de representación de Riesz 10.2.13 obtenemos que existe una única $u \in H_0^1(U)$ tal que

$$(u, v) = \langle \varphi, v\rangle, \quad \text{para toda } v \in H_0^1(U).$$

Es decir, existe una única $u \in H_0^1(U)$ tal que

$$\int_U \nabla u \cdot \nabla v\, dx = \int_U fv\, dx,$$

para toda $v \in H_0^1(U)$.

En resumen hemos demostrado el teorema.

TEOREMA 10.3.1. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Dada $f \in L^2(U)$, existe una única $u \in H_0^1(U)$ solución débil de la ecuación de Poisson* (10.1.1).

Razonando de manera muy similar, pero aplicando el Corolario 10.2.14 en lugar del Teorema 10.2.13 se obtiene el siguiente teorema.

TEOREMA 10.3.2. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado y sean $a_{ij}, c \in L^\infty(U)$ donde $c(x) \geq 0$ y la matriz $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ es simétrica y uniformemente elíptica, es decir $a_{ij} = a_{ji}$, $1 \leq i, j \leq n$ y*

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2$$

para un $\theta > 0$ independiente de $x \in U$ y $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Consideremos el operador elíptico

$$\mathcal{L}u := -\sum_{i,j=1}^n \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u) + c(x)u = -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) + c(x)u.$$

Luego, dada $f \in L^2(U)$, existe una única solución débil $u \in H_0^1(U)$ del problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{en } U \\ u = 0 & \text{en } \partial U. \end{cases} \tag{10.3.1}$$

Demostración. Definimos la forma bilineal $B\colon H_0^1(U)\times H_0^1(U)\to\mathbb{R}$ como

$$B[u,v] := \sum_{i,j=1}^n \int_U a_{ij}(x)\partial_j u\partial_i v\,dx + \int_U c(x)uv\,dx,$$

y sea $\varphi\in H^{-1}(U)=(H_0^1(U))'$ el funcional inducido por f, es decir

$$\langle\varphi,v\rangle := \int_U fv\,dx,\quad \text{para todo } v\in H_0^1(U).$$

Observemos que $u\in H_0^1(U)$ es solución débil de (10.3.1) si y sólo si

$$B[u,v]=\langle\varphi,v\rangle,\quad \text{para todo } v\in H_0^1(U).$$

Luego, el teorema quedará demostrado si estamos en las hipótesis del Corolario 10.2.14.

Claramente, lo único que falta ver es que $B[\cdot,\cdot]$ es continua, simétrica y coersiva.

La forma $B[\cdot,\cdot]$ resulta simétrica por la simetría de la matriz A. Veamos la continuidad.

$$\begin{aligned}
|B[u,v]| &\le \sum_{i,j=1}^n \int_U |a_{ij}(x)||\partial_j u||\partial_j v|\,dx + \int_U |c(x)||u||v|\,dx\\
&\le n^2 \max_{1\le i,j\le n}\|a_{ij}\|_\infty \int_U |\nabla u||\nabla v|\,dx + \|c\|_\infty\int_U |u||v|\,dx\\
&\le C(\|\nabla u\|_2\|\nabla v\|_2 + \|u\|_2\|v\|_2)\\
&\le C\|\nabla u\|_2\|\nabla v\|_2
\end{aligned}$$

donde la constante C varía de línea a línea y depende sólo de n, de los coeficientes a_{ij} y c y de la constante en la desigualdad de Poincaré.

Resta ver la coersividad. Pero, como $c(x)\ge 0$ y $(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ es uniformemente elíptica,

$$\begin{aligned}
B[u,u] &= \sum_{i,j=1}^n \int_U a_{ij}(x)\partial_j u\partial_i u\,dx + \int_U c(x)u^2\,dx\\
&\ge \theta\int_U |\nabla u|^2\,dx,
\end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. □

Ejercicio 10.3.3. Mostrar que existe $\gamma>0$ tal que si $c(x)\ge-\gamma$ c.t.p. en U, entonces las conclusiones del Teorema 10.3.2 siguen valiendo.

Ejercicio 10.3.4. Mostrar un ejemplo donde $c(x)$ no sea positiva y se pierda o bien la existencia o bien la unicidad de soluciones de (10.3.1).

10.4. Problemas no simétricos: El Teorema de Lax-Milgram

Nos proponemos ahora extender el Teorema 10.3.2 al caso en que el operador $\mathcal{L}$ dado por la Definición 10.1.2 no sea simétrico. Es decir, no haremos la hipótesis de simetría en la matriz $(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ y supondremos $b_j\ne 0$ $(j=1,\dots,n)$.

En este caso, la forma bilineal inducida por el operador

$$B[u,v] := \sum_{i,j=1}^{n} \int_U a_{ij}(x)\partial_j u \partial_i v\, dx + \sum_{j=1}^{n} \int_U b_j(x)\partial_j uv\, dx + \int_U c(x)uv\, dx \tag{10.4.1}$$

no es simétrica y, por ende, el Corolario 10.2.14 no puede ser aplicado.

Se necesita luego, una extensión de dicho corolario para formas bilineales que no sean necesariamente simétricas. Ese es el contenido del Teorema de Lax-Milgram.

TEOREMA 10.4.1 (Teorema de Lax-Milgram). *Sea H un espacio de Hilbert y sea $B\colon H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal, continua y coersiva. Entonces, dada $\phi \in H'$, existe una única $u \in H$ tal que*

$$B[u,v] = \langle \phi, v\rangle \qquad \textit{para toda } v \in H.$$

OBSERVACIÓN 10.4.2. Observemos que la única diferencia entre el Teorema de Lax-Milgram y el Corolario 10.2.14 es que no se requiere que la forma bilineal $B[\cdot,\cdot]$ sea simétrica.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 10.4.1. Para cada $u \in H$ fija, definimos la aplicación $v \mapsto B[u,v]$. Como $B[\cdot,\cdot]$ es bilineal y continuo, se tiene que esta aplicación pertenece a H'.

Aplicamos ahora el Teorema de representación de Riesz 10.2.13 y concluimos que existe una única $w \in H$ tal que

$$B[u,v] = (w,v) \quad \text{para todo } v \in H.$$

Queda entonces definido el operador

$$A\colon H \to H, \qquad u \mapsto w.$$

Es fácil ver que A resulta lineal (¡ejercicio!). Veamos que es continuo. En efecto, dado $u \in H$,

$$\|Au\|^2 = (Au, Au) = B[u, Au] \le C\|u\|\|Au\|,$$

donde hemos usado la continuidad de la forma $B[\cdot,\cdot]$. De esta desigualdad se desprende que

$$\|Au\| \le C\|u\|.$$

Por otro lado, la coersividad de la forma $B[\cdot,\cdot]$ implica que A es acotado inferiormente. En efecto

$$\theta\|u\|^2 \le B[u,u] = (Au,u) \le \|Au\|\|u\|,$$

de donde

$$\|Au\| \ge \theta\|u\|.$$

De esta desigualdad se desprende fácilmente que A es inyectivo y que $\mathrm{Im}(A)$ es cerrado (¡ejercicio!).

Veamos finalmente que $\mathrm{Im}(A) = H$. Sea $w \in \mathrm{Im}(A)^\perp$, luego se tiene

$$\theta\|w\|^2 \le B[w,w] = (Aw,w) = 0,$$

dado que $Aw \in \mathrm{Im}(A)$ y $w \in \mathrm{Im}(A)^\perp$, de donde $w = 0$.

Luego, como $\mathrm{Im}(A)$ es cerrado e $\mathrm{Im}(A)^\perp = \{0\}$ se obtiene que $\mathrm{Im}(A) = H$.

Una vez estudiadas las propiedades de A el teorema se concluye fácilmente. En efecto. por el Teorema de representación de Riesz 10.2.13, existe una única $w \in H$ tal que

$$\langle \phi, v \rangle = (w, v) \quad \text{para todo } v \in H.$$

Pero como A es biyectiva, existe una única $u \in H$ tal que $w = Au$. Luego

$$\langle \phi, v \rangle = (Au, v) = B[u, v] \quad \text{para todo } v \in H.$$

Esto concluye la demostración. □

Consideremos ahora la forma bilineal $B[\cdot, \cdot]$ dada por (10.4.1) definida en $H_0^1(U) \times H_0^1(U)$ y veamos si verifica las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram 10.4.1.

Veamos la continuidad. En efecto,

$$\begin{aligned}|B[u, v]| &\le \sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|_\infty \int_U |\partial_j u||\partial_i v|\, dx + \sum_{j=1}^n \|b_j\|_\infty \int_U |\partial_j u||v|\, dx + \|c\|_\infty \int_U |u||v|\, dx \\ &\le \left(\sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|_\infty \right) \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2 + \left(\sum_{j=1}^n \|b_j\|_\infty \right) \|\nabla u\|_2 \|v\|_2 + \|c\|_\infty \|u\|_2 \|v\|_2,\end{aligned}$$

donde hemos usado que $|\partial_j u| \le |\nabla u|$ $(j = 1, \dots, n)$ y la desigualdad de Hölder.

Ahora, usando la desigualdad de Poincaré (Teorema 9.3.5), concluimos que existe una constante $C > 0$ tal que

$$|B[u, v]| \le C \|\nabla u\|_2 \|\nabla v\|_2,$$

como queríamos ver.

Veamos ahora la coersividad.

$$B[u, u] \ge \theta \int_U |\nabla u|^2\, dx + \int_U \left(\sum_{j=1}^n b_j(x) \partial_j u u + c(x) u^2 \right) dx. \tag{10.4.2}$$

Ahora, hagamos la suposición de que $b_j \in C^1(U)$. Luego,

$$\int_U b_j(x) \partial_j u u\, dx = \int_U b_j(x) \frac{1}{2} \partial_j (u^2)\, dx = - \int_U \frac{1}{2} \partial_j b_j(x) u^2\, dx,$$

de donde

$$\begin{aligned}\int_U \left(\sum_{j=1}^n b_j(x) \partial_j u u + c(x) u^2 \right) dx &= \int_U \left(c(x) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \partial_j b_j(x) \right) u^2\, dx \\ &= \int_U \left(c(x) - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{b}(x) \right) u^2\, dx.\end{aligned}$$

Luego, si hacemos la hipótesis

$$c(x) - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{b}(x) \ge 0 \qquad \text{c.t.p. en } U \tag{10.4.3}$$

se tiene entonces el siguiente teorema.

TEOREMA 10.4.3. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y sean $a_{ij}, b_j, c \in L^\infty(U)$. Asumamos que $b_j \in C^1(U)$ con $\partial_j b_j \in L^\infty(U)$ y que se verifica* (10.4.3).

Luego, dada $f \in L^2(U)$, existe una única solución débil de

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{en } U \\ u = 0 & \text{en } \partial U, \end{cases}$$

donde $\mathcal{L}$ viene dado por (10.1.3).

DEMOSTRACIÓN. La demostración es, a esta altura, una aplicación inmediata del Teorema de Lax-Milgram 10.4.1. □

Intentemos ahora estudiar el caso general, es decir sin asumir (10.4.3). En ese caso, retomando (10.4.2), hacemos la siguiente acotación

$$B[u,u] \geq \theta \int_U |\nabla u|^2\,dx - \left(\sum_{j=1}^n \|b_j\|_\infty\right) \int_U |\nabla u||u|\,dx - \|c\|_\infty \int_U u^2\,dx. \tag{10.4.4}$$

Para proseguir necesitamos un truco llamado *desigualdad de Young con ε* que pasamos a explicar. Es bien conocida la desigualdad de Young (que en este caso es simplemente el cuadrado del binomio)

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}, \qquad a, b > 0.$$

Luego, dado $\delta > 0$, se hace

$$ab = (\delta a)(\delta^{-1} b) \leq \frac{\delta^2}{2} a^2 + \frac{1}{2\delta^2} b^2.$$

Si tomamos $\frac{\delta^2}{2} = \varepsilon$, obtenemos

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2. \tag{10.4.5}$$

Llamemos $c_1 = \sum_{j=1}^n \|b_j\|_\infty$. Luego, de (10.4.4), usando (10.4.5) con $\varepsilon = \frac{\theta}{2c_1}$, obtenemos

$$B[u,u] \geq \frac{\theta}{2} \int_U |\nabla u|^2\,dx - \left(\frac{c_1^2}{2\theta} + \|c\|_\infty\right) \int_U u^2\,dx. \tag{10.4.6}$$

Tenemos entonces el siguiente teorema

TEOREMA 10.4.4. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y sean $a_{ij}, b_j, c \in L^\infty(U)$, $i, j = 1, \dots, n$. Luego, existe $\gamma_0 \geq 0$ tal que, el siguiente problema*

$$\begin{cases} \mathcal{L}u + \gamma u = f & \text{en } U \\ u = 0 & \text{en } \partial U, \end{cases}$$

tiene una única solución débil para toda $f \in L^2(U)$ y para todo $\gamma \geq \gamma_0$, donde $\mathcal{L}$ viene dado por (10.1.3).

