ISSN 1851-149X

Fascículo 11

Cursos y seminarios de matemática

Serie B

Pablo Amster

Ecuaciones diferenciales con retardo

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2017

Cursos y Seminarios de Matemática – Serie B

Fascículo 11

ISSN 1851-149X (Versión Electrónica)
ISSN 1851-1481 (Versión Impresa)

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

Ecuaciones diferenciales con retardo

Pablo Amster

Prefacio

Estas notas están basadas en los contenidos de la materia optativa "Ecuaciones diferenciales con retardo", dictada en el Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires durante el primer cuatrimestre de 2016.

Las ecuaciones diferenciales con retardo son de gran interés y tienen aplicaciones a diversas áreas. Desde el punto de vista puramente matemático, llama la atención el hecho de que el estudio de uno de los casos más elementales, la ecuación lineal de primer orden con coeficientes constantes lleva a lidiar desde el comienzo con aspectos profundos del análisis complejo. Justamente ese es nuestro punto de partida: al cabo de una breve presentación, se analizan con cierto detalle las ecuaciones con retroalimentación o *feedback* para introducir de manera elemental las nociones generales de estabilidad y oscilaciones. Luego se describen algunos resultados ligados a la linealización de ecuaciones escalares para pasar al estudio de sistemas. A continuación se presentan los principales aspectos de la teoría general, desde existencia y unicidad para el problema de valores iniciales (donde, como veremos, el 'valor inicial' no es un punto sino una función), extensión de soluciones e intervalo maximal hasta cuestiones más sutiles, como la generalización del teorema de existencia de Peano (sin pedir la condición de Lipschitz) o la búsqueda de soluciones periódicas por medio del operador de Poincaré. Para tales fines, se brinda una prueba elemental del teorema de Schauder, que permite asegurar la existencia de puntos fijos de ciertos operadores en espacios de dimensión infinita. Finalmente se tratan algunas cuestiones ligadas a la dinámica: tras presentar las nociones generales de los sistemas semidinámicos inducidos por las ecuaciones con retardo, la exposición se enfoca en el estudio de la estabilidad por medio de funciones de Lyapunov (que, en rigor, son funcionales) para concluir con los fundamentos de la teoría de bifurcaciones de Hopf.

En la medida de lo posible, se ha procurado que el texto sea autocontenido, aunque su lectura requiere un conocimiento de los temas básicos de ecuaciones diferenciales ordinarias, de espacios métricos y de análisis complejo. Algunos comentarios incidentales recurren a nociones más avanzadas del análisis funcional, aunque el lector no versado en el tema podrá pasarlos por alto sin mayor cargo de conciencia. En el apéndice se presenta una lista de temas 'indispensables' para poder comprender casi la totalidad de las cuestiones que aquí se plantean. El material teórico se acompaña de algunos ejercicios que abarcan la mayor parte de los temas tratados.

Para la organización y presentación general de los temas se ha seguido fundamentalmente la primera parte del excelente libro introductorio de Smith [8]. Para el tratamiento de algunos temas que requieren mayor profundidad se ha consultado el libro de Hale [4] y, en ciertos aspectos bien específicos, otros textos como el de Gyori y Ladas [3] o el de Bellman y Cooke [1]. Quiero agradecer a los alumnos del curso que colaboraron con sus comentarios y lecturas críticas de estas notas.

Contenidos

1 Introducción

Con probabilidad muy cercana a 1, la primera clase de un curso básico sobre ecuaciones diferenciales tomado al azar comienza con el más común de todos los ejemplos:

$$x'(t) = x(t).$$

Más allá de las bromas estudiantiles sobre la función exponencial[1], todo el mundo acepta inmediatamente que $x(t) = e^t$ es una solución y, con un mínimo esfuerzo adicional, se convence de que *todas* las soluciones son de la forma $x(t) = Ce^t$, en donde C es una constante arbitraria. Podemos suponer $C \in \mathbb{C}$ y entonces es fácil ver que la fórmula obtenida abarca todas las posibles soluciones complejas de la ecuación. Muy pronto, esta idea elemental se transforma en un método general para obtener soluciones de ecuaciones lineales con coeficientes constantes: "proponer" soluciones de la forma $x(t) = e^{\lambda t}$ y hallar los valores de λ que anulan el *polinomio característico* asociado a la ecuación. Claro que en nuestro ejemplo, el método se torna bastante trivial: como $\left(e^{\lambda t}\right)' = \lambda e^{\lambda t}$, al reemplazar en la ecuación resulta

$$\lambda e^{\lambda t} = e^{\lambda t}.$$

En otras palabras, se obtiene la ecuacion $P(\lambda) = 0$, donde el polinomio característico es $P(\lambda) := \lambda - 1$ obviamente tiene el valor $\lambda = 1$ como única raíz.

Sin embargo, la situación cambia de manera drástica si suponemos que la ecuación tiene un retardo $\tau > 0$, vale decir

$$x'(t) = x(t - \tau).$$

En efecto, ahora al reemplazar $x(t) = e^{\lambda t}$ en la ecuación resulta

$$\lambda x(t) = x(t - \tau) = e^{\lambda(t-\tau)} = e^{-\lambda\tau} x(t).$$

En consecuencia λ debe ser solución de la ecuación característica $P(\lambda) = 0$, donde P ya no es un polinomio sino la función trascendente $P(\lambda) := \lambda - e^{-\lambda\tau}$. Dado que $\lambda = 0$ no es raíz, podemos reemplazar $z = \frac{1}{\lambda}$ y escribir la ecuación anterior como

$$ze^{-\tau/z} = 1.$$

Notemos ahora que la función $g(z) = ze^{-\tau/z}$ tiene una singularidad esencial en $z = 0$ y no se anula en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$; luego, por el teorema de Picard se deduce que $g^{-1}(1)$ tiene infinitos elementos. Como los ceros de P son aislados, concluimos que las soluciones de la ecuación característica forman un conjunto de la forma $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ con $|\lambda_k| \to \infty$. Esto implica que la ecuación diferencial tiene infinitas soluciones complejas de la forma $x(t) := e^{\lambda_k t}$; más aun, cualquier combinación lineal compleja de estas funciones también es solución, de modo que el espacio de soluciones tiene dimensión infinita. Esto vale también si estamos interesados únicamente en las soluciones reales, pues resulta claro que x es solución compleja

[1] 'Eh, integrate'. '¿Para qué? Da igual.'

si y solo tanto $\mathrm{Re}(x)$ como $\mathrm{Im}(x)$ son soluciones reales. ¿Son estas todas las soluciones posibles? Es fácil ver que no aunque, como veremos más adelante, la tarea de caracterizar el conjunto de soluciones requiere un poco más de trabajo.

Es tiempo de aclarar que no hace falta en realidad que el lector vaya corriendo a repasar en detalle todos los temas que hemos mencionado; el objetivo de esta introducción era dar una primera idea acerca de la complejidad del tema que vamos a estudiar. A partir del más elemental de los ejemplos hemos llegado, en pocas líneas, a invocar uno de los teoremas más profundos e interesantes del análisis complejo, de modo que cabe esperar en esta materia un recorrido de lo más atractivo, que involucra diversas ramas de la matemática.

2 Motivación - Modelos de crecimiento poblacional

La manera más sencilla de describir el crecimiento de una población está dada por el modelo de Malthus. Se asume que existe una tasa $b > 0$ de nacimientos y una tasa $d > 0$ de muertes; de esta forma, si N es la población en el instante t, se tiene:

$$N'(t) = -dN(t) + bN(t).$$

Sin duda se trata de un modelo poco realista, pero su resolución es muy simple y servirá como primera motivación para estudiar ecuaciones más generales. Si la población inicial es $N(0) = N_0$, la solución es $N(t) = N_0 e^{(b-d)t}$, cuyo comportamiento depende del signo de $b-d$. Como se trata de poblaciones, es lógico suponer $N_0 > 0$; en tal caso la solución crece y tiende a infinito para $t \to +\infty$ cuando $b > d$ y decrece hacia 0 para $t \to +\infty$ cuando $b < d$. El valor $b = d$ no tiene mayor interés, pues dice que la población se mantiene constantemente igual a N_0. Para $b \neq d$, la única solución constante o *equilibrio* es $N \equiv 0$. Notemos que las anteriores observaciones respecto del comportamiento de la solución para $t \to +\infty$ siguen valiendo incluso cuando $N_0 < 0$, vale decir:

$$\lim_{t\to+\infty} |N(t)| = +\infty \qquad \text{si } b < d$$

y

$$\lim_{t\to+\infty} N(t) = 0 \qquad \text{si } b < d$$

Esto se expresa diciendo que $N = 0$ es un equilibrio *inestable* cuando $b > d$ y *asintóticamente estable* cuando $b < d$. También se puede decir, en este último caso, que $N = 0$ es un *atractor global* del sistema, pues la convergencia a 0 se verifica para cualquier valor inicial.[2]

Un poco más apropiado es el modelo logístico de Verhulst, en el cual se asume que la población se autorregula, condicionada por algún factor que limita

[2] Más adelante veremos una definición precisa de todos estos conceptos; por ahora, bastará con la idea intuitiva de que un equilibrio e es estable cuando las soluciones que comienzan cerca de e se mantienen cercanas para todo $t > 0$, y asintóticamente estable si además convergen al equilibrio e para $t \to +\infty$.

su crecimiento indefinido (por ejemplo, escasez de algún recurso). Se supone un valor máximo M tolerable de población; de esta manera, la población crece cuando N_0 es menor que dicho valor y decrece cuando es mayor. Una manera de obtener este comportamiento consiste en asumir que la tasa de crecimiento $\frac{N'}{N}$ es proporcional a la diferencia $M - N$, es decir

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = c(M - N(t))$$

con $c > 0$, o bien

$$N'(t) = N(t)(b - aN(t))$$

donde $b, a > 0$. La ventaja de escribirlo de esta última forma es que podemos aceptar $N \equiv 0$ como solución; la ecuación tiene además otro equilibrio que es el valor $M := \frac{b}{a}$. Esta ecuación también es fácil de integrar empleando fracciones simples; la solución general para $N_0 \neq 0$ tiene la forma

$$N(t) = \frac{b}{a + Ce^{-bt}},$$

con $C := \frac{b}{N_0} - a$. Por supuesto, los valores iniciales $N_0 < 0$ no tienen sentido en el modelo biológico; es fácil ver, en este caso, que la solución no está globalmente definida en el intervalo $[0, +\infty)$ pues se hace infinita cuando t se aproxima al valor $\frac{\ln(-C/a)}{b}$. Para $N_0 > 0$, se comprueba que $N(t) \to \frac{b}{a}$ si $t \to +\infty$, lo que muestra que el equilibrio $N \equiv \frac{b}{a}$ es (localmente) asintóticamente estable, mientras que $N \equiv 0$ es inestable. Esto resulta evidente, pues conocemos la solución y podemos calcular el límite; sin embargo, a fin de analizar ejemplos más abstractos es útil ver cómo se obtienen las mismas conclusiones directamente a partir de la ecuación. Supongamos por ejemplo que $N_0 > \frac{b}{a}$, entonces inicialmente resulta $N'(t) < 0$. Observemos, además, que $N(t_0) \neq \frac{b}{a}$ para todo t_0, pues el problema de valores iniciales

$$N'(t) = N(t)(b - aN(t)), \qquad N(t_0) = \frac{b}{a}$$

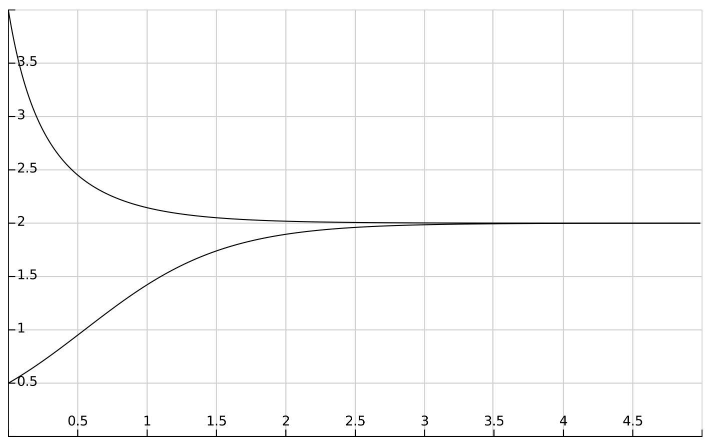
tiene por única solución el equilibrio $N \equiv \frac{b}{a}$. Se deduce que $N(t) > \frac{b}{a}$ para todo $t > 0$ y, en consecuencia, decrece. Por resultados clásicos de la teoría de ecuaciones ordinarias, N está definida en $[0, +\infty)$ y, además, converge a un valor límite $N_* \geq \frac{b}{a}$. Reemplazando en la ecuación se deduce que

$$\lim_{t \to +\infty} N'(t) = N_*(b - aN_*).$$

Por otra parte, observemos, por ejemplo, que para todo $k \in \mathbb{N}$ vale

$$N(k + 1) - N(k) = N'(t_k)$$

para cierto $t_k \in (k, k + 1)$, lo que prueba que $N_*(b - aN_*) = 0$ y, en definitiva, que $N_* = \frac{b}{a}$. Un razonamiento análogo vale para las soluciones que comienzan con un valor $N_0 \in \left(0, \frac{b}{a}\right)$. Notemos que el equilibrio $N \equiv \frac{b}{a}$ es asintóticamente estable pero no un atractor global, pues solo convergen a él aquellas soluciones que comienzan con un valor inicial positivo. Por ejemplo, en el siguiente gráfico se muestran dos trayectorias para $a = 1$ y $b = 2$:



La idea de introducir un retardo en este tipo de modelos surge de efectuar la sencilla suposición de que los nuevos individuos tardan un cierto tiempo τ en alcanzar la madurez (algunos más que otros, claro... aunque esto no se tendrá en cuenta aquí). En general, se entiende que la 'madurez' viene dada por la capacidad de reproducirse; entonces los dos modelos anteriores toman respectivamente las siguientes formas:

$$N'(t) = -dN(t) + bN(t - \tau)$$

y

$$N'(t) = N(t)(b - aN(t - \tau)).$$

A diferencia del modelo sin retardo, ya no es fácil obtener soluciones explícitas más allá de los equilibrios, que son los mismos de antes. El primer caso es una ecuación *lineal*, que estudiaremos de manera detallada; el segundo es un caso de una ecuación *no lineal*, que en general pueden ser muy complicadas aunque en ciertas situaciones es posible efectuar un estudio cualitativo bastante completo.

Por supuesto, los ejemplos anteriores no agotan los posibles modelos de crecimiento poblacional. La ecuación logística tiene la desventaja de que no incluye explícitamente el valor d; en tal sentido, en otros modelos se prefiere dejar a los muertos donde estaban y proponer otro mecanismo auto-regulatorio:

$$N'(t) = -dN(t) + bN(t - \tau)\varphi(N(t - \tau)).$$

El caso $\varphi \equiv 1$ recupera la ecuación de Malthus con retardo; en general, se supone que φ se hace más pequeño a medida que N crece. Por ejemplo, en el modelo de Nicholson, empleado para describir ciertas poblaciones de insectos, el valor φ expresa la probabilidad de supervivencia de una larva, dado por una distribución exponencial: $\varphi(x) = e^{-x/N_0}$. Se obtiene entonces una ecuación de la forma

$$N'(t) = -dN(t) + bN(t-\tau)e^{-\gamma N(t-\tau)}.$$

Más en general, podemos considerar ecuaciones o sistemas del tipo

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau)) \tag{1}$$

en donde τ puede ser constante o una función $\tau(t, x(t))$. También existen situaciones en las que hay más de un retardo:

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_N)).$$

Los ejemplos previos son casos de retardos *discretos*, a diferencia de las ecuaciones con retardos *distribuidos*, que contienen términos que suelen escribirse como una convolución, de la forma

$$\int_{t-\tau}^{t} k(t-s)x(s)\, ds = \int_0^{\tau} k(s)x(t-s)\, ds,$$

en donde el núcleo k satisface $\int_0^\tau k(s)\, ds = 1$. Esta situación incluye el caso de *retardo no acotado* $\tau = +\infty$, en el que $x'(t)$ depende de toda la historia $\{x(s) : s \leq t\}$.

En ocasiones resultará de utilidad escribir la ecuación en la forma

$$x'(t) = F(t, x_t),$$

donde F es un operador definido en cierto subconjunto de $\mathbb{R} \times C$, para algún espacio C apropiado de funciones continuas y x_t denota la función definida por $x_t(s) := x(t+s)$. Por ejemplo, la ecuación (1) se puede escribir como $x'(t) = F(t, x_t)$ tomando $C = C([-\tau, 0], \mathbb{R})$ y $F : \mathbb{R} \times C \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(t, \phi) := f(t, \phi(0), \phi(-\tau)).$$

Pero esta notación también incluye las ecuaciones con retardo distribuido; por ejemplo, la ecuación

$$x'(t) = -dx(t) + \int_{t-\tau}^{t} k(t-s)x(s)\, ds$$

se puede escribir $x'(t) = F(x_t)$, donde $F : C([-\tau, 0], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ está dada por

$$F(\phi) := -d\phi(0) + \int_0^{\tau} k(s)\phi(-s)\, ds.$$

En algunos casos, tiene interés estudiar también ecuaciones o sistemas de orden superior. Como motivación, podemos comenzar considerando la ecuación del péndulo con fricción

$$u''(t) + cu'(t) + a\,\mathrm{sen} u(t) = 0,$$

donde $a, c > 0$, cuyos equilibrios son de la forma $u \equiv k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Observemos que si u es solución entonces también $u + 2\pi$ es solución, de modo que podemos limitarnos a considerar únicamente las soluciones tales que $u(0) \in [0, 2\pi)$. Como sugiere la intuición, el equilibrio $u \equiv 0$ es asintóticamente estable: para una explicación informal, basta observar que si u está cerca de 0 entonces $\text{sen} u \simeq u$; luego, si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ son las raíces de la ecuación característica

$$\lambda^2 + c\lambda + a = 0$$

entonces las soluciones que comienzan cerca del origen verifican

$$u(t) \simeq a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t}$$

si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ o bien

$$u(t) \simeq re^{\lambda t} + ste^{\lambda t}$$

si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Cuando $c^2 \geq 4a$ (es decir, si la fricción es 'grande') las raíces son números reales negativos, por lo cual vale $u(t) \to 0$ para $t \to +\infty$ y el signo de u permanece constante a partir de cierto valor de t. En cambio, si $c^2 < 4a$ las raíces son complejas, con parte real $-c/2 < 0$. También en este caso deduce que u tiende a 0 para $t \to +\infty$, aunque lo hace de forma oscilatoria, presentando una secuencia $t_n \to +\infty$ de cambios de signo. Esto responde a la imagen mental que uno puede hacerse del péndulo, que va frenándose y se acerca cada vez más a la posición de reposo.

La situación cambia por completo cuando u está cerca de π: en tal caso $\text{sen} u \simeq \pi - u$ y las soluciones verifican

$$u(t) \simeq \pi + a_1 e^{\lambda_1 t} + a_2 e^{\lambda_2 t}$$

donde $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ son ahora las raíces de la ecuación $\lambda^2 + c\lambda - a = 0$. Esto muestra que el equilibrio $u \equiv \pi$ es inestable y cabe preguntarse, entonces: ¿será posible agregar a la ecuación una fuerza externa que lo estabilice?

La idea intuitiva consiste en suponer que estamos cerca del equilibrio, pero el péndulo cae. Entonces lo 'empujamos' hacia el lado opuesto al de la caída por medio de cierta fuerza que sea proporcional a la distancia al punto de equilibrio. Sin embargo, este proceso no es instantáneo ya que, lentos como somos, tardamos cierto tiempo τ en 'reaccionar'. Se obtiene entonces la ecuación

$$u''(t) + cu'(t) + a\text{sen}(u(t)) = \mu(\pi - u(t - \tau)).$$

Es posible probar que, para cierto $\mu > 0$, el equilibrio $u \equiv \pi$ se vuelve estable. Pero para comenzar veremos un ejemplo más sencillo, que permitirá mostrar de manera inmediata que el mundo de las ecuaciones con retardo es muy diferente al de las ecuaciones ordinarias.

Supongamos, como en el caso previo, un problema de 'control': se procura que una cierta cantidad $u(t)$ se mantenga cercana al valor de equilibrio $u = 0$. Para esto se propone una ecuación de la forma

$$u'(t) = c(t),$$

con la estrategia de disminuir el valor de u mientras sea positivo y aumentarlo en caso contrario. Por ejemplo, se puede elegir un control $c(t)$ proporcional a $u(t)$, vale decir, de la forma $c(t) = -\alpha u(t)$ para cierta constante $\alpha > 0$. De esta manera, para cualquier valor inicial de u resulta $u(t) \to 0$ para $t \to +\infty$. El valor α brinda una medida de la velocidad a la que la función u se aproxima a 0; más precisamente, $u(t) = u(0)e^{-\alpha t}$.

Sin embargo, si otra vez estamos lentos de reflejos y la acción llevada a cabo por el término c tiene un retardo, entonces la situación es muy diferente. Por ejemplo, consideremos $\alpha = 1$, es decir, la ecuación

$$u'(t) = -u(t - \tau).$$

La idea intuitiva es que si reaccionamos rápidamente (es decir, si τ es pequeño), entonces todavía podemos controlar el valor de u. Pero si por ejemplo $\tau = -\frac{\pi}{2}$, entonces resulta que $u(t) = \text{sen}(t)$ es solución, ya que

$$u'(t) = \cos(t) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = -u\left(t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Esto da lugar a una primera novedad respecto de las ecuaciones ordinarias de primer orden: las soluciones de esta ecuación pueden ser oscilatorias, es decir, tener ceros arbitrariamente grandes. Para $\tau = 0$ esto no puede ocurrir, ya que las trayectorias no se cruzan y, obviamente, $u \equiv 0$ es solución. Una última pizca de optimismo podría hacernos creer que, de todas formas, todavía logramos controlar la solución u pues se mantiene acotada; sin embargo, para valores mayores de τ se obtienen oscilaciones no acotadas: un verdadero descontrol.

3 Ecuación con retroalimentación o *feedback*

El 'descontrolado' ejemplo que vimos es un caso particular de la ecuación con feedback,

$$u'(t) = -\alpha u(t - \tau). \tag{2}$$

Si bien el planteo previo corresponde al caso $\alpha > 0$, conocido como feedback negativo, también tiene sentido considerar el de feedback positivo, es decir, $\alpha < 0$. Cuando el retardo es nulo, el equilibrio $u \equiv 0$ es asintóticamente estable en el primer caso, e inestable en el segundo. A partir de ahora supondremos $\tau > 0$.

En la introducción mencionamos el caso particular $\alpha = -1$ que, según dijimos, tiene infinitas soluciones de la forma $e^{\lambda t}$. Más precisamente, vimos que las raíces de la ecuación característica asociada forman una sucesión $\{\lambda_n\}$ con $|\lambda_n| \to \infty$. En consecuencia, cualquier combinación lineal de la forma $\sum_{n=1}^{N} a_n e^{\lambda_n t}$ es solución y, más aún, es fácil ver que, para algún espacio funcional apropiado, también es solución cualquier serie convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n t}$ (¿Cómo tiene que ser la convergencia? ¿Por qué existen series convergentes de esa forma? Ver ejercicio 1 de la próxima sección). Cabe ahora repetir la pregunta de las primeras páginas: ¿puede haber más soluciones?

Dar una respuesta a esto no parece ya tan sencillo, aunque podemos ganar algo de tiempo con algo que todavía no hemos contemplado: la *multiplicidad* de las raíces características. Es claro (¿por qué?) que no puede haber raíces con multiplicidad infinita; además, como veremos, si λ es una raíz de multiplicidad k entonces cualquier función de la forma $p(t)e^{\lambda t}$, con p un polinomio de grado menor que k es solución. Cabe aclarar, de todas formas, que en este caso no es gran cosa lo que se agrega a nuestro surtido de soluciones pues existe a lo sumo una raíz múltiple y, en tal caso, su multiplicidad es 2 (más precisamente, se puede ver que esto ocurre únicamente cuando $\alpha = \frac{1}{\tau e}$, ver ejercicio 4.2). Si por comodidad suponemos que esta posible raíz doble es la primera, entonces tenemos soluciones de la forma

$$u(t) = ate^{\lambda_1 t} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n t}.$$

Ya con cierta impaciencia, preguntamos una vez más: ¿son estas todas las soluciones?

Responder esta nueva pregunta es bastante más complicado y no lo haremos en detalle (para el estudio completo del problema, se puede ver [1]). Pero el planteo nos ayudará a entender mejor la diferencia con el caso $\tau = 0$. Para una ecuación lineal de orden n con coeficientes constantes

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 x(t) = 0,$$

la ecuación característica tiene n raíces complejas (contadas con su multiplicidad) y cada raíz de multiplicidad k lleva asociado un espacio de soluciones que tiene también dimensión k. Por otro lado, sabemos que el conjunto de soluciones es de dimensión n, lo que permite deducir que *todas* las soluciones son de la forma

$$\sum_{j=1}^{J} p_j(t)e^{\lambda_j t},$$

donde $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_J\}$ son las raíces características y el polinomio p_j es 0 o tiene grado menor que la multiplicidad algebraica de λ_j. Y todo esto, en definitiva, nos resulta muy razonable pues, para cada condición inicial

$$x(0) = x_0,\ x'(0) = x_1,\ \ldots, x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}$$

existe una única solución, lo que determina un isomorfismo entre $\mathbb{C}^n$ y el espacio de soluciones. Pero para nuestra ecuación (2) el espacio de soluciones tiene dimensión infinita, lo que nos lleva a observar que otro tanto debe ocurrir con el espacio de condiciones iniciales y, en consecuencia, la dimensión no alcanza para probar que no hay más soluciones que las antes mencionadas.

En efecto, resolver un problema de valores iniciales para (2) significa algo diferente que en el caso sin retardo. No basta con prescribir el valor de u en cierto t_0: en efecto, para poder obtener una solución definida en $[t_0, t_0 + \delta]$ debemos conocer su valor en el intervalo $[t_0 - \tau, t_0 + \delta - \tau]$. Lo que se hace, entonces, es tomar como dato inicial una *función* definida en el intervalo $[t_0-\tau, t_0]$. Podemos suponer que $t_0 = 0$ y que el dato inicial es una función continua $\phi : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}$. En tal caso, sobre el intervalo $[0, \tau]$ la ecuación se reduce, gracias a la condición inicial, a una ecuación completamente ordinaria (en más de un sentido):

$$u'(t) = -\alpha\phi(t - \tau).$$

Tenemos, además, la condición $u(0) = \phi(0)$, lo que nos permite obtener de manera única la solución

$$u(t) = \phi(0) - \alpha \int_0^t \phi(s - \tau)\, ds.$$

Observemos que u resulta continua en $[-\tau, \tau)$ y de clase C^1 en $(0, \tau)$. Sin embargo, no tiene por qué resultar derivable en el 0, a menos que ϕ lo sea y, ademas, valga $\phi'(0^-) = u'(0^+) = -\alpha u(0 - \tau) = -\alpha\phi(-\tau)$. Esto nos permite comprender qué vamos a entender, en general, por 'solución' de una ecuación del tipo $x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau))$: una función continua $x : [t_0 - \tau, t_0 + \delta) \to \mathbb{R}$ que es diferenciable en $(t_0, t_0 + \delta)$ y satisface la ecuación en dicho intervalo. Por otro lado, la forma de resolver la ecuación para $[\tau, 2\tau]$ nos permite mostrar una particularidad típica de las ecuaciones con retardo: en general se pueden resolver hacia adelante, pero no hacia atrás. En efecto, si queremos hacer lo mismo que antes para $t \in [-\tau - \delta, -\tau)$, tiene que valer:

$$-\alpha u(t) = u'(t + \tau).$$

Como vale la condición inicial $u = \phi$ en $[-\tau, 0]$, debemos pedir en primer lugar que ϕ sea de clase C^1 en $[-r, 0]$, donde $r = \min\{\delta, \tau\}$. De esta forma, se obtiene para $t \in [-\tau - r, \tau]$:

$$u(t) = -\frac{\phi(t + \tau)}{\alpha}.$$

En particular, $u(-\tau) = -\frac{\phi(0)}{\alpha}$, mientras que, por otro lado, la condición inicial dice que $u(-\tau) = \phi(-\tau)$. Esto determina dos condiciones necesarias para que exista solución:

1. $\phi \in C^1([-r, 0])$.
2. *Condición de compatibilidad*: $\phi(-\tau) = -\frac{\phi(0)}{\alpha}$.

Volviendo a la solución hacia adelante (*forward*), el procedimiento anterior puede repetirse ahora para el intervalo $[\tau, 2\tau]$ y así sucesivamente, dando lugar al llamado *método de pasos*. Inductivamente, conocida ya la solución en el intervalo $[(n-1)\tau, n\tau]$ se obtiene, para $n\tau \le t \le (n+1)\tau$:

$$u(t) = u(n\tau) - \alpha \int_{n\tau}^t u(s - \tau)\, ds.$$

Es fácil verificar que u está definida para todo $t \ge -\tau$ y resulta de clase C^n en el intervalo $((n-1)\tau, +\infty)$. Por ejemplo, para $\phi \equiv 1$ se tiene, para $0 \le t \le \tau$:

$$u'(t) = -\alpha, \qquad u(0) = 1,$$

de donde $u(t) = 1 - \alpha t$. Luego, para el intervalo $[\tau, 2\tau]$:

$$u'(t) = -\alpha u(t-\tau) = -\alpha(1 - \alpha(t-\tau))$$

y entonces

$$u(t) = u(\tau) - \alpha(t-\tau) + \alpha^2 \frac{(t-\tau)^2}{2}\Big|_{\tau}^{t}.$$

Finalmente, observando que $u(\tau) = 1 - \alpha\tau$, resulta:

$$u(t) = 1 - \alpha t + \alpha^2 \frac{(t-\tau)^2}{2}.$$

Inductivamente, se prueba que en el intervalo $[(n-1)\tau, n\tau]$ vale

$$u(t) = \sum_{k=0}^{n} (-\alpha)^k \frac{(t-(k-1)\tau)^k}{k!}.$$

En efecto, de acuerdo con lo anterior la fórmula vale para $n = 1$ y $n = 2$; si suponemos que vale para n entonces, para $n\tau \leq t \leq (n+1)\tau$ resulta

$$u'(t) = -\alpha u(t-\tau) = \sum_{k=0}^{n} (-\alpha)^{k+1} \frac{(t-k\tau)^k}{k!}$$

y en consecuencia

$$u(t) = u(n\tau) + \sum_{k=1}^{n+1} (-\alpha)^k \frac{(t-(k-1)\tau)^k}{k!}\Big|_{n\tau}^{t}.$$

Pero

$$u(n\tau) = \sum_{k=0}^{n} (-\alpha)^k \frac{(n\tau-(k-1)\tau)^k}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} (-\alpha)^k \frac{(n\tau-(k-1)\tau)^k}{k!},$$

lo que prueba que la fórmula vale en $[n\tau, (n+1)\tau]$.

Respecto de la solución general para $[-\tau, +\infty)$, cabe señalar que la fórmula obtenida mediante el método de pasos no es de gran utilidad para estudiar propiedades cualitativas de u, razón por la cual conviene encarar un estudio directo. A tal fin, comencemos por reescalar convenientemente la ecuación para obtener una más sencilla. Definimos

$$s := \eta t, \qquad U(s) := u(t)$$

y de esta forma resulta

$$U'(s) = \frac{u'(t)}{\eta} = -\frac{\alpha}{\eta} u(t-\tau) = -\frac{\alpha}{\eta} U(\eta(t-\tau)) = -\frac{\alpha}{\eta} U(s - \eta\tau).$$

Luego, podemos elegir $\eta = \frac{1}{\tau}$, $\beta = \alpha\tau$ y la ecuación se transforma en

$$U'(s) = -\beta U(s-1).$$

Para efectuar un análisis detallado de esta ecuación, consideremos el operador lineal $L : C^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ dado por

$$LU(s) := U'(s) + \beta U(s-1).$$

Siguiendo el procedimiento habitual en la teoría de ecuaciones ordinarias, calculemos ahora

$$L(e^{\lambda s}) = \lambda e^{\lambda s} + \beta e^{\lambda(s-1)} = e^{\lambda s}(\lambda + \beta e^{-\lambda}).$$

Igualando a 0 se obtiene la *ecuación característica* que, como anticipamos en la introducción, no es una ecuación polinomial sino trascendente:

$$h(\lambda) := \lambda + \beta e^{-\lambda} = 0.$$

La relación entre h y las soluciones de la ecuación viene dada por el siguiente resultado.

Lema 3.1 *Son equivalentes:*

1. *λ es raíz de orden n de h.*
2. *$s^j e^{\lambda s}$ es solución de la ecuación para $j = 0, \ldots, n-1$.*

<u>*Demostración*</u>:

Para $k \leq n-1$ se tiene:

$$\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}\Big(L(e^{\lambda s})\Big) = \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}\Big(e^{\lambda s} h(\lambda)\Big) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \frac{\partial^j h}{\partial \lambda^j} \frac{\partial^{k-j}}{\partial \lambda^{k-j}}(e^{\lambda s})$$

$$= e^{\lambda s} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} h^{(j)}(\lambda) s^{k-j}.$$

Por otro lado, por linealidad vale

$$\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}\Big(L(e^{\lambda s})\Big) = L\left(\frac{\partial^k}{\partial \lambda^k}(e^{\lambda s})\right) = L(s^k e^{\lambda s})$$

y entonces

$$L(s^k e^{\lambda s}) = 0 \quad \forall k = 0, \ldots n-1 \Longleftrightarrow h^{(j)}(\lambda) = 0 \quad \forall j = 0, \ldots n-1$$

$\square$

Observación 3.1 *De acuerdo con lo mencionado, si* $\beta \neq \frac{1}{e}$ *entonces todas las raíces son simples, mientras que si* $\beta = \frac{1}{e}$ *entonces* $\lambda = -1$ *es la única raíz múltiple y la multiplicidad es exactamente igual a* 2*. En efecto,* λ *es una raíz múltiple si y solo si* $h(\lambda) = h'(\lambda) = 0$*, vale decir:*

$$\lambda + \beta e^{-\lambda} = 0 = 1 - \beta e^{-\lambda},$$

de donde se deduce:

$$\lambda = -1, \qquad \beta e = 1.$$

Finalmente, observemos que $h''(\lambda) = \beta e^{-\lambda} \neq 0$*, de modo que en el último caso la multiplicidad es* 2*. Si* $\beta \neq \frac{1}{e}$ *y* ϕ *es de clase* C^1 *entonces se puede probar que, tal como anticipamos, la solución general toma, para* $t > 0$*, la forma*

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n t}$$

en donde los coeficientes a_n *se pueden calcular en forma explícita.*[3] *Fórmulas un poco más complicadas valen para el caso general (ver [1]).*

Por otro lado, el siguiente lema se deduce en forma inmediata del hecho de que $\overline{e^{-\lambda}} = e^{-\overline{\lambda}}$.

Lema 3.2 λ *es raíz de* $h \iff \overline{\lambda}$ *es raíz de* h*.*

Como en la introducción, el teorema de Picard (y también el resultado mencionado en la Observación 3.1) garantiza la existencia de infinitas raíces complejas de h; sin embargo, para nuestro análisis será suficiente con observar algo mucho más elemental, que se desprende directamente del hecho de que h es una función analítica en $\mathbb{C}$ y obviamente no constante, por lo cual sus ceros son aislados y de orden finito. Esto implica que, en cualquier compacto, h tiene a lo sumo una cantidad finita de ceros. Pero en realidad se puede probar un resultado más fuerte:

Lema 3.3 *La cantidad de ceros en un conjunto de la forma* $\{\mathrm{Re}(\lambda) \geq a\}$ *es finita para todo* $a \in \mathbb{R}$*.*

<u>*Demostración*</u>:

Si $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de raíces distintas, entonces no se acumulan y luego $|\lambda_n| \to +\infty$. Pero

$$|\lambda_n| = \left|\beta e^{\lambda_n}\right| = |\beta| e^{-\mathrm{Re}(\lambda_n)}.$$

Como el término de la izquierda tiende a infinito, se verifica que $\mathrm{Re}(\lambda_n) \to -\infty$. En particular, solo una cantidad finita de raíces puede caer dentro del conjunto $\{\mathrm{Re}(z) \geq a\}$. $\square$

[3] En particular, esto implica que $|\lambda_n|$ no se puede ir demasiado rápido a infinito. En general, este tipo de resultados es válido para cualquier función analítica, ver [7].

Observemos que las raíces de h no se pueden calcular en general de manera explícita. En efecto, escribiendo $\lambda = x + iy$, se cumple que $h(\lambda) = 0$ si y solo si (x, y) es solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = -\beta e^{-x}\cos y \\ y = \beta e^{-x}\operatorname{sen} y. \end{cases} \tag{3}$$

Sin embargo, muchas conclusiones sobre el comportamiento de las soluciones de nuestra ecuación diferencial se pueden obtener a partir de cierta información muy básica sobre las raíces de h, que se resume en los próximos resultados. El primero de ellos concierne a las raíces reales de h y permitirá extraer conclusiones respecto de la oscilación de las soluciones.

Proposición 3.1 *Se cumple:*

1. *Si $\beta < 0$, entonces h tiene una única raíz real $\lambda > 0$.*
2. *Si $0 < \beta < \frac{1}{e}$, entonces h tiene exactamente dos raíces reales $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, con*

$$\lambda_1 \to -\infty, \qquad \lambda_2 \to 0^-$$

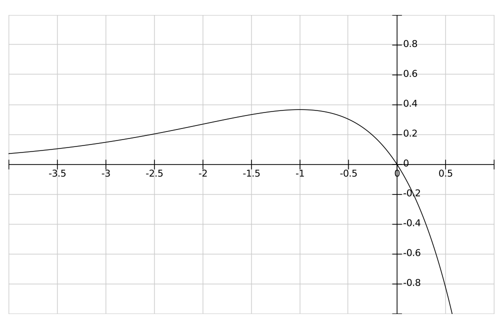
   para $\beta \to 0^+$.

3. *Si $\beta = \frac{1}{e}$, entonces $\lambda = -1$ es la única raíz real de h y tiene multiplicidad 2.*
4. *Si $\beta > \frac{1}{e}$, entonces h no tiene raíces reales.*

Demostración:
De acuerdo con lo anterior, $\lambda = x$ es una raíz real si y solo si $g(x) = 0$, donde $g(x) := x + \beta e^{-x}$.

Para $\beta < 0$, se tiene $g'(x) = 1 - \beta e^{-x} > 0$; por otro lado, $g(0) = \beta < 0$ y $g(x) \to +\infty$ para $x \to +\infty$. En consecuencia, g tiene una única raíz real $x > 0$.

Para $\beta > 0$, podemos escribir la ecuación $g(x) = 0$ como $\varphi(x) = \beta$, donde $\varphi(x) := -xe^x$. Todas las propiedades se deducen de manera inmediata a partir de un simple estudio de φ, cuya gráfica tiene esta forma:



□

Con ayuda del siguiente lema, la proposición previa permitirá mostrar que las soluciones oscilan cuando el retardo es suficientemente grande. La demostración está basada en la del texto de Gyori y Ladas [3].

Lema 3.4 *Son equivalentes:*

i) Toda solución del problema $u'(t) = -\alpha u(t-\tau)$ oscila, es decir, existe $t_n \to +\infty$ tal que $u(t_n) = 0$ para todo n.

ii) La ecuación característica $\lambda + \alpha e^{-\lambda\tau} = 0$ no tiene soluciones reales.

Demostración:

i) $\Rightarrow$ *ii)* es trivial, pues si λ es una raíz característica real, entonces $u(t) = e^{\lambda t}$ es una solución no oscilatoria. Para probar la afirmación recíproca, supongamos que la ecuación característica no tiene raíces reales, lo que implica $\alpha > 0$ y, además, existe $M > 0$ tal que $\lambda + \alpha e^{-\lambda\tau} \geq M$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Equivalentemente,

$$-\lambda + \alpha e^{\lambda\tau} \geq M \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Si u es una solución que no oscila, reemplazando por $-u$ si hace falta, podemos suponer que existe t_0 tal que $u(t) > 0$ para $t > t_0$. Esta situación se puede escribir de la siguiente forma, que evita la referencia explícita a t_0: $u(t) > 0$ para $t \gg 0$. Consideremos el siguiente conjunto

$$\Lambda := \{\lambda \geq 0 : u'(t) + \lambda u(t) \leq 0 \, \text{para } t \gg 0\}.$$

En primer lugar, observemos que $0 \in \Lambda$, pues $u'(t) = -\alpha u(t-\tau) < 0$ si $t \gg 0$; por otra parte, Λ es un intervalo, ya que si $\lambda \in \Lambda$ y $0 \leq \tilde{\lambda} \leq \lambda$ entonces, para $t \gg 0$,

$$u'(t) + \tilde{\lambda} u(t) \leq u'(t) + \lambda u(t) \leq 0.$$

Afirmamos que si $\lambda \in \Lambda$ entonces $\lambda + M \in \Lambda$. En efecto, para $t \gg 0$ se tiene que $u'(t) \leq -\lambda u(t) \leq 0$ y entonces $u(t) \leq u(t-\tau)$ para $t \gg 0$. Se deduce que

$$u'(t) + \alpha u(t) \leq u'(t) + \alpha u(t-\tau) = 0,$$

es decir, $\alpha \in \Lambda$. Consideremos la función $\phi(t) := e^{\lambda t} u(t)$, que verifica

$$\phi'(t) = e^{\lambda t}(u'(t) + \lambda u(t)) \leq 0$$

para $t \gg 0$. Además,

$$u'(t) + (\lambda + M)u(t) = -\alpha u(t-\tau) + (\lambda + M)u(t)$$

$$= -\alpha e^{-\lambda(t-\tau)}\phi(t-\tau) + (\lambda + M)e^{-\lambda t}\phi(t) \leq e^{-\lambda t}\phi(t)\left(-\alpha e^{\lambda\tau} + \lambda + M\right)$$

para $t \gg 0$, pues ϕ es decreciente. Usando (4) se deduce que

$$u'(t) + (\lambda + M)u(t) \leq 0,$$

es decir: $\lambda + M \in \Lambda$.

Lo anterior implica que $\Lambda = [0, +\infty)$. Por otra parte, veremos que existe al menos un valor positivo $\lambda \notin \Lambda$, lo que es absurdo. Este último resultado es de utilidad en otras situaciones un poco más generales, así que lo probamos a continuación en la forma de un nuevo lema, con el que se completa la demostración. $\square$

Lema 3.5 *Sean $\alpha, \tau > 0$ y u tales que $u(t) > 0$ y $u'(t) \leq -\alpha u(t-\tau)$ para $t \gg 0$. Sean Λ como antes y $C := \left(\frac{2}{\alpha\tau}\right)^2$. Entonces*

$$u(t) \leq u(t-\tau) < Cu(t)$$

para $t \gg 0$ y $\lambda_0 \notin \Lambda$, donde

$$\lambda_0 := \frac{1}{\tau} \ln C > 0.$$

Demostración:

Integrando entre t y $t + \frac{\tau}{2}$ obtenemos, para $t \gg 0$,

$$0 \geq \int_t^{t+\frac{\tau}{2}} [u'(s) + \alpha u(s-\tau)]\, ds = u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u(t) + \alpha \int_{t-\tau}^{t-\frac{\tau}{2}} u(s)\, ds.$$

Como u decrece para $s \gg 0$, se deduce que

$$u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u(t) + \frac{\alpha\tau}{2} u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \leq 0$$

y luego

$$\frac{\alpha\tau}{2} u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) < u(t).$$

De la misma forma se ve que

$$\frac{\alpha\tau}{2} u\left(t - \tau\right) < u\left(t - \frac{\tau}{2}\right),$$

lo que prueba que $u(t-\tau) < Cu(t)$. Como u es decreciente, vale también que $u(t) \leq u(t-\tau)$, lo que a su vez implica que $C > 1$ y luego $\lambda_0 > 0$. Supongamos ahora que $\lambda_0 \in \Lambda$, es decir, $u'(t) + \lambda u(t) \leq 0$ para $t \gg 0$. Entonces $\phi(t) := e^{\lambda_0 t} u(t)$ verifica $\phi'(t) = e^{\lambda_0 t}(u'(t) + \lambda_0 u(t)) \leq 0$ y, en consecuencia,

$$\phi(t-\tau) \geq \phi(t)$$

para $t \gg 0$. Luego

$$u(t-\tau) \geq e^{\lambda_0 \tau} u(t) = Cu(t),$$

lo que es absurdo.

$\square$

De lo anterior se deduce:

$$\text{Toda solución de (2) oscila} \Longleftrightarrow \tau\alpha > \tfrac{1}{e}.$$

Continuando con el análisis de la ecuación con feedback (2), obtendremos ahora información sobre la estabilidad de la solución nula, a partir de un análisis más profundo de las raíces de h. Por conveniencia, introducimos el cambio de variables

$$s := \frac{t}{\tau}, \qquad \beta := \alpha\tau, \qquad U(s) := u(t),$$

de modo que la ecuación para U resulta

$$U'(s) = -\beta U(s-1),$$

y la función característica es

$$h(\lambda) = \lambda + \beta e^{-\lambda}.$$

Como vimos, para cualquier $a \in \mathbb{R}$ la función h tiene finitos ceros en el conjunto

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(\lambda) \geq a\};$$

además, λ es raíz si y solo si $\overline{\lambda}$ es raíz. Escribiendo $\lambda = x + iy$, las raíces se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones (3) antes mencionado. El siguiente resultado caracteriza los valores de β para los cuales existen raíces con parte real negativa. Como vimos, si $\beta < 0$ hay siempre una raíz real positiva, de modo que nos limitaremos a considerar ahora el caso $\beta > 0$.

Proposición 3.2 *Se cumple:*

1. *Si* $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, *entonces existe* $\mu > 0$ *tal que* $\mathrm{Re}(\lambda) \leq -\mu$ *para toda raíz* λ.
2. *Si* $\beta = \frac{\pi}{2}$, *entonces* $\lambda = \pm i\frac{\pi}{2}$ *son raíces simples y todas las raíces restantes tienen parte real negativa.*
3. *Si* $\beta > \frac{\pi}{2}$, *entonces existe alguna raíz* λ *tal que* $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, $\frac{\pi}{2} < Im(\lambda) < \pi$.

<u>*Demostración*</u>:

Supongamos que $\lambda = x + iy$ es raíz característica, luego se satisface (3), es decir:

$$x = -\beta e^{-x}\cos y, \qquad y = \beta e^{-x}\mathrm{sen} y.$$

Como $\overline{\lambda}$ también es raíz, podemos suponer, además, que $y \geq 0$. Si $x \geq 0$, entonces (por ser $\beta > 0$) vale $y \neq 0$ y entonces $\cos y \leq 0 < \mathrm{sen} y$. Se deduce que y pertenece al segundo cuadrante, es decir

$$y \in S := \bigcup_{n=0}^{\infty} \left[2n\pi + \frac{\pi}{2}, (2n+1)\pi\right).$$

Además, para $f(y) := \frac{\text{sen}y}{y}$ se cumple

$$f'(y) = \frac{y\cos y - \text{sen}y}{y^2} < 0$$

para todo $y \in S$, de modo que $f|_S$ alcanza un máximo local en el extremo izquierdo de cada intervalo de S. Observemos, además, que

$$\frac{\text{sen}\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}},$$

de donde se deduce que

$$\frac{\text{sen}y}{y} < \frac{2}{\pi}$$

para todo $y \in S \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$. Finalmente, a partir de la igualdad

$$\frac{\text{sen}y}{y} = \frac{e^x}{\beta},$$

concluimos que

$$\frac{1}{\beta} \leq \frac{e^x}{\beta} \leq \frac{2}{\pi}$$

y en consecuencia $\beta \geq \frac{\pi}{2}$. En particular, para $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ todas las raíces tienen parte real negativa; además, como su cantidad es finita en cualquier conjunto de la forma $\{\lambda : \text{Re}(\lambda) \geq a\}$, existe $\mu > 0$ tal que $\text{Re}(\lambda) \leq -\mu$ para toda raíz λ. Cuando $\beta = \frac{\pi}{2}$, los anteriores cálculos implican que $x = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$; luego, las únicas raíces con parte real no negativa son $\pm i\frac{\pi}{2}$, que son claramente simples.

Para concluir, veamos que para $\beta > \frac{\pi}{2}$ existe una solución de (3) tal que

$$x > 0, \qquad \frac{\pi}{2} < y < \pi.$$

En efecto, dividiendo ambas ecuaciones se obtiene $x = g(y) := -y\frac{\cos y}{\text{sen}y}$. Observemos que $g'(y) > 0$ en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ y vale $g(\frac{\pi}{2}) = 0$, $g(\pi^-) = +\infty$; luego, para cada valor de y en dicho intervalo queda determinado en forma única un valor $x = x(y) > 0$ tal que $\lambda = x + iy$ es una raíz correspondiente al valor $\beta = e^x\frac{y}{\text{sen}y}$. Como x es una función creciente en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, es fácil ver que β también lo es, con $\beta\left(\frac{\pi}{2}^+\right) = \frac{\pi}{2}$, $\beta(\pi^-) = +\infty$. En consecuencia, para cada valor $\beta > \frac{\pi}{2}$ se determina en forma única un valor $y \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ y una raíz característica λ como antes.

$\square$

A modo de corolario de las proposiciones 3.1 y 3.2, obtenemos:

Teorema 3.1 *Se cumple:*

1. *Si $\alpha < 0$ o si $\alpha > \frac{\pi}{2\tau}$, entonces el equilibrio $u \equiv 0$ en (2) es inestable.*

2. *Si* $0 < \alpha < \frac{\pi}{2\tau}$, *entonces el equilibrio* $u \equiv 0$ *en (2) es (globalmente) asintóticamente estable.*

Demostración:

En el primer caso, hay una solución real de la forma $u(t) = e^{xt}\cos yt$ con $x > 0$, $y \geq 0$, lo que muestra que 0 es un equilibrio inestable.

En el segundo caso, todas las raíces características tienen parte real menor que una constante $-c < 0$; como veremos más adelante (Teorema 5.1), esto implica que el equilibrio $u \equiv 0$ es un atractor global. □

Observación 3.2 *La estabilidad asintótica resulta intuitivamente clara si aceptamos como válido el hecho (que, por otra parte, es válido) de que 'a grandes rasgos', las soluciones son de la forma*

$$u(t) = (at + b)e^{-\frac{t}{\tau}} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n t},$$

en donde el primer término puede ser no nulo únicamente en el caso $\alpha\tau = \frac{1}{e}$.

En efecto, para tales soluciones tenemos que

$$|u(t)| \leq |at + b|e^{-\frac{t}{\tau}} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{\mathrm{Re}(\lambda_n)t} \leq e^{-\gamma t}\left(|a|t + D\right)$$

donde $D := |b| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *y* $\gamma := \min\{c, \frac{1}{\tau}\}$, *lo que prueba que* $u(t) \to 0$ *para* $t \to +\infty$.

El teorema previo dice, en otras palabras, que el valor $\tau^* = \frac{\pi}{2\alpha}$ es un *retardo crítico*: para $\tau < \tau^*$ las soluciones se comportan asintóticamente de manera similar al caso sin retardo, pero el equilibrio $u \equiv 0$ se hace inestable cuando $\tau > \tau^*$.

Es interesante observar que para $\frac{1}{\alpha e} < \tau < \frac{\pi}{2\alpha}$ las soluciones se mantienen estables pero son oscilatorias. Esto se debe a que en la raíz doble $\lambda = -1$, que existe para $\beta = \frac{1}{e}$, se produce una bifurcación y comienzan a aparecer raíces complejas conjugadas, con parte real todavía negativa mientras $\beta < \frac{\pi}{2}$. Más precisamente,

Lema 3.6 *Dado* $\beta \in \left(\frac{1}{e}, \frac{\pi}{2}\right)$, *existen* $\lambda = x \pm iy$ *raíces tales que* $-1 < x < 0$, $0 < y < \frac{\pi}{2}$.

Demostración:

Como $\beta > \frac{1}{e}$, sabemos que h no tiene raíces reales, de modo que el sistema (3) equivale a

$$\begin{cases} x = -y\frac{\cos y}{\mathrm{sen} y} \\ \beta e^{-x} = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

Como en el lema anterior, se verifica que la función $g(y) := -y\frac{\cos y}{\mathrm{sen} y}$ crece estrictamente en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y vale $g(0^+) = -1$, $g(\frac{\pi}{2}^-) = 0$. Esto implica que para todo valor $x \in (-1,0)$ la ecuación $g(y) = x$ tiene exactamente una solución $y := \xi(x)$, donde ξ es una función positiva y creciente tal que $\xi(-1^+) = 0$, $\xi(0^-) = \frac{\pi}{2}$. Esto determina de forma única el valor

$$\beta = \beta(x) = e^x\sqrt{x^2 + \xi(x)^2}.$$

Es inmediato verificar que β es creciente, $\beta(-1^+) = \frac{1}{e}$, $\beta(0^-) = \frac{\pi}{2}$; en otras palabras, para cada valor de β en el intervalo $\left(\frac{1}{e}, \frac{\pi}{2}\right)$ obtenemos de manera única un valor $x \in (-1,0)$ y un valor $y = \xi(x) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

$\square$

Observación 3.3 *De la demostración anterior se deduce que existen dos ramas de raíces* $\lambda(\beta) := x(\beta) \pm iy(\beta)$ *tales que* $\lambda(\frac{1}{e}) = -1$, $\lambda(\frac{\pi}{2}) = \pm i\frac{\pi}{2}$.

4 Ecuaciones lineales de primer orden con coeficientes constantes

Un poco más en general, consideremos ahora la ecuación lineal con coeficientes constantes

$$u'(t) = au(t) + bu(t-\tau) \tag{5}$$

para $a, b \in \mathbb{R}$, $\tau > 0$. Como antes, se obtiene la ecuación característica $h(\lambda) = 0$, donde

$$h(\lambda) := \lambda - a - be^{-\lambda\tau}.$$

Haciendo el reemplazo

$$z := \tau\lambda, \qquad \alpha := a\tau, \qquad \beta := b\tau,$$

dicha ecuación es equivalente a

$$F(z, \alpha, \beta) := z - \alpha - \beta e^{-z} = 0.$$

Escribiendo $z = x + iy$, tales raíces quedan determinadas como las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta e^{-x}\cos y \\ y = -\beta e^{-x}\operatorname{sen} y. \end{cases} \tag{6}$$

Como antes, podemos limitarnos a considerar $y \geq 0$. En primer lugar, veamos cuáles son las raíces con parte real nula, es decir, con $x = 0$. Cuando $y = 0$, se tiene que $z = 0$ es solución si y solo si $\alpha + \beta = 0$. En cambio, para $y > 0$ sabemos que $z = \pm iy$ es raíz si y solo si

$$y = -\beta\operatorname{sen} y, \qquad \alpha = -\beta\cos y.$$

Esto dice que y no puede ser un múltiplo de π; más aun, para cada $y \neq k\pi$ con $k \in \mathbb{N}_0$ queda determinado un único par (α, β) dado por

$$\alpha = \frac{y\cos y}{\operatorname{sen} y}, \qquad \beta = \frac{-y}{\operatorname{sen} y}.$$

Esto permite definir curvas suaves en el plano (α, β), dadas por

$$C_k := \{(\alpha(y), \beta(y)) : y \in (k\pi, (k+1)\pi)\}.$$

Estas curvas son todas disjuntas y sin autointersecciones, pues si $(\alpha(y), \beta(y)) = (\alpha(\tilde{y}), \beta(\tilde{y}))$ para ciertos $y \in (k\pi, (k+1)\pi)$, $\tilde{y} \in (\tilde{k}\pi, (\tilde{k}+1)\pi)$, se deduce que $\cos y = \cos\tilde{y}$, lo cual da lugar a dos posibles situaciones:

- $y = \tilde{y} + 2n\pi$ para algún $n \in \mathbb{Z}$, en cuyo caso $\operatorname{sen} y = \operatorname{sen}\tilde{y}$. En consecuencia,

$$\tilde{y} = -\beta(\tilde{y})\operatorname{sen}\tilde{y} = -\beta(y)\operatorname{sen} y = y.$$

- $y = -\tilde{y} + 2n\pi$ para algún $n \in \mathbb{Z}$. En este caso $\operatorname{sen} y = -\operatorname{sen}\tilde{y}$, de modo que, razonando como antes, se deduce que $\tilde{y} = -y$, lo que es absurdo.

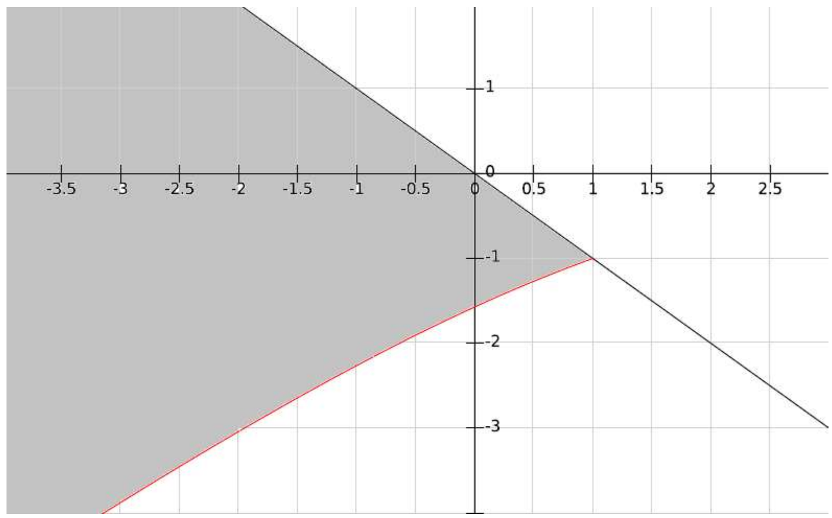
Notemos, además, que C_0 se puede extender en forma continua incluyendo el valor $y = 0$, de modo que se encuentra con la recta $\alpha + \beta = 0$ en el punto $(1, -1)$. Por otra parte, para $0 < y < \pi$ se cumple que $\alpha'(y), \beta'(y) < 0$, de modo que tanto α como β decrecen y, además, es inmediato ver que tienden a $-\infty$ a medida que $y \to \pi^-$. Finalmente, observemos que la curva se mete en el primer cuadrante por el punto $(0, -\frac{\pi}{2})$ y se acerca asintóticamente a la recta $\alpha = \beta$, siempre por debajo de ella. En efecto, basta notar que

$$\alpha(y) - \beta(y) = \frac{y(1 + \cos y)}{\operatorname{sen} y} > 0$$

para $y \in (0, \pi)$ y, por otro lado,

$$\lim_{y \to \pi^-} \frac{y(1 + \cos y)}{\operatorname{sen} y} = \lim_{y \to \pi^-} \frac{y \operatorname{sen} y}{1 - \cos y} = 0.$$

Llamemos R a la región no acotada que queda debajo de recta $\alpha + \beta = 0$ y arriba de C_0, es decir, esa especie de 'triángulo infinito' que queda determinado en la siguiente figura.



Es fácil ver que las restantes curvas C_k con $k > 0$ no tocan la región R: por ejemplo, basta con un argumento de continuidad, pues resulta claro que no se cortan con ∂R y, además, poniendo $y = \frac{2k+1}{2}\pi$ se obtiene el valor

$$(\alpha, \beta) = \left(0, (-1)^{k+1}\frac{2k+1}{2}\pi\right) \in C_k \setminus \overline{R}.^4.$$

Nuestro objetivo (o, mejor dicho, uno de ellos) es probar que si $(\alpha, \beta) \in R$, entonces el origen es un equilibrio estable. A tal fin, para cada (α, β) fijo, consideremos el número $N \in \mathbb{N}_0$ dado por

$$N(\alpha, \beta) = \#\{z \in \mathbb{C} \text{ raíz característica} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$$

en donde las raíces se cuentan con su multiplicidad.

Lema 4.1 $N(\alpha, \beta) = 0$ *para todo* $(\alpha, \beta) \in R$.

<u>*Demostración*</u>:

Veamos en primer lugar que N es localmente constante (y, en consecuencia, constante) sobre R. En efecto, consideremos $(\alpha, \beta) \in R$ y una bola $B \subset R$ de radio r centrada en (α, β). Si $z = x + iy$ es una raíz correspondiente a algún $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in B$ con $x \geq 0$ entonces $x > 0$ pues, por definición, para $(\alpha, \beta) \in R$ no hay raíces imaginarias puras. Empleando (6) se obtiene:

$$0 < x < |\tilde{\alpha}| + |\tilde{\beta}| < |\alpha| + |\beta| + 2r, \qquad |y| < |\tilde{\beta}| < |\beta| + r,$$

[4]Más precisamente, se ve que C_k queda contenida arriba del eje α y a la derecha de la recta $\alpha + \beta = 0$ para k impar, y en el 'triángulo infinito' inferior para k par. Ver ejercicio 5

Luego, si Γ es el rectángulo

$$\Gamma := \{x + iy : 0 < x < |\alpha| + |\beta| + 2r,\ |y| < |\beta| + r\},$$

se deduce que, para cualquier elemento de B, todas las posibles raíces características con parte real positiva caen en Γ y, por otra parte, $\overline{\Gamma}$ no contiene otras raíces características. En particular, vale

$$\theta := \min_{z \in \partial\Gamma} |F(z, \alpha, \beta)| > 0.$$

Achicando ahora el radio de B tanto como haga falta y usando la continuidad uniforme de F en $\partial\Gamma \times B$, podemos suponer que

$$|F(z, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) - F(z, \alpha, \beta)| < \theta$$

para todo $(z, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \partial\Gamma \times B$. Para simplificar un poco la vida (en este momento nada sencilla) del lector, llamemos

$$f(z) := F(z, \alpha, \beta), \qquad \tilde{f}(z) := F(z, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}).$$

Como θ es el mínimo, resulta $\theta \leq |f(z)|$ y la desigualdad anterior implica que

$$|\tilde{f}(z) - f(z)| < |f(z)| \qquad \text{para todo } z \in \partial\Gamma.$$

Luego, por el teorema de Rouché (¡quién lo hubiera dicho!), se deduce que f y $\tilde{f}$ tienen, en Γ, la misma cantidad de raíces. En otras palabras, todos los elementos de B tienen la misma cantidad de raíces con parte real positiva. Esto prueba que $N|_R$ es constante.

Finalmente, observemos que $(-1, 0) \in R$ y $F(z, -1, 0) = z + 1$, de modo que la única raíz es $z = -1$. Concluimos entonces que $N \equiv 0$ sobre R, es decir: para $(\alpha, \beta) \in R$ todas las raíces características tienen parte real negativa.

□

La misma idea previa sirve para mostrar que, en realidad, el valor $N(\alpha, \beta)$ es constante sobre cada componente conexa del complemento, en el plano (α, β), del conjunto

$$\{\alpha + \beta = 0\} \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} C_k.$$

A partir de esto se puede probar que si $(\alpha, \beta) \notin \overline{R}$ entonces hay alguna raíz característica con parte real positiva:

Lema 4.2 $N(\alpha, \beta) > 0$ *para todo* $(\alpha, \beta) \notin R$.