DEMOSTRACIÓN. Si llamamos $\mathcal{L}_\gamma u = \mathcal{L}u + \gamma u$ entonces, la forma bilineal asociada a $\mathcal{L}_\gamma$ es

$$B_\gamma[u,v] = B[u,v] + \gamma \int_U uv\,dx,$$

donde $B[\cdot,\cdot]$ es la forma bilineal asociada a $\mathcal{L}$.

Por la discusión previa al teorema, es evidente que si $\gamma \geq \gamma_0$ donde

$$\gamma_0 = \frac{c_1^2}{2\theta} + \|c\|_\infty,$$

entonces $B_\gamma[\cdot,\cdot]$ verifica las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram 10.4.1. Esto concluye la demostración. □

10.5. Ecuaciones elípticas y la alternativa de Fredholm

El Teorema 10.4.4 no es completamente satisfactorio dado que no responde a la pregunta original que es la existencia (o no) y la unicidad (o no) del problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{en } U \\ u = 0 & \text{en } \partial U. \end{cases}$$

Para intentar responder a esta pregunta, necesitamos algunos conceptos de álgebra lineal.

10.5.1. Un poco de álgebra lineal. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se busca resolver la ecuación

$$Ax = b,$$

donde $b \in \mathbb{R}^n$ es dato.

Es bien sabido que una matriz es inversible si y sólo si su núcleo $\mathrm{Nu}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$ es trivial, i.e. $\mathrm{Nu}(A) = \{0\}$. Luego esto nos deja la siguiente alternativa.

Se tiene una y sólo una de las siguientes:

(α) Para todo $b \in \mathbb{R}^n$, existe un único $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax = b$, ó
(β) Existe $x \neq 0$ solución de $Ax = 0$.

En caso en que $\mathrm{Nu}(A) \neq \{0\}$ aún se puede dar más información. Es claro que la ecuación $Ax = b$ tendrá una solución, si y sólo si $b \in \mathrm{Im}(A)$ y que en ese caso, la solución no será única, dado que si x_p es una solución particular de la ecuación y $z \in \mathrm{Nu}(A)$, entonces $x_p + z$ es solución de la ecuación.

Dicho esto, el problema entonces es determinar si $b \in \mathrm{Im}(A)$. Pero es fácil ver que $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Nu}(A^\top)^\perp$ (¡ejercicio!) donde $A^\top$ es la matriz transpuesta de A.

En conclusión, se tiene que

$$Ax = b \text{ tiene solución} \Leftrightarrow b \perp z \text{ para todo } z \in \mathrm{Nu}(A^\top).$$

Observación 10.5.1. La alternativa (α)-(β) se denomina la *alternativa de Fredholm.*

10.5.2. Extensión a espacios de Hilbert. Buscamos en esta sección extender la discusión previa para matrices a operadores lineales en espacios de Hilbert. Primero debemos definir que entendemos por matriz transpuesta en el contexto de operadores.

Definición 10.5.2. Sea H un espacio de Hilbert y sea $A\colon H \to H$ un operador lineal y continuo. Se define el adjunto de A, que se nota por A^*, al único operador $A^*\colon H \to H$ que verifica

$$(Ax, y) = (x, A^*y).$$

Observación 10.5.3. La buena definición de A^* es una consecuencia del Teorema de representación de Riesz, Teorema 10.2.13. En efecto, dado $y \in H$ se define el funcional $x \mapsto (Ax, y)$. Es fácil ver que este funcional pertenece a H' y luego, existe un único $z \in H$ tal que

$$(Ax, y) = (x, z).$$

Luego se define $A^*y := z$.

Queda de ejercicio al lector verificar que A^* es lineal y continuo.

Observación 10.5.4. Obviamente, si $H = \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se tiene que $A^* = A^\top$.

En consecuencia se tiene la siguiente definición.

Definición 10.5.5. Sea H un espacio de Hilbert y $A\colon H \to H$ un operador lineal y continuo. Decimos que A es simétrico (o autoadjunto) si $A = A^*$.

Cuando uno quiere extender la alternativa de Fredholm para operadores, se encuentra conque es falsa en general (ver [**2**] para un contraejemplo). Para poder recuperar el resultado se requiere conservar cierta compacidad que se pierde al pasar de un espacio de dimensión finita (donde las sucesiones acotadas poseen subsucesiones convergentes) a uno de dimensión infinita.

Esto se consigue restringiendo la clase de operadores que van a considerarse. Ese es el motivo de la siguiente definición.

Definición 10.5.6. Sean H_1 y H_2 dos espacios de Hilbert y sea $K\colon H_1 \to H_2$ un operador lineal y continuo. Decimos que K es compacto si dada $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset H_1$ acotada, entonces $\{Kx_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset H_2$ posee una subsucesión convergente.

El siguiente ejercicio será de utilidad más adelante.

Ejercicio 10.5.7. Sean H_i, $i = 1, 2, 3$, espacios de Hilbert y sean $A\colon H_1 \to H_2$ un operador lineal y continuo y $K\colon H_2 \to H_3$ un operador compacto.

Entonces $K \circ A\colon H_1 \to H_3$ resulta compacto.

La misma afirmación vale si se considera $A \circ K$ cuando dicha composición resulta posible de realizarse.

Veamos entonces que la alternativa de Fredholm puede extenderse a operadores de la forma $A = I - K$ donde I es la identidad y K un operador compacto.

Teorema 10.5.8 (Teorema de la Alternativa de Fredholm). *Sea H un espacio de Hilbert y $K\colon H \to H$ un operador compacto. Entonces se tiene*

1. $\dim(\mathrm{Nu}(I - K)) < \infty$.
2. $\mathrm{Im}(I - K)$ *es cerrado.*
3. $\mathrm{Im}(I - K) = \mathrm{Nu}(I - K^*)^\perp$.
4. $\mathrm{Nu}(I - K) = \{0\}$ *si y sólo si* $\mathrm{Im}(I - K) = H$.
5. $\dim(\mathrm{Nu}(I - K)) = \dim(\mathrm{Nu}(I - K^*))$.

La demostración de este teorema suele cubrirse en los cursos de Análisis Funcional (ver, por ejemplo, [**2**]). A modo de completitud damos la demostración y el lector puede omitir la prueba si así lo considera.

Demostración. Si $\dim(I-K)=\infty$, entonces existe un sistema ortonormal infinito $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{Nu}(I-K)$. Entonces

$$Ku_k = u_k \quad k\in\mathbb{N}.$$

Ahora, $\|u_k-u_j\|^2 = \|u_k\|^2 - 2(u_k,u_j) + \|u_j\|^2 = 2$ si $k\neq j$ de donde se obtiene $\|Ku_k - Ku_j\| = \sqrt{2}$ si $k\neq j$. Esto contradice la compacidad de K dado que $\{Ku_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ no contiene ninguna subsucesión convergente. Esto prueba 1.

Afirmamos ahora que existe $\gamma>0$ tal que

$$\|u-Ku\|\geq \gamma\|u\| \quad \text{para todo } u\in \operatorname{Nu}(I-K)^{\perp}. \tag{10.5.1}$$

En efecto, sino existiría una sucesión $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \operatorname{Nu}(I-K)^{\perp}$ con $\|u_k\|=1$ tal que $\|u_k-Ku_k\|\leq \frac{1}{k}$. En consecuencia

$$u_k - Ku_k \to 0 \quad \text{cuando } k\to\infty. \tag{10.5.2}$$

Ahora, como $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es acotado, existe una subsucesión $\{u_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y un elemento $y\in H$ tal que $Ku_{k_j}\to y$ cuando $j\to\infty$. Pero de (10.5.2) concluimos que $u_k\to y$, luego $y\in\operatorname{Nu}(I-K)$. Como $\operatorname{Nu}(I-K)^{\perp}$ es cerrado, sigue que $y\in\operatorname{Nu}(I-K)^{\perp}$ de donde $y=0$. Pero esto contradice el hecho de que $\|u_k\|=1$ y $u_k\to y$ con lo que la afirmación (10.5.1) queda demostrada.

Sea ahora $f_k = u_k - Ku_k \in \operatorname{Im}(I-K)$ tal que $f_k\to f$. De (10.5.1) se deduce que

$$\|u_k-u_j\|\leq \frac{1}{\gamma}\|f_k-f_j\|.$$

Por ende, existe $u\in H$ tal que $u_k\to u$ y $f=u-Ku$ lo que prueba 2.

El punto 3 es una consecuencia de 2 y del hecho general de que para todo operador lineal y continuo $A\colon H\to H$ se tiene que

$$\overline{\operatorname{Im}(A)} = \operatorname{Nu}(A^*)^{\perp}$$

(¡demostrar este hecho!).

Veamos 4. Asumamos primero que $\operatorname{Nu}(I-K)=\{0\}$ y supongamos que $H_1 := \operatorname{Im}(I-K)\subsetneq H$. De acuerdo con 2, H_1 es un subespacio cerrado de H. Más aún, $H_2 := (I-K)(H_1)\subsetneq H_1$, dado que $I-K$ es inyectiva. De manera análoga se define $H_k := (I-K)(H_{k-1}) = (I-K)^k(H)$. Estos conjuntos H_k resultan ser subespacios cerrados de H y verifican que $H_{k+1}\subsetneq H_k$ para todo $k\in\mathbb{N}$.

Podemos entonces elegir $u_k\in H_k$ tal que $u_k\in H_{k+1}^{P}\perp$ y $\|u_k\|=1$. Ahora escribimos

$$Ku_k - Ku_l = -(u_k-Ku_k) + (u_j - Ku_j) + (u_k-u_j).$$

Si $j<k$, se tiene que $H_{k+1}\subsetneq H_k\subset H_{j+1}\subsetneq H_j$, luego $u_k-Ku_k, u_j-Ku_j, u_k\subset H_{j+1}$ y como $u_j\subset H_{j+1}^{\perp}$ con $\|u_j\|=1$ por Pitágoras deducimos que

$$\|Ku_k-Ku_j\|\geq 1$$

que contradice la compacidad de K.

Asumamos ahora que $\operatorname{Im}(I-K)=H$. Luego, por 3, obtenemos que $\operatorname{Nu}(I-K^*)=\{0\}$. Como K^* es compacto si K lo es (¡demostrar esto!) utilizando el caso anterior tenemos que $\operatorname{Im}(I-K^*)=H$. Pero luego $\operatorname{Nu}(I-K)=\operatorname{Im}(I-K^*)^{\perp}=\{0\}$. Esto concluye la demostración de 4.

Finalmente, afirmamos que

$$\dim(\mathrm{Nu}(I-K)) \geq \dim(\mathrm{Im}(I-K)^{\perp}).$$

Supongamos que la afirmación es falsa. Luego, existe una aplicación $A\colon \mathrm{Nu}(I-K) \to \mathrm{Im}(I-K)^{\perp}$ lineal y continua que es inyectiva pero no suryectiva. Extendemos $A\colon H \to \mathrm{Im}(I-K)^{\perp}$ definiendo $Au = 0$ para $u \in \mathrm{Nu}(I-K)^{\perp}$.

Ahora, A tiene imagen de dimensión finita, luego A y $K + A$ resultan operadores compactos. Más aún, $\mathrm{Nu}(I-(K+A)) = \{0\}$. En efecto, si $Ku + Au = u$, entonces $u - Ku = Au \in \mathrm{Im}(I-K)^{\perp}$, de donde $u - Ku = Au = 0$ lo que implica que $u = 0$ pues A es inyectiva sobre $\mathrm{Nu}(I-K)$. Aplicando 4 a $\tilde{K} = K + A$ concluimos que $\mathrm{Im}(I-(K+A)) = H$. Pero esto resulta imposible puesto que si $f \in \mathrm{Im}(I-K)^{\perp}$ pero $f \notin \mathrm{Im}(A)$ (tal f existe pues A no es sobreyectiva), la ecuación

$$u - (Ku + Au) = f$$

no tiene solución (verificar este hecho que es sencillo). Esto prueba la afirmación.

Para concluir la demostración de 5, como $\mathrm{Im}(I-K^*)^{\perp} = \mathrm{Nu}(I-K)$, de esta última afirmación deducimos que

$$\dim(\mathrm{Nu}(I-K^*)) \geq \dim(\mathrm{Im}(I-K^*)^{\perp}) = \dim(\mathrm{Nu}(I-K)).$$

La desigualdad opuesta se obtiene de intercambiar los roles de K y K^*. □

Observación 10.5.9. El punto central que da la alternativa es el 4 que dice que, al igual a lo que sucede con matrices, un operador de la forma $I - K$ es inyectivo si y sólo si es sobreyectivo. Luego, la ecuación

$$u - Ku = f$$

tiene solución única para toda $f \in H$ o existe $x \in H$ tal que $x - Kx = 0$.