<u>*Demostración*</u>:

Es fácil (ver ejercicio 6) verificar que hay una raíz real positiva cuando $\alpha + \beta > 0$ y $\beta \geq 0$. En consecuencia, como la región $\{\alpha + \beta > 0 \geq \beta\}$ no se interseca con las curvas C_k, se deduce que para $\alpha + \beta > 0$ existe al menos una raíz con parte real positiva. Por otra parte, para la región contenida bajo C_0 y la recta

$\alpha+\beta=0$ podemos proceder de la siguiente forma. En primer lugar, si $-e^{\alpha-1} < \beta < -\alpha \leq -1$, es inmediato verificar que existen dos raíces reales positivas, pues la función $\varphi(x) := x - \beta e^{-x}$ alcanza su mínimo en $x_{min} = \ln(-\beta) > 0$ y vale

$$\varphi(x_{min}) = \ln(-\beta) + 1 < \alpha,$$

mientras que

$$\varphi(0) = -\beta > \alpha, \qquad \varphi(+\infty) = +\infty.$$

Como φ es convexa, se deduce que la ecuación $\varphi(x) = \alpha$ tiene exactamente dos soluciones reales positivas. Por otra parte, todas las curvas C_k con k par cruzan el gráfico de la función $\beta = -e^{\alpha-1}$, de modo que para todo (α,β) que se encuentre entre dos de tales curvas hay por lo menos dos raíces con parte real positiva. Finalmente, observemos que si $(\alpha,\beta) \in C_k$ con k par entonces hay por lo menos una raíz con parte real positiva. Para ver esto, consideremos $\alpha_n \to \alpha$ de manera tal que $(\alpha_n,\beta) \notin C_k$ y luego podemos suponer que existen $z_n \neq \tilde{z}_n$ raíces características correspondientes a (α_n,β) con parte real positiva. De manera análoga a los cálculos de lema previo, sabemos que las sucesiones $\{z_n\}$ y $\{\tilde{z}_n\}$ están acotadas, así que podemos suponer que convergen respectivamente a ciertos $z, \tilde{z}$. Si alguno de estos valores tiene parte real positiva, queda probado lo que queríamos, así que a partir de ahora podemos suponer que z y $\tilde{z}$ tienen parte real nula. Como además son raíces características para (α,β), se deduce que $z = \tilde{z} = iy$ para cierto $y \in (k\pi,(k+1)\pi)$. Por otra parte, observemos que $\frac{\partial F}{\partial z}(iy,\alpha,\beta) = 1 + \beta e^{-iy} \neq 0$; luego, por el teorema de la función implícita existen abiertos $U \subset \mathbb{R}$,$V \subset \mathbb{C}$ con $\alpha \in U$, $iy \in V$ y una única función $z : U \to V$ de manera tal que $z(\alpha) = iy$, $F(z(\tilde{\alpha}),\tilde{a},\beta) = 0$ para $\tilde{\alpha} \in U$. Esto dice, para n grande, que $z_n = \tilde{z}_n$, lo que es absurdo.[5] □

Lo anterior permite obtener conclusiones respecto de la estabilidad en el origen. Observemos que para $a + b = 0$ se tiene que $\lambda = 0$ es raíz característica y cualquier constante es un punto de equilibrio, de modo que supondremos $a + b \neq 0$. En tal caso, sabemos que hay inestabilidad cuando $(\alpha,\beta) \notin \overline{R}$. Esto ocurre siempre para $\alpha+\beta > 0$, es decir, $a+b > 0$; en cambio, la región que queda debajo de la recta $\alpha + \beta = 0$ y encima de la recta $\alpha = \beta$ (incluyéndola) está contenida en R y para esos valores hay estabilidad asintótica. Esta situación corresponde al caso $a + b < 0$ y $b \geq a$. Finalmente, cuando $a + b < 0$ y $b < a$, sigue habiendo estabilidad asintótica mientras (α,β) se mantenga estrictamente por encima de C_0. Como $(\alpha,\beta) = \tau(a,b)$ y además $0 \in \overline{R}$, se ve que $(\alpha,\beta) \in R$ para valores pequeños de τ, y $(\alpha,\beta) \notin \overline{R}$ cuando τ es grande. Observemos, además, que para $0 < y < \pi$ vale $\alpha'(y) < \beta'(y)$, lo que dice que la semirrecta $\{\tau(a,b) : \tau > 0\}$ no puede cortar la curva C_0 más de una vez: en consecuencia, existe un único valor τ^* para el cual $(\alpha,\beta) \in C_0$ y, al igual que en el modelo con feedback negativo antes analizado (que corresponde al caso $a = 0$, $b < 0$), se deduce que $u \equiv 0$ es asintóticamente estable para $0 < \tau < \tau^*$ e inestable para $\tau > \tau^*$. Se verifica fácilmente que τ^* se hace más grande a medida que a se acerca al valor b. Resumiendo,

[5]Más precisamente, puede probarse que entre las curvas C_{2n} y C_{2n+2} el número de raíces con parte real positiva es exactamente $2n + 2$ (para más detalles, ver [8]).

Teorema 4.1 *Para la ecuacion (5), se cumple:*

1. *Si $a + b > 0$, el equilibrio $u \equiv 0$ es inestable.*
2. *Si $a + b < 0$ y $b \geq a$, el equilibrio $u \equiv 0$ es asintóticamente estable.*
3. *Si $a + b < 0$ y $b < a$, existe un valor $\tau^* > 0$ tal que el equilibrio $u \equiv 0$ es asintóticamente estable para $\tau < \tau^*$ e inestable para $\tau > \tau^*$.*

4.1 Ejercicios

Para la ecuación lineal (5) consideramos la ecuación característica $h(\lambda) = 0$ y definimos, como antes:

$$z := \tau\lambda, \quad \alpha := \tau a, \quad \beta := \tau b$$

$$F(z, \alpha, \beta) := h(\lambda) = z - \alpha - \beta e^{-z},$$

1. Probar que si λ_n son raíces de h y $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n t}$ converge uniformemente en $[-\tau, +\infty)$ a una solución de (5).
2. Calcular todas las posibles raíces múltiples para α, β fijos y verificar que, en tal caso, la multiplicidad es 2.
3. Para α, β fijos, verificar que:
   (a) Si $\beta \geq 0$ hay una única raíz real, que resulta positiva cuando $\alpha + \beta > 0$ y negativa cuando $\alpha + \beta < 0$.
   (b) No hay raíces reales si y solo si $\beta < -e^{\alpha - 1}$.
   (c) Si $e^{\alpha - 1} \leq \beta \leq -1$ entonces hay al menos una raíz real positiva.
4. Mostrar que si z_0 es una raíz simple para ciertos (α_0, β_0) entonces existen U entorno de (α_0, β_0), V entorno de z_0 y una única función suave $z : U \to V$ tal que $z(\alpha, \beta)$ es raíz característica para todo $(\alpha, \beta) \in U$.
5. Graficar en el plano (α, β) las curvas
$$C_k := \{(\alpha(y), \beta(y)) : y \in (k\pi, (k+1)\pi)\} \qquad k \in \mathbb{N}_0$$
donde
$$\alpha(y) = \frac{y \cos y}{\operatorname{sen} y}, \qquad \beta(y) = \frac{-y}{\operatorname{sen} y}.$$
6. Probar que $\alpha + \beta > 0$ entonces hay al menos una raíz con parte real positiva y lo mismo ocurre para $\alpha + \beta < 0$ cuando (α, β) se encuentra entre C_{2n} y C_{2n+2}. Se puede probar que el número exacto es $2n + 2$. Deducir que sobre C_{2n} con $n > 0$ también existe al menos una raíz con parte real positiva (sugerencia: usar el ejercicio 4).
7. Sean a, b tales que $a + b < 0$, $b < a$. Calcular explícitamente el valor τ^*.
8. Interpretar los resultados obtenidos para el caso particular $a = 0$.

5 Linealización

En la sección previa analizamos la estabilidad del origen para la ecuación lineal $u'(t) = au(t) + bu(t-\tau)$. Una pregunta natural para quien conozca los métodos empleados en la teoría de ecuaciones ordinarias es si dicho análisis puede ser de utilidad para estudiar la estabilidad de los equilibrios de algunas ecuaciones no lineales, por ejemplo:

$$u'(t) = F(u(t), u(t-\tau)).$$

En este caso, se llama punto de equilibrio a una solución constante $u = u^*$, es decir, tal que (u^*, u^*) es un cero de F. Suponiendo que $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en dicho punto, podemos escribir la ecuación anterior como

$$u'(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(u^*, u^*)(u(t) - u^*) + \frac{\partial F}{\partial y}(u^*, u^*)(u(t-\tau) - u^*) + R(u(t), u(t-\tau))$$

donde R es el resto de Taylor. En otras palabras, si definimos $v(t) := u(t) - u^*$, $(a, b) := \nabla F(u^*, u^*)$ y $\varphi(x, y) := R(x + u^*, y + u^*)$ nos queda la ecuación

$$v'(t) = av(t) + bv(t-\tau) + \varphi(v(t), v(t-\tau)),$$

que puede pensarse como una 'perturbación' de una ecuación lineal con coeficientes constantes, en el sentido de que cerca del origen la función φ toma valores muy chicos, más precisamente:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\varphi(x, y)}{\|(x, y)\|} = 0.$$

En consecuencia, es esperable que las soluciones que se encuentran cercanas al 0 se comporten de manera similar a las de la ecuación linealizada, dada por $v'(t) = av(t) + bv(t-\tau)$.

Veremos que, a grandes rasgos, esto es cierto. Para ello, será conveniente buscar una fórmula general para expresar la solución de una ecuación lineal para cualquier condición inicial dada. Concretamente, lo que necesitamos es una fórmula análoga a la de variación de parámetros para la ecuación lineal no homógenea:

$$u'(t) = au(t) + bu(t-\tau) + f(t) \qquad t > 0 \tag{7}$$

con condición inicial

$$u(t) = \phi(t) \qquad -\tau \le t \le 0. \tag{8}$$

En primer lugar, observemos que si $\phi \in C([-\tau, 0])$ y $f \in C([0, +\infty))$, entonces el método de pasos proporciona una solución globalmente definida, es decir, $u \in C([-\tau, +\infty)$: en efecto, si u es solución en $[-\tau, n\tau]$ para cierto $n \in \mathbb{N}$, entonces por la teoría clásica de ecuaciones ordinarias podemos extender u hacia la derecha buscando la única solución del problema

$$v'(t) = av(t) + bu(t-\tau) + f(t), \qquad v(n\tau) = u(n\tau)$$

que está definida hasta $(n+1)\tau$. Además, escribiendo para $t > 0$

$$u(t) = \phi(0) + \int_0^t [au(s) + bu(s-\tau) + f(s)]\, ds$$

resulta

$$|u(t)| \le |\phi(0)| + \int_0^t |f(s)|\, ds + \int_0^t |au(s)|\, ds + \int_{-\tau}^{t-\tau} |bu(s)|\, ds$$

$$\le |\phi(0)| + \int_0^t |f(s)|\, ds + \int_{-\tau}^0 |b\phi(s)|\, ds + \int_0^t (|a| + |b|)|u(s)|\, ds,$$

pues $\int_{t-\tau}^t |bu(s)|\, ds \ge 0$. Si llamamos

$$R(t) := \int_0^t |f(s)|\, ds + \|\phi\|_\infty (1 + \tau|b|),$$

entonces, para cada t fijo y $\tilde{t} \le t$ vale $R(\tilde{t}) \le R(t)$ y

$$|u(\tilde{t})| \le R(t) + \int_0^{\tilde{t}} (|a| + |b|)|u(s)|\, ds.$$

Por el Lema de Gronwall[6], se deduce que

$$|u(\tilde{t})| \le R(t) e^{(|a|+|b|)\tilde{t}}$$

para todo $\tilde{t} \le t$ y, en definitiva:

$$|u(t)| \le R(t) e^{(|a|+|b|)t}.$$

Por conveniencia, denotemos $u(t, \phi, f)$ a la solución correspondiente a cada ϕ y cada f; luego, la desigualdad anterior se escribe de la siguiente forma:

$$|u(t, \phi, f)| \le \left(\int_0^t |f(s)|\, ds + \|\phi\|_\infty (1 + \tau|b|) \right) e^{(|a|+|b|)t}. \tag{9}$$

Por otra parte, por linealidad se deduce además que

$$u(t, \phi, f) = u(t, \phi, 0) + u(t, 0, f),$$

lo que dará lugar a la fórmula de variación de parámetros.

Observación 5.1 *Es interesante notar que, para t fijo, podemos definir las aplicaciones lineales $S : C([-\tau, 0]) \to \mathbb{R}$ y $T : C([0, t]) \to \mathbb{R}$ dadas por*

$$S(\phi) := u(t, \phi, 0), \qquad T(f) := u(t, 0, f)$$

[6]Se puede usar directamente la versión más general del lema, ver ejercicio 2b del apéndice

Por la desigualdad anterior se tiene que

$$|S(\phi)| \leq C\|\phi\|_\infty, \qquad |T(f)| \leq D\|f\|_\infty$$

para $C = (1 + \tau|b|)e^{(|a|+|b|)t}$ *y* $D = te^{(|a|+|b|)t}$*, de modo que* S *y* T *resultan continuas. Por el teorema de Riesz, existen representaciones integrales de la forma*

$$S(\phi) = \int_0^t \phi \, d\lambda, \qquad T(f) = \int_0^t f \, d\mu$$

para ciertas medidas λ *y* μ*. Esto, de alguna forma, anticipa los resultados que se obtendrán a continuación.*

En lo que sigue, veremos una manera explícita de encontrar una expresión integral para la solución general $u(t, \phi, f)$ con ayuda de una herramienta de gran utilidad: la transformada de Laplace. A tal fin, recordemos (al menos en el sentido del mito platónico) algunas propiedades fundamentales de dicha transformada.

Para $f : [0, +\infty)$ localmente integrable tal que $|f(t)| \leq Ae^{Bt}$ para ciertas constantes $A, B \geq 0$ se define

$$\mathcal{L}(f)(z) := \int_0^{+\infty} e^{-zt} f(t) \, dt.$$

Es claro que $\mathcal{L}f$ se encuentra bien definida y resulta una función analítica en el conjunto $\{\mathrm{Re}(z) > B\}$. Por otra parte, para la convolución de dos funciones f y g, definida como

$$f * g(t) := \int_0^t f(t - s)g(s) \, ds$$

es inmediato verificar que vale

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g).$$

Además, se tiene el teorema de inversión, válido para una función f como antes, asumiendo que tiene localmente variación acotada:

$$\int_{(C)} \mathcal{L}(f)(z)e^{zt} \, dz = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} \qquad t > 0$$

para todo $C > B$, donde

$$\int_{(C)} \varphi(z) \, dz := \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{C-iT}^{C+iT} \varphi(z) \, dz.$$

Lo anterior brinda una expresión explícita para la antitransformada $\mathcal{L}^{-1}$, que por ahora vamos a emplear informalmente.

Supongamos que f tiene crecimiento exponencial, entonces lo mismo ocurre con la solución u (¿por qué?). En consecuencia, podemos transformar ambos miembros de la ecuación (7) y, por la linealidad de $\mathcal{L}$, vale

$$\mathcal{L}(u') = a\mathcal{L}(u) + b\mathcal{L}(u_{-\tau}) + \mathcal{L}(f)$$

donde $u_{-\tau}(t) := u(t-\tau)$. Es fácil verificar la siguiente propiedad de la transformada:

$$\mathcal{L}(u')(z) = z\mathcal{L}(u)(z) - u(0).$$

Luego, la igualdad anterior se escribe

$$\begin{aligned}
(z-a)\mathcal{L}(u)(z) &= \phi(0) + b\left(\int_0^\tau e^{-zt}\phi_{-\tau}(t)\,dt + \int_\tau^{+\infty} e^{-zt}u_{-\tau}(t)\,dt\right) + \mathcal{L}(f)(z)\\
&= \phi(0) + b\left(\int_0^\tau e^{-zt}\phi_{-\tau}(t)\,dt + \int_0^{+\infty} e^{-z(t+\tau)}u(t)\,dt\right) + \mathcal{L}(f)(z)\\
&= \phi(0) + b\left(\int_0^\tau e^{-zt}\phi_{-\tau}(t)\,dt + e^{-z\tau}\mathcal{L}(u)(z)\right) + \mathcal{L}(f)(z),
\end{aligned}$$

es decir:

$$\left(z - a - be^{-z\tau}\right)\mathcal{L}(u)(z) = \phi(0) + b\int_0^\tau e^{-zt}\phi_{-\tau}(t)\,dt + \mathcal{L}(f)(z).$$

No es casualidad que el factor del término de la izquierda sea exactamente la función característica $h(z) = z - a - be^{-z\tau}$; por otra parte, si extendemos ϕ a la derecha de 0 en forma nula, la igualdad anterior se puede escribir

$$\mathcal{L}(u)(z) = \frac{1}{h(z)}\left(\phi(0) + \mathcal{L}(b\phi_{-\tau} + f)(z)\right).$$

Luego, si logramos calcular la antitransformada de $\frac{1}{h}$, es decir, una función K tal que $\mathcal{L}(K) = \frac{1}{h}$, resultará

$$\mathcal{L}(u) = \phi(0)\mathcal{L}(K) + \mathcal{L}(K)\mathcal{L}(b\phi_{-\tau} + f) = \mathcal{L}(\phi(0)K) + \mathcal{L}[K * (b\phi_{-\tau} + f)],$$

es decir:

$$u = \phi(0)K + K * (b\phi_{-\tau} + f).$$

La función K se llama *solución fundamental* de la ecuación; en particular, poniendo $f = 0$ y $\phi = 0$ obtenemos

$$u(t,\phi,0) = \phi(0)K(t) + bK * \phi_{-\tau}(t)$$

$$u(t,0,f) = K * f(t)$$

respectivamente. Por tal motivo, conviene escribir la anterior descomposición en la forma

$$u(t) = \phi(0)K(t) + bK * \phi_{-\tau}(t) + K * f(t), \tag{10}$$

donde el último término es una solución particular de la ecuación y los dos primeros describen (variando el valor de ϕ) la totalidad de las soluciones de la ecuación homogénea.

A fin de calcular K, veamos primero qué ecuación debe cumplir. Por empezar, observemos que a partir de la igualdad

$$u(t, \phi, 0) = \phi(0)K(t) + bK * \phi_{-\tau}(t),$$

si tomamos por ejemplo

$$\phi_n(t) := \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \leq t \leq -\frac{1}{n} \\ nt+1 & \text{si } -\frac{1}{n} < t \leq 0 \end{cases}$$

es "razonable" pensar que $u(t, \phi_n, 0) \to K(t)$ para $n \to \infty$ y en consecuencia K tiene que ser una "solución" del problema homogéneo con condición inicial (discontinua)

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Para sustentar un poco más esta intuición, cabe observar que si consideramos ahora

$$u(t) := u(t, 0, f) = K * f(t) = \int_0^t K(t-s)f(s)\, ds$$

y derivamos para $t > 0$ obtenemos

$$au(t) + bu(t-\tau) + f(t) = K(0)f(t) + \int_0^t K'(t-s)f(s)\, ds. \tag{11}$$

Pero

$$u(t-\tau) = K * f(t-\tau) = \int_0^{t-\tau} K(t-\tau-s)f(s)\, ds$$

y asumiendo que $K(s) = 0$ para $s < 0$ resulta

$$\int_0^{t-\tau} K(t-\tau-s)f(s)\, ds = \int_0^t K_{-\tau}(t-s)f(s)\, ds = K_{-\tau} * f(t).$$

En consecuencia, a partir de (11) y asumiendo $K(0) = 1$ se deduce

$$(aK + bK_{-\tau}) * f = K' * f,$$

para toda f, de donde $K' = aK + bK_{-\tau}$.

A pesar de que ϕ es discontinua, el método de pasos permite obtener K como función definida en $[-\tau, +\infty)$ con $K(t) = 0$ para $t < 0$. Más aun, la fórmula (9) antes obtenida muestra que K tiene crecimiento exponencial, más precisamente

$$|K(t)| \leq (1 + \tau b)e^{(|a|+|b|)t} \tag{12}$$

y en consecuencia $\mathcal{L}(K)$ está bien definida.[7]

Observemos que efectivamente $\mathcal{L}(K) = \frac{1}{h}$, pues a partir de la ecuación

$$K'(t) = aK(t) + bK(t-\tau) \qquad t > 0$$

podemos transformar de ambos lados para obtener, como antes:

$$z\mathcal{L}(K)(z) - K(0) = a\mathcal{L}(K)(z) + be^{-z\tau}\mathcal{L}(K)(z)$$

pues $K \equiv 0$ en $[-1, 0)$. Esto dice que

$$(z - a - be^{-z\tau})\mathcal{L}(K) = K(0) = 1$$

y en consecuencia $\mathcal{L}(K) = \frac{1}{h}$.

La fórmula obtenida permite demostrar el resultado que quedó pendiente en las secciones previas, que asegura estabilidad asintótica del equilibrio para la ecuación homogénea cuando todas las raíces características tienen parte real negativa. Más en general, se tiene:

Teorema 5.1 *Sea $\mu > \mu_0 := \sup\{\mathrm{Re}(\lambda) : h(\lambda) = 0\}$.*[8] *Entonces existe $\rho = \rho(a, b)$ tal que*

$$|u(t, \phi, 0)| \leq \rho\|\phi\|_\infty e^{\mu t}$$

para todo $t > 0$.

<u>*Demostración*</u>:

De acuerdo con la fórmula de inversión y por (12), sabemos que para $C > |a| + |b|$ y $t > 0$ vale

$$K(t) = \int_{(C)} \mathcal{L}(K)(z)e^{zt}\, dz = \int_{(C)} \frac{e^{zt}}{h(z)}\, dz.$$

Veamos en primer lugar que también vale

$$K(t) = \int_{(\mu)} \frac{e^{zt}}{h(z)}\, dz.$$

En efecto, si $\mu \geq C$ no hay nada que probar, mientras que si $\mu < C$ podemos considerar el rectángulo R con vértices en los puntos $\mu \pm iT$, $C \pm iT$. Como h no se anula en R, vale

$$\int_{\partial R} \frac{e^{zt}}{h(z)}\, dz = 0,$$

[7] Esto también puede verse en forma directa, pues $K(t) = e^{at}$ para $t \in [0, \tau]$, luego en $[\tau, 2\tau]$ vale

$$K'(t) = aK(t) + be^{a(t-\tau)}, \qquad K(\tau) = e^{a\tau}$$

y se deduce que $K(t) = (1 + tbe^{-a\tau})e^{at}$, etc.

[8] Que en realidad es un máximo.

de modo que alcanza con probar que

$$\lim_{T\to+\infty}\int_{\gamma^\pm}\frac{e^{zt}}{h(z)}\,dz=0$$

donde $\gamma^\pm(s):=s\pm iT$ para $\mu\le s\le C$. Notemos que para $z=s\pm iT$ vale

$$|h(z)|\ge|\mathrm{Im}(h(z))|=|T-be^{-s\tau}\mathrm{sen}(T\tau)|>\frac{T}{2}$$

para T mayor que un cierto T_0, mientras que

$$|e^{zt}|=e^{ts}\le e^{Ct}$$

y, de esta forma,

$$\left|\int_{\gamma^\pm}\frac{e^{zt}}{h(z)}\,dz\right|\le\frac{2}{T}e^{Ct}(C-\mu)\to 0.$$

Además, para

$$f(z):=\frac{1}{h(z)}-\frac{1}{z-\mu_0}=\frac{a+be^{-z\tau}-\mu_0}{h(z)(z-\mu_0)}$$

se cumple, si $T>T_0$:

$$|f(\mu\pm iT)|\le\frac{2}{T^2}\left|a-\mu_0+be^{-\mu\tau}\cos(T\tau)\mp ibe^{-\mu\tau}\mathrm{sen}(T\tau)\right|\le\frac{D}{T^2}$$

para cierta constante D. Esto implica

$$\left|\int_{\mu-iT}^{\mu+iT}f(z)\,dz\right|\le\left|\int_{\mu-iT_0}^{\mu+iT_0}f(z)\,dz\right|+\frac{2(T-T_0)D}{T^2}\le M$$

para cierta constante M y luego

$$\left|\int_{\mu-iT}^{\mu+iT}f(z)e^{zt}\,dz\right|\le Me^{\mu t}.$$

Notemos, finalmente, que la función $\frac{1}{z-\mu_0}$ es la transformada de $g(t):=e^{\mu_0 t}$, de modo que

$$\int_{(\mu)}\frac{e^{zt}}{z-\mu_0}\,dz=e^{\mu_0 t}<e^{\mu t}.$$

Se deduce entonces que

$$|K(t)|=\left|\int_{(\mu)}\frac{e^{zt}}{h(z)}\,dz\right|\le ke^{\mu t}\tag{13}$$

para cierta constante k. En consecuencia, escribiendo

$$u(t,\phi,0)=\phi(0)K(t)+b\int_0^\tau K(t-s)\phi(s-\tau)\,ds$$

obtenemos

$$
\begin{aligned}
|u(t,\phi,0)| &\le |\phi(0)|ke^{\mu t} + |b|\|\phi\|_\infty k\int_0^\tau e^{\mu(t-s)}\,ds \\
&\le k\left(1+|b|\frac{e^{-\mu\tau}-1}{\mu}\right)\|\phi\|_\infty e^{\mu t}.
\end{aligned}
$$

□

A continuación, veamos cómo se puede aplicar la fórmula (10) para estudiar la estabilidad del origen en ecuaciones lineales perturbadas de la forma

$$u'(t) = au(t) + bu(t-\tau) + f(u(t), u(t-\tau)),$$

donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función suave tal que

$$f(0,0) = 0, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0.$$

Según mencionamos, esto permitirá analizar la estabilidad de los equilibrios para ecuaciones más generales via linealización.

Dado $\varepsilon > 0$, fijemos en primer lugar un valor $\delta_\varepsilon > 0$ tal que si $\|(x,y)\| \le \delta_\varepsilon$ entonces $|f(x,y)| \le \varepsilon(|x|+|y|)$. Por la fórmula de variación de los parámetros, la solución del problema anterior con una condición inicial ϕ puede escribirse como

$$u(t) = u(t,\phi,0) + \int_0^t K(t-s)f(u(s), u(s-\tau))\,ds.$$

Supongamos que $|u(s)| \le \delta_\varepsilon$ para $s \le t$, entonces resulta

$$|u(t) - u(t,\phi,0)| \le \varepsilon k\int_0^t e^{\mu(t-s)}(|u(s)| + |u(s-\tau)|)\,ds \tag{14}$$

con k como en (13) y $\mu > \mathrm{Re}(\lambda)$ para toda raíz característica λ. Observemos ahora que

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t e^{\mu(t-s)}|u(s-\tau)|\,ds = e^{-\mu\tau}\int_{-\tau}^{t-\tau} e^{\mu(t-s)}|u(s)|\,ds \\
&\le e^{-\mu\tau}\left(\int_{-\tau}^0 e^{\mu(t-s)}|\phi(s)|\,ds + \int_0^t e^{\mu(t-s)}|u(s)|\,ds\right) \\
&\le e^{-\mu\tau}\left(\|\phi\|_\infty e^{\mu t}\frac{e^{\mu\tau}-1}{\mu} + \int_0^t e^{\mu(t-s)}|u(s)|\,ds\right),
\end{aligned}
$$

En consecuencia,

$$|u(t) - u(t,\phi,0)| \le C\|\phi\|_\infty e^{\mu t} + \varepsilon D\int_0^t e^{\mu(t-s)}|u(s)|\,ds$$

para $C := \frac{1-e^{-\mu\tau}}{\mu}$, $D = 1 + e^{\mu\tau}$. Luego, tomando ρ como en el Teorema 5.1 se deduce que

$$|u(t)| \; \leq (\rho + C)\|\phi\|_\infty e^{\mu t} + \varepsilon D \int_0^t e^{\mu(t-s)}|u(s)|\, ds$$

y en consecuencia, llamando $v(t) := e^{-\mu t}u(t)$, resulta

$$|v(t)| \leq (\rho + C)\|\phi\|_\infty + \varepsilon D \int_0^t |v(s)|\, ds.$$

Entonces $|v(t)| \leq (\rho + C)\|\phi\|_\infty e^{\varepsilon D t}$, es decir:

$$|u(t)| \leq (\rho + C)\|\phi\|_\infty e^{(\varepsilon D + \mu)t}.$$

De esta forma, se obtiene:

Teorema 5.2 *Sea f como antes y sea $h(\lambda) = \lambda - a - be^{-\lambda\tau}$. Supongamos $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ para toda λ raíz de h. Entonces $u \equiv 0$ es (localmente) asintóticamente estable.*

<u>*Demostración*</u>:

Fijando $\mu < 0$ tal que $\mu > \sup\{\mathrm{Re}(\lambda)\}$, definimos C y D como antes y elegimos $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon D + \mu < 0$. Tomando $\delta < \delta_\varepsilon$ tal que $\delta \leq \frac{\delta_\varepsilon}{\rho + C}$ resulta, para $\|\phi\|_\infty \leq \delta$, que si u es una solución con condición inicial ϕ entonces vale

$$|u(t)| \leq \delta_\varepsilon e^{(\varepsilon D + \mu)t} \tag{15}$$

para todo t. En efecto, consideremos $J := \{t \geq 0 : |u(s)| \leq \delta_\varepsilon \text{ para } s \leq t\}$, que claramente es un intervalo cerrado y no vacío. Como $\delta < \delta_\varepsilon$, el intervalo J se extiende a la derecha del 0. Dado $t_0 > 0$ tal que $t_0 \in J$, la cuenta anterior dice que vale (15) en $[-\tau, t_0]$ y, en particular, $|u(t_0)| \leq \delta_\varepsilon e^{(\varepsilon D + \mu)t_0} < \delta_\varepsilon$. Esto prueba que la desigualdad $|u(t)| \leq \delta_\varepsilon$ sigue valiendo un poco a la derecha de t_0, vale decir, que J es abierto. □

Observación 5.2 *En rigor, el resultado previo dice solamente que si u es una solución definida en el intervalo $[-\tau, T]$ entonces vale (15) para $t \leq T$. Como veremos, si f es localmente Lipschitz, esto garantiza que u está definida en $[-\tau, +\infty)$ y la desigualdad anterior vale para todo t.*

Corolario 5.1 *Consideremos el problema*

$$u'(t) = F(u(t), u(t-\tau))$$

con $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Sea $u^* \in \mathbb{R}$ tal que $F(u^*, u^*) = 0$ y sea $h(\lambda) = \lambda - a - be^{-\lambda\tau}$, donde $(a, b) := \nabla F(u^*, u^*)$. Si todas las raíces de h tienen parte real negativa, entonces u^* es un equilibrio (localmente) asintóticamente estable.

Los resultados obtenidos para la ecuación escalar pueden extenderse de manera inmediata a sistemas, de la forma

$$X'(t) = AX(t) + BX(t-\tau)$$

para $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, en cuyo caso es fácil verificar que la ecuación característica resulta

$$h(\lambda) := \det\left(\lambda I - A - e^{-\tau\lambda}B\right) = 0.$$

No haremos esto ahora pues más adelante veremos la situación más general, pero emplearemos esta fórmula para decir algo sobre la estabilidad del origen. Es claro que no se podrá hacer un estudio tan completo como en el caso escalar, aunque el siguiente resultado muestra que cuando el retardo es pequeño la situación se asemeja bastante al caso sin retardo.

Teorema 5.3 *Sean $z_1, \dots, z_k$ todos los autovalores de la matriz $A+B$ y sean $\delta > 0$ y $s < \mathrm{Re}(z_j)$ para todo $j = 1, \dots, k$. Entonces existe $\tau_* > 0$ tal que si $0 < \tau < \tau_*$ y $h(\lambda) = 0$ se cumple:*

$$\mathrm{Re}(\lambda) < s \quad \text{o bien} \quad |\lambda - z_j| < \delta \text{ para algún } j.$$

<u>*Demostración*</u>:

Consideremos el conjunto

$$C := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \geq s, |z - z_j| \geq \delta \text{ para todo j}\}.$$

Queremos probar que si τ es chico, entonces $h^{-1}(0) \cap C = \emptyset$. En efecto, supongamos que existen $\tau_n \to 0^+$ y raíces λ_n de la función h_n correspondiente a τ_n tales que $\lambda_n \in C$. Si la sucesión $\{\lambda_n\}$ converge a cierto λ, resulta $h_0(\lambda) = 0$ para h_0 correspondiente a $\tau = 0$, es decir, $h_0(\lambda) = \lambda I - (A+B)$. Esto dice que λ es autovalor de $A+B$, lo que es absurdo pues también se verifica que $\lambda \in C$. Luego, tomando una subsucesión podemos suponer $|\lambda_n| \to \infty$ y considerar la matriz

$$M_n := I - \frac{1}{\lambda_n}\left(A + e^{-\lambda_n\tau_n}B\right).$$

Como vale $\left|e^{-\lambda_n\tau_n}\right| = e^{-\mathrm{Re}(\lambda_n)\tau_n} \leq e^{-s\tau_n} \to 0$, se deduce que la matriz M_n converge a la identidad y, en consecuencia, es inversible para n grande. Esto es absurdo, porque $\det(M_n) = \frac{h_n(\lambda_n)}{\lambda_n} = 0$.

$\square$

En otras palabras, si el retardo es chico entonces las raíces características están cerca de los autovalores de $A+B$ o bien tienen parte real menor que todos ellos. Esto garantiza, para valores chicos de τ, la estabilidad asintótica del origen en caso de que los autovalores de $A+B$ tengan parte real negativa mientras que, por otra parte, si algún autovalor simple de $A+B$ tiene parte real positiva, entonces el equilibrio nulo es inestable:

Corolario 5.2 *Sean A, B y $\{z_j\}_{j=1,\dots,k}$ como antes. Entonces se cumple:*

1. *Si* $\mathrm{Re}(z_j) < 0$ *para todo* j*, entonces existe* $\tau_* > 0$ *tal que el origen es un equilibrio asintóticamente estable para* $0 < \tau < \tau_*$*.*

2. *Si* $\mathrm{Re}(z_j) > 0$ *para algún* j*, entonces existe* $\tau_* > 0$ *tal que el origen es inestable para* $0 < \tau < \tau_*$*.*

Demostración:

1. Basta con tomar $\delta := -\max\{\mathrm{Re}(z_j) : j = 1, \ldots, k\}$ y aplicar el teorema anterior.

2. Consideremos $h_\tau(z) = \det(zI - A - e^{\tau z}B) = H(z, \tau)$, vale decir, como función de z y τ. Supongamos $\mathrm{Re}(z_j) = r > 0$ y veamos que para τ chico la función $H(\cdot, \tau)$ se anula en $B_r(z_j)$. En efecto, si esto no vale entonces existe $\tau_n \to 0$ tal que $g_n := H(\cdot, \tau_n)$ no se anula en $B_r(z_j)$. Observemos que g_n es analítica y además $g_n \to H(\cdot, 0)$ uniformemente en $B_r(z_j)$. Como $H(\cdot, 0)$ se anula en $B_r(z_j)$, el teorema de Hurwitz implica que $H(z, 0) = 0$ para todo $z \in B_r(z_j)$, lo que es absurdo.

$\square$

Observación 5.3 *El Teorema 5.3 y el Corolario 5.2 siguen valiendo para* $A(\tau)$ *y* $B(\tau)$ *funciones continuas de* τ*, con* $\{z_j\}$ *los autovalores de* $A(0) + B(0)$*.*

Observación 5.4 *En particular, para* $n = 1$ *se obtiene, para* τ *chico, que si* $a+b < 0$ *entonces el origen es asintóticamente estable y si* $a+b > 0$ *es inestable, pues la única raíz* $z = a + b$ *es obviamente simple. Esta conclusión concuerda (aunque es más débil) con lo que habíamos obtenido en forma directa en el Teorema 4.1.*

6 Sistemas lineales generales

Los resultados obtenidos pueden extenderse para otros sistemas lineales: por ejemplo, ecuaciones con varios retardos, o con retardos distribuidos. Podemos considerar en general un sistema lineal autónomo de la forma

$$X'(t) = L(X_t)$$

donde $X_t(\theta) := X(t+\theta)$ y $L : C([-\tau, 0], \mathbb{C}^n) \to \mathbb{C}^n$ es lineal y continua, es decir, existe una constante c tal que

$$\|L(\phi)\| \leq c\|\phi\|_\infty$$

para toda ϕ, donde $\|\cdot\|$ denota cualquier norma de $\mathbb{C}^n$. En el caso de retardo discreto, $X'(t) = AX(t) + BX(t - \tau)$ se tiene $L(\phi) = A\phi(0) + B\phi(-\tau)$, donde A y B son matrices fijas y vale

$$\|L(\phi)\| \leq |\phi(0)|\|A\| + |\phi(-\tau)|\|B\| \leq c\|\phi\|_\infty,$$

con $c = \|A\| + \|B\|$.

Cabe observar que en esta situación general ya no se puede aplicar el método de pasos para resolver la ecuación con una condición inicial; más adelante veremos que, de todas formas, dicha solución existe y está definida para todo $t > 0$. Por ahora nos ocuparemos únicamente de obtener la ecuación característica y extender a esta situación general los resultados que obtuvimos para el caso de retardo discreto. A tal fin, buscaremos soluciones particulares de la forma

$$X(t) = e^{\lambda t}V \qquad \lambda \in \mathbb{C},\, V \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}.$$

Por comodidad, definimos la función $\exp_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por $\exp_\lambda(\theta) := e^{\lambda\theta}$, de modo que $X_t = e^{\lambda t}\exp_\lambda V$, pues $X_t(\theta) = X(t+\theta) = e^{\lambda t}\exp_\lambda(\theta)V$. Luego, X es solución si y solo si

$$\lambda e^{\lambda t}V = L(X_t) = e^{\lambda t}L(\exp_\lambda V)$$

para todo t; equivalentemente:

$$L(\exp_\lambda V) = \lambda V.$$

Esta ecuación puede pensarse como un problema de autovalores y autovectores, ya que si escribimos $V = \sum_{j=1}^n v_j e_j$, con $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{C}^n$, resulta

$$L(\exp_\lambda V) = \sum_{j=1}^n v_j L(\exp_\lambda e_j) = L_\lambda V$$

donde L_λ es la matriz cuyas columnas son $L(\exp_\lambda e_j)$ y (sin previo aviso) escribimos los vectores como columnas. En otras palabras, $X = e^{\lambda t}V$ es solución si y solo si V es un autovector de autovalor λ de la matriz L_λ. Claro que, a diferencia de los problemas clásicos de autovalores y autovectores, la matriz L_λ también depende de λ; de esta manera, la ecuación característica en general no es polinomial. Más precisamente, podremos asegurar que existe algún autovector $V \neq 0$ si y solo si $h(\lambda) = 0$, donde

$$h(\lambda) := \det(\lambda I - L_\lambda).$$

Por ejemplo, para el sistema con un retardo discreto tenemos

$$L(\exp_\lambda e_j) = \exp_\lambda(0)Ae_j + \exp_\lambda(-\tau)Be_j = Col_j(A) + e^{-\tau\lambda}Col_j(B),$$

es decir, $L_\lambda = A + e^{-\tau\lambda}B$ y

$$h(\lambda) = \det(\lambda I - A - e^{-\tau\lambda}B),$$

que coincide con lo obtenido anteriormente. En general, se puede probar que h cumple propiedades análogas a las que vimos en el caso escalar con retardo discreto. Para empezar, resulta una función entera:

Proposición 6.1 $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *es analítica.*

Demostración:

Como la función 'det' consiste únicamente de sumas y productos, y λI es trivialmente analítica, basta ver que cada coeficiente de la matriz L_λ es una función analítica. La columna j-ésima $C_j(\lambda)$ de esta matriz es $L(\exp_\lambda e_j)$, de modo que podemos calcular

$$\frac{C_j(\lambda+\kappa)-C_j(\lambda)}{\kappa} = L\left(\frac{\exp_{\lambda+\kappa}-\exp_\lambda}{\kappa}e_j\right).$$

Pero

$$\frac{\exp_{\lambda+\kappa}(\theta)-\exp_\lambda(\theta)}{\kappa} = e^{\lambda\theta}\frac{e^{\kappa\theta}-1}{\kappa} \to \theta e^{\lambda\theta}$$

uniformemente en $\theta \in [-\tau, 0]$ para $\kappa \to 0$. Esto implica que

$$\frac{C_j(\lambda+\kappa)-C_j(\lambda)}{\kappa} \to L(\varphi_\lambda e_j),$$

donde $\varphi_\lambda(\theta) := \theta e^{\lambda\theta}$. □

Una consecuencia de la anterior proposición es que, tal como vimos para el caso escalar con retardo discreto, a la derecha de cualquier recta vertical en el plano complejo h tiene a lo sumo un número finito de raíces. En efecto, si λ_n son raíces de h tales que $\mathrm{Re}(\lambda_n) > a$ entonces $|\lambda_n| \to +\infty$ y además, como $\det(\lambda_n I - L_{\lambda_n}) = 0$, la matriz $I - \frac{1}{\lambda_n}L_{\lambda_n}$ no es inversible. Pero

$$\|Col_j(L_{\lambda_n})\| = \|L(\exp_{\lambda_n} e_j)\| \le c\|\exp_{\lambda_n} e_j\|_\infty = c\|\exp_{\lambda_n}\|_\infty$$

y además

$$|\exp_{\lambda_n}(\theta)| = |e^{\lambda_n\theta}| = e^{\mathrm{Re}(\lambda_n)\theta} \le e^{a\theta} \le \max\{1, e^{-a\tau}\}$$

para todo $\theta \in [-\tau, 0]$. Luego L_{λ_n} es acotada y entonces $I - \frac{1}{\lambda_n}L_{\lambda_n}$ es inversible para n grande, lo que es absurdo.

Otro resultado que se extiende al caso general es el de estabilidad que probamos en la sección 5: si todos los autovalores de la ecuación característica tienen parte real negativa entonces el origen es asintóticamente estable (para detalles, ver [4]). Además, si $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$ para algún λ entonces $X = 0$ es inestable. Esto último se ve directo igual que antes, pues en tal caso existe una solución no trivial de la forma $X(t) = e^{\lambda t}V$. También se puede generalizar la idea de linealización: para el sistema $X'(t) = F(X_t)$ con $F : C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ tal que $F(X^*) = 0$ para cierta 'función constante' X^*, supongamos que F es diferenciable en X^*, es decir

$$F(X^* + \phi) = L(\phi) + R(X^* + \phi)$$

con $L : C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ lineal continuo y

$$\lim_{\|\phi\|_\infty \to 0} \frac{R(X^* + \phi)}{\|\phi\|_\infty} = 0.$$

Entonces, empleando las raíces características del sistema lineal $X'(t) = L(X_t)$, se prueba un resultado análogo al Teorema 5.2.

Para concluir esta sección, veamos un resultado concerniente a la *estabilidad absoluta*, es decir, independiente del retardo. Para el caso escalar $u'(t) = au(t) + bu'(t-\tau)$ ya vimos que esto ocurre exactamente en la región $\{a + b < 0, a \leq b\}$. En el caso general, es difícil obtener resultados tan precisos pero, sin embargo, en un gran número de situaciones es posible determinar condiciones suficientes. Concretamente, supongamos que la ecuación característica es de la forma

$$p(\lambda) + q(\lambda)e^{-\tau\lambda} = 0, \tag{16}$$

con p, q polinomios con coeficientes reales tales que $gr(p) > gr(q)$. Por ejemplo, esto ocurre en un sistema $X'(t) = AX(t) + BX(t-\tau)$ con $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, bajo condiciones apropiadas para la matriz B (en el caso $n = 2$, basta pedir $det(B) = 0$, ver ejercicio 4). Otro ejemplo frecuente es en la ecuación de orden n con coeficientes reales y un retardo discreto

$$x^{(n)}(t) + \sum_{j=1}^{n-1} a_j x^{(j)}(t) + b_j x^{(j)}(t-\tau) = 0,$$

cuya ecuación característica es de la forma anterior, con $p(\lambda) = \lambda^n + \sum_{j=1}^{n-1} a_j\lambda^j$ y $q(\lambda) = \sum_{j=1}^{n-1} b_j\lambda^j$. Esto se puede verificar de manera directa proponiendo soluciones $x(t) := e^{\lambda t}$ o (si uno está deseoso de hacer más cuentas) llevando la ecuación a un sistema por medio de la clásica transformación

$$x_1 := x \qquad x_2 = x' \qquad \ldots \qquad x_n := x^{(n-1)}$$

a partir de la que se obtienen las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & \ldots & \ldots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ -b_0 & -b_1 & \ldots & \ldots & \ldots & -b_{n-1} \end{pmatrix}$$

y se ve fácilmente que $\det(\lambda I - A - e^{-\lambda\tau}B) = p(\lambda) + q(\lambda)e^{-\lambda\tau}$ con p y q como antes.

Proposición 6.2 *Sean p, q polinomios tales que*

1. *p no se anula en $\{\mathrm{Re}(z) \geq 0\}$.*

2. *$|q(iy)| < |p(iy)|$ para $y \in \mathbb{R}$.*

3. *$gr(p) > gr(q)$.*

Entonces, para todo $\tau \geq 0$, todas las soluciones de la ecuación (16) tienen parte real negativa.

Demostración:
Consideremos el semicírculo $D_R := \{z : |z| \leq R, \mathrm{Re}(z) \geq 0\}$. Para R grande, se cumple que $\frac{|q(z)|}{|p(z)|} < 1$ si $|z| = R$ y, por la condición 2 se deduce que $\frac{|q(z)|}{|p(z)|} < 1$ en ∂D_R. Como p no se anula sobre D_R, el principio del módulo máximo asegura que la anterior desigualdad vale en D_R y, en consecuencia, para todo z con parte real no negativa. Si λ es solución de (16) tal que $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$, entonces $q(\lambda) \neq 0$ (pues $p(\lambda) \neq 0$) y

$$1 < \frac{|p(\lambda)|}{|q(\lambda)|} = |e^{-\tau\lambda}| = e^{-\tau \mathrm{Re}(\lambda)} \leq 1,$$

lo que es absurdo.

□

Para la ecuación de orden n, observemos que si el retardo solamente aparece en el término de orden 0, entonces q es constante. En este caso, el resultado anterior se puede mejorar cuando todas las raíces de p (eventualmente múltiples) están en $\mathbb{R}_{<0}$:

Proposición 6.3 *Sean p polinomio mónico y $q \equiv c$. Supongamos*

1. *Todas las raíces de p son números reales negativos.*

2. *$|p(0)| > |c|$.*

Entonces, para todo $\tau \geq 0$, todas las soluciones de la ecuación (16) tienen parte real negativa.

Demostración:
Escribiendo $p(\lambda) = \prod_{j=1}^{n}(\lambda - \lambda_j)$ se deduce, para cualquier λ solución de (16):

$$\prod_{j=1}^{n} |\lambda - \lambda_j| = |c|e^{-\mathrm{Re}(\lambda)\tau}$$

Como $\lambda_j < 0$, para $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$ vale $|\lambda - \lambda_j| \geq |\lambda_j|$ y entonces

$$|p(0)| = \prod_{j=1}^{n} |\lambda_j| \leq |c|,$$

lo que es absurdo. □

A fin de entender este último resultado, veamos qué ocurre en la ecuación escalar de primer orden para la cual $h(\lambda) = \lambda - a - be^{\lambda\tau}$, es decir: $p(\lambda) = \lambda - a$ y $q \equiv b$. El resultado previo dice, entonces, que si $a < 0$ y $a + |b| < 0$ entonces el origen es absolutamente estable. Dejando de lado la semirrecta $a = b < 0$, este resultado coincide exactamente con lo obtenido en la sección 4.

6.1 Ejercicios

1. Consideremos la ecuación lineal

$$u'(t) = a(\tau)u(t) + b(\tau)u(t - \tau) \qquad t > 0$$

con $a(\tau), b(\tau) \in \mathbb{R}$. Probar:

   (a) Si $a(\tau) + b(\tau) > 0$, entonces el equilibrio nulo es inestable.

   (b) Si $a(\tau) + b(\tau) < 0$, y $b(\tau) \geq a(\tau)$ entonces el equilibrio nulo es asintóticamente estable.

   ¿Qué ocurre cuando $a(\tau) + b(\tau) < 0$, y $b(\tau) < a(\tau)$?

2. Para la ecuación de Nicholson

$$u'(t) = -du(t) + bu(t - \tau)e^{-u(t-\tau)}$$

con $b, d > 0$, probar:

   (a) Si $b > d$, entonces existe un equilibrio positivo u^*. Determinar condiciones suficientes para la estabilidad asintótica local de u^*.

   (b) Si $b < d$ entonces 0 es el único equilibrio no negativo, que resulta localmente asintóticamente estable.

   (c) Probar que si $b \leq d$ entonces 0 es un atractor global para las soluciones positivas. Más precisamente, si u es solución con dato inicial $\phi > 0$, entonces $u(t)$ está definida y es positiva para todo $t > 0$, con $u(t) \to 0$ para $t \to +\infty$. *Sugerencia*: verificar primero que u no se puede anular. Luego, usar que si $u'(t) \geq 0$ entonces $u(t) \leq f(u(t-\tau))$, con $f(x) = xe^{-x}$.

3. Deducir una fórmula de variación de parámetros para el sistema lineal

$$X'(t) = AX(t) + \sum_{k=1}^{N} B_k X(t - \tau_k)$$

para $A, B_1, \ldots, B_N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y retardos arbitrarios $\tau_1, \ldots, \tau_N > 0$. Mostrar que la ecuación característica tiene la forma

$$h(\lambda) := P(\lambda, e^{-\tau_1\lambda}, \ldots, e^{-\tau_N\lambda}) = 0,$$

donde P es un polinomio de grado n en $N + 1$ variables.

4. Para $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, probar que

$$h(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{Tr}(A)\lambda + \det(A) + e^{-2\tau\lambda}\det(B) + e^{-\tau\lambda}(d_{AB} + d_{BA} - \mathrm{Tr}(B)\lambda),$$

donde d_{XY} denota el determinante de la matriz formada por la primera columna de X y la segunda columna de Y.

5. Sean $L : C([-\tau, 0], \mathbb{C}^n) \to \mathbb{C}^n$ lineal y continua y $f : [0, +\infty) \to \mathbb{C}^n$ continua. Mostrar que las soluciones de $X'(t) = L(X_t) + f(t)$ con dato inicial $\phi \in C([-\tau, 0], \mathbb{C}^n)$ se pueden escribir en la forma

$$X(t) = X(t, \phi, 0) + X(t, 0, f).$$

6. Encontrar la ecuación característica para el problema con retardo distribuido

$$x'(t) = ax(t) + \int_{t-\tau}^{t} b(t-s)x(s)\, ds.$$

7. Sea $L : C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ lineal continua. Probar que λ es raíz característica si y solo si $\overline{\lambda}$ es raíz característica.

8. Considerar el siguiente modelo para el control de los niveles de testosterona:

$$\begin{aligned} R'(t) &= f(T(t)) - b_1 R(t) \\ L'(t) &= g_1(R(t)) - b_2 L(t) \\ T'(t) &= g_2(L(t-\tau)) - b_3 T(t) \end{aligned}$$

donde todas las constantes son positivas y f es una función positiva y estrictamente decreciente en $[0, +\infty)$. Probar que existe un único punto de equilibrio con coordenadas positivas y estudiar su estabilidad.

9. (a) Sean $p(\lambda) = \lambda^2 + r\lambda + s$ y $q \in \mathbb{R}$. Probar que todas las soluciones de la ecuación $p(\lambda) + qe^{-\tau\lambda} = 0$ tienen parte real negativa para todo $\tau \geq 0$, bajo alguna de las siguientes condiciones:

   i. $\frac{r^2}{2} \geq s > |q|$.

   ii. $\frac{r^2}{2} < s$ y $|q| < \frac{r}{2}\sqrt{4s - r^2}$.

   Sugerencia: empleando el principio del mínimo, probar que existe $y \geq 0$ tal que $|p(iy)| \leq |p(\lambda)|$ para todo λ tal que $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 0$. Calcular explícitamente el valor $|p(iy)|^2$.

   (b) Hallar matrices $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que lo anterior se pueda aplicar al sistema $X'(t) = AX(t) + BX(t-\tau)$.

7 Teoría básica: Existencia y unicidad

En la sección previa estudiamos la ecuación característica de un sistema lineal general del tipo

$$X'(t) = L(X_t),$$

donde $L : C([-\tau, 0], \mathbb{C}^n) \to \mathbb{C}^n$ es lineal y continua y $X_t : [-\tau, 0] \to \mathbb{C}^n$ está dada por $X_t(\theta) = X(t + \theta)$. Esto incluye los sistemas lineales con retardo discreto aunque, como vimos, abarca también casos en los que el método de pasos no es aplicable para resolver el problema de encontrar una solución con una condición inicial ϕ. Cabe preguntarse, entonces, si son válidas las siguientes afirmaciones, intuitivamente 'razonables':

- Existe solución.
- La solución es única.
- La solución está definida en $[-\tau, +\infty)$.

En lo que sigue vamos a extender los resultados usuales para sistemas de ecuaciones ordinarias a situaciones generales, del tipo

$$X'(t) = F(t, X_t). \tag{17}$$

Cuando analizamos la ecuación característica para sistemas lineales, resultó de utilidad pensar directamente en funciones a valores complejos; sin embargo, en lo que sigue podemos estudiar sin pérdida de generalidad el caso real. En consecuencia, supondremos que $F : \mathbb{R} \times C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ cumple aquello que uno suele llamar vagamente 'hipótesis apropiadas', entre las cuales seguramente aparecerá en algún lado el nombre propio 'Lipschitz'. Pero antes, para fijar ideas, consideremos una vez más el caso de retardo discreto

$$X'(t) = f(t, X(t), X(t - \tau))$$

para $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua, con una condición inicial que, como ya vimos, debe ser una función definida en un intervalo de longitud τ. Y, como la idea de encontrar soluciones maximalmente definidas consiste en "pegar" soluciones definidas en intervalos chicos, conviene pensar que dicho intervalo no es necesariamente $[-\tau, 0]$. Claramente, podríamos suponer entonces que ϕ es una función continua definida en cierto intervalo $[t_0 - \tau, t_0]$ y obtener nuestros resultados a partir de allí, aunque resultará más cómodo (y, de paso, más interesante) entender la cuestión a partir de la filosofía de los sistemas dinámicos. A tal fin recordemos que, dado un sistema de ecuaciones ordinarias $X'(t) = f(t, X(t))$ con f continua y localmente Lipschitz, se define el flujo $\Phi(t, t_0, X_0)$ como $X(t)$, donde X es la única solución con condición inicial $X(t_0) = X_0$. En otras palabras, para cada instante t, la función Φ describe la evolución del sistema a partir del estado inicial X_0 dado en el instante inicial t_0; la ecuación diferencial es, ni más ni menos, la ley según la cual evoluciona dicho sistema. En el caso de una ecuación con retardo, los 'estados' ya no son vectores de $\mathbb{R}^n$ sino *funciones*, pues la ley de evolución en cada instante t depende de X_t; por consiguiente, las trayectorias son ahora curvas $\gamma(t) := X_t$ trazadas sobre el espacio de dimensión infinita $C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$. Bajo este punto de vista, la manera apropiada de definir una condición inicial en un instante t_0 consiste simplemente en decir cuál es el estado del sistema en t_0, vale decir:

$$X_{t_0} = \phi \tag{18}$$

para cierta $\phi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$.

Buscamos una solución, es decir, una función X continua definida en cierto intervalo $[t_0 - \tau, t_0 + \delta]$ que cumpla la condición inicial (18) y además satisfaga la ecuación para $t \in [t_0, t_0 + \delta]$. Como dice el tango, siempre se vuelve al primer amor: en este caso, el método de pasos, que garantiza la existencia de una única solución del problema

$$X'(t) = f(t, X(t), \phi(t - t_0 - \tau)), \qquad X(t_0) = \phi(0)$$

si se pide que f sea localmente Lipschitz respecto de X (observemos, de paso, que no hace falta pedir que la dependencia respecto de $X(t-\tau)$ sea Lipschitz). En principio, el valor $\delta \in (0, \tau]$ puede ser muy pequeño, pero si la solución está definida hasta $\delta = \tau$ entonces se repite el procedimiento para extender la solución un poco más a la derecha, y así sucesivamente. Además, si X está definida en cierto $[t_0 - \tau, t_0 + \delta)$ y no se puede extender, necesariamente debe 'explotar', es decir, $\|X(t)\| \to \infty$ para $t \to (t_0 + \delta)^-$. Para ver esto, alcanza con aplicar los resultados que ya conocemos: basta tomar $k = \left[\frac{\delta}{\tau}\right]$ y observar que X es la (única) solución del sistema de ecuaciones *ordinarias*

$$Y'(t) = f(t, Y(t), X(t - \tau)), \qquad Y(t_0 + k\tau) = X(t_0 + k\tau)$$

y no se puede extender hacia la derecha.

En el caso general, diremos que la función $F : \mathbb{R} \times C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ es localmente Lipschitz respecto de X si para todo $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ y todo $M > 0$ existe una constante L tal que

$$\|F(t, \phi) - F(t, \psi)\| \leq L\|\phi - \psi\|_\infty$$

para todo $t \in I$ y todas las funciones $\phi, \psi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ que verifican $\|\phi\|_\infty, \|\psi\|_\infty \leq M$. Si bien esto no implica continuidad respecto de t, por simplicidad siempre supondremos que F es continua. Por ejemplo, si F es lineal en su segunda variable entonces la constante L depende solo de I, pues

$$\|F(t, \phi) - F(t, \psi)\| = \|F(t, \phi - \psi)\| \leq C(t)\|\phi - \psi\|_\infty,$$

donde $C(t) := \sup_{\|\phi\|_\infty = 1} \|F(t, \phi)\|$. Es fácil verificar que existe una constante L tal que $C(t) \leq L$ para todo $t \in I$: en efecto, en caso contrario existen t_n y ϕ_n con $\|\phi_n\|_\infty = 1$ tales que $\|F(t_n, \phi_n)\| \geq n$. Podemos suponer que $t_n \to t$ para algún t, luego tomando $\psi_n := \frac{\phi_n}{\sqrt{n}}$ se tiene que $F(t_n, \psi_n) \to F(t, 0)$ pero $\|F(t_n, \psi_n)\| \geq \sqrt{n}$, lo que es absurdo. En situaciones así, en las que L depende solamente del intervalo I, diremos que F es *globalmente* Lipschitz en $I \times C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$.

Para cualquier ϕ dada, buscar una solución del problema con la condición inicial $X_{t_0} = \phi$ equivale a encontrar una función X en el espacio de Banach

$$E := C([t_0 - \tau, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$$

tal que $X_{t_0} = \phi$ y

$$X(t) = \phi(0) + \int_{t_0}^{t} F(s, X_s)\, ds \qquad \text{para } t > t_0.$$

Aunque parezca una obviedad, es oportuno aclarar que la integral está bien definida, pues la función $s \mapsto F(s, X_s)$ es continua y, en consecuencia, integrable. Para verificar esto, basta observar que se trata de la composición de F con la trayectoria $s \mapsto (s, X_s)$, que resulta continua debido a la continuidad uniforme de X.[9]

Teorema 7.1 *Sea F como antes, continua y localmente Lipschitz respecto de X. Dados $t_0 \in \mathbb{R}$ y $R > 0$, existe $\delta > 0$ que depende solamente de t_0 y R tal que para toda $\phi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ con $\|\phi\|_\infty \leq R$ existe una única solución $X = X(t, \phi)$ del problema definida en $[t_0 - \tau, t_0 + \delta]$.*

Demostración:
Buscamos un punto fijo del operador $\mathcal{T} : E \to E$ definido por

$$\mathcal{T}X(t) := \begin{cases} \phi(t - t_0) & t \leq t_0 \\ \phi(0) + \int_{t_0}^{t} F(s, X_s)\, ds & t > t_0. \end{cases}$$

Para ello veremos que, eligiendo δ de manera apropiada, existe alguna bola cerrada B del espacio E tal que $\mathcal{T}(B) \subset B$ y además $\mathcal{T} : B \to B$ es una contracción. Cabe destacar que, al igual que en la teoría de ecuaciones ordinarias, más adelante las soluciones se extienden 'lo más que se pueda' hacia la derecha, de modo que, en esta demostración, no nos interesa encontrar un valor óptimo para δ. Por eso podemos, por ejemplo, 'planificar' de antemano que $\delta \leq \tau$ y que $B := \overline{B_{2R}(0)}$, es decir, la bola cerrada de radio $2R$ centrada en 0. Observemos que si $\|X\|_\infty \leq 2R$ entonces para $t > t_0$ vale

$$\|\mathcal{T}X(t)\| \leq \|\phi(0)\| + \int_{t_0}^{t} \|F(s, X_s)\|\, ds \leq R + \delta C,$$

donde

$$C \geq \sup_{t_0 \leq t \leq t_0 + \tau, \|\psi\| \leq 2R} \|F(t, \psi)\|.$$

Aparece aquí un detalle importante, que marca una nueva diferencia con el caso sin retardo: ¿cómo sabemos, en la última desigualdad, que el supremo existe? El hecho de que F sea continua no es suficiente pues B, por más cerrado y acotado que sea, no es un conjunto compacto. Sin embargo, podemos tomar la constante de Lipschitz L correspondiente al intervalo $I = [t_0, t_0 + \tau]$ y el valor $M = 2R$ para obtener, para cualquier $\psi \in B$ y $t \in I$:

$$\|F(t, \psi)\| \leq \|F(t, \psi) - F(t, 0)\| + \|F(t, 0)\| \leq L\|\psi\|_\infty + \|F(t, 0)\|.$$

[9] En efecto, dado $\varepsilon > 0$ se puede elegir $\eta > 0$ tal que

$$\|X_s - X_{\tilde{s}}\|_\infty = \sup_{\theta \in [-\tau, 0]} \|X(s + \theta) - X(\tilde{s} + \theta)\| < \varepsilon$$

si $|s - \tilde{s}| < \eta$. Como dijimos, se trata de una obviedad, aunque deja una ligera sensación de inquietud ante la idea de extender estos resultados para el caso de retardos infinitos.

De esta forma se acaban las sospechas pues, felizmente, I sigue siendo compacto y luego

$$\|F(t,\psi)\| \leq 2RL + \sup_{t\in I} \|F(t,0)\| := C.$$

Volviendo a nuestro asunto, tenemos entonces que $\|\mathcal{T}X(t)\| \leq R+\delta C$ para $t > t_0$ y además $\mathcal{T}X_{t_0} = \phi$, de modo que $\|\mathcal{T}X(t)\| \leq R$ para $t \leq t_0$. En consecuencia, si elegimos $\delta \leq \frac{R}{C}$ se verifica que $\|\mathcal{T}X\|_\infty \leq 2R$, es decir, $\mathcal{T}(B) \subset B$.

Por otra parte, para $X, Y \in B$ se tiene que $\mathcal{T}X(t) = \mathcal{T}Y(t)$ si $t \leq t_0$, mientras que para $t > t_0$ vale

$$\|\mathcal{T}X(t) - \mathcal{T}Y(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \|F(s,X_s) - F(s,Y_s)\|\, ds \leq \int_{t_0}^{t} L\|X_s - Y_s\|_\infty\, ds$$

y entonces

$$\|\mathcal{T}X - \mathcal{T}Y\|_\infty \leq \delta L \|X - Y\|_\infty.$$

Aquí el lector experimentado dirá que alcanza con achicar δ de manera que $\delta L < 1$; de esta forma, $\mathcal{T}$ resulta una contracción y tiene un único punto fijo en B. Esto es cierto, con la única observación de que ya podemos dejar al valor δ tranquilo sin que hagan falta más (por así decirlo) recortes: con la elección anterior $\delta = \min\{\tau, \frac{R}{C}\}$ es suficiente, ya que $C \geq 2RL$ y entonces $\delta L \leq \frac{1}{2}$.

Resta ver la unicidad, pues (siempre es bueno aclararlo) el teorema de punto fijo de Banach solo garantiza que la solución es única en el conjunto B, pero en principio podría haber soluciones con norma ‘grande’. Inspirados en el caso sin retardo, podemos intentar usar una desigualdad del tipo Gronwall, aunque debemos tener algo de cuidado. En efecto, si Y es otra solución, es claro que coincide con X para $t \leq t_0$, mientras que para $t > t_0$ resulta, como antes

$$\|X(t) - Y(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \|F(s,X_s) - F(s,Y_s)\|\, ds.$$

Claro que el anterior valor L ya no sirve, porque era la constante de Lipschitz para el intervalo I y el valor $M = 2R$, pero podemos tomar una nueva constante de Lipschitz $\tilde{L}$ correspondiente al mismo I y un nuevo valor M, definido como el máximo entre $\|Y\|_\infty$ y $2R$. De este modo,

$$\|X(t) - Y(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \tilde{L}\|X_s - Y_s\|_\infty\, ds.$$

La desigualdad de Gronwall no se aplica directamente pues la función que aparece en el integrando no es la misma que aparece en el término de la izquierda; sin embargo, basta observar que

$$\|X_s - Y_s\|_\infty = \sup_{-\tau\leq\theta\leq 0} \|X(s+\theta) - Y(s+\theta)\|$$

y, para $\theta \in [-\tau, 0]$,

$$\|X(t+\theta) - Y(t+\theta)\| \leq \int_{t_0}^{t} \tilde{L}\|X_s - Y_s\|_\infty\, ds.$$

En consecuencia, si

$$u(t) := \|X_t - Y_t\|_\infty = \sup_{-\tau \le \theta \le 0} \|X(t+\theta) - Y(t+\theta)\|$$

resulta

$$u(t) \le \int_{t_0}^{t} \tilde{L} u(s)\, ds$$

y (Gronwall, al fin) se deduce que $u \equiv 0$.

□

Generalizando la última desigualdad de la demostración anterior se deduce el siguiente resultado de continuidad respecto de la condición inicial:

Corolario 7.1 *Sea F continua y localmente Lipschitz respecto de X y consideremos, para $t_0 \in \mathbb{R}$ y $R > 0$ fijos, los valores L y δ del teorema anterior. Dadas $\phi, \psi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ con $\|\phi\|_\infty, \|\psi\|_\infty \le R$, se cumple, para todo $t \in [t_0, t_0 + \delta]$:*

$$\sup_{t-\tau \le s \le t} \|X(s, \phi) - X(s, \psi)\| \le \|\phi - \psi\|_\infty e^{L(t-t_0)}.$$

Demostración:

De acuerdo con el teorema previo, tanto $X(\cdot, \phi)$ como $X(\cdot, \psi)$ pertenecen a la bola B. Como antes, para $t \in [t_0, t_0 + \delta]$ definimos

$$u(t) := \sup_{-\tau \le \theta \le 0} \|X(t+\theta, \phi) - X(t+\theta, \psi)\|$$

y resulta

$$u(t) \le \|\phi - \psi\|_\infty + \int_{t_0}^{t} L u(s)\, ds,$$

de donde

$$u(t) \le \|\phi - \psi\|_\infty e^{L(t-t_0)}.$$

□

Tal como ocurre en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias, los resultados anteriores permiten deducir que para toda ϕ existe un intervalo maximal I_ϕ, claramente abierto, sobre el cual $X(\cdot, \phi)$ está definida y no puede extenderse hacia la derecha. Sin embargo, a diferencia del caso sin retardo, si este intervalo es acotado eso no significa que necesariamente $\|X(t)\| \to \infty$ cuando t se acerca al extremo superior de I_ϕ. Pero sí vale, como es de esperar, que el 'estado' X_t tiende a infinito dentro del espacio de funciones:

Teorema 7.2 *Sea F continua y localmente Lipschitz respecto de X. Supongamos que X es una solución definida en $[t_0 - \tau, A)$ que no se puede extender hasta $t = A$, entonces $\|X_t\|_\infty \to \infty$ para $t \to A$.*

Demostración:

Supongamos que existen $t_n \nearrow A$ y $R > 0$ tales que $\|X_{t_n}\|_\infty \le R$. Repasando la demostración del teorema de existencia, vemos que la elección del valor δ

se puede hacer de manera independiente de t_n, fijando, por ejemplo, para el intervalo $I = [t_1, A+\tau]$ y $M = 2R$ la correspondiente constante L de Lipschitz y luego el valor C como en la demostración del teorema de existencia. Luego, podemos definir una función Y como la única solución del problema que satisface la condición inicial $Y_{t_n} = X_{t_n}$. Para n suficientemente grande, Y está definida por lo menos hasta el valor $t_n + \delta > A$; además, por unicidad resulta que $Y = X$ para $t \geq t_n$, lo que es absurdo.