Observación 10.5.10. El punto 3 me permite comprobar cuándo un elemento $f \in H$ pertenece a $\mathrm{Im}(I-K)$. Más aún, por los puntos 1, 3 y 5, tenemos que $f \in H$ pertenece a $\mathrm{Im}(I-K)$ si y sólo si f verifica *finitas* condiciones de ortogonalidad (tantas como $\dim(\mathrm{Nu}(I-K^*))$).

Ejercicio 10.5.11. Probar que el Teorema 10.5.8 también se aplica a operadores de la forma $G - K$ donde $G, K\colon H \to H$ son lineales y continuos, G es inversible y K es compacto.

10.5.3. Aplicación a ecuaciones elípticas. En esta sección aplicaremos el Teorema 10.5.8 para dar condiciones para la existencia y unicidad para el problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{en } U \\ u = 0 & \text{en } \partial U, \end{cases}$$

donde $\mathcal{L}$ es el operador elíptico dado por (10.1.3)

Veamos, formalmente, quién es el adjunto del operador $\mathcal{L}$. Suponiendo que $\mathcal{L}u \in L^2(U)$, tenemos que

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}u, v) &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_U a_{ij}(x)\partial_j u \partial_i v \, dx + \int_U b_j \partial_j uv \, dx + \int_U c(x)uv \, dx \\ &= -\sum_{i,j=1}^{n} \int_U \partial_j(a_{ij}(x)\partial_i v)u \, dx - \sum_{j=1}^{n} \partial_j(b_j(x)v)u \, dx + \int_U c(x)uv \, dx \\ &= \int_U u \left(-\sum_{i,j=1}^{n} \partial_j(a_{ij}(x)\partial_i v) - \sum_{j=1}^{n} \partial_j(b_j(x)v) + c(x)v \right) dx \\ &= (u, \mathcal{L}^* v)\end{aligned}$$

Esto motiva la siguiente definición.

Definición 10.5.12. Sea $\mathcal{L}$ el operador elíptico dado por (10.1.3). Se define el operador adjunto formal de $\mathcal{L}$, notado por $\mathcal{L}^*$, como

$$\mathcal{L}^* v := -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_j(a_{ij}(x)\partial_i v) - \sum_{j=1}^{n} \partial_j(b_j(x)v) + c(x)v.$$

La forma bilineal adjunta asociada $B^* \colon H_0^1(U) \times H_0^1(U) \to \mathbb{R}$ se define como

$$B^*[v, u] := B[u, v],$$

donde $B[\cdot, \cdot]$ es la forma bilineal asociada a $\mathcal{L}$.

Finalmente, decimos que $v \in H_0^1(U)$ es solución débil de

$$\begin{cases} \mathcal{L}^* v = f & \text{en } U \\ v = 0 & \text{en } \partial U, \end{cases}$$

donde $f \in L^2(U)$, si

$$B^*[v, u] = \int_U fu \, dx$$

para toda $u \in H_0^1(U)$.

Con esta definición ya podemos enunciar el teorema de la alternativa de Fredholm para el operador $\mathcal{L}$.

Teorema 10.5.13 (Alternativa de Fredholm para $\mathcal{L}$). *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y sea $\mathcal{L}$ el operador elíptico dado por* (10.1.3).

Se tiene entonces una y sólo una de las siguientes alternativas:

(α) *para toda $f \in L^2(U)$, existe una única solución débil de $\mathcal{L}u = f$ en U con $u = 0$ en ∂U, ó*

(β) *existe una solución no trivial del problema homogéneo $\mathcal{L}u = 0$ en U con $u = 0$ en ∂U.*

En caso en que valga (β), si $\mathrm{Nu}(\mathcal{L}) \subset H_0^1(U)$ es el espacio de soluciones del problema homogéneo, $\mathrm{Nu}(\mathcal{L})$ tiene dimensión finita y $\dim(\mathrm{Nu}(\mathcal{L})) = \dim(\mathrm{Nu}(\mathcal{L}^*))$ donde $\mathrm{Nu}(\mathcal{L}^*)$ es el espacio de soluciones del problema homogéneo asociado al operador $\mathcal{L}^*$.

Finalmente, existe una solución débil de $\mathcal{L}u = f$ en U con $u = 0$ en ∂U si y sólo si

$$\int_U fv\,dx = 0 \quad \textit{para todo } v \in \mathrm{Nu}(\mathcal{L}^*).$$

Demostración. Sea $\gamma > 0$ tal que la forma bilineal

$$B_\gamma[u,v] = B[u,v] + \gamma \int_U uv\,dx$$

sea coersiva. Esto es posible por el Teorema 10.4.4.

Luego, nuevamente por el Teorema 10.4.4, dada $g \in L^2(U)$, existe una única $u \in H_0^1(U)$ tal que

$$B_\gamma[u,v] := \int_U gv\,dx,$$

para toda $v \in H_0^1(U)$.

Notaremos $\mathcal{L}_\gamma^{-1} g := u$. Observemos que $\mathcal{L}_\gamma^{-1}$ resulta un operador lineal (¡ejercicio!).

Ahora observemos que $u \in H_0^1(U)$ es una solución débil de $\mathcal{L}u = f$ en U con $u = 0$ en ∂U si y sólo si

$$B[u,v] = \int_U fv\,dx \quad \text{para todo } v \in H_0^1(U),$$

pero esto es equivalente a

$$B_\gamma[u,v] = \int_U (f + \gamma u)v\,dx \quad \text{para todo } v \in H_0^1(U).$$

Es decir,

$$u = \mathcal{L}_\gamma^{-1}(f + \gamma u) = \mathcal{L}_\gamma^{-1} f + \gamma \mathcal{L}_\gamma^{-1} u.$$

Luego, llamando $h = \mathcal{L}_\gamma^{-1} f$ y $K = \gamma \mathcal{L}_\gamma^{-1}$ la identidad anterior se rescribe como

$$u - Ku = h,$$

o lo que es lo mismo

$$(I - K)u = h.$$

Queremos entonces aplicar el Teorema 10.5.8 y para eso debemos ver que $K\colon L^2(U) \to L^2(U)$ es un operador compacto.

Para chequear la compacidad de K, lo descomponemos como $i \circ \tilde{K}$ donde

$$i\colon H_0^1(U) \to L^2(U), \quad i(u) = u$$
$$\tilde{K}\colon L^2(U) \to H_0^1(U), \quad \tilde{K} f = \gamma \mathcal{L}_\gamma^{-1} f.$$

Ahora, i resulta compacto por el Teorema de Rellich-Kondrachov, Teorema 9.4.1. Luego, si verificamos que $\tilde{K}$ es continuo, K resultará compacto por el Ejercicio 10.5.7.

Veamos entonces la continuidad de $\tilde{K}$. Sea $f \in L^2(U)$ y llamemos $u = \mathcal{L}_\gamma^{-1} f$. Luego, por definición, $u \in H_0^1(U)$ verifica

$$B_\gamma[u,v] = \int_U fv\,dx \quad \text{para todo } v \in H_0^1(U).$$

Por la coersividad de $B_\gamma[\cdot,\cdot]$, sigue que

$$\theta\|\nabla u\|_2^2 \le B_\gamma[u,u] = \int_U fu\,dx \le \|f\|_2\|u\|_2 \le C\|f\|_2\|\nabla u\|_2$$

done hemos usado la desigualdad de Poincaré, Teorema 9.3.5, en la última desigualdad.

Esto trivialmente implica

$$\|\mathcal{L}_\gamma^{-1}f\|_{H_0^1(U)} \le C\|f\|_{L^2(U)},$$

que es exactamente la continuidad de $\mathcal{L}_\gamma^{-1}\colon L^2(U)\to H_0^1(U)$.

Dado que $\tilde K = \gamma\mathcal{L}_\gamma^{-1}$ queda probada la continuidad de $\tilde K$ y en consecuencia la compacidad de $K\colon L^2(U)\to L^2(U)$.

Podemos entonces aplicar el Teorema 10.5.8 y concluir que,

(a) o bien existe una única $u\in L^2(U)$ tal que $u-Ku=h$ para toda $h\in L^2(U)$,
(b) o bien $\mathrm{Nu}(I-K)\neq\{0\}$.

Es fácil ver que si se da la alternativa (a), entonces se tiene la alternativa (α) del teorema.

Supongamos entonces que se tiene la alternativa (b), luego igual que en el caso anterior se verifica que $\mathrm{Nu}(\mathcal{L}) = \mathrm{Nu}(I-K)\neq\{0\}$ que es la alternativa (β) del teorema.

Más aún, por el Teorema 10.5.8, se tiene que $\dim(\mathrm{Nu}(I-K)) = \dim(\mathrm{Nu}(I-K^*)) < \infty$ y se verifica fácilmente que $\mathrm{Nu}(I-K^*) = \mathrm{Nu}(\mathcal{L}^*)$.

Finalmente, $u-Ku=h$ si y sólo si $h\in\mathrm{Im}(I-K) = \mathrm{Nu}(I-K^*)^\perp$. Pero esto es equivalente a

$$(h,v) = \int_U hv\,dx \quad \text{para todo } v\in\mathrm{Nu}(I-K^*).$$

Ahora, $h = \mathcal{L}_\gamma^{-1}f = \gamma^{-1}\gamma\mathcal{L}_\gamma^{-1}f = \gamma^{-1}Kf$. Luego,

$$0 = (h,v) = \frac{1}{\gamma}(Kf,v) = \frac{1}{\gamma}(f,K^*v) = \frac{1}{\gamma}(f,v),$$

dado que $v\in\mathrm{Nu}(I-K^*)$.

Esto concluye la demostración. □

10.6. Principio del máximo

En esta sección extenderemos el principio del máximo (débil) para soluciones débiles de operadores elípticos de la forma

$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^n \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u) + c(x)u, \tag{10.6.1}$$

donde los coeficientes son medibles acotados y la matriz $(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ es elíptica en el sentido de la Definición 10.1.2.

Probaremos el siguiente teorema.

TEOREMA 10.6.1. *Sea $U\subset\mathbb{R}^n$ un abierto acotado y sea $\mathcal{L}$ el operador elíptico dado por* (10.6.1) *con $c\ge 0$ c.t.p. en U. Sea $f\in L^2(U)$ y $u\in H_0^1(U)$ la solución de $\mathcal{L}u=f$*

en U con $u = 0$ en ∂U (observemos que tal solución existe y es única por el Teorema 10.3.2).

Luego, si $f \geq 0$ c.t.p. en U, entonces $u \geq 0$ c.t.p. en U.

Antes de ver la demostración, hagamos la siguiente observación.

Observación 10.6.2. La hipótesis del signo de $c(x)$ es necesaria. Para eso, veamos el siguiente ejemplo elemental: consideremos la ecuación

$$\begin{cases} -u'' - 4\pi^2 u = 0 & \text{en } (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Luego, se tiene que $u(x) = \sin(2\pi x)$ es solución de la ecuación y la misma cambia de signo en $(0,1)$.

Puede verse que es posible debilitar la condición $c \geq 0$. De hecho alcanza con pedir que c no sea *muy negativo*, es decir $c \geq -\delta$ para algún $\delta > 0$. Ver el Ejercicio 10.6.3.

Demostración del Teorema 10.6.1. Dado que $\mathcal{L}u = f \geq 0$, se tiene que, para toda $v \in H_0^1(U)$ tal que $v \geq 0$ c.t.p. en U, $B[u,v] \geq 0$. Es decir,

$$\sum_{i,j=1}^n \int_U a_{ij}(x)\partial_j u \partial_i v\, dx + \int_U c(x)uv\, dx = \int_U fv\, dx \geq 0, \tag{10.6.2}$$

para toda $v \in H_0^1(U)$, $v \geq 0$ c.t.p. en U.

El tema ahora es elegir una función *test* adecuada. Observemos que demostrar que $u \geq 0$ c.t.p. en U equivale a demostrar que $u^- := \max\{-u, 0\} = 0$ c.t.p. en U. Como $u^- \geq 0$ c.t.p. en U y $u^- \in H_0^1(U)$ (ver el Ejercicio 9.5.15), resulta natural tomar $v = u^-$ en (10.6.2).

Por otro lado, es fácil verificar que $uu^- = -(u^-)^2$ y, por el Ejercicio 9.5.15, se tiene que $\partial_i u^- = -\partial_i u \mathbf{1}_{\{u<0\}}$ de donde $\partial_j u \partial_i u^- = -\partial_j u^- \partial_i u^-$.

En consecuencia obtenemos

$$0 \leq B[u,u^-] = -\sum_{i,j=1}^n \int_U a_{ij}(x)\partial_j u^- \partial_i u^-\, dx - \int_U c(x)(u^-)^2\, dx \leq -\theta \int_U |\nabla u^-|^2\, dx,$$

donde hemos usado la elipticidad de la matriz $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ y la segunda integral se descarta dado que $c \geq 0$ c.t.p. en U.