□

A modo de ejemplo básico de aplicación del resultado previo se tiene que -como es de esperar-, las soluciones de ecuaciones lineales están globalmente definidas, vale decir, se extienden al intervalo $[-\tau, +\infty)$. Esto se puede comprobar en forma directa, o también como consecuencia del siguiente resultado más general:

Teorema 7.3 *Sea F continua y localmente Lipschitz respecto de X y supongamos que F crece a lo sumo linealmente en X, es decir, existen $a, b \geq 0$ localmente integrables tales que*

$$\|F(t,\phi)\| \leq a(t)\|\phi\|_\infty + b(t)$$

para todo t y toda ϕ. Entonces $X(\cdot,\phi)$ está globalmente definida para toda $\phi \in C([-\tau,0],\mathbb{R}^n)$.

Demostración:

Escribiendo

$$X(t) = \phi(0) + \int_{t_0}^{t} F(s, X_s)\, ds$$

para $t > t_0$ resulta

$$\|X(t)\| \leq \|\phi\|_\infty + \int_{t_0}^{t} b(s)\, ds + \int_{t_0}^{t} a(s)\|X_s\|_\infty\, ds.$$

Como antes, se deduce que

$$\|X_t\|_\infty \leq \|\phi\|_\infty + \int_{t_0}^{t} b(s)\, ds + \int_{t_0}^{t} a(s)\|X_s\|_\infty\, ds$$

y por Gronwall

$$\|X_t\|_\infty \leq \left(\|\phi\|_\infty + \int_{t_0}^{t} b(s)\, ds\right) e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}.$$

En consecuencia, X_t no puede 'explotar' en ningún intervalo acotado. □

Un caso particular del resultado previo que incluye, según mencionamos, los problemas lineales, es aquel en el cual F es globalmente Lipschitz sobre cada intervalo acotado (es decir, la constante L depende únicamente de I). Es interesante, en este caso, verificar que la demostración se puede hacer de manera directa, comprobando que el operador $\mathcal{T}$ satisface, para cierto N suficientemente grande, que $\mathcal{T}^N = \mathcal{T} \circ \mathcal{T} \circ \ldots \circ \mathcal{T}$ (N veces) es una contracción y tiene, en consecuencia, un único punto fijo (comparar con el ejercicio 6 del Apéndice).

A modo de observación, cabe destacar que, en el caso de uno o más retardos discretos, el método de pasos da un resultado más preciso que el teorema previo, pues la restricción en el crecimiento debe imponerse solamente a la variable X. Más precisamente, si tenemos la ecuación

$$X'(t) = f(t, X(t), X(t-\tau_1), \ldots, X(t-\tau_M))$$

para que haya existencia y unicidad basta pedir, como vimos, que f sea continua y localmente Lipschitz en X (es decir, en su segunda variable). Además, si f tiene crecimiento a lo sumo lineal en X, entonces la solución está globalmente definida. Esto queda como ejercicio para el lector (ejercicio 2) y se cumple, por ejemplo, en sistemas de la forma

$$X'(t) = A(t)X(t) + G(t, X(t-\tau_1), \ldots, X(t-\tau_M))$$

donde $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ y $G : \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^M \to \mathbb{R}^n$ son continuas.

Para concluir esta sección, vamos a saldar una antigua deuda y dar las definiciones de estabilidad que hasta el momento empleamos de manera imprecisa. Consideremos el sistema general

$$X'(t) = F(t, X_t)$$

y supongamos que e es un punto de equilibrio, es decir, una solución constante, lo que equivale a decir que $F(t, e) = 0$ para todo t. Como es habitual, ignoraremos el isomorfismo entre $\mathbb{R}^n$ y las funciones constantes de $C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$, de modo que supondremos directamente $e \in \mathbb{R}^n$.

El equilibrio e se dice estable si para cualquier t_0 y cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|\phi\|_\infty < \delta$ entonces $\|X(t)\| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_0$, donde X es una (única, si se pide la condición de Lipschitz) solución tal que $X_{t_0} = \phi$. Si además existe $r > 0$ tal que $X(t) \to e$ para $t \to +\infty$ cuando $\|\phi\| < r$, entonces el equilibrio se dice (localmente) asintóticamente estable.[10] Finalmente, e se dice inestable cuando no es estable (esta definición es la más fácil de todas). Cuando el sistema es autónomo (es decir, F no depende de t), en la definición anterior basta considerar siempre $t_0 = 0$. Más en general, se puede definir la estabilidad de una solución $X(t)$ cualquiera, tarea que queda como ejercicio para el lector.

7.1 Ejercicios

1. Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua y localmente Lipschitz en las dos últimas variables. Escribir el sistema $X'(t) = f(t, X(t), X(t-\tau))$ en la forma $X'(t) = F(t, X_t)$ y probar que F es continua y localmente Lipschitz en X.

[10] El 'además' puede ser un poco desconcertante, pero cabe observar que el comportamiento asintótico no implica, por sí solo, la estabilidad.

2. Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times (\mathbb{R}^n)^M \to \mathbb{R}^n$ continua y localmente Lipschitz en la segunda variable. Entonces para toda ϕ el problema de valores iniciales

$$X'(t) = f(t, X(t), X(t - \tau_1), \ldots, X(t - \tau_M)), \qquad X_{t_0} = \phi$$

tiene solución única definida en cierto intervalo maximal $[t_0, A)$. Además, si f tiene crecimiento a lo sumo lineal respecto de la segunda variable, es decir,

$$\|f(t, X, Y_1, \ldots, Y_M)\| \leq a(t, Y_1, \ldots, Y_M)\|X\| + b(t, Y_1, \ldots, Y_M)$$

para ciertas funciones a y b localmente acotadas, entonces $A = +\infty$.

3. Sea $F : \mathbb{R} \times C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ continua y de clase C^1 respecto de X. ¿Vale siempre que F es localmente Lipschitz en X?

4. Probar el teorema de existencia y unicidad por medio de la iteración de Picard

$$X_0(t) := \phi(0) \text{ para } t_0 \leq t \leq t_0 + \delta, \qquad (X_0)_{t_0} = \phi,$$

y

$$X_{n+1}(t) := \phi(0) + \int_{t_0}^{t} F(s, (X_n)_s)\, ds \text{ para } t_0 \leq t \leq t_0 + \delta, \quad (X_{n+1})_{t_0} = \phi$$

5. Considerar el sistema

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) - x(t - \tau) \\ y'(t) = y(t) \end{cases}$$

   (a) Probar que para $\tau = 0$ las soluciones con condiciones iniciales no negativa permanecen no negativas.

   (b) ¿Sigue valiendo lo anterior para $\tau > 0$?

6. Sea $C_n^+ \subset \mathbb{R}^n$ el cono positivo cerrado, es decir,

$$C_n^+ := \{x \in \mathbb{R}^n : x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n\}$$

y sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua y de clase C^1 en la segunda variable. Supongamos que para todo j vale la siguiente condición:

$$x_j = 0 \Rightarrow f_j(t, x, y) = 0.$$

Probar que para toda condición inicial ϕ tal que $\phi(t) \in C_n^+$ para todo t, la solución del problema

$$X'(t) = f(t, X(t), X(t - \tau)), \qquad X_{t_0} = \phi$$

satisface $X(t) \in C_n^+$ para todo $t \geq t_0$ para el que $X(t)$ está definida.

7. Sea $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{>0}$ continua y decreciente y sea $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que $\lim_{T\to\infty} \int_0^T a(s)\, ds = +\infty$.

   Para el problema $x'(t) = -a(t)x(t) + f(x(t-\tau))$, probar:

   (a) Las soluciones con condición inicial $\phi : [t_0 - \tau, 0] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ están globalmente definidas y son estrictamente positivas para $t > 0$.

   (b) Si x e y son soluciones tales que $x(t) \geq y(t) \geq 0$ para todo $t \geq t_0$ entonces $\lim_{t\to+\infty} x(t) - y(t) = 0$. *Sugerencia*: si $z(t) := x(t) - y(t)$ entonces $z'(t) + a(t)z(t) \leq 0$ para $t \geq t_0 + \tau$. En consecuencia, $v(t) := e^{A(t)}z(t)$, donde A es una primitiva de a, es decreciente.

   (c) Si el problema admite alguna solución T-periódica, entonces a es T-periódica.

   (d) Dos soluciones positivas T-periódicas se cruzan al menos dos veces en cada período.

   (e) Supongamos que $a(t) \geq 0$ para todo t. Si x e y son dos soluciones positivas, entonces existe t_0 tal que $|x(t) - y(t)| \leq \tau g(0)$ para todo $t \geq t_0$. *Sugerencia*: Si t_0 y t_1 son ceros consecutivos de $z := x - y$ tales que $t_1 > t_0 + \tau$ entonces

   $$\max_{t_0 \leq t \leq t_1} |z(t)| = \max_{t_0 \leq t \leq t_0+\tau} |z(t)|.$$

   Por otro lado, si $z > 0$ en $(t_0, t_0+\tau)$ entonces $z' + az < g(0)$. Deducir que

   $$z(t) \leq g(0) \int_{t_0}^{t} e^{-\int_s^t a(r)\, dr}\, ds \leq (t - t_0)g(0).$$

8. Para la ecuación de Nicholson, probar:

   (a) Las soluciones con condición inicial positiva están globalmente definidas y son positivas.

   (b) Si x es solución, entonces existe t_0 tal que $x(t) \leq \frac{b}{de}$ para todo $t \geq t_0$. ¿Contradice esto el hecho de que si $b > d$ entonces $x^* = \ln \frac{b}{d}$ es un punto de equilibrio?

   (c) Si $b > de$, deducir del ejercicio previo que si x es una solución tal que $x(t) \geq 1$ para $t \gg 0$ entonces x oscila alrededor del equilibrio $x^* = \ln \frac{b}{d}$ o bien $x(t) \to x^*$ para $t \to +\infty$.

9. Enunciar y probar un teorema de existencia y unicidad para una ecuación de orden n.

8 Teorema de Schauder

En la sección previa vimos la forma de extender, de manera más o menos esperable, los resultados clásicos de la teoría de ecuaciones ordinarios al caso con retardo. Pero si hablamos de resultados 'clásicos', también tenemos que mencionar el teorema de Peano, que asegura, para el problema $X'(t) = f(t, X(t))$ con f continua, la existencia de *al menos* una solución con condición inicial $X(t_0) = X_0$ definida en algún entorno de t_0. En otras palabras, al no pedir la condición de Lipschitz se pierde la unicidad, pero no la existencia.[11]

La demostración habitual del teorema de Peano se sigue del teorema de aproximación de Weierstrass y -por supuesto- del hecho de que ya sabemos que el teorema de existencia y unicidad vale para funciones localmente Lipschitz. En efecto, alcanza con fijar un entorno compacto K de (t_0, X_0) y una sucesión de funciones suaves f_n (por ejemplo, polinomios) que converge uniformemente sobre K a la función f. Extendiendo las funciones f_n de manera que estén acotadas en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, podemos suponer que la única solución X_n del problema aproximado $X'(t) = f_n(t, X(t))$ con condición inicial $X(t_0) = X_0$ está definida en un entorno $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ fijo y su gráfico, para dicho entorno, está contenido en K. Como además la sucesión $\{X_n'\}$ está uniformemente acotada, se deduce del teorema de Arzelá-Ascoli que $\{X_n\}$ tiene una subsucesión que converge uniformemente a cierta función X, que resulta ser una solución del problema.

Sin embargo, existe otra demostración más directa, que además es más fácil de adaptar para el problema con retardo. Vimos, en efecto, que la cuestión de la existencia se reduce a encontrar un punto fijo de un cierto operador $\mathcal{T}$, para el cual obtuvimos una bola cerrada invariante B y, gracias a la condición de Lipschitz, logramos aplicar el teorema de punto fijo de Banach. La novedad es que bajo ciertas condiciones (las famosas 'condiciones apropiadas') se puede asegurar que $\mathcal{T}$ tiene un punto fijo, sin necesidad de que sea una contracción. Antes de continuar, conviene repasar un poco la construcción que vimos unas páginas atrás, para el problema

$$X'(t) = F(t, X_t), \qquad X_{t_0} = \phi.$$

Asumiendo que $\|\phi\|_\infty \leq R$, la idea consistió en tomar simplemente $B := \overline{B_{2R}(0)}$, dentro del espacio de Banach $E := C([t_0 - \tau, t_0 + \delta], \mathbb{R}^n)$. El operador $\mathcal{T}$ se define por $(\mathcal{T}X)_{t_0} = \phi$ y

$$\mathcal{T}X(t) = \phi(0) + \int_{t_0}^{t} F(s, X_s)\, ds$$

para $t > t_0$; como vimos, eligiendo δ suficientemente chico se puede garantizar que $\mathcal{T}(B) \subset B$. Pero fue precisamente en esta cuenta donde usamos el hecho de que F es localmente Lipschitz, para asegurar que la norma $\|F(s, X_s)\|$ se mantiene acotada. En general, la continuidad de F no alcanza para asegurar que existe una cota válida para toda $X \in B$, de modo que pediremos una condición más fuerte (aunque no tanto como la de Lipschitz). Concretamente, se trata de una condición de *compacidad*.

[11] Podríamos reformular aquí el famoso dicho basado en el mito de Pandora, diciendo que *la existencia es lo último que se pierde.*

Definición 8.1 *Sean X, Y espacios métricos. Una función continua $g : X \to Y$ se dice compacta si para todo $A \subset X$ acotado la clausura de $g(A)$ es un conjunto compacto.*

Observación 8.1 *Si g es lineal, la continuidad se deduce de la condición de compacidad. Sin embargo, esto no vale en general.*

En nuestro caso particular, basta pedir que F mande conjuntos acotados de $\mathbb{R} \times C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ a conjuntos acotados de $\mathbb{R}^n$... cuya clausura es, obviamente, compacta. La buena noticia es que si imponemos esta condición, entonces el operador $\mathcal{T}$ antes definido también resulta compacto: esto se debe (como siempre) al teorema de Arzelá-Ascoli. En efecto, la continuidad es bastante inmediata pues si por ejemplo $X_n \to X$ uniformemente sobre $I = [t_0 - \tau, t_0 + \delta]$, entonces para $t > t_0$ vale

$$\|\mathcal{T}X_n(t) - \mathcal{T}X(t)\| \leq \int_{t_0}^{t} \|F(s, (X_n)_s) - F(s, X_s)\| \, ds.$$

Por la continuidad de F, para cada $s \in [t_0, t_0 + \delta]$ fijo el integrando tiende a 0; además, la sucesión $\{X_n\}$ está acotada; de este modo, como F manda acotados en acotados, existe una constante C tal que $\|F(s, (X_n)_s) - F(s, X_s)\| \leq C$ para todo n y todo $s \in [t_0, t_0 + \delta]$. El resultado se deduce entonces por el teorema de convergencia mayorada. Por otra parte, si $\|X\|_\infty \leq M$ y $t_2 > t_1 \geq t_0$ resulta

$$\|\mathcal{T}X(t_2) - \mathcal{T}X(t_1)\| = \left\| \int_{t_1}^{t_2} F(s, X_s) \, ds \right\| \leq \int_{t_1}^{t_2} \|F(s, X_s)\| \, ds \leq k(t_2 - t_1)$$

para cierta constante k que depende solo de M, lo que permite deducir la equicontinuidad (los casos, $t_0 \geq t_2 > t_1$ y $t_2 > t_0 > t_1$ se deducen fácilmente usando la continuidad uniforme de ϕ).

La misma condición garantiza, eligiendo δ adecuadamente, que $B = \overline{B_{2R}(0)}$ es un conjunto invariante para $\mathcal{T}$. Para ver esto, supongamos que $\|F(t, \psi)\| \leq C$ para todo $t \in [t_0, t_0 + \tau]$ y $\|\psi\|_\infty \leq 2R$, entonces claramente $\|TX(t)\| \leq \delta C$ para todo t. De este modo, si pedimos $\delta = \min\{\tau, \frac{2R}{C}\}$ entonces $\mathcal{T}(B) \subset B$. A continuación veremos un resultado que asegura que, bajo estas condiciones, $\mathcal{T}$ tiene al menos un punto fijo.

Por supuesto, si el espacio fuera de dimensión finita no habría que preocuparse por hacer nada más, pues el teorema de Brouwer garantiza que cualquier función continua de una bola cerrada en sí misma tiene un punto fijo. Esto es trivial en el caso unidimensional (teorema de Bolzano) y todavía bastante sencillo para dimensión 2: por ejemplo, es muy famosa la demostración que emplea teoría de juegos (concretamente, el llamado *teorema del Hex*). Para quien sabe algo de análisis complejo -por ejemplo, el lector que logró llegar hasta aquí- también hay una manera elemental de verlo: si $f : \overline{B_1(0)} \to \overline{B_1(0)}$ es continua y no tiene puntos fijos, entonces basta tomar $g(z) := z - f(z)$ y $\gamma(t) := e^{it}$, con $t \in [0, 2\pi]$. Definiendo

$$h(t, s) := \begin{cases} s\gamma(t) + (1 - s)g(\gamma(t)) & 0 \leq s \leq 1 \\ g((1 + s)\gamma(t)) & -1 \leq s \leq 0 \end{cases}$$

se ve que h es continua y no se anula.[12] En consecuencia, el índice de la curva $h(\cdot, s)$ respecto del 0 es el mismo para todo s, lo que es absurdo, pues $h(t,1) = \gamma(t)$, que tiene índice 1, mientras que $h(\cdot, -1)$ es constante y entonces su índice es 0. Para dimensión mayor, las pruebas habituales no son tan elementales y suelen recurrir a la homología, o bien a resultados de la combinatoria como el Lema de Sperner. De todas formas, existe una demostración que, mirada con cierto cariño, reproduce la idea geométrica de la prueba que acabamos de ver para $n = 2$ (ver por ejemplo [5]).

Como sea, es sabido que el teorema de Brouwer no se extiende de manera automática a dimensión infinita. El contraejemplo más célebre es el de Kakutani, quien mostró que en cualquier espacio de Hilbert separable se puede encontrar una función continua $\mathcal{T} : \overline{B_1(0)} \to \overline{B_1(0)}$ sin puntos fijos. La idea es muy simple, se apoya en el hecho de que si $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una base, entonces el operador lineal S de *shift*, que manda cada e_j a e_{j+1} es una isometría y deja fijo únicamente al origen. Entonces podemos considerar por ejemplo

$$T(x) = \sqrt{1 - \|x\|^2} e_1 + S(x),$$

que está definida y es continua en la bola cerrada unitaria. Además,

$$\|\mathcal{T}(x)\|^2 = 1 - \|x\|^2 + \|S(x)\|^2 = 1,$$

de modo que en realidad $\mathcal{T}(\overline{B_1(0)}) \subset \partial B_1(0)$. Si x es un punto fijo de $\mathcal{T}$, su norma debe ser 1 y luego $x = \mathcal{T}(x) = S(x)$, lo que es absurdo. Otro ejemplo más concreto es el siguiente: sobre la bola unitaria cerrada de $L^2(0,1)$ definimos la función $\mathcal{T}$ dada por

$$\mathcal{T}f(x) := \begin{cases} -f\left(\frac{2x}{1+\|f\|}\right) & x < \frac{1+\|f\|}{2} \\ 1 & x \geq \frac{1+\|f\|}{2}. \end{cases}$$

Es fácil ver que $\mathcal{T}$ es continua; además,

$$\|\mathcal{T}f\|^2 = \int_0^{\frac{1+\|f\|}{2}} f\left(\frac{2x}{1+\|f\|}\right)^2 dx + 1 - \left(\frac{1+\|f\|}{2}\right).$$

Por sustitución, se deduce que

$$\|\mathcal{T}f\|^2 = \left(\frac{1+\|f\|}{2}\right)(\|f\|^2 - 1) + 1 \leq 1.$$

Si f es un punto fijo de $\mathcal{T}$, de la igualdad $\|\mathcal{T}f\|^2 = \|f\|^2$ se ve que $\|f\| = 1$ y entonces $f(x) = -f(x)$ para todo $x < 1$, lo que es absurdo.

No es difícil comprobar que el 'culpable' de que existan estos ejemplos es, por supuesto, el conocido hecho de que en los espacios normados de dimensión

[12] Esto último es trivial si $s \leq 0$ y, para $s \geq 0$ se debe al hecho de que $|f(z)| \leq 1$ para todo z: en efecto, si $h(t,s) = 0$ entonces $\gamma(t) = (1-s)f(\gamma(t))$ y entonces $s = 0$, $f(\gamma(t)) = \gamma(t)$, lo que es absurdo.

infinita la bola unitaria no es compacta. Tal es, en esencia, la conclusión que se desprende del teorema de Schauder, que constituye la extensión más razonable del teorema de Brouwer a espacios generales de Banach. Para ello, conviene primero probar un lema que asegura que los operadores compactos se pueden aproximar, sobre conjuntos acotados, por operadores de de rango finito (es decir, cuya imagen está contenida en un subespacio de dimensión finita). Más precisamente,

Lema 8.2 *Sea C un subconjunto de un espacio normado E y sea $\mathcal{T} : C \to E$ continua tal que $\overline{\mathcal{T}(C)}$ es compacto. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\mathcal{T}_\varepsilon : C \to E$ continua de rango finito tal que $\|\mathcal{T}_\varepsilon(x) - \mathcal{T}(x)\| < \varepsilon$ para todo $x \in C$. Más aún, existen $x_1, \ldots, x_N \in \overline{\mathcal{T}(C)}$ tales que $\mathcal{T}_\varepsilon(C)$ está contenido en la cápsula convexa de $\{x_1, \ldots, x_N\}$.*

Demostración:

Cubriendo $\overline{\mathcal{T}(C)}$ por bolas $B_\varepsilon(x)$ con $x \in \overline{\mathcal{T}(C)}$ podemos elegir x_j tales que la unión de las bolas $B_j := B_\varepsilon(x_j)$ con $j = 1, \ldots, N$ cubren $\mathcal{T}(C)$. Definamos $V_\varepsilon := gen\{x_1, \ldots, x_N\}$ y veamos que la función $\mathcal{T}_\varepsilon : C \to V_\varepsilon$ dada por $\mathcal{T}_\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^N a_j x_j$, con

$$a_j := \frac{dist(\mathcal{T}(x), B_j^c)}{\sum_{k=1}^N dist(\mathcal{T}(x), B_k^c)}$$

cumple lo pedido. En primer lugar, para todo $x \in C$ existe algún j tal que $T(x) \in B_j$ y, en consecuencia, $dist(\mathcal{T}(x), B_j^c) > 0$. Esto dice que $\mathcal{T}_\varepsilon$ está bien definida, y claramente es continua. Además, $\sum_{j=1}^N a_j = 1$, de modo que $\mathcal{T}_\varepsilon(x)$ pertenece a la cápsula convexa de $\{x_1, \ldots, x_N\}$ y, además, podemos escribir

$$\mathcal{T}_\varepsilon(x) - \mathcal{T}(x) = \sum_{j=1}^N a_j(x_j - \mathcal{T}(x)).$$

Observemos finalmente que si $\|x_j - \mathcal{T}(x)\| \geq \varepsilon$ (es decir, si $\mathcal{T}(x) \notin B_j$) entonces $a_j = 0$, de modo que

$$\|\mathcal{T}_\varepsilon(x) - \mathcal{T}(x)\| \leq \sum_{j=1}^N a_j \|x_j - \mathcal{T}(x)\| < \varepsilon.$$

□

El mencionado teorema de Schauder es consecuencia directa del resultado previo y el teorema de Brouwer.

Teorema 8.1 (Schauder) *Sean E un espacio normado, $C \subset E$ convexo, cerrado y acotado y $\mathcal{T} : C \to C$ continuo tal que $\overline{\mathcal{T}(C)}$ es compacto. Entonces existe $x \in C$ tal que $\mathcal{T}(x) = x$.*

Demostración:

Para $\varepsilon = \frac{1}{n}$ consideramos $\mathcal{T}_n := \mathcal{T}_\varepsilon$ y $V_n := V_\varepsilon$ como en el lema anterior. Como C es cerrado y convexo, se cumple que $\overline{\mathcal{T}(C)} \subset C$ y entonces $\mathcal{T}_n(V_n \cap C) \subset V_n \cap C$. Por el teorema de Brouwer (generalizado a un convexo compacto en un espacio de dimensión finita, que es homeomorfo a la bola unitaria) se deduce que $\mathcal{T}_n$ tiene un punto fijo $x_n \in V_n \cap C$ y, por compacidad, tomando una subsucesión podemos suponer que $\mathcal{T}(x_n)$ converge a cierto $x \in C$. Luego

$$\|\mathcal{T}(x_n) - x_n\| = \|\mathcal{T}(x_n) - \mathcal{T}_n(x_n)\| \leq \frac{1}{n},$$

de donde se obtiene que $x_n \to x$ y en consecuencia $\mathcal{T}(x) = x$.

□

A modo de aplicación, obtenemos la anunciada extensión del teorema de Peano para el caso de ecuaciones con retardo.

Teorema 8.2 *Sea* $F : \mathbb{R} \times C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ *compacta. Dado* $R > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que para toda* $\phi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ *con* $\|\phi\|_\infty \leq R$ *el problema*

$$X'(t) = F(t, X_t), \qquad X_{t_0} = \phi$$

tiene al menos una solución definida en $[t - \tau, t_0 + \delta]$.

<u>*Demostración*</u>:

En la situación de las páginas previas, vimos ya que el operador $\mathcal{T} : E \to E$ es compacto y, además, $\mathcal{T}(B) \subset B$. El resultado se deduce entonces del teorema de Schauder.

□

Pero más allá de esta aplicación específica, el teorema de Schauder resulta de utilidad para resolver diversos problemas; en particular, para la búsqueda de soluciones periódicas, es decir, tales que $X(t + T) = X(t)$ para un cierto valor $T > 0$, denominado período. A tal fin, la idea que mejor refleja el aspecto dinámico del problema es, sin duda, el *operador de Poincaré*. Para el caso de un sistema de ecuaciones ordinarias

$$X'(t) = f(t, X(t)),$$

se trata simplemente de resolver el problema con una condición inicial $X(t_0) = X_0$ y dejar que evolucione el sistema hasta que -con un poco de suerte- al cabo de un tiempo T volvamos a encontrarnos en el estado X_0. Claro que esto no es simplemente cuestión de buena puntería, sino que se define un operador P que, para cada valor inicial X_0 calcula la solución (única, si f es localmente Lipschitz en X) correspondiente, evaluada en $t_0 + T$.

Claro que esto esconde algunas dificultades. Por un lado, para poder definir $P(X_0)$ la solución debe estar definida en $[t_0, t_0 + T]$, cosa que no siempre es fácil saber de antemano: en otras palabras, el dominio de P puede ser un conjunto difícil de establecer. Por otro lado, encontrar un punto fijo de P (es decir, cierto X_0 tal que $P(X_0) = X_0$) no garantiza que tengamos realmente una solución T-periódica a menos que pidamos que para todo X la función f sea T-periódica en la variable t. En tal caso, si definimos $Y(t) = X(t+T)$ vale que $Y(t_0) = X(t_0 + T) = X_0$ y además

$$Y'(t) = X'(t+T) = f(t+T, X(t+T)) = f(t, Y(t)),$$

de donde se deduce por unicidad que $X = Y$. Notemos, además, que la continuidad respecto del dato inicial nos dice que P es una función continua, asi que tenemos todo lo que necesitamos... solo falta encontrar un conjunto en el cual se pueda asegurar que P tiene un punto fijo.

En algunos casos, esto resulta sorprendentemente fácil: a modo de ejemplo elemental, consideremos la ecuación escalar

$$x'(t) + x(t) = \mathrm{sen}(t) f(x(t))$$

para cierta $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localmente Lipschitz. Por el método de variación de los parámetros, obtenemos la siguiente fórmula para la solución con condición inicial $x(0) = x_0$:

$$x(t) = x_0 e^{-t} + \int_0^t e^s \mathrm{sen}(s) f(x(s))\, ds.$$

Sin embargo, por el momento esto no parece servir de mucho, porque no sabemos nada sobre f. Pero si por ejemplo pedimos que f sea una función acotada, la cosa cambia: en efecto, vale

$$|x(2\pi) - x_0 e^{-2\pi}| \leq \int_0^{2\pi} e^s |f(x(s))|\, ds \leq C$$

para cierta constante C. De esta forma, si $|x_0| \leq R$ para R grande se ve que $|x(2\pi)| \leq R$ y por el teorema de Brouwer (que en este caso es Bolzano) existe x_0 en el intervalo $[-R, R]$ tal que $x(2\pi) = x_0$. El mismo resultado vale si f no es acotada pero sublineal y, por supuesto, se extiende de modo inmediato a sistemas.

A esta altura, el lector se preguntará por qué estamos hablando de todo esto si, en el fondo, lo único que nos hizo falta fue el teorema de Brouwer. Sin embargo, como veremos a continuación, la cuestión se complica cuando se trata de una ecuación con retardo. Aunque, en el fondo, no tanto ya que... ¡habemus Schauder!

8.1 Operador de Poincaré en dimensión infinita

En la sección previa vimos un resultado que permite encontrar puntos fijos de funciones definidas en espacios de dimensión infinita: se trata del teorema de Schauder, que garantiza que si C es un convexo cerrado y acotado de un espacio normado y $\mathcal{T} : C \to C$ es continua con $\mathcal{T}(C)$ precompacto, entonces $\mathcal{T}$ tiene un punto fijo. Esto nos sirvió para extender el teorema de Peano para ecuaciones con retardo pero, además, tiene aplicaciones a diversos problemas, entre otros, el de encontrar soluciones periódicas, es decir, tales que existe $T > 0$ tal que $X(t+T) = X(t)$ para todo t. Según dijimos, en el caso sin retardo esto se puede efectuar mediante el operador P de Poincaré, que se define calculando, para t_0 y un valor inicial X_0, el valor de la correspondiente solución en $t_0 + T$. Un punto fijo de P determina una solución X de la ecuación que además cumple $X(t_0) = X(t_0 + T)$; si la ecuación es T-periódica entonces (por unicidad) se deduce que X es T-periódica.

Para el caso con retardo $X'(t) = F(t, X_t)$ con F continua, T-periódica en t y localmente Lipschitz en X, la diferencia crucial reside en el hecho de que ahora la condición inicial es una función, de modo que el operador de Poincaré está definido en algún subconjunto del espacio de dimensión infinita $C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$. Pero ya sabemos que la solución depende continuamente de la condición inicial ϕ, de modo que para $D := \mathrm{dom}(P)$ el operador $P : D \to C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ dado por $P(\phi) = X_{t_0+T}$, donde $X = X(t, \phi)$ es la única solución con condición inicial $X_{t_0} = \phi$, resulta continuo. Sin embargo, para poder aplicar Schauder necesitamos que P sea compacto... y, para ser francos, el panorama no es del todo alentador, ya que no parece haber forma de garantizar que las soluciones con condición inicial $\phi \in B_R(0) \subset D$ se encuentran acotadas por una constante independiente de R. Para salir del aprieto podemos proponer la ya mencionada condición de sublinealidad:

$$\|F(t, \phi)\| \leq a(t)\|\phi\|_\infty + b(t)$$

con $a, b \geq 0$ continuas y T-periódicas. Esto parece una condición ligeramente bestial, pero que al menos asegura que P manda acotados en acotados y, de paso, que $D = C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$. Como vimos, en efecto, para $t > t_0$ vale

$$\|X_t\|_\infty \leq \|\phi(0)\| + \int_{t_0}^{t} a(s)\|X_s\|_\infty \, ds + \int_{t_0}^{t} b(s)\, ds;$$

luego

$$\|X_t\|_\infty \leq \left(\|\phi(0)\| + \int_{t_0}^{t} b(s)\, ds\right) e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds}$$

y en particular, para $\|\phi\|_\infty \leq R$, resulta

$$\|P(\phi)\|_\infty = \|X_{t_0+T}\|_\infty \leq \left(R + \int_{t_0}^{t_0+T} b(s)\, ds\right) e^{\int_{t_0}^{t_0+T} a(s)\, ds}.$$

Claro que esta cota sirve solamente para el primero de nuestros objetivos, aunque es demasiado grosera y, como $\int_{t_0}^{t_0+T} a(s)\, ds > 0$, en ningún caso permite probar que $P(\overline{B_R(0)}) \subset \overline{B_R(0)}$. Más aun, la cota no sirve ni siquiera en el caso, aparentemente sencillo, de que F sea acotada (es decir, $a = 0$), pues el término de la derecha resulta de todas formas mayor que R. Y está bien que así sea, porque estamos ante un problema *resonante*, vale decir: el problema homogéneo $X'(t) = 0$ tiene soluciones periódicas no triviales (obviamente, las constantes).

Esto se traduce en el hecho de que si tenemos una solución periódica del problema

$$X'(t) = F(t, X_t)$$

entonces integrando de los dos lados se obtiene

$$\int_{t_0}^{t_0+T} F(t, X_t)\, dt = X(t_0 + T) - X(t_0) = 0.$$

De esta forma, se encuentra una manera muy fácil de fabricar ejemplos para los cuales no existe solución: por ejemplo, si alguna de las coordenadas de F tiene signo constante. Esto muestra que, a veces, la tarea de encontrar un conjunto cerrado convexo invariante puede terminar en un rotundo fracaso.

Pero antes de preocuparnos por estas dificultades, todavía falta terminar de ver si P es compacto. Llegado este punto, puede llamar la atención que ahora, para ver la equicontinuidad, es preciso tener en cuenta un detalle que antes, cuando probamos la compacidad de $\mathcal{T}$, ignoramos por completo. Aunque en realidad no lo ignoramos, sino que se trataba de algo trivial. Lo que hicimos en aquel momento fue escribir, para $t \geq t_0$

$$\mathcal{T}X(t) = \phi(0) + \int_{t_0}^{t} F(s, X_s)\, ds$$

y luego, si $t_2 > t_1 \geq t_0$, se verifica que

$$\|\mathcal{T}X(t_2) - \mathcal{T}X(t_1)\| \leq \| \int_{t_1}^{t_2} \|F(s, X_s)\|\, ds \leq C(t_2 - t_1).$$

Sin mayor detalle, dijimos que los casos restantes se deducen de la continuidad uniforme de ϕ. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta < \frac{C}{2}$ de manera tal que $\|\phi(s) - \phi(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ para $|s - t| < \delta$. De esta forma, podemos asegurarnos de que $\|\mathcal{T}X(t_2) - \mathcal{T}X(t_1)\| < \varepsilon$ para cualquier $t_1 < t_0$ y cualquier t_2 cuya distancia a t_1 sea menor que δ.

El inconveniente que tenemos ahora es que no se trata de una ϕ que está fija, sino que justamente el operador de Poincaré es una función cuya variable es ϕ. De este modo, el δ de la continuidad uniforme no se puede elegir -valga la redundancia- de manera uniforme en $\overline{B_R(0)}$.[13] Un verdadero problemón... aunque justo en ese instante en que estamos por resignarnos y admitir que 'de esta no zafamos', llega en nuestro auxilio la observación milagrosa: el operador de Poincaré tiene en cuenta únicamente el estado X_{t_0+T}, que solo 'mira' lo que ocurre a partir del valor $t_0 + T - \tau$. Entonces las papas (y el honor) quedan a salvo si pedimos una condición más o menos obvia: $T \geq \tau$.[14] De esta manera, los problemáticos 'casos restantes' quedan borrados de un plumazo

[13]Si esto pudiera hacerse, la bola tendría que ser compacta.

[14]En el caso con retardo, poner $T = \tau$ es hacer trampa, pues el problema se reduce a encontrar soluciones periódicas para una ecuación ordinaria.

y la equicontinuidad de $P(B_R(0))$ se prueba casi igual que antes, pues para $t \in [t_0 + T - \tau, t_0 + T]$ vale

$$P(\phi)(t) = X(t) = \phi(0) + \int_{t_0}^{t} F(s, X_s)\, ds$$

donde X es la única solución de la ecuación tal que $X_{t_0} = \phi$.

Ahora sí, estamos en condiciones de ocuparnos del otro asunto, en general bastante delicado: encontrar un convexo cerrado invariante. Como vimos, incluso el caso F acotada, que parecía sencillo, se puede poner feo. Así que, motivados por glorias pretéritas, vamos a intentar en primer lugar con uno que anduvo bien para una ecuación sin retardo, algo del tipo

$$x'(t) + x(t) = F(t, x_t).$$

Ahora el problema no es resonante pues, para cualquier período T, la única solución periódica de $x'(t) + x(t) = 0$ es la trivial. En tal caso, el hecho de que F sea acotada y T-periódica en t transforma el problema en algo prácticamente trivial: en efecto, para podemos tomar $t_0 = 0$ y escribir como en el ejemplo previo, para $t > 0$,

$$x(t) = \phi(0)e^{-t} + \int_0^t e^{s-t} F(s, X_s)\, ds.$$

Luego, para $\|\phi\|_\infty \leq R$ resulta

$$\|x(t)\|_\infty \leq Re^{-t} + C$$

para todo t. En particular,

$$\|x_T\|_\infty \leq Re^{\tau - T} + C$$

lo que muestra, para $T > \tau$, que la bola de radio R es invariante si elegimos $R \geq \frac{C}{1 - e^{\tau - T}}$.

Por supuesto, la existencia de un convexo cerrado acotado invariante C puede probarse en muchos otros casos y -dicho sea de paso- de ser así, no hace falta probar que P es compacto. En efecto, sea quién sea la función compacta F, la equicontinuidad de $P(C)$ sale igual que antes y, además: ¡es obvio que $P(C)$ es acotado!

Intuitivamente, se puede ver una situación de ese estilo, por ejemplo, cuando es posible demostrar que para cierto R vale:

- $x(t) = R \Rightarrow x'(t) < 0$.
- $x(t) = -R \Rightarrow x'(t) > 0$.

En efecto, en tal caso las soluciones que comienzan con una condición inicial en la bola de radio R no pueden escapar de allí. Esto brinda otra justificación para nuestro éxito en el ejemplo previo

$$x'(t) = -x(t) + F(t, x_t)$$

con $|F(t,\phi)| \leq B$. Si tomamos $R > B$ se verifica, para $x(t) = R$, que $x'(t) = -R + F(t, x_t) < 0$. Del mismo modo, para $x(t) = -R$ vale que $x'(t) > 0$ y el resultado queda probado.

La prueba, como diría Borges, "es tan irreprochable como baladí", aunque da lugar a una observación inmediata: en estos casos, no importa lo que pase con F para valores más grandes de x. Más precisamente, alcanza con pedir $|F(t,\phi)| < R$ para todo t y toda ϕ cuya norma sea R, condición que se se puede generalizar de manera inmediata para un sistema:

$$\|F(t,\phi)\| < R \tag{19}$$

para todo t y toda $\phi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ tal que $\|\phi\|_\infty = R$. En efecto, si se cumple (19) se verifica que si $\|X(t)\| = R = \|X_t\|$ entonces el vector $-X(t) + F(t, X_t)$ apunta hacia adentro de la bola. Esto significa que si comenzamos en un estado inicial ϕ de norma menor que R y suponemos que la norma de la solución X correspondiente alcanza el valor R por primera vez en cierto t, entonces $\|X_t\|_\infty = R$ y, además, si multiplicamos la ecuación por $X(t)$, resulta

$$\langle X'(t), X(t)\rangle = \langle -X(t), X(t)\rangle + \langle F(t, X_t), X(t)\rangle < 0.$$

Pero el término de la izquierda es la derivada de la función $\varphi(s) := \frac{\|X(s)\|^2}{2}$ en el valor t; en otras palabras, cerca de la esfera de radio R el valor de la norma de X decrece, lo que es absurdo. Del mismo modo, se ve que si $\|\phi\|_\infty = R$ entonces el valor de la norma de X inicialmente decrece y luego no puede llegar nuevamente a R.

Con esta idea en mente vemos que, en definitiva, todo lo que hizo falta en el ejemplo anterior es la propiedad de que el campo vectorial inducido por F 'apunte hacia adentro'. Por eso, en el caso general sin retardo

$$X'(t) = f(t, X(t))$$

alcanza con que f sea continua y localmente Lipschitz en X tal que

$$\langle f(t, X), X\rangle < 0 \qquad \text{para} \qquad \|X\| = R.$$

Es fácil encontrar una condición análoga para el caso de un retardo discreto (ver ejercicio 3).

Para concluir, veamos otra manera de encarar estos problemas, que si bien emplea las mismas herramientas, se apoya en una filosofía esencialmente distinta. Ahora la idea consistirá en buscar un punto fijo directamente en el espacio de funciones T-periódicas

$$C_T := C_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) = \{X \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) : X(t+T) = X(t) \,\text{para todo}\, t\}$$

con la habitual norma del supremo. Como primer intento, se podría pretender buscar, para cada $Y \in C_T$, una solución T-periódica del problema

$$X'(t) = F(t, Y_t)$$

y definir un operador de punto fijo a partir de allí. Sin embargo, nos topamos una vez más con el inconveniente de la resonancia: por un lado, no es cierto que para todo Y hay una solución T-periódica; por otro lado, en caso de existir, tal solución no es única.[15] Existen diversas maneras de sortear esta dificultad, aunque algunas escapan al objetivo de estas notas. Por el momento, nos limitaremos a tratar un caso elemental, en el que el operador lineal asociado no es resonante. Por ejemplo, la ecuación

$$x'(t) = a(t)x(t) + F(t, x_t)$$

donde $a \in C_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y F es continua y T-periódica en t. Veamos que si $\int_0^T a(t)\, dt \neq 0$ entonces el problema

$$x'(t) - a(t)x(t) = \varphi(t)$$

tiene, para toda $\varphi \in C_T$, una única solución $x = x_\varphi \in C_T$. En efecto, uno puede apelar a 'resultados conocidos' (ver ejercicio 6) o bien hacer la cuenta directamente. Empleando el método de variación de parámetros, vemos que la solución general tiene la forma

$$x(t) = Ce^{\int_0^t a(s)\, ds} + \int_0^t e^{-\int_s^t a(r)\, dr} \varphi(s)\, ds. \tag{20}$$

Para que x sea T-periódica, la condición (necesaria y suficiente) es que $x(T) = x(0)$, vale decir,

$$Ce^{\int_0^T a(s)\, ds} + \int_0^T e^{-\int_s^T a(r)\, dr} \varphi(s)\, ds = C$$

lo que determina, gracias a nuestra hipótesis, un único valor

$$C = \frac{1}{1 - e^{\int_0^T a(s)\, ds}} \int_0^T e^{-\int_s^T a(r)\, dr} \varphi(s)\, ds.$$

Es inmediato verificar además que la aplicación $\varphi \mapsto x$ es continua. De esta forma, se tiene un operador $\mathcal{T} : C_T \to C_T$ definido como sigue. Por empezar, dada $y \in C_T$ definimos la función real $\varphi_y(t) := F(t, y_t)$, que claramente es T-periódica y además (ejercicio) continua. Luego, definimos $\mathcal{T}(y) = x_{\varphi_y}$, es decir, la única solución T-periódica del problema

$$x'(t) = a(t)x(t) + F(t, y_t).$$

Finalmente, para que las cosas funcionen como corresponde, vamos a imponer la condición habitual de que F sea compacto, lo que en este caso apenas significa

[15] No está de más observar que, en algún sentido, se trata de 'un mismo lado', ya que para el problema periódico (ver ejercicio 6) los operadores del tipo $LX(t) := X'(t) + A(t)X(t)$ con $A \in C_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n\times n})$ siempre son operadores de Fredholm de índice 0 (es decir, la dimensión del núcleo es finita y coincide con la codimensión de la imagen).

que manda conjuntos acotados en conjuntos acotados. Bajo esta hipótesis, es fácil ver que $\mathcal{T}$ es un operador compacto y, con un poco de buena fortuna, podremos encontrar algún conjunto sobre el cual aplicar el teorema de Schauder. A modo de ejemplo, consideremos el siguiente problema, motivado por aplicaciones biológicas

$$x'(t) = a(t)x(t) + f(x(t - \tau))$$

con $a \in C_T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que $\int_0^T a(t)\, dt < 0$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ continua tal que $f(0) \neq 0$. Todo parece indicar que el problema periódico es fácil de resolver si f es acotada[16], así que intentaremos relajar un poco la condición y pedir solamente que sea sublineal en $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

En realidad, pediremos un poco menos: que para $x > 0$ valga

$$f(x) \leq \varepsilon x + b$$

para cierto ε suficientemente chico y cierta constante b. Inspirados por las aplicaciones, nuestro objetivo en este caso es encontrar soluciones *positivas* del problema, así que en realidad vamos a definir $\mathcal{T}(y) = x$ como la única solución T-periódica de la ecuación lineal

$$x'(t) = a(t)x(t) + f(|y(t - \tau)|).$$

Si observamos con cuidado la fórmula (20), junto con el cálculo posterior de C, podemos deducir la existencia de una constante c independiente de φ tal que $\|x\|_\infty \leq c\|\varphi\|_\infty$. De esta manera, para $x = \mathcal{T}y$ se obtiene

$$\|x\|_\infty \leq c\|f(|y(\cdot - \tau)|)\|_\infty \leq c(\varepsilon\|y\|_\infty + b)$$

De esta forma, si $\varepsilon c < 1$ concluimos que $\mathcal{T}$ tiene al menos un punto fijo x en la bola $\overline{B_R(0)} \subset C_T$ con $R = \frac{cb}{1 - c\varepsilon}$. Veamos, finalmente, que x es positiva. Para ello, supongamos que $x(t_0) < 0$ para algún t_0 y definamos $A(t) := \int_{t_0}^t a(s)\, ds$. Como

$$\left(e^{-A}x\right)'(t) = e^{-A(t)}f(|x(t - \tau|) \geq 0,$$

entonces vale

$$e^{-A(t_0+T)}x(t_0 + T) \geq x(t_0)$$

y luego, por periodicidad,

$$e^{-A(t_0+T)} \leq 1,$$

lo que es absurdo ya que $A(t_0 + T) = \int_0^T a(t)\, dt < 0$.

[16] Cabe observar, de todas formas, que a diferencia del método de Poincaré no estamos pidiendo que f sea localmente Lipschitz. Sin embargo, se puede verificar que el método de Poincaré se puede extender también a este caso, resolviendo problemas aproximados y usando Arzelá-Ascoli (ver ejercicio 5).

8.2 Ejercicios

1. Sean $b, d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ continuas y T-periódicas tales que $b(t) > d(t)$ para todo t. Probar que la ecuación de Nicholson no autónoma

$$u'(t) = -d(t)u(t) + b(t)u(t-\tau)e^{-u(t-\tau)}$$

tiene al menos una solución T-periódica positiva. *Sugerencia*: como en el ejercicio de la práctica anterior, probar que toda solución x con dato inicial $\phi \leq M := \max_t \left(\frac{b(t)}{d(t)e}\right)$ verifica $x(t) \leq M$ para todo t. Luego, elegir $\varepsilon > 0$ tal que $xe^{-x} \geq \varepsilon e^{-\varepsilon}$ para $\varepsilon \leq x \leq M$ y $\varepsilon \leq \ln \frac{b(t)}{d(t)}$ para todo t. Verificar que si $\phi \geq \varepsilon$ entonces $x(t) \geq \varepsilon$ para todo t.

2. Hallar condiciones suficientes para la existencia de soluciones T-periódicas positivas para las siguientes ecuaciones (asumir siempre que los parámetros son funciones T-periódicas positivas):

   (a) Modelos Logísticos:

$$\dot{x} = x(t)\left[a(t) - \sum_i^n b_i(t)x(t-\tau_i(t))\right]$$

$$\dot{x} = x(t)\left(a(t) - b(t)\int_{t-\tau(t)}^t c(s)x(s)ds\right)$$

   (b) Lasota-Wazewska:

$$\dot{x} = -a(t)x(t) + c(t)e^{-b(t)x(t-\tau(t))}$$

   (c) Mackey-Glass:

$$\dot{x} = -a(t)x(t) + \frac{b(t)x(t-\tau(t))}{1+x^n(t-\tau(t))}$$

   (d) Gompertz:

$$\dot{x} = -a(t)x(t) + b(t)x(t)\ln\frac{c(t)}{x(t-\tau(t))}$$

   (e) Michaelis-Menten:

$$\dot{x} = x(t)\left[a(t) - \frac{b(t)x(t-\tau(t))}{1+c(t)x(t-\tau(t))}\right].$$

3. Consideremos el problema

$$X'(t) = f(t, X(t), X(t-\tau)) \tag{21}$$

con $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua, T-periódica en la primera variable y localmente Lipschitz en la segunda.

(a) Supongamos que existe $R > 0$ tal que

$$\langle f(t, X, Y), X \rangle < 0 \tag{22}$$

para todo t y para todos los $X, Y \in \mathbb{R}^n$ tales que $\|X\| = R$, $\|Y\| \leq R$. Entonces

i. Si $\phi : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^n$ es continua tal que $\|\phi\|_\infty \leq R$ entonces la solución X del problema (21) con condición inicial $X_{t_0} = \phi$ está definida en $[t_0 - \tau, +\infty)$.

ii. El problema (21) tiene al menos una solución T-periódica.

(b) Supongamos ahora que vale (22) para $\|X\| = \|Y\| = R$. Probar que existe $\tau_* > 0$ tal que (21) tiene una solución T-periódica para $\tau < \tau^*$.

4. Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua, T-periódica en t y localmente Lipschitz en X. Supongamos que existe $R > 0$ tal que

$$\langle f(t, X), X \rangle > 0$$

para todo X tal que $\|X\| = R$ y todo t. Probar que el problema

$$X'(t) = f(t, X(t))$$

tiene al menos una solución periódica. ¿Qué ocurre en el caso de un sistema con retardo? Comparar con el ejercicio anterior.

5. Probar que los resultados de existencia de los dos ejercicios previos siguen valiendo aunque no se pida la condición de Lipschitz para f. *Sugerencia*: Aproximar f por funciones suaves y emplear el teorema de Arzelá-Ascoli.

6. Sean $A \in C_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times n})$ y sea $L : C_T \cap C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \to C_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ el operador definido por $LX := X' + AX$.

   (a) Probar que $\dim(\mathrm{Ker}(L)) = \mathrm{codim}(\mathrm{Im}(L)) \leq n$.

   (b) Deducir una condición necesaria y suficiente para que el problema $LX(t) = F(t, X_t)$ tenga solución periódica para cualquier función $F : \mathbb{R} \times C_T(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ continua, acotada y T-periódica en t.

7. Sean $T > 0$ y $a \neq 0$.

   (a) Probar que existe $\tau^* > 0$ tal que el problema $x'(t) = au(t - \tau)$ no tiene soluciones T-periódicas no triviales para $\tau < \tau^*$.

   (b) Sea $\tau < \tau^*$ fijo. Probar que existe una constante $c > 0$ tal que para toda función T-periódica x de clase C^1 vale

$$\|x\|_\infty \leq c\|x' - ax(\cdot - \tau)\|_\infty.$$

(c) Sea $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tal que $f(0) = 0$ y $f'(0) \neq 0$. Probar que existe $b^* > 0$ tal que para todo $\tau < \tau^*$ y toda b continua T-periódica tal que $\|b\|_\infty < b^*$ el problema

$$x'(t) = f(x(t-\tau)) + b(t)$$

tiene al menos una solución T-periódica. ¿Vale la conclusión cuando $f'(0) = 0$?

(d) Generalizar para cualquier valor x_e tal que $f(x_e) = 0$.

(e) Dado $n \in \mathbb{N}$ arbitrario, encontrar f y b tal que el problema admita al menos n soluciones T-periódicas no constantes.

9 Sistemas (semi)dinámicos

A diferencia de las secciones anteriores (salvo, claro está, la primera), esta no empieza diciendo 'como vimos en la sección previa', pues vamos a comenzar con un tema nuevo: específicamente, algunas cuestiones ligadas a los sistemas dinámicos inducidos por ecuaciones con retardo. Aunque es difícil desarraigar ciertos hábitos, de modo que para motivar el tema mencionaremos (como vimos en secciones previas...) en primer lugar el flujo asociado a un sistema de ecuaciones ordinarias

$$X'(t) = f(t, X(t)),$$

en donde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es continua y localmente Lipschitz en X. Para cada condición inicial (t_0, X_0) existe una única solución X definida en un entorno de t_0, lo que permite entonces definir el flujo

$$\Phi(t, t_0, X_0) := X(t).$$

Los resultados clásicos nos dicen que Φ es una función continua definida en cierto conjunto $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, que no siempre es fácil de establecer. Como sea, obviamente valen las propiedades:

1. $\Phi(t_0, t_0, X_0) = X_0$.
2. $\Phi(t, t_1, \Phi(t_1, t_0, X_0)) = \Phi(t, t_0, X_0)$.

Por supuesto, se entiende que la segunda propiedad vale 'siempre que tenga sentido' (es decir, siempre que los vectores involucrados se encuentren en D) y se desprende de la unicidad, pues la única solución que en t_1 vale $\Phi(t_1, t_0, X_0)$ es precisamente la misma que 'evolucionó' a partir del estado X_0 en el que se encontraba en el instante t_0. Esto parece un juego de palabras, pero surge simplemente de observar que si X es la solución que en t_0 vale X_0, entonces la solución que en t_1 vale $\Phi(t_1, t_0, X_0) = X(t_1)$ necesariamente es la misma. Un caso especial es el de los sistemas autónomos, en los que f no depende explícitamente de t y se puede suponer siempre que $t_0 = 0$, pues

$$\Phi(t, t_0, X_0) = \Phi(t - t_0, 0, X_0)$$

En efecto, si X es la solución con condición inicial $X(t_0) = X_0$ entonces llamando $Y(t) := X(t + t_0)$ se tiene que

$$Y'(t) = X'(t + t_0) = f(X(t + t_0)) = f(Y(t))$$

y además $Y(0) = X(t_0) = X_0$, por lo cual $\Phi(t - t_0, 0, X_0) = Y(t - t_0) = X(t)$. En tal caso, el flujo se puede escribir directamente como función de las variables t y X_0.

Una situación similar se presenta para los sistemas de ecuaciones con retardo aunque (¡como vimos!) los estados no son ahora vectores de $\mathbb{R}^n$ sino funciones en el espacio $C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$. Y, como también vimos, esta clase de sistemas se resuelve solamente hacia adelante. Esto va a motivar que nuestros sistemas, en vez de dinámicos, se llamen *semi-dinámicos*.

Ya estamos en condiciones de esbozar un panorama general más abstracto, a partir de la idea intuitiva de que un sistema dinámico consiste en un conjunto E de *estados* y una regla Φ, que describe cómo cambian dichos estados con el tiempo. El valor $\Phi(t, t_0, X_0)$ indica cuál es, a tiempo t, el estado del sistema que en el tiempo inicial t_0 tiene el estado X_0. Por simplicidad vamos a suponer que Φ está definida para todo tiempo t, que puede ser discreto ($t \in \mathbb{Z}$) o continuo ($t \in \mathbb{R}$). Más en general, se puede asumir que t toma valores en un grupo.

Un sistema dinámico es entonces una función $\Phi : S \times E \to E$ que cumple las anteriores condiciones 1 y 2, donde $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ o $S = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Cuando E es un espacio métrico, se pide además que Φ sea una función continua. Finalmente, en el caso de los sistemas semi-dinámicos, se pide también que $t \geq t_0$, es decir, se reemplaza el conjunto S por (para decirlo de un modo rebuscadísimo) el epigrafo de su diagonal. Para decirlo en criollo, simplemente se trata del conjunto

$$\tilde{S} := \{(t, t_0) \in S \times S : t \geq t_0\}.$$

Un sistema semi-dinámico discreto viene siempre determinado a partir de una familia $F_n : E \to E$ de funciones y la regla evolutiva se puede escribir como una ecuación en diferencias:

$$X_{n+1} = F_n(X_n).$$

En otras palabras, la función F_n dice cuál va a ser el estado en el instante $n+1$ de un sistema que, en el instante n, se encuentra en el estado X_n. En el contexto de antes (para $t = n$ y $t_0 = k$) , esto significa que

$$\Phi(n, k, X_k) = F_{n-1} \circ \ldots \circ F_k(X_k).$$

La dependencia respecto de n expresa el hecho de que el sistema es no autónomo, pero si se trata siempre de una misma función $F_n = F$, entonces lo que se tiene son sencillamente iteraciones de F:

$$X_{n+1} = F(X_n)$$

$$\Phi(n, k, X) = \Phi(n - k, 0, X) = F^{n-k}(X).$$

Aquí se ve que el prefijo 'semi' es inevitable pues hay que pedir $n \geq k$. Salvo, claro está, que F sea biyectiva y entonces podemos tachar el 'semi' con la mayor de las tranquilidades.

Respecto de los sistemas semi-dinámicos continuos, obviamente nuestro ejemplo típico (por eso estamos hablando del tema) va a estar dado por una ecuación con retardo

$$X'(t) = F(t, X_t) \tag{23}$$

con $F : \mathbb{R} \times C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ continua y localmente Lipschitz. Por el momento, asumiremos que las soluciones están globalmente definidas hacia la derecha. El conjunto de estados es $E = C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ y la función Φ se define entonces para $t \geq t_0$ como $\Phi(t, t_0, \phi) = X_t$, donde X es la solución cuyo estado a tiempo inicial t_0 es ϕ. Queda como ejercicio verificar que Φ cumple con las dos condiciones antes enunciadas y además resulta continua (para esto hay que usar obviamente lo visto en las secciones previas, cuando probamos la continuidad respecto de ϕ).

Motivados por esta idea, definimos lo que significa *solución* de un sistema dinámico abstracto:

Definición 9.1 *Una solución de un sistema semi-dinámico continuo Φ es una función $s : I \to E$, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo no trivial, tal que para todos los valores $t, t_0 \in I$ tales que $t \geq t_0$ se cumple*

$$s(t) = \Phi(t, t_0, s(t_0)).$$

A modo de ejemplo tautológico, veamos que una solución es solución. Expresado así, parece una tontería, pero en realidad se trata de verificar que en nuestro anterior 'ejemplo típico' las dos definiciones coinciden. En efecto, si X es una solución de (23) definida en el intervalo $I := [A, +\infty)$, podemos pensarla como la función $s : I \to C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ dada por $s(t) = X_t$. Si fijamos $t_0 \in I$ y $t \geq t_0$, se tiene por definición que $X_t = \Phi(t, t_0, X_{t_0})$, vale decir, $s(t) = \Phi(t, t_0, s(t_0))$. Recíprocamente, dada una solución $s : I \to C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$, sabemos que $s(t) = \Phi(t, t_0, s(t_0))$ es el estado a tiempo $t \geq t_0$ de la única solución X de la ecuación (23) con condición inicial $X_{t_0} = s(t_0)$. En consecuencia, $X_t = s(t)$.

Otro ejemplo evidente de solución, para un sistema cualquiera, es la trayectoria definida por $s(t) = \Phi(t, t_0, X_0)$, para $X_0 \in E$ fijo y $t \geq t_0$. En efecto, por la primera condición para Φ se tiene $s(t_0) = X_0$ y, por la segunda condición, para $t \geq t_1 \geq t_0$ vale

$$s(t) = \Phi(t, t_0, X_0) = \Phi(t, t_1, \Phi(t_1, t_0, X_0)) = \Phi(t, t_1, s(t_1)).$$

Ya que hablamos de tautologías, veamos también un resultado más o menos esperable de unicidad, que dice que dos soluciones que coinciden en un punto son iguales a partir de allí. Esto refleja el hecho de que dos trayectorias no se pueden 'cruzar' en el espacio de estados.

Proposición 9.1 *Sean $s_1, s_2 : I \to E$ soluciones tales que $s_1(t_0) = s_2(t_0)$ para cierto $t_0 \in I$. Entonces $s_1(t) = s_2(t)$ para todo $t \geq t_0$.*

Demostración:

El resultado es evidente a partir de la definición, pues para $t \geq t_0$ vale

$$s_1(t) = \Phi(t, t_0, s_1(t_0)) = \Phi(t, t_0, s_2(t_0)) = s_2(t).$$

□

A diferencia del caso de los sistemas dinámicos, para los cuales la propiedad anterior vale para todo t, puede ocurrir que dos soluciones diferentes coincidan recién a partir de cierto t_0: en otras palabras, la unicidad vale únicamente hacia la derecha. A modo de ejemplo sencillo, consideremos la ecuación

$$x'(t) = f(|x(t-\tau)|)$$

con f localmente Lipschitz y $\phi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R})$ no nula tal que $\phi(0) = 0$. Claramente las soluciones con condición inicial ϕ y $-\phi$ para $t = 0$ son iguales a partir de $t = 0$, de modo que los respectivos estados $\Phi(t, 0, \phi)$ y $\Phi(t, 0, -\phi)$ coinciden para todo $t \geq \tau$. [17]

En lo que sigue nos veremos algunas propiedades básicas de los sistemas autónomos, que formalmente se definen como aquellos que cumplen la propiedad

$$\Phi(t, t_0, X_0) = (t + A, t_0 + A, X_0)$$

para todo A. Lo que esto refleja, simplemente, es el hecho de que Φ se puede pensar directamente como función de las variables t y X_0 ya que, como antes, $\Phi(t, t_0, X_0) = \Phi(t - t_0, 0, X_0)$. Los sistemas autónomos quedan caracterizados por medio del siguiente resultado:

Proposición 9.2 *Φ es autónomo si y solo si para toda $s : I \to E$ solución y todo A vale que $s(t + A)$ es solución en el intervalo $I - A := \{t - A : t \in I\}$.*

Demostración:

$\Rightarrow$) Sea s solución y $v(t) := s(t + A)$, entonces para $t_0 \in I - A$ fijo y $t \geq t_0$ vale

$$\Phi(t, t_0, v(t_0)) = \Phi(t + A, t_0 + A, v(t_0))$$
$$= \Phi(t + A, t_0 + A, s(t_0 + A)) = s(t + A) = v(t),$$

de donde se concluye que v es solución.

$\Leftarrow$) Consideremos, para $X \in E$, t_0 y A fijos, la función $s(t) := \Phi(t, t_0 + A, X)$. Si para cualquier t llamamos $\tilde{t} := t + A$, entonces $s(\tilde{t}_0) = \Phi(\tilde{t}_0, t_0 + A, X) = \Phi(\tilde{t}_0, \tilde{t}_0, X) = X$ y en consecuencia

$$\Phi(\tilde{t}, \tilde{t}_0, s(\tilde{t}_0)) = \Phi(\tilde{t}, \tilde{t}_0, X) = s(\tilde{t}).$$

[17] Aunque a esta altura sea evidente, no está de más recalcar la diferencia entre esta situación y la que planteamos desde el comienzo: a diferencia del caso sin retardo, dos 'soluciones' de una ecuación con retardo se pueden cruzar. Esto lo vimos con ejemplos tan básicos como el problema lineal $x'(t) = -x\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$. Lo que no puede ocurrir es que se crucen (hacia la derecha) las trayectorias en el espacio de estados.

Esto prueba que s es solución, lo que implica que $v(t) = s(t + A)$ es solución. Además, $v(t_0) = s(t_0 + A) = X$, de modo que

$$\Phi(t + A, t_0 + A, X) = s(t + A) = v(t) = \Phi(t, t_0, v(t_0)) = \Phi(t, t_0, X).$$

Esto muestra que Φ es autónomo. $\square$

A partir de ahora, nos ocuparemos únicamente de sistemas autónomos, a los cuales, de acuerdo con la observación previa, escribiremos directamente como funciones (continuas) de las variables $t \geq 0$ y $X \in E$. Las dos condiciones que vimos se pueden reformular de la siguiente manera:

1. $\Phi(0, X) = X$ para todo $X \in E$.
2. $\Phi(t, \Phi(t_0, X)) = \Phi(t + t_0, X)$ para todo $X \in E$, y $t, t_0 \geq 0$.

Como se trata de sistemas semi-dinámicos, las órbitas o trayectorias siempre van a ser positivas: dado $X \in E$, definimos

$$\mathcal{O}_+(X) = \{\Phi(t, X) : t \geq 0\}.$$

Un *punto de equilibrio* es simplemente una solución constante, vale decir, cierto $e \in E$ tal que $\Phi(t, e) = e$ para todo $t \geq 0$. Esto equivale a decir que $\mathcal{O}_+(e) = \{e\}$.

Pero hay otros casos de órbitas con propiedades especiales. Por ejemplo: sin llegar al extremo de ser constante, la órbita de un cierto $X \in E$ puede acercarse asintóticamente a cierto límite Y (en ese caso: ¿será necesariamente un equilibrio? Por el momento, la respuesta queda como ejercicio). Más en general, los puntos límite de X se definen como aquellos $Y \in E$ para los cuales existe alguna sucesión $t_n \to +\infty$ tal que $\Phi(t_n, X) \to Y$. Esto ocurre por ejemplo con las trayectorias periódicas, vale decir, tales que

$$\Phi(t + T, X) = \Phi(t, X)$$

para cierto $T > 0$ y todo $t \geq 0$. Si no son constantes, no convergen a ningún valor pero pasan infinitas veces por cada uno de sus estados.