Luego, hemos probado que

$$\int_U |\nabla u^-|^2\, dx \leq 0,$$

de donde se concluye el teorema. $\square$

Ejercicio 10.6.3. Verificar que las conclusiones del Teorema 10.6.1 se mantienen si se tiene que $c \geq -\delta$ c.t.p. en U para algún $\delta > 0$ pequeño.

10.7. Autovalores para operadores elípticos simétricos

En esta sección estudiaremos el problema de autovalores para operadores elípticos simétricos. Los operadores que consideraremos serán pues de la forma (10.6.1) con la matriz de coeficientes simétrica, es decir $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, \dots, n$. Con esas hipótesis la forma bilineal asociada resulta simétrica (i.e. $B[u, v] = B[v, u]$) y el operador adjunto formal $\mathcal{L}^*$ coincide con $\mathcal{L}$.

Al igual que como se hizo con la alternativa de Fredholm, resulta instructivo tratar de entender bien primero cómo es la teoría de autovalores para matrices simétricas de $n \times n$ para ver qué es lo que se puede esperar para operadores.

10.7.1. Autovalores para matrices simétricas. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica, es decir, $A = A^\top$. Es bien sabido que todo autovalor asociado a una matriz simétrica es real. En efecto si $\lambda \in \mathbb{C}$ es un autovalor de A, existe $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tal que

$$Az = \lambda z.$$

Por otro lado, si conjugamos la ecuación de arriba obtenemos que $\bar\lambda$ es autovalor de A con autovector $\bar z$ y, además

$$\lambda|z|^2 = \lambda z \cdot \bar z = Az \cdot \bar z = z \cdot A\bar z = z \cdot \bar\lambda \bar z = \bar\lambda |z|^2,$$

donde hemos usado que $A = A^\top$. Luego $\lambda = \bar\lambda$ como queríamos ver.

Por otro lado, es sencillo ver que si definimos

$$\lambda_1 := \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ |x|=1}} Ax \cdot x,$$

resulta que λ_1 es un autovalor de A y que si v_1 es un punto donde se realiza ese máximo, entonces v_1 es un autovector de A asociado a λ_1.

Ejercicio 10.7.1. Verificar esta última afirmación. Sugerencia: pruebe usar el Teorema de los multiplicadores de Lagrange.

Observemos que λ_1 es el mayor autovalor de A. En efecto, si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de A y v es un autovector asociado a λ, que podemos suponer $|v| = 1$, entonces se tiene que

$$\lambda_1 \geq Av \cdot v = \lambda v \cdot v = \lambda |v|^2 = \lambda.$$

Para poder obtener los siguientes autovalores de A, se hace la siguiente observación. Si $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^n$ es un subespacio $A-$invariante, es decir $Ax \in \mathbb{S}$ si $x \in \mathbb{S}$, entonces se tiene que $\mathbb{S}^\perp$ también resulta un subespacio $A-$invariante. En efecto, sea $y \in \mathbb{S}^\perp$. Luego, si $x \in \mathbb{S}$ se tiene que

$$Ay \cdot x = y \cdot Ax = 0,$$

dado que $Ax \in \mathbb{S}$. Esto prueba la afirmación.

Entonces, si v_1 es un autovector asociado a λ_1, $|v_1| = 1$, sigue que $\mathrm{gen}\{v_1\}$ es $A-$invariante y por la observación previa, $\mathrm{gen}\{v_1\}^\perp$ también lo es. Luego, si definimos

$$\lambda_2 := \max_{\substack{|x|=1 \\ x\cdot v_1=0}} Ax \cdot x,$$

tendremos que $\lambda_2 \leq \lambda_1$, λ_2 es un autovalor de A y si $v_2 \in \mathrm{gen}\{v_1\}^\perp$ realiza ese máximo, entonces v_2 es un autovector asociado a λ_2.

Ejercicio 10.7.2. Verificar todas las afirmaciones realizadas.

Razonando inductivamente, nos construimos $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ dados por

$$\lambda_k := \max_{\substack{|x|=1 \\ x\cdot v_j = 0 \\ j=1,\dots,k-1}} Ax \cdot x,$$

donde v_k es un punto donde se alcanza ese máximo y el mismo resulta ser un autovector de A asociado a λ_k.

Observemos que, por definición, el conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ es ortonormal y en consecuencia resulta una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

En particular, la matriz A resulta diagonalizable.

10.7.2. Extensión a espacios de Hilbert. Veamos ahora cómo pueden extenderse los resultados e ideas de la sección previa cuando se trata de operadores en un espacio de Hilbert de dimensión infinita.

Algunos de los inconvenientes que se presentan son,

- En la definición de λ_1 la existencia del máximo está garantizada en $\mathbb{R}^n$ dado que la bola unitaria es compacta. En dimensión infinita esa propiedad es falsa, por lo que no es claro que ese máximo se alcance. Esta falta de compacidad es necesario que se compense de alguna manera. Por ese motivo, vamos a trabajar con operadores compactos.
- La simetría de la matriz, debería reemplazarse por que el operador sea autoadjunto.
- Suponiendo que λ_1 resulte bien definido y que el máximo se alcance, eso nos permitiría construir una sucesión $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$, pero ahora esta sucesión sería infinita. ¿Cómo podemos garantizar que estos son todos los autovalores?

Vamos ahora a ver un teorema que permite extender lo visto para matrices simétricas a operadores compactos y autoadjuntos en un espacio de Hilbert.

Observemos que en el caso de matrices, λ es un autovalor de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ si y sólo si existe $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, tal que $Ax = \lambda x$, si y sólo si $\mathrm{Nu}(A - \lambda I) \neq \{0\}$, si y sólo si $\mathrm{Im}(A - \lambda I) \neq \mathbb{R}^n$.

En el caso de dimensión infinita, estas propiedades no tienen por qué ser equivalentes y eso da lugar a la siguientes definiciones.

Definición 10.7.3. Sea H un espacio de Hilbert y $A\colon H \to H$ un operador lineal y continuo. Se define el espectro de A como

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{R} \colon (A - \lambda I) \text{ no es inversible}\}.$$

Se define el espectro puntual de A como

$$\sigma_p(A) := \{\lambda \in \mathbb{R} \colon \mathrm{Nu}(A - \lambda I) \neq \{0\}\}.$$

Observemos que λ es un autovalor de A si y sólo si $\lambda \in \sigma_p(A)$.

En el caso de matrices, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se tiene que $\sigma(A) = \sigma_p(A)$, pero en general sólo se puede afirmar que $\sigma_p(A) \subset \sigma(A)$. Ver **[2]** para más detalles sobre este tema.

Tenemos el siguiente teorema fundamental.

TEOREMA 10.7.4 (Teorema espectral para operadores compactos). *Sea H un espacio de Hilbert de dimensión infinita y sea $K\colon H \to H$ un operador compacto. Entonces*

1. $0 \in \sigma(K)$,
2. $\sigma(K) \setminus \{0\} = \sigma_p(K) \setminus \{0\}$,
3. $\sigma(K) \setminus \{0\}$ *es o bien finito, o bien una sucesión que converge a* 0.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $0 \notin \sigma(K)$. Entonces $K\colon H \to H$ es biyectiva y luego $I = K \circ K^{-1}$ resulta compacta. Pero esto es imposible pues $\dim(H) = \infty$.

Sea $\lambda \in \sigma(K)$, $\lambda \neq 0$. Entonces si $\mathrm{Nu}(I - \lambda K) = \{0\}$, el Teorema de la alternativa de Fredholm, Teorem 10.5.8, implica que $\mathrm{Im}(I - \lambda K) = H$. Pero esto contradice que $\lambda \in \sigma(K)$.

Finalmente, sea $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \sigma(K) \setminus \{0\}$ una sucesión de elementos distintos tales que $\lambda_k \to \lambda$. Mostraremos que $\lambda = 0$ y eso finaliza la demostración del teorema (un conjunto de números reales con un único posible punto de acumulación es o bien finito o bien una sucesión).

En efecto, como $\lambda_k \in \sigma(K)\setminus\{0\} = \sigma_p(K)\setminus\{0\}$, existe $w_k \neq 0$ tal que $Kw_k = \lambda_k w_k$. Notemos por H_k el subespacio generado por $\{w_1, \dots, w_k\}$. Como el conjunto $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es linealmente independiente, se tiene que $H_k \subsetneq H_{k+1}$.

Observemos además que se tiene $(K - \lambda_k I)(H_k) = H_{k-1}$ para $k \geq 2$. Tomemos entonces $u_k \in H_k$, $\|u_k\| = 1$ y $u_k \in H_{k-1}^{\perp}$. Luego, para $j < k$, se tiene $H_{j-1} \subsetneq H_j \subset H_{k-1} \subsetneq H_k$ y obtenemos

$$\left\|\frac{Ku_k}{\lambda_k} - \frac{Ku_j}{\lambda_j}\right\| = \left\|\frac{Ku_k - \lambda_k u_k}{\lambda_k} - \frac{Ku_j - \lambda_j u_j}{\lambda_j} + u_k - u_j\right\| \geq 1,$$

dado que $Ku_k - \lambda_k u_k, Ku_j - \lambda_j u_j, u_j \in H_{k-1}$ y $u_k \in H_{k-1}^{\perp}$.

Si $\lambda_k \to \lambda \neq 0$ esto contradice la compacidad de K. □

Para operadores autoadjuntos (no necesariamente compactos) se tiene la siguiente estimación del espectro.

LEMA 10.7.5. *Sea $S\colon H \to H$ un operador lineal, continuo y autoadjunto. Definimos los números*

$$m := \inf_{\substack{u\in H\\ \|u\|=1}} (Su, u), \qquad M := \sup_{\substack{u\in H\\ \|u\|=1}} (Su, u).$$

Entonces se tiene

1. $\sigma(S) \subset [m, M]$.
2. $m, M \in \sigma(S)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\eta > M$. Entonces

$$(\eta u - Su, u) \geq (\eta - M)\|u\|^2,$$

para $u \in H$. Luego, por el Teorema de Lax-Milgram (Teorema 10.4.1) tenemos que $\eta I - S$ es biyectiva sobre H. Luego $\eta \notin \sigma(S)$.

Razonando de forma análoga se concluye que si $\eta < m$, $\eta \notin \sigma(S)$.

Veamos ahora que $M \in \sigma(S)$. Si definimos $[u, v] := (Mu - Su, v)$, se tiene que $[u, v]$ es una forma bilineal simétrica (pues S es autoadjunto) y semi-definida positiva (por la definición de la constante M). Luego, verifica la desugualdad de Cauchy-Schwarz $[u,v] \leq [u,u]^{\frac{1}{2}}[v,v]^{\frac{1}{2}}$. Es decir, se tiene la desigualdad

$$(Mu - Su, v) \leq (Mu - Su, u)^{\frac{1}{2}}(Mv - Sv, v)^{\frac{1}{2}}.$$

Esta desigualdad implica que (¡verificarlo!)

$$\|Mu - Su\| \leq C(Mu - Su, u)^{\frac{1}{2}}, \tag{10.7.1}$$

para alguna constante $C > 0$ y para todo $u \in H$.

Sea $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H$ tal que $\|u_k\| = 1$ y $(Su_k, u_k) \to M$. Luego, por (10.7.1), tenemos que $Mu_k - Su_k \to 0$. Supongamos, por el absurdo, que $M \notin \sigma(S)$. Luego, $MI - S$ resulta inversible, de donde

$$u_k = (MI - S)^{-1}(Mu_k - Su_k) \to 0,$$

que contradice el hecho de que $\|u_k\| = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

De manera completamente análoga sigue que $m \in \sigma(S)$. □

Cuando el operador es simultáneamente compacto y autoadjunto, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 10.7.6 (Diagonalización de operadores compactos y autoadjuntos). *Sea H un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita y sea $K\colon H \to H$ un operador compacto y autoadjunto. Entonces existe una base numerable ortonormal de H de autovectores de K.*

Demostración. Consideremos $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ la sucesión de autovalores de K a excepción de 0 y llamemos $\lambda_0 = 0$. Notemos $H_0 = \mathrm{Nu}(K)$, $H_k = \mathrm{Nu}(K - \lambda_k I)$, $k \in \mathbb{N}$.

Por la alternativa de Fredholm, Teorema 10.5.8, tenemos que $0 \leq \dim(H_0) \leq \infty$ y $0 < \dim(H_k) < \infty$.

Sean $u \in H_k$ y $v \in H_j$ para $j \neq j$. Entonces $Ku = \lambda_k u$ y $Kv = \lambda_j v$. Luego

$$\lambda_k(u,v) = (Ku, v) = (u, Kv) = \lambda_j(u,v).$$

Como $\lambda_k \neq \lambda_j$ obtenemos que $(u,v) = 0$. Es decir, los subespacios H_k y H_j son ortogonales.

Sea ahora $\tilde{H} \subset H$ el menor subespacio que contiene a H_k $(k = 0, 1, \dots)$. Queremos demostrar que $\tilde{H}$ es denso en H. Claramente $\tilde{H}$ es invariante por K y los mismo ocurre con $\tilde{H}^{\perp}$. En consecuencia si $u \in \tilde{H}$ y $v \in \tilde{H}^{\perp}$. tenemos que

$$(Ku, v) = (u, Kv) = 0.$$

Definamos ahora $\tilde{K} := K|_{\tilde{H}^{\perp}}$. Este operador $\tilde{K}$ es compacto y autoadjunto. Más aún, $\sigma\tilde{K} = \{0\}$ pues cualquier autovalor no nulo de $\tilde{K}$ lo sería también de K.

Luego, por el Lema 10.7.5, tenemos que $(\tilde{K}u, u) = 0$ para todo $u \in \tilde{H}^{\perp}$. Pero si $u, v \in \tilde{H}^{\perp}$,

$$2(\tilde{K}u, v) = (\tilde{K}(u+v), u+v) - (\tilde{K}u, u) - (\tilde{K}v, v) = 0.$$

En consecuencia, $\tilde{K} = 0$ y por ende $\tilde{H}^{\perp} \subset \mathrm{Nu}(K) \subset \tilde{H}$ de donde $\tilde{H}^{\perp} = \{0\}$. Luego $\tilde{H}$ es denso en H.

Finalmente, se toma una base ortonormal de cada H_k $(k = 1, \dots)$ (cada H_k tiene dimensión finita) y, como H es separable, H_0 posee una base ortonormal numerable.

Uniendo todas estas bases se obtiene una base ortonormal de H de autovectores de K. $\square$

10.7.3. Aplicación a operadores elípticos simétricos. Vamos ahora a ver como, aplicando los teoremas de la sección anterior (Teoremas 10.7.4 y 10.7.6), podemos estudiar el problema de autovalores para operadores elípticos simétricos.

En esta sección, consideraremos el operador $\mathcal{L}$ definido en (10.6.1).

Decimos que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de $\mathcal{L}$ si existe una función $u \in H_0^1(U)$, $u \neq 0$, solución débil de

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \lambda u & \text{en } U \\ u = 0 & \text{en } \partial U. \end{cases} \tag{10.7.2}$$

A tal función u se la denomina una *autofunción* de $\mathcal{L}$ asociada a λ.

En el caso de autovalores podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $c(x) \geq 0$ c.t.p. en U. En efecto, $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de $\mathcal{L}$ si y sólo si $\tilde{\lambda} = \lambda + \|c\|_\infty$ es un autovalor de

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{L}}u := \mathcal{L}u + \|c\|_\infty u = \tilde{\lambda} u & \text{en } U \\ u = 0 & \text{en } \partial U. \end{cases}$$

Observemos que

$$\tilde{\mathcal{L}}u = -\sum_{i,j=1}^n \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u) + \tilde{c}(x)u,$$

donde $\tilde{c}(x) = c(x) + \|c\|_\infty \geq 0$.

Antes de ver el teorema general repasemos algunos ejemplos que hemos visto.

Ejemplo 10.7.7. En el Capítulo 3, Sección 3.1, estudiamos un caso particular. Vimos que si $U = (0, \ell) \subset \mathbb{R}^1$ y $\mathcal{L}u = -u''$, entonces el problema de autovalores para el operador $\mathcal{L}$ puede describirse completamente.

En efecto, encontramos que el conjunto de autovalores es $\{\lambda_k = (\frac{k\pi}{\ell})^2\}_{k\in\mathbb{N}}$ y que las autofunciones asociadas son $\{w_k(x) = \sin(\frac{k\pi}{\ell}x)\}_{k\in\mathbb{N}}$.

En particular se observa que cada autovalor es *simple*, es decir el subespacio de autofunciones asociadas tiene dimensión uno y que el conjunto de autofunciones forma una base ortonormal de $L^2(U)$.

También se observa que los autovalores verifican que $\lambda_k \uparrow \infty$.

No todas estas propiedades son ciertas en el caso general como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 10.7.8. En el Ejercicio 3.8.13 se estudia el problema de autovalores del operador de Laplace $\mathcal{L} = -\Delta$ en el dominio $U = (0,1)\times(0,1) \subset \mathbb{R}^2$. En ese caso se tiene que los autovalores vienen dados por $\{\lambda_{i,j} = \pi(i^2 + j^2)\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ y que las autofunciones asociadas son $\{w_{i,j}(x,y) = \sin(\pi i x)\sin(\pi j y)\}_{i,j\in\mathbb{N}}$.

Si en este caso ordenamos los autovalores de menor a mayor y llamamos a ese ordenamiento $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ obtenemos que las autofunciones asociadas $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ siguen formando una base ortonormal de $L^2(U)$ y que $\lambda_k \uparrow \infty$ cuando $k \to \infty$.

Sin embargo, no es cierto que todo autovalor sea simple. En efecto, se observa que $\lambda_2 = \lambda_3 = 5\pi$ que corresponde tanto a $i = 1, j = 2$ como a $i = 2, j = 1$.

El espacio de autofunciones asociadas tiene dimensión 2 y está dado por

$$\operatorname{gen}\{\sin(\pi x)\sin(2\pi y), \sin(2\pi x)\sin(\pi y)\}.$$

EJERCICIO 10.7.9. Sea $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ la sucesión de autovalores del Ejemplo 10.7.8. Probar que $\lambda_k \sim k$ cuando $k \to \infty$. Es decir, que existen constantes $0 < c < C$ tales que

$$ck \le \lambda_k \le Ck.$$

Ahora si, veamos el teorema para operadores elípticos simétricos.

TEOREMA 10.7.10. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y sea $\mathcal{L}$ el operador elíptico dado por* (10.6.1) *con $c(x) \ge 0$ c.t.p. en U. Entonces*

1. *Todo autovalor de $\mathcal{L}$ es real.*
2. *El conjunto de los autovalores de $\mathcal{L}$ (contados con su multiplicidad) forma una sucesión $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_k \uparrow \infty$. En particular, cada autovalor λ_k tiene dimensión finita.*
3. *Existe una base ortonormal $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $L^2(U)$, donde $w_k \in H_0^1(U)$ es una autofunción de $\mathcal{L}$ asociada a λ_k, $k \in \mathbb{N}$.*

DEMOSTRACIÓN. Observemos que, por el Teorema 10.3.2, dada $f \in L^2(U)$, existe una única $u \in H_0^1(U)$ solución débil de

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{en } U \\ u = 0 & \text{en } \partial U. \end{cases}$$

Sea entonces $K := \mathcal{L}^{-1}$ el operador definido por $Kf = u$. Veamos que $K\colon L^2(U) \to L^2(U)$ es un operador compacto.

Pero K resulta compacto porque puede factorizarse como $K = i \circ \tilde{K}$ donde

$$\begin{aligned} &\tilde{K}\colon L^2(U) \to H_0^1(U), \quad \tilde{K}f = u \\ &i\colon H_0^1(U) \to L^2(U), \quad i(u) = u. \end{aligned}$$

Luego, i es compacto por el Teorema de Rellich-Kondrachov, Teorema 9.4.1, y $\tilde{K}$ resulta continua, dado que

$$\theta\|\tilde{K}f\|_{H_0^1}^2 = \theta\|\nabla u\|_2^2 \le B[u,u] = \int_U fu\,dx \le \|f\|_2\|u\|_2 \le C\|f\|_2\|\nabla u\|_2,$$

donde hemos usado la coersividad de la forma bilineal $B[\cdot,\cdot]$ asociada a $\mathcal{L}$, la definición de solución débil y la desigualdad de Poincaré, Teorema 9.3.5.

Luego,

$$\|\tilde{K}f\|_{H_0^1} \le C\|f\|_2,$$

que es exactamente la continuidad del operador $\tilde{K}$. Luego, $K = i \circ \tilde{K}$ resulta compacto por el Ejercicio 10.5.7.

Veamos ahora que K es autoadjunto. Para eso sean $f, g \in L^2(U)$ y debemos demostrar que

$$(Kf, g) = (f, Kg),$$

donde el producto interno es el de $L^2(U)$.

Pero si llamamos $u = Kf$ y $v = Kg$, tenemos

$$(Kf, g) = \int_U ug\,dx = B[v, u] = B[u, v] = \int_U vf\,dx = (f, Kg),$$

donde hemos usado que la forma bilineal $B[\cdot,\cdot]$ asociada a $\mathcal{L}$ es simétrica (c.f. Teorema 10.3.2).

Si ahora combinamos los Teoremas 10.7.4 y 10.7.6 junto con el Lema 10.7.5, obtenemos que todos los autovalores de K, llamémoslos $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, son reales, positivos, $\mu_k \downarrow 0$ cuando $k \to \infty$ y que las autofunciones correspondientes forman una base ortonormal de $L^2(U)$.

Finalmente, observamos que μ_k es un autovalor de K con autofunción w_k si y sólo si $\lambda_k := \mu_k^{-1}$ es un autovalor de $\mathcal{L}$ con autofunción w_k.

Esta última observación concluye la demostración. □

Si bien no es cierto que todo autovalor λ_k de un operador elíptico $\mathcal{L}$ sea simple, como lo muestra el Ejemplo 10.7.8, si se verifica esa propiedad para el *primer autovalor* λ_1. Más aún, observemos que en los Ejemplos 10.7.7 y 10.7.8 se observa que la primera autofunción es positiva, mientras que todas las demás cambian de signo. Veamos que estas dos propiedades son generales y se extienden a todo operador elíptico $\mathcal{L}$ simétrico.

TEOREMA 10.7.11. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y sea $\mathcal{L}$ el operador elíptico dado por* (10.6.1). *Notemos por $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ la sucesión de autovalores de $\mathcal{L}$. Entonces se tiene,*

1. *el primer autovalor λ_1 se caracteriza como*
$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \min\{B[u,u] \colon u \in H_0^1(U),\ \|u\|_2 = 1\}\\ &= \min_{\substack{u\in H_0^1(U)\\ u\neq 0}} \frac{\int_U \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\partial_j u \partial_i u + c(x)u^2\right)\,dx}{\int_U u^2\,dx},\end{aligned}$$
2. *$u \in H_0^1(U)$, $\|u\|_2 = 1$ es una autofunción asociada a λ_1 si y sólo si $\lambda_1 = B[u,u]$. Es decir, el mínimo del ítem anterior se realiza sobre las autofunciones asociadas a λ_1,*
3. *$w_1 > 0$ en U y si $u \in H_0^1(U)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ verifican*
$$\begin{cases}\mathcal{L}u = \lambda u & \text{en } U\\ u = 0 & \text{en } \partial U\\ u \geq 0 & \text{en } U,\end{cases}$$
entonces $\lambda = \lambda_1$,
4. *Finalmente, λ_1 es un autovalor simple. Es decir, si u es una autofunción asociada a λ_1, entonces u es un múltiplo de w_1.*

DEMOSTRACIÓN. Observemos que si $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es la base ortonormal de autofunciones de $\mathcal{L}$ (en $L^2(U)$), entonces se tiene que

$$B[w_k, w_k] = \lambda_k \|w_k\|_2^2 = \lambda_k,$$

y

$$B[w_k, w_j] = \lambda_k \int_U w_k w_j \, dx = 0 \text{ si } i \neq j.$$

Por otro lado, si $u \in H_0^1(U)$, entonces tenemos que

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} d_k w_k, \qquad d_k := \int_U u w_k \, dx \tag{10.7.3}$$

y el límite en la serie se entiende en sentido $L^2(U)$. Más aún,

$$\|u\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2.$$

Por otro lado, si consideramos en $H_0^1(U)$ el producto interno dado por la forma bilineal $B[\cdot,\cdot]$ (que es equivalente al usual), resulta que $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es un sistema ortogonal en $H_0^1(U)$ con respecto a este producto interno y $\{\frac{w_k}{\sqrt{\lambda_k}}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es un sistema ortonormal en $H_0^1(U)$ con respeto a este producto interno.

Veamos que $\{\frac{w_k}{\sqrt{\lambda_k}}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de $H_0^1(U)$ con respecto al producto interno $B[\cdot,\cdot]$.

En efecto, por la Proposición 3.2.16, basta ver que si $B[w_k, u] = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ entonces $u = 0$. Pero

$$B[w_k, u] = \lambda_k \int_U w_k u \, dx = \lambda_k (w_k, u)$$

y luego, si $B[w_k, u] = 0$ tenemos que $(w_k, u) = 0$. Luego, como $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal en $L^2(U)$, sigue que $u = 0$, como queríamos demostrar.

En consecuencia, si llamamos $b_k := B[u, \frac{w_k}{\sqrt{\lambda_k}}]$, tenemos que

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{w_k}{\sqrt{\lambda_k}},$$

donde la igualdad es en sentido $H_0^1(U)$.