El conjunto de puntos límite para un cierto X se llama ω-límite, es decir:

$$\omega(X) := \{Y \in E : \Phi(t_n, X) \to Y \text{ para alguna sucesión } t_n \to +\infty\}.$$

En otras palabras,

$$\omega(X) = \bigcap_{s>0} \overline{\{\Phi(t, X) : t > s\}}.$$

Es claro que este conjunto puede ser vacío, como ocurre por ejemplo con aquellas trayectorias en $\mathbb{R}^n$ que tienden a infinito. En cambio, si una trayectoria en $\mathbb{R}^n$ se mantiene acotada, necesariamente hay puntos límites. Sin embargo, para que esto valga en el caso general es preciso pedir una condición de compacidad.

Si una órbita es periódica, el ω-límite coincide con $\mathcal{O}_+(X)$: en efecto, dado $Y = \Phi(t_0, X)$ se verifica que $Y = \Phi(t_n, X)$ para $t_n := t_0 + nT \to +\infty$, lo que muestra que $\mathcal{O}_+(X) \subset \omega(X)$. Para la inclusión recíproca, basta observar que $\mathcal{O}_+(X)$ es compacto, pues es la imagen de la función continua $\Phi(\cdot, X)$ sobre el intervalo $[0, T]$. Luego, cualquier punto $Y \notin \mathcal{O}_+(X)$ se encuentra a distancia positiva de dicho conjunto y, por consiguiente, no puede ser punto límite. Esto implica (nuevamente, una tautología) que para $Y \in \omega(X)$ vale $\Phi(t, Y) \in \omega(X)$ para todo $t \geq 0$. Esto dice que el ω-límite es un conjunto 'invariante', en un sentido que vamos a definir con mayor precisión:

Definición 9.2 *Dado $C \subset E$, diremos que:*

1. *C es positivamente invariante si $\mathcal{O}_+(X) \subset C$ para todo $X \in C$.*
2. *C es invariante si $\Phi(t, C) = C$ para todo $t \geq 0$.*

Claramente, la segunda definición es más restrictiva que la primera; más precisamente, C es invariante si y solo si es positivamente invariante y, además, la función $\Phi(t, \cdot) : C \to C$ es suryectiva para todo $t \geq 0$ (es decir, para todo $Y \in C$ y todo $t \geq 0$ existe $X \in C$ tal que $\Phi(t, X) = Y$). Esto es lo que efectivamente ocurre con el ω-límite si la trayectoria es periódica: no solamente $\Phi(t, \omega(X)) \subset \omega(X)$ para todo $t \geq 0$, como ya dijimos (lo que implica que es positivamente invariante) sino que además, para todo $Y \in \omega(X)$ y todo $t \geq 0$ existe $Z \in \omega(X)$ tal que $\Phi(t, Z) = Y$. Pero vimos que $\omega(X) = \mathcal{O}_+(X)$, así que la cuestión se reduce a probar que para todo $t_0 \geq 0$ y todo $t \geq 0$ existe $s \geq 0$ tal que

$$\Phi(t, \Phi(s, X)) = \Phi(t_0, X).$$

Por la propiedad 2 de los sistemas semi-dinámicos, esto equivale directamente a encontrar s tal que

$$\Phi(t + s, X) = \Phi(t_0, X),$$

de modo que la periodicidad nos permite encontrar no uno sino infinitos valores de s: alcanza con tomar $s = t_0 - t + nT$ para cualquier n suficientemente grande.

Una vez asimilado el anterior razonamiento, corresponde anunciar que no se trataba más que un ejercicio, pues en realidad el resultado se deduce de este otro, mucho más general:

Teorema 9.1 *Dado $X \in E$ se cumple:*

1. *$\omega(X)$ es cerrado y positivamente invariante.*
2. *Si $\overline{\mathcal{O}_+(X)}$ es compacto, entonces $\omega(X)$ es no vacío, compacto, invariante y conexo. Además,*

$$dist(\Phi(t, X), \omega(X)) \to 0 \qquad \text{para } t \to +\infty.$$

Cabe aclarar que *dist* denota aquí la distancia de un punto a un conjunto. Formulada de otra manera, la última propiedad expresa el siguiente hecho: para todo $\varepsilon > 0$ existe $T > 0$ tal que si $t \geq T$ entonces existe $Y \in \omega(X)$ de modo que $d(\Phi(t, X), Y) < \varepsilon$ (ahora sí, d es la distancia de nuestro espacio métrico E). Por comodidad, escribiremos directamente: $\Phi(t, X) \to \omega(X)$.

<u>*Demostración del teorema:*</u>

Sea $Y \in \omega(X)$, entonces existe $t_n \to +\infty$ de modo tal que $\Phi(t_n, X) \to Y$. Por continuidad, para todo t vale

$$\Phi(t, \Phi(t_n, X)) \to \Phi(t, Y)$$

pero, además, por definición sabemos que $\Phi(t, \Phi(t_n, X)) = \Phi(t + t_n, X)$. Como $t + t_n \to +\infty$, se deduce que $\Phi(t, Y) \in \omega(X)$. Esto prueba que $\mathcal{O}_+(Y) \subset \omega(X)$, es decir: $\omega(X)$ es positivamente invariante. Supongamos ahora que $Y_n \in \omega(X)$ verifica $Y_n \to Y$ y tomemos:

- $t_1 > 1$ tal que $d(\Phi(t_1, X), Y_1) < 1$,
- $t_2 > \max\{t_1, 2\}$ tal que $d(\Phi(t_2, X), Y_2) < \frac{1}{2}$

y luego, inductivamente,

- $t_n > \max\{t_{n-1}, n\}$ tal que $d(\Phi(t_n, X), Y_n) < \frac{1}{n}$.

Se verifica entonces que $\Phi(t_n, X)$ converge al valor Y. Además, $t_n \to +\infty$, asi que $Y \in \omega(X)$. Esto prueba que el ω-límite es cerrado.

Para la segunda parte, supongamos que la órbita $\mathcal{O}_+(X)$ es precompacta y consideremos cualquier sucesión $t_n \to +\infty$. Se deduce que $\Phi(t_n, X)$ tiene alguna subsucesión convergente, lo que muestra que $\omega(X) \neq \emptyset$. Además, es claro que $\omega(X) \subset \overline{\mathcal{O}_+(X)}$, así que resulta compacto.

Para probar la invariancia, fijemos $Y \in \omega(X)$ y $t_0 > 0$. Queremos hallar $Z \in \omega(X)$ tal que $\Phi(t_0, Z) = Y$ (dejamos de lado el caso $t_0 = 0$ porque es trivial). Consideremos $t_n \to +\infty$ tal que $\Phi(t_n, X) \to Y$. Como la sucesión $\Phi(t_n - t_0, X)$ está acotada, podemos suponer que converge a cierto Z. Entonces vale:

$$\Phi(t_0, \Phi(t_n - t_0, X)) = \Phi(t_n, X) \to Y.$$

Usando ahora la continuidad de Φ concluimos que $\Phi(t_0, Z) = Y$.

A continuación, veamos que $\Phi(t, X) \to \omega(X)$. En caso contrario, existen $\varepsilon > 0$ y $t_n \to +\infty$ tales que $d(\Phi(t_n, X), \omega(X)) \geq \varepsilon$. Nuevamente, por la compacidad podemos suponer que $\Phi(t_n, X)$ converge a cierto $Y \in \omega(X)$; luego $d(Y, \omega(X)) \geq \varepsilon$, lo que es absurdo.

Para finalizar, supongamos que $\omega(X)$ se puede escribir como la unión disjunta de dos conjuntos cerrados A y B. Como son compactos, podemos fijar $\varepsilon > 0$ tal que $d(Y, Z) > 2\varepsilon$ para todo $Y \in A$ y todo $Z \in B$. Por lo anterior, existe T tal que $dist(\Phi(t, X), \omega(X)) < \varepsilon$ para todo $t \geq T$ y, en consecuencia, para cada $t \geq T$ podemos elegir $W(t) \in \omega(X)$ tal que $d(\Phi(t, X), W(t)) < \varepsilon$. Consideremos los conjuntos

$$I_A := \{t \geq T : W(t) \in A\}, \quad I_B := \{t \geq T : W(t) \in B\}$$

que son claramente disjuntos y vale $I_A \cup I_B = [T, +\infty)$. Si $\{t_n\} \subset I_A$ es una sucesión que converge a cierto t, entonces $\Phi(t_n, X) \to \Phi(t, X)$ y, tomando una subsucesión, podemos suponer que $W(t_n)$ converge a cierto $W \in A$. Esto prueba que $dist(\Phi(t,X), A) \leq \varepsilon$ y entonces $dist(\Phi(t,X), B) > \varepsilon$; en particular, $W(t) \in A$. De la misma forma se ve que I_B es cerrado, de modo que alguno de ambos conjuntos, por ejemplo I_B, es vacío. Esto dice que $dist(\Phi(t,X), B) \geq \varepsilon$ para todo $t \geq T$, de modo que B no contiene puntos límites. Esto nos permite concluir que B es vacío y, en definitiva, que $\omega(X)$ es conexo.

□

En particular, el resultado previo permite obtener conclusiones para el (semi) flujo Φ asociado a una ecuación con retardo

$$X'(t) = F(X_t)$$

con F localmente Lipschitz. Por conveniencia, podemos escribir

$$\Phi(t, \phi) = X_t(\phi)$$

y entonces el ω-límite de cierta $\phi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ está dado por

$$\omega(\phi) = \{\psi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) : \|X_{t_n}(\phi) - \psi\|_\infty \to 0 \text{ para ciertos } t_n \to +\infty\}.$$

Como vimos, a diferencia del caso sin retardo, puede ocurrir que $\omega(\phi)$ sea vacío aunque la órbita $\mathcal{O}_+(\phi)$ sea acotada. Por eso, es habitual asumir la condición de que F sea un operador compacto, pues permite garantizar que las órbitas acotadas son precompactas. En efecto, si existe una constante M tal que $\|X_t(\phi)\|_\infty \leq M$ para todo t, entonces existe C tal que vale, para $X = X(t, \phi)$, que $\|X'(t)\| = \|F(X_t)\| \leq C$ para todo t. Esto dice que el conjunto $\mathcal{O}_+(\phi)$ es equicontinuo y, por el teorema de Arzelá-Ascoli, su clausura es compacta.[18]

Otra propiedad inmediata es que si una solución de la ecuación converge para $t \to +\infty$ a cierto $c \in \mathbb{R}^n$, entonces dicho c es necesariamente una solución constante, vale decir, lo que habitualmente llamamos 'punto de equilibrio'. Si -como siempre- ignoramos el isomorfismo entre $\mathbb{R}^n$ y el subespacio de funciones constantes de $C([-\tau, 0, \mathbb{R}^n)$, podemos verificar directamente que c es un punto de equilibrio, en el sentido que vimos unas páginas atrás:

Proposición 9.3 *Si $X(t, \phi) \to c$ para $t \to +\infty$ entonces $\mathcal{O}_+(c) = \{c\}$.*

Demostración:

Dado $\varepsilon > 0$ fijamos t_0 tal que $\|X(t, \phi) - c\| < \varepsilon$ para todo $t > t_0$; luego, $\|X_t(\phi) - c\|_\infty < \varepsilon$ para todo $t > t_0 + \tau$. Se deduce que $X_t(\phi) \to c$ en el espacio $C([-\tau, \mathbb{R}^n])$, es decir, $\Phi(t, \phi) \to c$ para $t \to +\infty$. Luego $\omega(\phi) = \{c\}$ y, como $\omega(\phi)$ es invariante, resulta $\Phi(t, c) = c$ para todo t. Esto prueba que $\mathcal{O}_+(c) = \{c\}$, es decir, que c es un equilibrio. □

[18] Aunque se trata de algo evidente, vale la pena aclarar que $\mathcal{O}_+(\phi)$ es acotada si y solo si el conjunto $\{X(t, \phi) : t \geq 0\}$ es acotado en $\mathbb{R}^n$.

Entre otras cosas, el ω-límite sirve para estudiar la estabilidad asintótica de un equilibrio. Por empezar, la condición de estabilidad se traduce de manera automática de la siguiente forma: para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\|\phi - e\| < \delta$ entonces $\|\Phi(t,\phi) - e\|_\infty < \varepsilon$ para todo $t \geq 0$ o, equivalentemente, $\mathcal{O}_+(\phi) \subset B_\varepsilon(e)$. Una vez que sabemos esto, si además asumimos que F es compacta, entonces e es (localmente) asintóticamente estable si existe $r > 0$ tal que $\omega(\phi) = \{e\}$ para toda $\phi \in B_r(e)$.

En efecto, si e es asintóticamente estable, entonces existe $r > 0$ tal que para todo $\phi \in B_r(e)$ se cumple que $X(t,\phi) \to e$ para $t \to \infty$. Como vimos en la demostración previa, esto implica que $\Phi(t,\phi) \to e$ para $t \to +\infty$; en particular, $\omega(\phi) = \{e\}$. Recíprocamente, supongamos que $\omega(\phi) = \{e\}$ para toda $\phi \in B_r(e)$. Por la estabilidad, podemos suponer también que $\mathcal{O}_+(\phi)$ es acotada. Si existe $s_n \to +\infty$ tal que $\|\Phi(s_n,\phi) - e\|_\infty \geq \varepsilon > 0$ para cierto $\varepsilon > 0$, entonces tomando una subsucesión, podemos suponer que $\Phi(s_n,\phi)$ converge a cierta $\psi \neq e$. Por definición, resulta $\psi \in \omega(\phi)$, lo que es absurdo. Esto prueba que $\Phi(t,\phi) \to e$ para $t \to +\infty$; en consecuencia, toda solución con dato inicial $\phi \in B_r(e)$ tiende al equilibrio e cuando $t \to +\infty$.

A modo de ejemplo, consideremos la ecuación logística

$$N'(t) = N(t)(1 - N(t-\tau)),$$

cuyos equilibrios son 0 y 1. Si $N_0 = \phi \geq 0$, es inmediato verificar que la solución está definida para todo $t \geq -\tau$ y se mantiene siempre mayor o igual que 0. En efecto, observemos en primer lugar que si $\phi(0) > 0$ entonces $N(t) > 0$ para todo $t \geq 0$, lo cual se deduce, por ejemplo, integrando directamente la ecuación:

$$N(t) = N(0)e^{\int_0^t (1-N(s-\tau))\,ds}. \tag{24}$$

Esta última expresión también muestra que si $\phi(0) = 0$, entonces $N \equiv 0$ a partir de $t = 0$, de modo que el resultado queda probado.[19]

Por otra parte, la misma idea permite mostrar, según el método de pasos, que la solución está globalmente definida: una vez que conocemos $N(t)$ para $t \leq n\tau$, la fórmula

$$N(t) = N(n\tau)e^{\int_{n\tau}^t (1-N(s-\tau))\,ds}$$

permite extenderla hasta $(n+1)\tau$ y así sucesivamente.[20] Más aun, el comportamiento asintótico de la solución se puede analizar a partir de las siguientes observaciones elementales:

1. Si $N \geq 1$ a partir de cierto t_0, entonces $N' \leq 0$ a partir de $t_0 + \tau$ y en consecuencia converge, para $t \to +\infty$, a cierto límite. De acuerdo con la Proposición 9.3, dicho límite es un punto de equilibrio de donde se deduce que $N(t) \searrow 1$ para $t \to +\infty$ (obviamente, podemos afirmar que decrece recién a partir de $t_0 + \tau$).

[19] Esto proporciona otro ejemplo de soluciones que se 'unifican' a partir de cierto valor: no importa cuál sea ϕ, la condición $\phi(0) = 0$ basta para garantizar que $\mathcal{O}_+(\phi) = \{0\}$.

[20] Este hecho no debería sorprender, pues el término de la derecha de la ecuación es una función lineal respecto de N (ver ejercicio 2 de la sección 7).

2. Si $N \leq 1$ a partir de cierto t_0, entonces $N' \geq 0$ a partir de $t_0 + \tau$ y se tienen dos opciones:

   - $\phi(0) = 0$ y $N(t) = 0$ para $t \geq 0$.
   - $\phi(0) > 0$ y $N(t) \nearrow 1$ para $t \to +\infty$.

3. Si no ocurre ninguna de las situaciones anteriores, N entonces oscila alrededor de 1. Veamos que en este caso, una vez que cruza dicho valor, no puede llegar demasiado alto: concretamente, si $N(t_0) = 1$ para cierto t_0, entonces $N(t) \leq e^\tau$ para todo $t \geq t_0$. Para ver esto, supongamos que $N(t^*) > 1$ para cierto $t^* > t_0$ y tomemos $t_1 < t^* < t_2$ tales que $N(t_1) = N(t_2) = 1$ y $N > 1$ en (t_1, t_2). Llamando t_{max} al valor donde N alcanza su máximo en dicho intervalo, del hecho de que $N'(t_{max}) = 0$ deducimos que $N(t_{\max} - \tau) = 1$ y, por lo tanto, $t_{max} - \tau \leq t_1$. Integrando como en la fórmula (24) pero ahora a partir de t_1, obtenemos

$$N(t^*) \leq N(t_{max}) = N(t_1) e^{\int_{t_1}^{t_{max}} (1 - N(s-\tau))\, ds} \leq e^{t_{max} - t_1} \leq e^\tau.$$

En definitiva, en los tres casos concluimos que, para cualquier $\phi \geq 0$, la órbita $\mathcal{O}_+(\phi)$ es acotada y $\omega(\phi)$ es no vacío.

Lo visto hasta ahora alcanza sacar conclusiones respecto del equilibrio trivial: si $\phi(0) = 0$ entonces $N = 0$ a partir de $t = 0$ y obviamente $\omega(\phi) = \{0\}$. Pero, en cambio, si $\phi(0) > 0$ el segundo de los casos anteriores nos dice que el valor de $N(t)$ no puede ser 'chico' para todo $t \geq 0$, así que 0 es un equilibrio inestable.[21] Esto es consistente con el hecho de que la linealización en 0 da por resultado la ecuación $N'(t) = N(t)$, para la cual el origen es inestable. En rigor, se puede probar que 0 no puede ser punto límite de ninguna ϕ tal que $\phi(0) > 0$; más aún, existe una constante $c > 0$ independiente de ϕ tal que

$$\liminf_{t \to +\infty} N(t, \phi) \geq c.$$

Para ver esto, en virtud de los casos anteriores solo hay que encontrar una cota inferior (a partir de algún t_1, no importa cuál) para aquellas soluciones que oscilan alrededor de 1. Como antes, si para $t_1 < t_2$ vale $N < 1$ en (t_1, t_2) y $N(t_1) = N(t_2) = 1$ entonces el valor mínimo en dicho intervalo se alcanza en cierto $t_{min} \leq t_1 + \tau$ y, agrandando t_1 si hace falta, podemos suponer $N(t) \leq e^\tau$ para todo $t \geq t_1 - \tau$. De esta forma, obtenemos:

$$N(t_{min}) = N(t_1) e^{\int_{t_1}^{t_{min}} (1 - N(s-\tau))\, ds} \geq e^{(t_{min} - t_1)(1 - e^\tau)} \geq e^{\tau(1 - e^\tau)}.$$

Sin embargo, el análisis del otro punto de equilibrio es más delicado. Si ocurre alguno de los primeros dos casos, es claro que $\omega(\phi) = \{1\}$, pero no es fácil ver lo que ocurre con aquellas soluciones que oscilan alrededor de 1. La ecuación linealizada es ahora

$$u'(t) = -u(t - \tau)$$

[21] Y mucho menos asintóticamente, ya que ninguna solución tiende a 0.

que -como sabemos- es asintóticamente estable para $\tau < \frac{\pi}{2}$ e inestable para $\tau > \frac{\pi}{2}$. En consecuencia, para $\tau < \frac{\pi}{2}$ sabemos que hay estabilidad asintótica, aunque pero solamente local. Por supuesto, no se puede probar que 1 es un atractor global, ya que existe otro equilibrio al que obviamente no puede 'atraer'. Pero, como vimos en las primeras páginas, en el caso sin retardo es inmediato verificar que todas las soluciones con un valor inicial $N(0) > 0$ convergen a 1, de modo que es razonable pensar que cuando el retardo es chico esta propiedad se mantiene. Vamos a probar, en efecto, que si $\tau \leq 1$ entonces 1 es atractor para todas las soluciones con condición inicial $\phi \geq 0$ tal que $\phi(0) > 0$.

Para ello, observemos en primer lugar que las cotas anteriores pueden mejorarse de manera iterativa. Supongamos que N oscila alrededor del 1 y ya sabemos que vale $\alpha < N(t) < \beta$ a partir de cierto valor s. Entonces, para $t_2 > t_1 > s + \tau$ tales que $N(t_1) = N(t_2) = 1$ y $N \neq 1$ en (t_1, t_2) consideramos los valores t_{max} y t_{min} como antes y obtenemos

$$N(t_{max}) \leq e^{\int_{t_1}^{t_{max}} (1-N(s-\tau))\, ds} \leq e^{\tau(1-\alpha)}$$

$$N(t_{min}) \geq e^{\int_{t_1}^{t_{min}} (1-N(s-\tau))\, ds} \geq e^{\tau(1-\beta)}.$$

Esto nos motiva a definir la función $g(x) := e^{\tau(1-x)}$ a fin de obtener la siguiente 'regla inductiva':

- Si $\alpha < N(t) < \beta$ a partir de cierto s, entonces $g(\alpha) < N(t) < g(\beta)$ a partir de cierto t.

En particular, las cotas que calculamos antes dicen que podemos comenzar con cierto s_1 y los valores $\alpha = e^{\tau(1-e^{\tau})}$, $\beta = e^{\tau}$. Y al parecer es nuestro día de suerte, ya que vale $\beta = g(0)$ y $\alpha = g(\beta) = g(g(0))$, lo que nos permite formular nuestra iteración de manera muy elegante.

En efecto, vale que $g^2(0) < N(t) < g(0)$ para $t > s_1$ e inductivamente concluimos que existen $s_2 < s_3 < \dots$ tales que

$$g^{2n}(0) < N(t) < g^{2n-1}(0) \tag{25}$$

para $t > s_n$. En resumen, tenemos: ¡un sistema dinámico discreto! La función g es decreciente y positiva, luego $g^2 = g \circ g$ es estrictamente creciente y vale

$$0 < g^2(0) < g^4(0) < \dots$$

$$g(0) > g^3(0) > g^5(0) > \dots$$

De aquí se deduce que la sucesión $g^{2n-1}(0)$ converge a cierto límite L y luego $g^{2n}(0)$ converge al valor $g(L)$. Observemos, además, que $g(0) > 1 = g(1)$, lo cual implica que $g^{2n}(0) < 1 < g^{2n-1}(0)$ para todo n. En particular, $g(L) \leq 1 \leq L$. Por otra parte, tanto L como $g(L)$ tienen que ser puntos fijos de g^2, ya que

$$L = \lim_{n\to\infty} g^{2n+1}(0) = \lim_{n\to\infty} g^2(g^{2n-1}(0)) = g^2(L)$$

y

$$g^2(g(L)) = g(g^2(L)) = g(L).$$

En lo que sigue, vamos a ver que si $\tau \leq 1$ entonces el único punto fijo de g^2 es 1, lo que prueba, de acuerdo con (25), que $N(t) \to 1$ para $t \to +\infty$.

En efecto, $x > 0$ es punto fijo de g^2 si y solo si $g(g(x)) = x$, lo que equivale a decir que $g(x) = g^{-1}(x)$, o bien:

$$e^{\tau(1-x)} = 1 - \frac{\ln x}{\tau}.$$

Consideremos la función $\varphi(x) := e^{\tau(1-x)} + \frac{\ln x}{\tau}$ y observemos que $\varphi(0^+) = -\infty$, $\varphi(+\infty) = +\infty$. Además, vale $\varphi'(x) = 0$ si y solo si

$$\tau x e^{-\tau x} = e^{-\tau}.$$

El término de la izquierda es siempre menor o igual que $\frac{1}{e}$, de modo que φ es estrictamente creciente para $\tau \leq 1$. En consecuencia, φ toma el valor 1 exactamente una vez, vale decir, g^2 no tiene otros puntos fijos además de $x = 1$.

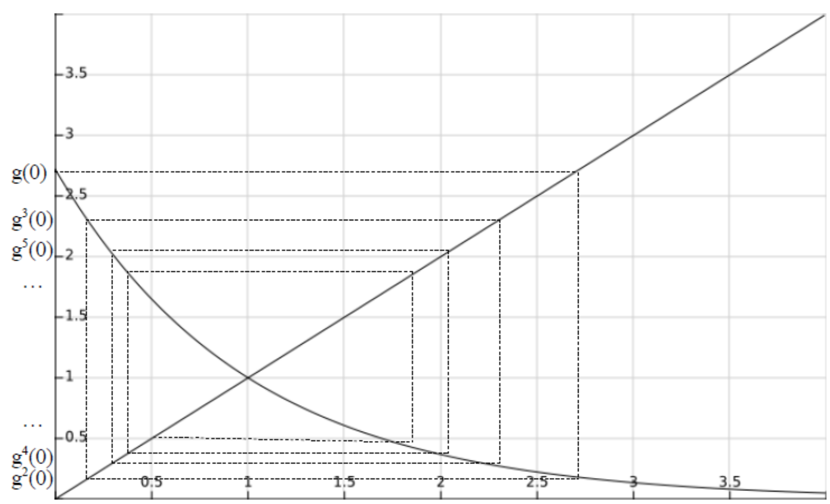


Gráfico de g y las iteradas $g^k(0)$ para $\tau = 1$.

Es claro que la cuenta anterior con la g no permite mejorar el valor de τ, ya que para $\tau > 1$ se verifica que $\varphi'(1) < 0$ y entonces φ cruza la recta horizontal $y = 1$ al menos tres veces. Sin embargo, acotando con más cuidado los anteriores valores $N(t_{max})$ y $N(t_{min})$, se puede ver que la restricción que impusimos para τ es excesiva. En rigor, el resultado vale para $\tau < \frac{3}{2}$ y se ha conjeturado que se puede extender 'un poquito más', hasta el valor que surge de la linealización, es decir: $\tau < \frac{\pi}{2}$.

9.1 Sistemas monótonos

En esta sección vamos a seguir estudiando algunas propiedades (semi)dinámicas del sistema autónomo

$$X'(t) = F(X_t)$$

con F localmente Lipschitz. Específicamente, nos vamos a ocupar de un caso particular, los llamados sistemas *monótonos*, en los cuales el espacio de estados E es un conjunto ordenado (es decir, tiene definida una relación $\leq$ reflexiva, antisimétrica y transitiva) y el (semi)flujo preserva el orden:

$$X \leq Y \Rightarrow \Phi(t, X) \leq \Phi(t, Y) \qquad \text{para todo } t.$$

Si E es métrico, se pide que el orden sea compatible con la métrica), es decir:

$$X_n \to X, Y_n \to Y, X_n \leq Y_n \Rightarrow X \leq Y.$$

Finalmente, si E es normado se pide también que el orden sea compatible con la estructura de espacio vectorial:

$$X \leq Y \Rightarrow cX + Z \leq cY + Z \qquad \forall\, c \geq 0, Z \in E.$$

En este último caso, el orden viene inducido por un *cono cerrado*, vale decir, un conjunto cerrado $K \subset E$ tal que

1. $K + K \subset K$.
2. $K \cap -K = \{0\}$.
3. K es convexo.

En efecto, si $(E, \leq)$ es un espacio normado ordenado, entonces el conjunto de positividad $K := \{X \in E : X \geq 0\}$ es un cono, pues:

1. Si $X, Y \geq 0$, entonces $X + Y \geq 0$.
2. Si $X \geq 0$ y $-X \geq 0$, entonces $X \geq 0 \geq X$, lo que implica $X = 0$.
3. Si $X, Y \geq 0$ y $s \in [0, 1]$, entonces $sX + (1 - s)Y \geq 0$.

Finalmente, si $X_n \geq 0$ y $X_n \to X$, entonces la compatibilidad dice que $X \geq 0$. Recíprocamente, si K es un cono cerrado de un espacio normado E, queda como ejercicio verificar que la relación

$$X \leq Y \Leftrightarrow Y - X \geq 0$$

define un orden compatible. Por supuesto, en el caso de $E = C([-\tau, 0], \mathbb{R})$ se tiene el orden compatible usual

$$\phi \leq \psi \text{ sii } \phi(t) \leq \psi(t) \text{ para todo } t.$$

Para funciones vectoriales, lo usual es considerar además el orden coordenada a coordenada, pero nos limitaremos aquí a considerar el caso escalar.

Un ejemplo típico de sistema semi-dinámico monótono discreto está dado por las iteraciones de una cierta función continua $T : E \to E$ creciente, vale decir, que cumple: $X \leq Y \Rightarrow T(X) \leq T(Y)$. En tal caso, existe una forma de probar la existencia de un punto fijo de T por el llamado *método de super y subsoluciones*. Cuando $E = \mathbb{R}$ el método no es otra cosa que una versión del teorema de Bolzano: supongamos que existen $\alpha < \beta$ tales que

$$T(\alpha) \geq \alpha, \qquad T(\beta) \leq \beta,$$

entonces T tiene al menos un punto fijo en el intervalo $[\alpha, \beta]$. En efecto, basta considerar la función continua $f(x) := x - T(x)$, que verifica $f(\alpha) \leq 0 \leq f(\beta)$ y en consecuencia se anula. Esto no es ninguna novedad, aunque desde el punto de vista dinámico es un poco más interesante analizar lo que ocurre al calcular la órbita positiva $\{T^n(x) : n \geq 0\}$ de cualquier $x \in [\alpha, \beta]$. Si x es un punto fijo, entonces $O_+(x) = \{x\}$; en caso contrario, observemos que de todas formas $T(x) \in [\alpha, \beta]$; en otras palabras, el intervalo $[\alpha, \beta]$ es invariante. Esto se debe simplemente al hecho de que, como $\alpha \leq x \leq \beta$, entonces

$$\alpha \leq T(\alpha) \leq T(x) \leq T(\beta) \leq \beta.$$

Este hecho vuelve a mostrar, por si no estábamos seguros, que T tiene un punto fijo (esta vez por el teorema de Brouwer). Pero además permite probar que las órbitas son monótonas: si por ejemplo $T(x) < x$ entonces $T^{n+1}(x) \leq T^n(x)$ para todo n. Luego, $T^n(x)$ converge necesariamente a un punto fijo x_f de T. Para dar una muestra de nuestros múltiples recursos expresivos, podemos decirlo de otra forma: $\omega(x) = \{x_f\}$. Lo mismo ocurre si $T(x) > x$, en ese caso $T^n(x)$ converge también a un punto fijo, pero de manera creciente.

Por supuesto, cuando trabajamos en espacios más generales la vida deja de ser tan sencilla (por más que siga siendo una vida monótona). Entonces conviene entender mejor cuáles fueron los pasos que nos llevaron, en el ejemplo previo, a un éxito tan rotundo.

La situación es la siguiente: tenemos un espacio normado E, provisto de un orden compatible, una función continua $T : E \to E$ creciente y, además, una sub y una supersolución ordenadas, es decir, ciertos $\alpha \leq \beta$ tales que $\alpha \leq T(\alpha)$ y $\beta \geq T(\beta)$. Entonces se prueba, como antes, que el intervalo $[\alpha, \beta]$ formado por los elementos $x \in E$ tales que $\alpha \leq x \leq \beta$ es invariante. Sin embargo, como era de esperar, eso no alcanza para asegurar la existencia de un punto fijo. Y tampoco vale la propiedad que usamos para el caso unidimensional, ya que el orden no tiene por qué ser total y, en consecuencia, no vale necesariamente que si $T(x) \neq x$ entonces es mayor o menor que x. En particular, la propiedad no vale el espacio $C([-\tau, 0])$ que -no es inoportuno recordarlo- es el que nos interesa. Así que en general no resulta siempre tan fácil calcular la órbita de cualquier x. Pero, ¿qué ocurre si empezamos en α o β? Justamente, la propia defininición nos brinda el puntapié inicial; alterando un poco el verso de Valéry podemos decir: y todo el resto es inducción. Seamos más o menos poéticos, la monotonía se obtiene igual que antes:

$$\alpha \leq T(\alpha) \leq T^2(\alpha) \leq \cdots \leq \beta$$

$$\beta \geq T(\beta) \geq T^2(\beta) \geq \cdots \geq \alpha.$$

Si pudiéramos asegurar que estas sucesiones convergen, entonces estaríamos hechos: como siempre, la continuidad de T garantiza que los respectivos límites son puntos fijos. Sin embargo, las sucesiones acotadas no tienen por qué ser convergentes... y la cosa es incluso peor: ¡no sabemos si las anteriores sucesiones son acotadas!