Ahora observamos que

$$b_k = B[u, \tfrac{w_k}{\sqrt{\lambda_k}}] = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} B[u, w_k] = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \lambda_k (u, w_k) = \sqrt{\lambda_k} d_k,$$

y por ende

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{w_k}{\sqrt{\lambda_k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} d_k \frac{w_k}{\sqrt{\lambda_k}} = \sum_{k=1}^{\infty} d_k w_k.$$

Es decir, la igualdad (10.7.3) se verifica tanto en sentido $L^2(U)$ como en sentido $H_0^1(U)$.

Sea ahora $u \in H_0^1(U)$, $\|u\|_2 = 1$, luego $\sum_{k=1}^\infty d_k^2 = 1$ y

$$\begin{aligned} B[u,u] &= B\left[\sum_{k=1}^\infty d_k w_k, \sum_{j=1}^\infty d_j w_j\right] = \sum_{k,j=1}^\infty d_k d_j B[w_k, w_j] \\ &= \sum_{k=1}^\infty d_k^2 B[w_k, w_k] = \sum_{k=1}^\infty d_k^2 \lambda_k \\ &\geq \lambda_1 \sum_{k=1}^\infty d_k^2 = \lambda_1. \end{aligned}$$

Esto prueba la primera afirmación del teorema.

Para probar la segunda afirmación, debemos chequear que si $u \in H_0^1(U)$ con $\|u\|_2 = 1$ verifica que $B[u,u] = \lambda_1$ entonces u es una autofunción de $\mathcal{L}$ asociada a λ_1. Pero u se puede escribir como $u = \sum_{k=1}^\infty d_k w_k$ con $\sum_{k=1}^\infty d_k^2 = 1$. Supongamos que $d_{k_0} \neq 0$ con $\lambda_{k_0} > \lambda_1$. Luego, razonando de manera análoga a lo anterior,

$$\lambda_1 = B[u,u] = \sum_{k=1}^\infty d_k^2 \lambda_k \geq \lambda_1 \sum_{k \neq k_0} d_k^2 + \lambda_{k_0} d_{k_0}^2 > \lambda_1 \sum_{k=1}^\infty d_k^2 = \lambda_1.$$

Esto es una contradicción, lo que demuestra que u es una autofunción asociada a λ_1

Para demostrar la tercera afirmación, veamos primero que si $w \in H_0^1(U)$ es una autofunción asociada a λ_1, entonces se tiene que $w > 0$ en U. En realidad esta afirmación dice que w tiene signo constante, dado que si w es autofunción, entonces $-w$ también lo es.

Ahora, si llamamos $w^+ = \max\{w, 0\}$ y $w^- = \max\{-w, 0\}$, entonces tenemos que $w = w^+ - w^-$, $|w| = w^+ + w^-$, w^+ y w^- tienen soporte disjunto y en consecuencia $B[w^+, w^-] = 0$.

Luego

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= B[w,w] \\ &= B[w^+ - w^-, w^+ - w^-] \\ &= B[w^+, w^+] - 2B[w^+, w^-] + B[w^-, w^-] \\ &= B[w^+ + w^-, w^+ + w^-] \\ &= B[|w|, |w|]. \end{aligned}$$

Como $\||w|\|_2 = \|w\|_2 = 1$ sigue que $|w|$ es también una autofunción asociada a λ_1. Luego, si llamamos $v = |w|$ obtenemos que v verifica

$$\begin{cases} \mathcal{L}v = \lambda_1 v \geq 0 & \text{en } U \\ v = 0 & \text{en } \partial U \\ v \geq 0 & \text{en } U. \end{cases}$$

Ahora, este problema verifica la desigualdad de Harnack y de ahí se deduce que v es continua en U (ver [**8**]). Es decir, si $V \subset\subset U$, tenemos que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\max_V v \leq C \min_V v,$$

de donde se deduce que, o bien $v \equiv 0$ o $v > 0$ en U. Luego w no cambia de signo y por ende podemos suponer que $w > 0$.

Finalmente, supongamos que $u \geq 0$ es una solución débil de

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = \lambda u & \text{en } U \\ u = 0 & \text{en } \partial U \end{cases}$$

Pero si tomamos u como función test en la formulación débil de la ecuación que verifica w_1, se tiene

$$B[w_1, u] = \lambda_1 \int_U w_1 u \, dx$$

y si tomamos w_1 como función test en la formulación débil de la ecuación que verifica u, se tiene

$$B[u, w_1] = \lambda \int_U u w_1 \, dx.$$

Ahora, como $B[\cdot, \cdot]$ es simétrica, obtenemos

$$(\lambda_1 - \lambda) \int_U w_1 u \, dx = 0.$$

Como $w_1 > 0$ y $u \geq 0$, sigue que $\int_U w_1 u \, dx > 0$ de donde $\lambda = \lambda_1$.

Finalmente, la cuarta afirmación es una consecuencia inmediata de lo anterior, dado que si la dimensión del conjunto de autofunciones asociado a λ_1 es mayor a 1, entonces existen w, v autofunciones de λ_1 tales que

$$\int_U wv \, dx = 0.$$

Pero esto contradice el hecho de que ambas tienen signo constante.

Esto finaliza la demostración. □

Ejercicio 10.7.12. Con las mismas notaciones e hipótesis que en el Teorema 10.7.10, deducir la siguiente fórmula para el $k-$ésimo autovalor λ_k:

$$\lambda_k = \min\{B[u, u] \colon u \in H_0^1(U),\ \|u\|_2 = 1,\ (u, w_j) = 0\ j = 1, \dots, k-1\}, \tag{10.7.4}$$

donde $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ es la base ortonormal de autofunciones dada por el Teorema 10.7.10.

Más aún, demostrar que el mínimo en (10.7.4) se alcanza en una autofunción asociada a λ_k.

La fórmula (10.7.4) en la práctica es de poca utilidad dado que para calcular el $k-$ésimo autovalor es necesario haber calculado previamente λ_j para $j = 1, \dots, k-1$ y sus respectivas autofunciones. Pero sobre todo, la fórmula (10.7.4) no permite realizar comparaciones entre los autovalores de diferentes operadores elípticos o entre los autovalores de un mismo operador (por ejemplo, el laplaciano) en diferentes dominios.

Es por eso que es necesaria una expresión para los autovalores que permita calcular de manera independiente cada uno de esos y que nos permita realizar estimaciones de los mismos con más flexibilidad.

Este es el contenido del siguiente teorema.

TEOREMA 10.7.13 (Fórmula de Courant para el cálculo de autovalores). *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y sea $\mathcal{L}$ el operador elíptico dado por* (10.6.1). *Notemos por $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ la sucesión de autovalores de $\mathcal{L}$. Entonces se tiene,*

$$\lambda_k = \inf_{\substack{\mathbb{S}\subset H_0^1(U)\\ \dim\mathbb{S}\geq k}} \max_{\substack{u\in\mathbb{S}\\ \|u\|_2=1}} B[u,u]. \tag{10.7.5}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(U)$ la base de autofunciones de $\mathcal{L}$ ortonormal en $L^2(U)$. Es claro que si tomamos $\mathbb{S} := \text{gen}\{w_1,\dots,w_k\}$, entonces $\dim\mathbb{S} = k$ y

$$\max_{\substack{u\in\mathbb{S}\\ \|u\|_2=1}} B[u,u] = \lambda_k.$$

En efecto, si $u \in \mathbb{S}$ tenemos que $u = \sum_{j=1}^k d_j w_j$ con $d_j = (u, w_j)$ y $\|u\|_2^2 = \sum_{j=1}^k d_j^2$.

Luego, como $B[w_j, w_l] = 0$ si $j \neq l$, si $u \in \mathbb{S}$ con $\|u\|_2 = 1$,

$$B[u,u] = \sum_{j=1}^k d_j^2 B[w_j,w_j] = \sum_{j=1}^k d_j^2\lambda_j \leq \lambda_k \sum_{j=1}^k d_j^2 = \lambda_k.$$

Por otro lado, sea $\mathbb{S} \subset H_0^1(U)$ con $\dim\mathbb{S} \geq k$. Definimos $\mathbb{V} := \overline{\text{gen}\{w_k, w_{k+1},\dots\}}$ y tenemos que $\operatorname{codim}\mathbb{V} = k-1$.

Resulta sencillo verificar que $\mathbb{S}\cap\mathbb{V} \neq \emptyset$. Sea entonces $u \in \mathbb{S}\cap\mathbb{V}$, $\|u\|_2 = 1$.

Luego, $u = \sum_{j=k}^\infty d_j w_j$ y por ende

$$B[u,u] = \sum_{j=k}^\infty d_j^2 B[w_j,w_j] = \sum_{j=k}^\infty d_j^2\lambda_j \geq \lambda_k \sum_{j=k}^\infty d_j^2 = \lambda_k.$$

Esto concluye la demostración. □

Con la ayuda de este teorema se obienen los siguientes corolarios.

COROLARIO 10.7.14. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y sean $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ dos operadores elípticos dados por* (10.6.1). *Sean $B_1[\cdot,\cdot]$ y $B_2[\cdot,\cdot]$ las formas cuadráticas asociadas. Si $B_1[u,u] \leq B_2[u,u]$ para toda $u \in H_0^1(U)$ entonces se tiene que $\lambda_k^1 \leq \lambda_k^2$ para todo $k \in \mathbb{N}$ donde $\{\lambda_k^i\}_{k\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de autovalores del operador $\mathcal{L}_i$, $i = 1,2$ respectivamente.*

DEMOSTRACIÓN. La demostración es inmediata a partir de (10.7.5). Los detalles quedan de ejercicio al lector. □

COROLARIO 10.7.15. *Sean $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ dos abiertos acotados tales que $U_1 \subset U_2$ y sea $\mathcal{L}$ un operador elíptico dado por* (10.6.1) *en U_2. Llamemos $\{\lambda_k^i\}_{k\in\mathbb{N}}$ a la sucesión de autovalores del operador $\mathcal{L}$ en el abierto U_i, $i = 1,2$ respectivamente. Entonces se tiene que $\lambda_k^2 \leq \lambda_k^1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

DEMOSTRACIÓN. Por la Observación 9.3.2, ítem 3, tenemos que $H_0^1(U_1) \subset H_0^1(U_2)$.

Luego, $\{\mathbb{S} \subset H_0^1(U_1)\colon \dim\mathbb{S} \geq k\} \subset \{\mathbb{S} \subset H_0^1(U_2)\colon \dim\mathbb{S} \geq k\}$ y ahora, por la fórmula de Courant (10.7.5) se concluye lo deseado. □

EJERCICIO 10.7.16 (Fórmula asintótica de Weil en $\mathbb{R}^2$). Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un abierto acotado. Demostrar que existen constantes $0 < c < C$ que dependen sólo de U tales que

$$ck \le \lambda_k \le Ck,$$

donde λ_k son los autovalores $\mathcal{L} = -\Delta$ en U.

Sugerencia: Considerar dos cuadrados $Q_1, Q_2 \subset \mathbb{R}^2$ tales que $Q_1 \subset U \subset Q_2$. Ahora usar el Corolario 10.7.15 y el Ejercicio 10.7.9.

10.8. La ecuación de difusión

En esta sección, veremos como el método de separación de variables que empleamos en el Capítulo 3 puede emplearse para resulver la ecuación de difusión

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en } U \times (0,T) \\ u = 0 & \text{en } \partial U \times (0,T) \\ u = f & \text{en } U \times \{t = 0\}, \end{cases} \tag{10.8.1}$$

haciendo uso del estudio hecho del problema de autovalores para problemas elípticos simétricos en la Sección 10.7.

Si bien todo lo que hagamos en esta sección puede ser fácilmente extendido a problemas del tipo

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{L}u = 0 & \text{en } U \times (0,T) \\ u = 0 & \text{en } \partial U \times (0,T) \\ u = f & \text{en } U \times \{t = 0\}, \end{cases} \tag{10.8.2}$$

donde $\mathcal{L}$ es un operador elíptico simétrico dado por (10.6.1), elegimos trabajar con (10.8.1) por simplicidad y la teoría para (10.8.2) queda de ejercicio al lector (c.f. Ejercicio 10.9.12)

Para hayar la solución de (10.8.1) utilizaremos, como mencionamos antes, el método de separación de variables. Luego, comenzaremos buscando una solución particular de la forma

$$u(x,t) = v(t)w(x), \qquad t > 0,\ x \in U,$$

de donde

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = \frac{\Delta w(x)}{w(x)} = -\lambda = \text{constante}.$$

Luego, tenemos que

$$v(t) = e^{-\lambda t} \quad \text{y} \quad \begin{cases} -\Delta w = \lambda w & \text{en } U \\ w = 0 & \text{en } \partial U \end{cases}$$

Por el Teorema 10.7.10 sabemos que existe $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_k \uparrow \infty$ y $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H_0^1(U)$ que son una base ortonormal de $L^2(U)$ y forman un sistema ortogonal completo en $H_0^1(U)$ (observar que la forma bilineal asociada en este caso coincide con el producto interno usual en $H_0^1(U)$).

De hecho, es fácil verificar que $\{\frac{w_k}{\sqrt{\lambda_k}}\}_{k\in\mathbb{N}}$ forma una base ortonormal de $H_0^1(U)$.

Luego, buscamos una solución de (10.8.1) de la forma

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{-\lambda_k t} w_k(x),$$

de donde

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k w_k(x) = f(x).$$

En consecuencia, si tomamos $d_k = \int_U f w_k\,dx$, tenemos que

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} d_k w_k$$

donde la igualdad es en sentido $L^2(U)$.

Hasta ahora hemos razonado a nivel *formal*. Vamos ahora a razonar rigurosamente. Para eso, tomamos $f \in L^2(U)$ y definimos los coeficientes

$$d_k := \int_U f w_k\,dx.$$

Luego se define la función

$$u(x,t) := \sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{-\lambda_k t} w_k(x) \tag{10.8.3}$$

y vamos a tratar de demostrar que u es solución de (10.8.1) en un sentido débil que tenemos que precisar.

Empecemos por ver a qué espacio pertenece esta función $u(x,t)$.

Lema 10.8.1. *La función u definida por* (10.8.3) *pertenece al espacio $C([0,T]; L^2(U))$ para todo $T > 0$.*

Recordemos que, dado X un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|$ el espacio $C([0,T]; X)$ se define como el conjunto de las aplicaciones $\phi\colon [0,T] \to X$ continuas. Este espacio resulta un espacio de Banach con la norma $\sup_{0\le t\le T} \|\phi(t)\|$.

Demostración. Dado $t \in [0,T]$, tenemos

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t)\|_2^2 = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{-\lambda_k t} w_k \right\|_2^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 e^{-2\lambda_k t} \\ &\le \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2 = \|f\|_2^2,\end{aligned}$$

donde hemos usado la identidad de Pitágoras y la identidad de Bessel.

Luego

$$\sup_{0\le t\le T} \|u(\cdot,t)\|_2 \le \|f\|_2 < \infty.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\|u(\cdot,t)-u(\cdot,t_0)\|_2^2 &= \left\|\sum_{k=1}^{\infty} d_k(e^{-\lambda_k t}-e^{-\lambda_k t_0})w_k\right\|_2^2\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2(e^{-\lambda_k t}-e^{-\lambda_k t_0})^2.\end{aligned}$$

Es fácil ver que está última expresión tiende a 0 cuando $t\to t_0$ (por ejemplo, usando el Teorema de la convergencia mayorada).

Queda entonces demostrado el lema. $\square$

Este lema ya nos permite afirmar que la función u dada por (10.8.3) alcanza la condición inicial con continuidad (en sentido $L^2(U)$) y que para cada t fijo, $u(\cdot,t)$ es una función de $L^2(U)$.

Para definir solución débil, esto es poco. Precisamos que $u(\cdot,t)$ sea derivable en sentido débil. Eso es el contenido del próximo lema.

Lema 10.8.2. *La función u dada por* (10.8.3) *pertenece al espacio* $L^2([0,T];H_0^1(U))$.

Recordemos que si X es un espacio de Banach con norma $\|\cdot\|$, el espacio $L^2([0,T];X)$ es el conjunto de todas las aplicaciones $\phi\colon [0,T]\to X$ tales que $\|\phi(t)\|$ está en $L^2([0,T])$. La norma en este espacio se define por

$$\left(\int_0^T \|\phi(t)\|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

y $L^2([0,T];X)$ resulta un espacio de Banach.

Demostración. Sea $t>0$. Luego

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{-\lambda_k t}w_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_k}d_k e^{-\lambda_k t}\frac{w_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}.$$

Luego, como $\{\frac{w_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de $H_0^1(U)$,

$$\|\nabla u(\cdot,t)\|_2^2=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k d_k^2 e^{-2\lambda_k t}\le \frac{1}{2et}\sum_{k=1}^{\infty} d_k^2<\infty,$$

donde $(2et)^{-1}=\sup_{\lambda>0}\lambda e^{-2\lambda t}$.

Luego obtuvimos

$$\|\nabla u(\cdot,t)\|_2\le \frac{1}{\sqrt{2e}}\frac{\|f\|_2}{\sqrt{t}}.$$

Más aún,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|\nabla u(\cdot,t)\|_2^2\,dt &= \int_0^T \sum_{k=1}^\infty \lambda_k d_k^2 e^{-2\lambda_k t}\,dt\\
&= \sum_{k=1}^\infty d_k^2 \int_0^T \lambda_k e^{-2\lambda_k t}\,dt\\
&= \sum_{k=1}^\infty d_k^2 \frac{1-e^{-2\lambda_k T}}{2}\\
&\le \frac{1}{2}\sum_{k=1}^\infty d_k^2 = \frac{\|f\|_2^2}{2}.
\end{aligned}$$

El lema queda demostrado. □

Veamos ahora la motivación para solución débil. Razonamos de manera análoga a lo hecho para los problemas elípticos.

Consideremos $\phi \in C_c^\infty(U \times [0,T))$ (observemos que esta condición no impone ninguna restricción sobre $\phi(\cdot,0)$), multiplicamos la ecuación (10.8.1) por ϕ e integramos para obtener

$$\int_0^T \int_U u_t\phi\,dxdt - \int_0^T \int_U \Delta u\phi\,dxdt = 0.$$

En la primera integral, intercambiamos el orden de integración e integramos por partes en la variable t, mientras que en la segunda integral integramos por partes en la variable x y obtenemos

$$-\int_U f\phi(\cdot,0)\,dx - \int_0^T \int_U u\phi_t\,dxdt + \int_0^T \int_U \nabla u\cdot\nabla\phi\,dxdt = 0.$$

Esto motiva la siguiente definición

Definición 10.8.3. Decimos que u es una solución débil de (10.8.1) si

1. $u \in C([0,T]; L^2(U)) \cap L^2([0,T]; H_0^1(U))$,
2. $u(\cdot,0) = f$ en $L^2(U)$,
3. para toda $\phi \in C_c^\infty(U \times [0,T))$ se tiene

$$-\int_U f\phi(\cdot,0)\,dx - \int_0^T \int_U u\phi_t\,dxdt + \int_0^T \int_U \nabla u\cdot\nabla\phi\,dxdt = 0.$$

Mostremos ahora que la función definida en (10.8.3) es solución de la ecuación del calor (10.8.1) en el sentido dado por la Definición 10.8.3. En efecto, sólo falta verificar el último ítem.

Sea entonces $\phi \in C_c^\infty(U \times [0,T))$ y u dada por (10.8.3). Calculamos entonces

$$\int_U f\phi(\cdot,0)\,dx = \int_U \sum_{k=1}^\infty d_k w_k(x)\phi(x,0)\,dx$$

$$-\int_0^T \int_U u\phi_t\,dxdt = -\int_0^T \int_U \sum_{k=1}^\infty d_k e^{-\lambda_k t} w_k(x)\phi_t(x,t)\,dxdt$$

$$\int_0^T \int_U \nabla u \cdot \nabla \phi\,dxdt = \int_0^T \int_U \sum_{k=1}^\infty d_k e^{-\lambda_k t} \nabla w_k \cdot \nabla \phi\,dxdt$$

Ahora,

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_U \sum_{k=1}^\infty d_k e^{-\lambda_k t} w_k(x)\phi_t(x,t)\,dxdt &= \sum_{k=1}^\infty d_k \int_U w_k(x) \left(\int_0^T e^{-\lambda_k t}\phi_t(x,t)\,dt\right)\,dx\\ &= \sum_{k=1}^\infty d_k \int_U w_k(x) \left(\phi(x,0) + \int_0^T \lambda_k e^{-\lambda_k t}\phi(x,t)\,dt\right)\,dx.\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_U \sum_{k=1}^\infty d_k e^{-\lambda_k t} \nabla w_k \cdot \nabla\phi\,dxdt &= \sum_{k=1}^\infty d_k \int_0^T e^{-\lambda_k t} \left(\int_U \nabla w_k \cdot \nabla \phi\,dx\right)\,dt\\ &= \sum_{k=1}^\infty d_k \int_0^T e^{-\lambda_k t} \left(\int_U \lambda_k w_k \phi\,dx\right)\,dt.\end{aligned}$$

Recolectamos estas identidades y hemos probado en consecuencia el siguiente teorema,

Teorema 10.8.4. *Sea u la función definida por* (10.8.3). *Entonces u es solución de* (10.8.1) *en el sentido dado por la Definición 10.8.3.*

Concluimos el capítulo con la unicidad de soluciones para la ecuación (10.8.1).

Teorema 10.8.5. *El problema* (10.8.1) *admite una única solución en el sentido de la Definición 10.8.3.*

Demostración. Claramente, basta probar que si u es solución para (10.8.1) con dato inicial $f = 0$, entonces $u = 0$.

Por otro lado, es fácil ver que en la Definición 10.8.3 puede tomarse funciones test $\phi \in C^1([0,T]; L^2(U)) \cap C([0,T]; H_0^1(U))$ tales que $\phi(\cdot,T) = 0$.

Luego, consideremos la función

$$\phi(x,t) = \int_t^T u(x,s)\,ds.$$

Es claro de su definición que ϕ resulta admisible en la Definición 10.8.3. Más aún,

$$\phi_t(x,t) = -u(x,t) \quad \text{y} \quad \partial_i \phi(x,t) = \int_t^T \partial_i u(x,s)\,ds.$$

Ahora bien,

$$
\begin{aligned}
0 &= -\int_0^T\int_U u\phi_t\,dxdt + \int_0^T\int_U \nabla u\cdot\nabla\phi\,dxdt\\
&= \int_0^T\int_U u^2\,dxdt + \int_0^T\int_U \nabla u\cdot\left(\int_t^T \nabla u\,ds\right)dxdt\\
&= \int_0^T\int_U u^2\,dxdt + \int_0^T\int_U \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}\left|\int_t^T \nabla u\,ds\right|^2\right)dxdt\\
&= \int_0^T\int_U u^2\,dxdt + \frac{1}{2}\int_U \left|\int_0^T \nabla u\,ds\right|^2 dx\\
&\geq \int_0^T\int_U u^2\,dxdt,
\end{aligned}
$$

de donde sigue que $u = 0$. □

10.9. Ejercicios

Ejercicio 10.9.1. Sea $U\subset\mathbb{R}^n$ y consideremos el siguiente operador elíptico

$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^n \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u) + c(x)u,$$

donde $a_{ij}, c\in L^\infty(U)$, $i,j = 1,\dots,n$ y $\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j$ para casi todo $x\in U$.

Probar que existe una constante $\mu > 0$ tal que la correspondiente forma bilineal $B[\cdot,\cdot]$ satisface las hipótesis del Teorema de Lax-Milgram si $c(x)\geq -\mu$ $(x\in U)$.

Este problema es la versión no simétrica del Ejercicio 10.3.3

Ejercicio 10.9.2. Una función $u\in H_0^2(U)$ se dice una solución débil del siguiente problema de valores de contorno para el operador *bilaplaciano*

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{en } U\\ u = \partial_{\mathbf{n}}u = 0 & \text{en } \partial U,\end{cases} \tag{10.9.1}$$

si verifica

$$\int_U \Delta u\Delta v\,dx = \int_U fv\,dx$$

para toda $v\in H_0^2(U)$. $(\Delta^2 u = \Delta(\Delta u))$.

1. Probar que $u\in C^4(U)\cap C^1(\overline{U})$ es solución clásica de (10.9.1) si y sólo si es solución débil de (10.9.1).
2. Probar que dada $f\in L^2(U)$ existe una única solución débil de (10.9.1).
   Sugerencia: Usar el Ejercicio 9.5.9 para probar que $\|\Delta u\|_{L^2(U)}$ define una norma equivalente a la usual en $H_0^2(U)$.

Ejercicio 10.9.3. Consideremos el problema de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } U\\ \partial_{\mathbf{n}}u = 0 & \text{en } \partial U\end{cases}$$

donde $\partial U\in C^1$ y $f\in L^2(U)$.

1. Mostrar que $u \in C^2(U) \cap C^1(\overline{U})$ es solución del problema de Neumann si y sólo si verifica la siguiente *formulación débil*:
$$\int_U \nabla u \cdot \nabla\varphi\,dx + \int_U u\varphi\,dx = \int_U f\varphi\,dx$$
para toda $\varphi \in C^1(U) \cap C(\overline{U})$.
2. Mostrar que para toda $f \in L^2(U)$ existe una única $u \in H^1(U)$ solución débil de este problema.

Ejercicio 10.9.4. Consideremos el problema de Neumann
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } U \\ \partial_{\mathbf{n}} u = 0 & \text{en } \partial U, \end{cases}$$
donde $\partial U \in C^1$ y $f \in L^2(U)$.

1. Dar una formulación débil del problema y mostrar que si existe una solución débil, entonces $\int_U f\,dx = 0$.
2. Mostrar que si $f \in L^2(U)$ verifica que $\int_U f\,dx = 0$, entonces existe una única $u \in H^1(U)$ con $\int_U u\,dx = 0$ solución débil de este problema. Más aún, dicha solución es única en $H^1(U)$ salvo constante.

   Sugerencia: Usar la desigualdad de Poincaré dada por el Ejercicio 9.5.12 y usar el Teorema de Lax-Milgram en el subespacio ortogonal a las constantes en $H^1(U)$.

Ejercicio 10.9.5 (Principio débil del máximo). Sea $\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^n \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u)$ un operador uniformemente elíptico con $a_{ij} \in L^\infty(U)$.

Decimos que $u \in H^1(U)$ verifica $\mathcal{L}u \leq 0$ en sentido débil o, equivalentemente, que es una subsolución débil de $\mathcal{L}u = 0$ si
$$\int_U \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\partial_j u \partial_i v\,dx \leq 0, \quad \text{para toda } v \in H_0^1(U),\ v \geq 0.$$

1. Verificar que $u \in C^2(U)$ es subsolución débil de $\mathcal{L}u = 0$ si y sólo si $\mathcal{L}u \leq 0$.
2. Probar que si u es subsolución débil de $\mathcal{L}u = 0$ y $u^+ \in H_0^1(U)$ (es decir $u \leq 0$ en ∂U), se tiene que $u \leq 0$ en U.

Ejercicio 10.9.6. Consideremos el siguiente problema de autovalores
$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en } U \\ \partial_{\mathbf{n}} u = 0 & \text{en } \partial U, \end{cases}$$
donde $\partial U \in C^1$.

Probar que existe una sucesión $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k \uparrow \infty$ de autovalores del problema con autofunciones $u_k \in H^1(U)$ donde $u_1 = cte$ y $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ forman una base ortonormal de $L^2(U)$ y una base ortogonal de $H^1(U)$.

Ejercicio 10.9.7 (Principio del anti-máximo). Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y sea $u \in H_0^1(U)$ una solución débil de
$$\begin{cases} -\Delta u - \lambda u = f & \text{en } U \\ u = 0 & \text{en } \partial U, \end{cases}$$

donde $f \in L^2(U)$.

Verificar que si $\lambda > \lambda_1$ y $f \geq 0$ entonces u no puede ser mayor o igual a 0 en U (λ_1 denota al primer autovalor de $-\Delta$ en U).

Mostrar con un ejemplo que u puede bien ser negativa en U (sugerencia: considerar $f = w_1$ la primer autofunción de $-\Delta$ en U).

Ejercicio 10.9.8. Sea $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $0 \leq V(x) \to \infty$ si $|x| \to \infty$.

1. Probar que si $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H^1(\mathbb{R}^n)$ es una sucesión acotada, entonces existe una subsucesión $\{f_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $f \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ tal que
$$f_{k_j} \to f \qquad \text{en } L^2(B_r(0)), \quad \text{para todo } r > 0.$$
2. Probar que si, además,
$$\|f_k\|^2_{L^2_V(\mathbb{R}^n)} = \|f_k\|_{2,V} := \int_{\mathbb{R}^n} f_k^2 V(x)\, dx \leq C \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{N},$$
entonces $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y
$$f_{k_j} \to f \qquad \text{en } L^2(\mathbb{R}^n).$$
3. Concluir que $H := H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2_V(\mathbb{R}^n)$ verifica $H \subset\subset L^2(\mathbb{R}^n)$. Es decir, toda sucesión acotada en H con norma dada por $\|f\|^2 := \|\nabla f\|_2^2 + \|f\|_{2,V}^2$, tiene una subsucesión convergente en $L^2(\mathbb{R}^n)$.
4. Probar que existe una suceción $0 \leq E_1 \leq E_2 \leq \cdots \leq E_k \uparrow \infty$ de autovalores de la *ecuación de Schröedinger*
$$-\Delta u + V(x)u = Eu \text{ en } \mathbb{R}^n,$$
$$u \in H,$$
y que las autofunciones forman una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Ejercicio 10.9.9 (Alternativa de Fredholm para operadores simétricos). El objetivo de este ejercicio es dar una demostración del Teorema de la alternativa de Fredholm (Teorema 10.5.8) para operadores simétricos basándose en el Teorema 10.7.10.

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y $\mathcal{L}$ un operador elíptico simétrico dado por
$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^n \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u) + c(x)u,$$
donde $a_{ij}, c \in L^\infty(U)$, $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, \dots, n$ y la matriz $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ es definida positiva.

Notemos por $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ los autovalores de $\mathcal{L}$ y por $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H^1_0(U)$ las autofunciones asociadas normalizadas de manera tal que formen una base ortonormal de $L^2(U)$.

Sea $f \in L^2(U)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Probar que si $\lambda \neq \lambda_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ entonces el problema
$$\begin{cases} \mathcal{L}u - \lambda u = f & \text{en } U \\ u = 0 & \text{en } \partial U \end{cases} \tag{10.9.2}$$
admite una única solución.

Sugerencia: Expandir tanto u como f en la base $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y despejar los coeficientes de u de la ecuación (10.9.2).

2. Probar que si $\lambda_{k-1} < \lambda = \lambda_k = \lambda_{k+1} = \cdots = \lambda_{k+l-1} < \lambda_{k+l}$ para algún $k \in \mathbb{N}$ entonces el problema (10.9.2) admite una solución si y sólo si $(f, w_j) = 0$, $j = k, \dots, k+l-1$ donde $(\cdot,\cdot)$ denota el producto interno en $L^2(U)$.

   Verificar que en ese caso, el conjunto de soluciones es una variedad lineal de dimensión l.

Ejercicio 10.9.10 (Lema de Cea). Se intenta construir una aproximación de la solución del siguiente problema

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{en } U\\ u = 0 & \text{en } \partial U,\end{cases}$$

donde $\mathcal{L}$ es un operador uniformemente elíptico.

Para eso, se toma un subespacio de dimensión finita $\mathbb{V} \subset H_0^1(U)$, $\mathbb{V} = \text{gen}\{\phi_1, \dots, \phi_d\}$ y se define la *solución aproximada* $\tilde u \in \mathbb{V}$ como la solución del problema

$$B[\tilde u, \phi_i] = \int_U f\phi_i\,dx \quad i = 1, \dots, d,$$

donde $B[\cdot,\cdot]$ es la forma bilineal asociada al operador $\mathcal{L}$.

1. Probar que $\tilde u$ está bien definida (es decir, existe una única solución del problema aproximado).
2. Probar que se tiene la siguiente *estimación de error*

$$\|u - \tilde u\|_{H_0^1(U)} \le C \inf_{v\in\mathbb{V}} \|u - v\|_{H_0^1(U)},$$

   donde $C > 0$ es una constante que depende únicamente de $B[\cdot,\cdot]$.

   Esto dice que el método propuesto obtiene como resultado la *mejor aproximación* que permite el subespacio $\mathbb{V}$.

Ejercicio 10.9.11. Se define el *$p-$Laplaciano* como $\Delta_p u := \text{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ con $p > 1$ (cuando $p = 2$, $\Delta_p = \Delta$). Consideremos el siguiente problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f & \text{en } U\\ u = 0 & \text{en } \partial U,\end{cases} \tag{10.9.3}$$

donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado y $f \in L^{p'}(U)$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$.

1. Probar que $u \in C^2(U) \cap C_0(U)$ es solución de (10.9.3) si y sólo si verifica la siguiente formulación débil

$$\int_U |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi\,dx = \int_U f\varphi\,dx,$$

   para toda $\varphi \in W_0^{1,p}(U)$.
2. Probar que si $u \in W_0^{1,p}(U)$ minimiza el siguiente funcional

$$\Psi\colon W_0^{1,p}(U) \to \mathbb{R}, \quad \Psi(u) := \frac{1}{p}\int_U |\nabla u|^p\,dx - \int_U fu\,dx,$$

   entonces u es una solución débil de (10.9.3).

3. Probar que si $u \in W_0^{1,p}(U)$ es una solución débil de (10.9.3), entonces u es un mínimo de Ψ.
4. Verificar que Ψ es estríctamente convexo y deducir que Ψ tiene a lo sumo un mínimo. Concluir que (10.9.3) tiene a lo sumo una única solución débil.
5. (este ítem es sólo para los que tengan conocimiento sobre topologías débiles) Probar que Ψ tiene un mínimo en $W_0^{1,p}(U)$ y concluir que el problema (10.9.3) admite una única solución.

   Sugerencia: Considerar una sucesión minimizante, probar que está acotada y deducir que contiene una subsucesión débil convergente. Usar la semicontinuidad inferior de la norma con respecto a la convergencia débil para probar que ese límite débil es efectivamente el mínimo de Ψ.

Ejercicio 10.9.12. Sea

$$\mathcal{L}u = -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u).$$

Decimos que el operador $u_t + \mathcal{L}u$ es uniformemente parabólico si el operador $\mathcal{L}$ es uniformemente elíptico, i.e. existe $\theta > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2$$

para todo $x \in U$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Supongamos que $a_{ij} \in L^\infty(U)$ y $f \in L^2(U)$.

Consideremos el siguiente problema parabólico:

$$\begin{cases} u_t + \mathcal{L}u = 0 & \text{en } U \times (0,T) \\ u = 0 & \text{en } \partial U \times (0,T) \\ u = f & \text{en } U \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

1. Dar una definición adecuada de solución débil y demostrar que si una solución débil es suficientemente regular, entonces es una solución clásica.
2. Probar, por el método de separación de variables, que existe una solución débil del problema parabólico.

Ejercicio 10.9.13. Considerar la siguiente ecuación del calor con condiciones de Neumann

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en } U \times (0,T) \\ \partial_{\mathbf{n}} u = 0 & \text{en } \partial U \times (0,T) \\ u = f & \text{en } U \end{cases}$$

1. Dar una definición adecuada de solución débil y demostrar que si una solución débil es suficientemente regular, entonces es una solución clásica.
2. Probar que existe una solución débil.

Bibliografía

[1] Robert A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975, Pure and Applied Mathematics, Vol. 65. MR 0450957 (56 #9247)

[2] Haim Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext, Springer, New York, 2011. MR 2759829 (2012a:35002)

[3] Ennio De Giorgi, *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari*, Mem. Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (3) **3** (1957), 25–43. MR 0093649 (20 #172)

[4] Rick Durrett, *Probability: theory and examples*, fourth ed., Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 2010. MR 2722836 (2011e:60001)

[5] Albert Einstein, *Investigations on the theory of the Brownian movement*, Dover Publications Inc., New York, 1956, Edited with notes by R. Fürth, Translated by A. D. Cowper. MR 0077443 (17,1035g)

[6] Lawrence C. Evans, *Partial differential equations*, second ed., Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. MR 2597943 (2011c:35002)

[7] Gerald B. Folland, *Real analysis*, Pure and Applied Mathematics (New York), John Wiley & Sons Inc., New York, 1984, Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication. MR 767633 (86k:28001)

[8] David Gilbarg and Neil S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, second ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 224, Springer-Verlag, Berlin, 1983. MR 737190 (86c:35035)

[9] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge, at the University Press, 1952, 2d ed. MR 0046395 (13,727e)

[10] Fritz John, *Partial differential equations*, fourth ed., Applied Mathematical Sciences, vol. 1, Springer-Verlag, New York, 1982. MR 831655 (87g:35002)

[11] Vladimir Maz'ya, *Sobolev spaces with applications to elliptic partial differential equations*, augmented ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 342, Springer, Heidelberg, 2011. MR 2777530 (2012a:46056)

[12] Jürgen Moser, *On Harnack's theorem for elliptic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961), 577–591. MR 0159138 (28 #2356)

[13] J. Nash, *Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations*, Amer. J. Math. **80** (1958), 931–954. MR 0100158 (20 #6592)

[14] Walter Rudin, *Principles of mathematical analysis*, third ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1976, International Series in Pure and Applied Mathematics. MR 0385023 (52 #5893)

[15] Sandro Salsa, *Partial differential equations in action*, Universitext, Springer-Verlag Italia, Milan, 2008, From modelling to theory. MR 2399851 (2009b:35001)

[16] Richard L. Wheeden and Antoni Zygmund, *Measure and integral*, Marcel Dekker Inc., New York, 1977, An introduction to real analysis, Pure and Applied Mathematics, Vol. 43. MR 0492146 (58 #11295)

[17] Noemi Wolanski, *Introducción a las ecuaciones diferenciales ordinarias*, Serie B, Publicaciones de Grado, Departamento de Matemática, FCEN, Universidad de Buenos Aires, 2008.