Esto último no debe alarmar: se debe al simple hecho de que una 'cota' en el sentido del orden no implica necesariamente una cota en el sentido de la norma. Para poder afirmar algo así no basta con la compatibilidad, sino que debemos pedir una condición extra:

Definición 9.3 *Sea $(E, \leq)$ un espacio normado ordenado. El orden $\leq$ se dice normal sii existe una constante $c > 0$ tal que*

$$0 \leq X \leq Y \Rightarrow \|X\| \leq c\|Y\|.$$

Por ejemplo, para $E = C([-\tau, 0])$ la condición se cumple, con $c = 1$: en efecto, si $0 \leq \phi(t) \leq \psi(t)$ para todo t, entonces $\|\phi\|_\infty \leq \|\psi\|_\infty$.

Si asumimos normalidad (no la nuestra, sino la del orden), entonces es fácil probar que las sucesiones anteriores están acotadas. Por ejemplo, a partir de las desigualdades

$$\alpha \leq T^n(\alpha) \leq \beta$$

deducimos que

$$0 \leq T^n(\alpha) - \alpha \leq \beta - \alpha$$

y entonces $\|T^n(\alpha) - \alpha\| \leq c\|\beta - \alpha\|$, lo que a su vez implica:

$$\|T^n(\alpha)\| \leq \|\alpha\| + c\|\beta - \alpha\|.$$

Tenemos entonces sucesiones acotadas; ¿cómo hacemos para garantizar la convergencia? Todo parece indicar que una buena hipótesis es que T sea compacto: al menos eso garantiza (como siempre, por Schauder) que hay puntos fijos, pues $T([\alpha, \beta]) \subset [\alpha, \beta]$ y el intervalo $[\alpha, \beta]$ es convexo.[22] Pero volviendo a nuestras sucesiones, la tarea no está terminada, pues la compacidad solo nos garantiza, en principio, que existe alguna subsucesión convergente. Sin embargo, la monotonía alcanza para 'ensanguchar' (expresión proveniente del vocablo 'sanguchito') los restantes términos de la siguiente manera:

Lema 9.4 *Si $\{X_n\}$ es monótona y existe una subsucesión $\{X_{n_j}\}$ que converge a cierta X, entonces $X_n \to X$.*

<u>*Demostración*</u>:

[22] Queda como ejercicio para el lector probar esto de manera directa, tomando $X, Y \in [\alpha, \beta]$ y verificando que $\alpha \leq sX + (1 - s)Y \leq \beta$ para todo $s \in [0, 1]$. Pero el resultado es todavía es más inmediato si se observa que $[0, \beta - \alpha] \subset K$.

Supongamos que la sucesión es creciente, entonces escribiendo

$$X = X_{n_j} + \sum_{k=j}^{\infty} (X_{n_{k+1}} - X_{n_k})$$

deducimos (pues el cono positivo K es cerrado) que $X \geq X_{n_j}$. Ahora, para cada n definimos $j(n)$ como el único tal que $n_{j(n)} \leq n < n_{j(n)+1}$, de donde se obtiene

$$0 \leq X_n - X_{n_{j(n)}} \leq X_{n_{j(n)+1}} - X_{n_{j(n)}} \to 0.$$

Usando otra vez la normalidad, concluimos que $X_n - X_{n_{j(n)}} \to 0$ y, en definitiva: $X_n \to X$.

Observación 9.1 *Cabe aclarar que la anterior condición de compacidad es suficiente pero no indispensable: por ejemplo, el método también funciona en algunos casos de problemas casi- periódicos, para los cuales los operadores asociados no son compactos. Sin embargo, esto requiere en general alguna condición extra (ver por ejemplo [6]. Cabe mencionar que la pérdida de compacidad se debe al hecho, curioso para el lector desprevenido, de que en el espacio de funciones casi-periódicas el teorema de Arzelá-Ascoli tiene una hipótesis adicional a las dos habituales, justamente de equi-casi-periodicidad. Para más detalles, ver [2]).*

A modo de ejemplo, consideremos la ecuación

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)) \tag{26}$$

con f continua y T-periódica en t. Como dijimos algunas páginas atrás, el problema de encontrar soluciones T-periódicas es resonante, pues el operador $x \mapsto x'$ tiene núcleo no trivial (las funciones constantes). Una manera de evitar esto consiste en sumar un término $ax(t)$ de ambos lados, donde a es por ejemplo una constante positiva. En tal caso, sabemos ya (ver ejercicio 6 de la sección previa) que el operador $L : C_T \cap C^1 \to C_T$ dado por $Lx := x' + ax$ es biyectivo y el siguiente lema, interpretado adecuadamente, prueba que el operador inverso de L es creciente.

Lema 9.5 *Sea $a > 0$ y sea x una función T-periódica de clase C^1 tal que $x'(t) + ax(t) \geq 0$ para todo t. Entonces $x \geq 0$.*

<u>*Demostración*</u>:

Como x es periódica, alcanza su mínimo absoluto en cierto valor t_0. Entonces $ax(t_0) \geq 0$, lo que prueba que $x \geq 0$. $\square$

A partir de este lema, resulta sencillo transformar la ecuación anterior en un problema de punto fijo y encontrar condiciones para que el operador involucrado sea monótono. En efecto, al igual que en la sección 8.1, para $y \in C_T$ fija definimos $x := \mathcal{T}y$ como la única solución T-periódica de

$$x'(t) + ax(t) = f(t, y(t), y(t - \tau)) + ay(t)$$

es decir,

$$x = L^{-1}N(y)$$

con L como antes y $N : C_T \to C_T$ dado por $N(y)(t) := f(t, y(t), y(t-\tau)) + ay(t)$. Buscamos un punto fijo de $\mathcal{T} = L^{-1}N$, que (como ya vimos, aunque quizás dicho de otra forma) resulta compacto.

Llegó la hora de preguntarse por la monotonía: ¿qué quiere decir que $\mathcal{T}$ sea creciente? El lema previo dice que si $\phi \geq 0$ entonces $L^{-1}(\phi) \geq 0$ lo cual, por linealidad, significa que si $\phi \leq \psi$ entonces $L^{-1}(\phi) \leq L^{-1}(\psi)$. Luego, una posible hipótesis es que el operador N (la N es por no-lineal, pero también por Nemitskii) sea también creciente, es decir: si $y(t) \leq z(t)$ para todo t, entonces $f(t, y(t), y(t-\tau)) + ay(t) \leq f(t, z(t), z(t-\tau)) + az(t)$ para todo t.

Esto último es, claramente, mucho pedir... aunque una idea 'salvadora' viene en nuestra ayuda: en realidad, no hace falta pedir eso en *todo* el espacio C_T, sino solamente en el subconjunto $[\alpha, \beta]$, donde $\alpha \leq \beta$ son, respectivamente, una sub y una supersolución, es decir, tales que

$$\alpha \leq \mathcal{T}(\alpha), \qquad \beta \geq \mathcal{T}(\beta).$$

Empleando una vez más el lema, lo anterior se traduce simplemente al hecho de que α y β son T-periódicas y verifican

$$L\alpha \leq N(\alpha) \qquad L\beta \geq N(\beta),$$

es decir:

$$\alpha'(t) \leq f(t, \alpha(t), \alpha(t-\tau)), \qquad \beta'(t) \geq f(t, \beta(t), \beta(t-\tau))$$

para todo t. Notemos que el término que contiene la constante a desaparece, porque se cancela, así que tenemos libertad de elegirlo como mejor nos convenga. Con tal idea en mente, vamos a suponer (por 'simplicidad', como suele decirse) que f es de clase C^1 en la segunda variable. En tal caso, es razonable pensar que si elegimos $a > 0$ suficientemente grande, la función $x \mapsto f(t, x, y) + ax$ va a resultar creciente para t, y fijos. Esto se debe a que solo nos interesa mirar los valores (t, x, y) que pertenecen al conjunto

$$\mathcal{C} := \{0 \leq t \leq T,\, \alpha(t) \leq x \leq \beta(t)\, \alpha(t-\tau) \leq y \leq \beta(t-\tau)\} \subset \mathbb{R}^3$$

que (¡gran noticia!) es compacto. En consecuencia, alcanza con tomar

$$a \geq -\max_{(t,x,y)\in\mathcal{C}} \frac{\partial f}{\partial x}(t, x, y).$$

Para lograr crecimiento respecto de la tercera variable, no parece haber más remedio que pedirlo directamente:

$$y \leq z \Rightarrow f(t, x, y) \leq f(t, x, z)$$

para todos los t, x, y, z tales que $(t, x, y), (t, x, z) \in \mathcal{C}$. De esta forma, tenemos todo lo que necesitábamos para garantizar la existencia de una solución T-periódica del problema.

Por ejemplo, consideremos la ecuación

$$x'(t) = a(t)x(t)^3 + b(t)x(t - \tau)$$

con $a, b \in C_T$ tales que $b(t) > 0 > a(t)$ para todo t. En este caso, $f(t, x, y) = a(t)x^3 + b(t)y$, que es de clase C^1 respecto de x y además, como $b > 0$, es creciente respecto de la variable y.

Si elegimos α como la función constante dada por $\alpha := (\inf b)^{1/2} > 0$, vale que

$$\alpha' = 0 \leq \alpha(a(t)\alpha^2 + b(t)) = a(t)\alpha^3 + b(t)\alpha$$

para todo t. Del mismo modo, fijando una constante $\beta > \alpha$ tal que $\beta^2 \geq -\frac{b(t)}{a(t)}$ para todo t, resulta

$$\beta' = 0 \geq \beta(a(t)\beta^2 + b(t)) = a(t)\beta^3 + b(t)\beta$$

para todo t. Esto prueba que el problema tiene al menos una solución T-periódica positiva (específicamente, tal que $\alpha < x(t) < \beta$ para todo t).

$\square$

Ejercicio: Verificar que el método también sirve si las desigualdades para α y β están invertidas, es decir

$$\alpha'(t) \geq f(t, \alpha(t), \alpha'(t - \tau)), \qquad \beta'(t) \leq f(t, \beta(t), \beta'(t - \tau))$$

pidiendo ahora que f sea decreciente en la tercera coordenada.

Sugerencia: Si $a > 0$ entonces se verifica, como antes, que el operador $Lx : x' - ax$ es decreciente; luego, eligiendo $a \gg 0$ el operador dado por $Nx(t) := f(t, x(t), x(t - \tau)) - ax(t)$ es también decreciente y, en consecuencia, la composición $L^{-1}N$ es creciente.

Más allá del problema específico de existencia de soluciones periódicas, la condición de monotonía permite estudiar de manera sencilla algunos aspectos generales de la dinámica de la ecuación (26). Por simplicidad, supondremos que se trata de un problema autónomo

$$x'(t) = f(x(t), x(t - \tau)) \tag{27}$$

con $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y creciente en su segunda coordenada, es decir:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \geq 0$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. La primera propiedad es que el semiflujo Φ es creciente en su segunda coordenada:

Proposición 9.4 *Sea f como antes y supongamos $\phi \leq \psi$. Entonces para todo $t \geq 0$ vale $x_t(\phi) \leq x_t(\psi)$.*

Demostración:

De acuerdo con el método de pasos, alcanza con probar que

$$x(t,\phi) \leq x(t,\psi)$$

para todo $t \in [0,\tau]$. Si llamamos $g(t,x) := f(t,x,\phi(t)) \leq f(t,x,\psi(t))$ entonces para $x(t) := x(t,\phi)$, $y(t) := x(t,\psi)$ resulta

$$x'(t) = g(t,x(t)), \qquad y'(t) \geq g(t,y(t))$$

y además

$$x(0) \leq y(0).$$

Supongamos en primer lugar que las anteriores desigualdades son estrictas y que ambas funciones se encuentran por primera vez en cierto valor t_0, entonces $x'(t_0) \geq y'(t_0)$. Pero

$$x'(t_0) = g(t_0,x(t_0)) = g(t_0,y(t_0)) < y'(t_0),$$

lo que es absurdo. Esto prueba que $x(t) < y(t)$ para todo t. Para el caso general, consideremos $h(t) := y'(t) - g(t,y(t)) \geq 0$ y llamemos y_n a la única solución del problema

$$z'(t) = g(t,z(t)) + h(t) + \frac{1}{n}$$

con condición inicial $z(0) = y(0) + \frac{1}{n}$. Como

$$y_n'(t) \geq g(t,y_n(t)) + \frac{1}{n} > g(t,y_n(t))$$

y además $y_n(0) = y(0) + \frac{1}{n} > x(0)$, se deduce del caso estricto que $y_n(t) > x(t)$ para todo t. Por continuidad, vale que $y_n(t) \to y(t)$, de modo que $y(t) \geq x(t)$ para todo t.

□

La propiedad anterior es de utilidad para comparar la dinámica de (26) con la de la ecuación diferencial $x'(t) = f(x(t),x(t))$. Comencemos por el siguiente resultado, válido para los 'sub/super-equilibrios':

Proposición 9.5 *Sea f como antes y sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a,a) \geq 0$. Si $\phi \geq a$, entonces*

1. *$x(t,\phi) \geq x(t,a) \geq a$ para todo $t \geq 0$.*
2. *$x(t,a)$ es creciente y, si está acotada, entonces converge a un equilibrio.*

Conclusiones análogas (con cambios obvios) valen si $f(a,a) \leq 0$.

Demostración:

La desigualdad $x(t,\phi) \geq x(t,a)$ es consecuencia directa de la proposición anterior. Por otro lado, llamando $x(t) = x(t,a)$, en $[0,\tau]$ vale $x'(t) = f(x(t),a)$ y además $a' = 0 \leq f(a,a)$. De esta forma se deduce, como en la proposición previa, que $x(t) \geq a$. Repitiendo el procedimiento, se ve que la desigualdad sigue valiendo para todo t. Finalmente, podemos usar las propiedades del flujo para escribir todo de una manera elegante: como $a \leq x_t$ para todo $t \geq 0$, entonces

$$x_s(a) \leq x_s(x_t(a)) = x_{s+t}(a)$$

para todo $s \geq 0$. Esto prueba que la función $t \mapsto x_t$ es creciente y, en consecuencia, la función $x(t, a)$ es creciente. En caso de estar acotada, sabemos por la Proposición 9.3 que converge para $t \to +\infty$ a un punto de equilibrio.

$\square$

Esta última proposición permite probar un resultado de estabilidad análogo al caso, sumamente sencillo, de una ecuación escalar sin retardo. A tal efecto, observemos (¿recordemos?) en primer lugar que, dada la ecuación

$$x'(t) = f(x(t))$$

con f localmente Lipschitz es válido, para cada equilibrio e (es decir, para cada e tal que $f(e) = 0$), el siguiente criterio:

1. Si $f > 0$ en $[e - \delta, e)$ y $f < 0$ en $(e, e + \delta]$, entonces e es localmente asintóticamente estable. Más precisamente, si $|x(0) - e| \leq \delta$ entonces $x(t) \to e$ para $t \to +\infty$.

2. Si $f < 0$ en $[e - \delta, e)$ y $f > 0$ en $(e, e + \delta]$, entonces e es inestable, en el sentido de que las soluciones distintas de e que comienzan en la franja $[e - \delta, e + \delta]$ se 'escapan' de allí y luego no vuelven a entrar.

Lo anterior es inmediato a partir de la ecuación: basta analizar el signo de x' y emplear el hecho (crucial) de que las trayectorias no se cruzan. En particular si e es un cero simple de f entonces su estabilidad local queda completamente determinada por el signo de $f'(e)$, en caso de que la derivada exista. A modo de regla general, podemos expresarlo de la siguiente manera para un intervalo arbitrario $[a, b]$ que contiene en su interior un equilibrio e:

1. Si $(x - e)f(x) < 0$ para $x \in [a, b] \setminus \{e\}$ entonces toda solución con condición inicial $x_0 \in [a, b]$ está globalmente definida y converge a e.

2. $(x - e)f(x) > 0$ para $x \in [a, b] \setminus \{e\}$ entonces las soluciones con condición inicial $x_0 \in [a, b] \setminus \{e\}$ se alejan de e hasta salir del segmento $[a, b]$.

Como veremos, el mismo resultado vale para la ecuación (27) con f de clase C^1 y creciente en la segunda coordenada.

Proposición 9.6 *Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y creciente en su segunda coordenada y sea $e \in \mathbb{R}$ un equilibrio que pertenece a cierto intervalo (a, b).*

1. *Si $(x - e)f(x, x) < 0$ para $x \in [a, b] \setminus \{e\}$ entonces toda solución con condición inicial ϕ tal que $\phi(t) \in [a, b]$ para todo t está globalmente definida y converge a e.*

2. $(x-e)f(x,x) > 0$ *para* $x \in [a,b]\setminus\{e\}$ *entonces las soluciones con condición inicial* ϕ *tal que* $\phi(t) \in [a,b]\setminus\{e\}$ *para todo* t *salen del intervalo para algún* t*.*

Demostración:

Observemos en primer lugar que no hay otros equilibrios en el intervalo, pues $f(x,x) \neq 0$ para $x \in [a,b] \setminus \{e\}$. En el primer caso, $f(a,a) > 0 > f(b,b)$, de modo que por la proposición anterior vale, para todo t,

$$a \leq x(t,a) \leq x(t,\phi) \leq x(t,b) \leq b$$

y además

$$x(t,a) \nearrow e, \qquad x(t,b) \searrow e$$

para $t \to +\infty$. Esto implica que $x(t,\phi) \to e$.

En el segundo caso, si por ejemplo $\phi(t) \in (e,b]$ para todo t entonces existe $c > e$ tal que $\phi(t) \geq c$ para todo t y $f(c,c) > 0$; luego, $x(t,\phi) \geq x(t,c)$. Pero $x(t,c)$ crece y no converge a ningún valor de $(e,b]$ ya que no hay otros puntos de equilibrio; luego se escapa del intervalo y, en consecuencia, también lo hace $x(t,\phi)$.[23]

□

Por ejemplo, podemos considerar una vez más la ecuación de Nicholson

$$x'(t) = -dx(t) + bx(t-\tau)e^{-x(t-\tau)}.$$

En este caso, tenemos la función $f(x,y) = -dx + bye^{-y}$ que claramente no cumple las hipótesis anteriores, aunque vale $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \geq 0$ para $y \leq 1$. De este modo, podemos aplicar los resultados previos para equilibrios que se encuentran debajo de dicho valor. Tal es el caso del equilibrio nulo que, como ya vimos en el ejercicio 2 de la sección 6, es estable para $b < d$. Este hecho se vuelve a confirmar por medio de este nuevo enfoque, ya que $xf(x,x) = x^2(-d+be^{-x}) > 0$ si $x \neq 0$ es suficientemente pequeño. Para $b > d$, en cambio, el equilibrio nulo es inestable y, además, se tiene equilibrio positivo: el valor $x^* = \ln\frac{b}{d}$ (en presencia de la función exponencial, el lector comprenderá la conveniencia de no seguir llamando e al equilibrio). Cuando $x^* < 1$, es decir, $b < de$, se aplica el resultado anterior y se concluye que x^* es asintóticamente estable. Sin embargo, este resultado no es del todo 'bueno', pues para lograr que valiera la monotonía nos vimos obligados a imponer una condición más restrictiva de la que requiere, en el ejercicio mencionado, la prueba de estabilidad vía linealización.

9.2 Funciones de Lyapunov

A continuación veremos otra herramienta habitual para probar la estabilidad de un equilibrio: las *funciones de Lyapunov*. A modo de idea inspiradora,

[23]Como en el tango *Mimí Pinson*, podemos decir que la trayectoria se aleja '...para nunca retornar'. En el caso con retardo, esto no vale en general, pero es consecuencia, otra vez, de la monotonía ya que, como vimos, $x(t,\phi)$ es siempre mayor o igual que $x(t,c)$.

consideremos el caso simple de un sistema de ecuaciones ordinarias

$$X'(t) = f(X(t))$$

y supongamos que f verifica:

$$\langle f(X), X \rangle < 0.$$

Esta es una hipótesis que ya hemos usado: si vale para $|X| = R$, garantiza que las soluciones que comienzan en $B_R(0)$ permanecen allí, ya que el campo definido por f apunta hacia adentro en $\partial B_R(0)$. Pero si suponemos que vale para todo $X \in B_R(0) \setminus \{0\}$, entonces el campo apunta hacia adentro en todos lados y las soluciones se ven 'forzadas' a acercarse al origen. En efecto, observemos en primer lugar que por continuidad vale $f(0) = 0$ (alcanza con mirar el límte sobre rectas sX con $s \to 0$) y además

$$(\|X\|^2)'(t) = 2\langle X'(t), X(t) \rangle = 2\langle f(X(t)), X(t) \rangle < 0$$

para $X(t) \neq 0$, lo que prueba que $\|X(t)\|^2$ es decreciente y en consecuencia converge. Por el teorema de valor medio, existe $t_n \in (n, n+1)$ tal que

$$\|X(n+1)\|^2 - \|X(n)\|^2 = 2\langle X'(t_n), X(t_n) \rangle$$

y luego $\langle X'(t_n), X(t_n) \rangle \to 0$. Tomando una subsucesión, podemos suponer que $X(t_n)$ converge a cierto X y por continuidad se deduce que $\langle f(X), X \rangle = 0$. Luego, $X = 0$ y, como $\|X(t)\|$ es decreciente, concluimos que $X(t) \to 0$.

El caso anterior $V(X) := \|X\|^2$ es apenas un ejemplo particular -el más típico- de las funciones de Lyapunov que, intuitivamente, 'guían' a las trayectorias hacia un equilibrio e. Más en general, podemos suponer que $e = 0$, $f(0) = 0$ y definir, para un entorno abierto y acotado $U \subset \mathbb{R}^n$ del 0, una función $V : U \to \mathbb{R}$ 'tipo paraboloide', en el sentido de que V es positiva en $U \setminus \{0\}$, se anula en 0, y, además,

$$\langle \nabla V(X), f(X) \rangle < 0$$

para todo $X \neq 0$. Con esto alcanza para probar que las soluciones que se mantienen dentro de U convergen al equilibrio, por un razonamiento similar al anterior. Por regla de la cadena, vemos que

$$(V \circ X)'(t) = \langle \nabla V(X(t)), f(X(t)) \rangle < 0$$

y entonces $V \circ X(t)$ converge a cierto $r \geq 0$. Tomando como antes una sucesión $t_n \to +\infty$ tal que $(V \circ X)'(t_n) \to 0$ y usando el hecho de que U es acotado, podemos suponer que $X(t_n) \to X$. Como antes, se deduce que $X = 0$ y luego $r = 0$, lo que prueba, a su vez, que $X(t) \to 0$.

Como el lector atento habrá observado, lo anterior todavía no alcanza para garantizar la estabilidad asintótica del origen, en principio por dos motivos. Por un lado, hemos probado la convergencia al origen para las soluciones 'que se mantienen dentro de U', pero nada asegura que las soluciones con dato inicial en U no se puedan escapar. Y, por otra parte, tampoco hemos probado la estabilidad. Precisamente, ocuparnos de este último detalle nos resuelve los dos problemas a la vez, ya que entonces podemos fijar $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(0) \subset U$ y $\delta \leq \varepsilon$ tal que la solución se mantiene en $B_\varepsilon(0)$ cuando el dato inicial se encuentra en $B_\delta(0)$ y, en consecuencia, converge al origen.

Para ver la estabilidad, consideremos $\varepsilon > 0$ y, como $V \neq 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, podemos fijar $\eta > 0$ tal que $V(X) > \eta$ para todo X con $\|X\| = \varepsilon$. Pero además $V(0) = 0$, así que también podemos fijar $\delta \in (0, \varepsilon)$ tal que $V(X) < \eta$ para todo $X \in B_\delta(0)$. Veamos que las soluciones con dato inicial de norma menor que δ se mantienen siempre dentro del conjunto

$$A := \{X \in \mathbb{R}^n : \|X\| < \varepsilon, V(X) < \eta\},$$

que obviamente es un entorno abierto del origen. En efecto, si X es una solución tal que $\|X(0)\| < \delta$, vale también que $X(0) \in A$. Supongamos que $X(t)$ toca ∂A por primera vez en cierto $t_0 > 0$, entonces por la elección de η se deduce que $0 < \|X(t_0)\| < \varepsilon$ y, en consecuencia, $V(X(t_0)) = \eta$. En particular, esto implica que $(V \circ X)'(t_0) \geq 0$, es decir:

$$0 \leq \langle \nabla V(X(t_0)), X'(t_0)\rangle \leq \langle \nabla V(X(t_0)), f(X(t_0))\rangle,$$

lo que es absurdo.

A fin de generalizar las ideas previas para una ecuación con retardo, cabe mencionar que, en realidad, la definición habitual de V involucra directamente el sistema dinámico y es un poco más general, pues no requiere en principio la diferenciabilidad de V. Lo que suele pedirse es un tanto más oscuro: que $\dot{V}(X) < 0$ para $X \neq 0$, donde

$$\dot{V}(X) := \frac{\partial}{\partial t} V(X(t)).$$

Esto da por sobreentendido que X es una solución y se puede interpretar de manera un poco más 'prolija', empleando el flujo. En realidad, como se trata de un sistema autónomo alcanza con suponer que X es un estado inicial, entonces lo anterior se traduce directamente como

$$\dot{V}(X) := \frac{\partial}{\partial t} V(\Phi(t, X))|_{t=0} = \lim_{h \to 0} \frac{V(\Phi(h, X)) - V(X)}{h}$$

pues $\Phi(0, X) = X$.[24]

Esto motiva la siguiente definición para un sistema $X'(t) = F(X_t)$, con F es localmente Lipschitz tal que $F(0) = 0$ (entendiendo, como siempre, que $0 = 0$, donde el primer cero -o el segundo, si se prefiere- denota la función nula). Como es de esperar, la función de Lyapunov no será ahora una función, sino una funcional definida sobre un entorno abierto U del 0 en espacio $C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$. Por otra parte, ahora el sistema no es dinámico sino semi, así que solo se puede

[24] Si se quiere generalizar un poco más, el límite puede reemplazarse por límite superior.

asegurar la existencia del flujo hacia la derecha. De este modo, dada $V : \overline{U} \to \mathbb{R}$ continua y $\phi \in U$ definimos

$$\dot{V}(\phi) := \lim_{h\to 0^+} \frac{V(\Phi(h,\phi)) - V(\phi)}{h}$$

siempre que el límite exista. En particular, vale trivialmente $\dot{V}(0) = 0$. La idea intuitiva (achicando U, si hace falta) es que si $\dot{V}(\phi) < 0$ para toda $\phi \neq 0$, entonces 0 es atractor para todas las soluciones que comienzan en U. En realidad, veremos un resultado un poco más general, aunque para ello vamos a necesitar la hipótesis de que F sea compacta. Concretamente, bajo condiciones apropiadas vamos a ver que el ω-límite de cualquier trayectoria que comienza en cierto conjunto está contenido en el conjunto crítico $\{\dot{V} = 0\}$.

A fin de simplificar la exposición, recordemos la notación antes introducida $X_h(\phi)$ para la trayectoria que comienza en ϕ, evaluada a tiempo h. En otras palabras, $X_h(\phi) = \Phi(h,\phi)$ o, equivalentemente, $X_h(\phi)(s) = X(s+h,\phi)$ para todo $s \in [-\tau, 0]$. Luego, el límite anterior se escribe directamente en la forma

$$\dot{V}(\phi) := \lim_{h\to 0^+} \frac{V(X_h(\phi)) - V(\phi)}{h}.$$

La condición que pediremos es que la función $V : \overline{U} \to \mathbb{R}$ sea continua y valga $\dot{V}(\phi) \leq 0$ para toda $\phi \in U$.

Es tentador (por decirlo de algún modo... en todo caso, la tentación tiene múltiples variantes) pensar que, al igual que en los sistemas de ecuaciones ordinarias, si se asume que V es suave entonces $\dot{V}$ puede pensarse directamente como una condición comparable a la del caso sin retardo,

$$\langle \nabla V(X), F(X) \rangle \leq 0.$$

En efecto, si llamamos $\varphi(t) := V \circ \Phi(t,\phi)$, podemos reescribir el anterior cociente incremental como

$$\frac{V(X_h(\phi)) - V(\phi)}{h} = \frac{V(\Phi(h,\phi)) - V(\Phi(0,\phi))}{h} = \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} \to \varphi'(0)$$

y, aplicando regla de la cadena, obtenemos:

$$\dot{V}(\phi) = DV(\Phi(0,\phi))(D\Phi(\cdot,\phi)|_{t=0}) = DV(\phi)(D\Phi(\cdot,\phi)|_{t=0}).$$

Pero ahora podemos observar que

$$D\Phi(\cdot,\phi)|_{t=0} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\Phi(h,\phi) - \Phi(0,\phi)}{h} = \frac{\partial \Phi(\cdot,\phi)}{\partial t}\Big|_{t=0}$$

y, de esta forma, llegamos a algo que resulta esencialmente verdadero pero tristemente falso. A los fines de calcular cosas 'a lo bruto' funciona, si pensamos simplemente que la derivada del flujo -que, ¡no olvidar!, es un elemento del espacio $C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$-, evaluada en cualquier $s \in [-\tau, 0]$ vale

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\Phi(h,\phi)(s) - \Phi(0,\phi)(s)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{X(h+s,\phi) - X(s,\phi)}{h} = X'(s,\phi).$$

El pequeño inconveniente es que, como $s \in [-\tau, 0]$, la solución $X(s, \phi)$ coincide con $\phi(s)$, de modo que la derivada anterior debería dar exactamente ϕ'... claro, eso en caso de que ϕ sea derivable.

Por supuesto, si en lugar de ϕ ponemos X_{t_0} para algún t_0 razonablemente grande (léase: mayor que τ), entonces el límite anterior funciona perfectamente bien y da por resultado la derivada de la función X_{t_0}.[25] Si tenemos en cuenta, además, que

$$X'_{t_0}(s) = X'(t_0 + s, \phi) = F(X_{t_0+s})$$

entonces, abusando ligeramente de la notación, podemos escribir:

$$\dot{V}(X_{t_0}) = DV(X_{t_0})(F \circ \Phi(\cdot, X_{t_0})),$$

donde $\Phi(\cdot, X_{t_0}) : [-\tau, 0] \to C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ es la función definida por $\Phi(\cdot, X_{t_0}) = \Phi(s, X_{t_0}) = X_{t_0+s}$. Cabe observar, además, que en términos de la anterior función $\varphi = V \circ \Phi(\cdot, \phi)$ se tiene que $\dot{V}(X_{t_0}) = \varphi'(t_0)$; luego, la condición $\dot{V} \leq 0$ expresa el hecho más o menos intuitivo de que V decrece a lo largo de las trayectorias.

Asumiendo que el lector tiene un espíritu más bien refinado y no se encuentra familiarizado con los brutos procederes, conviene ver un ejemplo para entender que, en algunos casos, la brutalidad no es un método del todo despreciable. Consideremos la ecuación (escalar) lineal

$$x'(t) = ax(t) + bx(t - \tau)$$

e intentemos construir una función de Lyapunov para probar, bajo condiciones apropiadas, la estabilidad del equilibrio nulo. Si Lyapunov pide paraboloides, démosle paraboloides... o al menos algo que se le parezca, por ejemplo:

$$V(\phi) = \frac{\phi(0)^2}{2} + \mu \int_{-\tau}^{0} \phi(s)^2 \, ds$$

con $\mu > 0$ a definir. Como dijimos, el objetivo es que V 'acompañe' las trayectorias hasta depositarlas grácilmente, para $t \to +\infty$, en el origen (lo de 'grácil' no es más que un recurso literario, no muy compatible con la brutalidad que el lector está a punto de presenciar). Es inmediato verificar que V es diferenciable en el sentido de Fréchet y vale

$$DV(\phi)(\psi) = \phi(0)\psi(0) + 2\mu \int_{-\tau}^{0} \phi(s)\psi(s) \, ds.^{26}$$

Pero entonces, la fórmula anterior dice:

$$\dot{V}(\phi) = DV(\phi)(\phi') = \phi(0)\phi'(0) + 2\mu \int_{-\tau}^{0} \phi(s)\phi'(s) \, ds.$$

[25] Queda como ejercicio verificar que la convergencia es uniforme en s.

[26] Esto queda como ejercicio. Se puede, una vez más (eso sí, que no se transforme en hábito) derivar a lo bruto, o simplemente calcular el límite usando el hecho de que V es una forma cuadrática.

No hay problemas con el primer término; de hecho, esto no es casualidad porque corresponde a la parte sin retardo: aunque ϕ no sea derivable, podemos suponer (otra vez, abusando un poco de la notación) que se trata de su derivada por derecha, es decir, la derivada de $x(t, \phi)$ en $t = 0$. El cálculo es entonces muy sencillo:

$$x'(0^+) = ax(0) + bx(-\tau) = a\phi(0) + b\phi(-\tau).$$

En cambio, para la parte que aparece dentro de la integral, la sensación es que estamos fritos, pues la ecuación no rige para $s \leq 0$. Sin embargo, si ϕ es derivable vale $2\phi\phi' = (\phi^2)'$ y entonces por el mencionado *methodus Brutus* resulta:

$$\dot{V}(\phi) = \phi(0)(a\phi(0) + b\phi(-\tau)) + \mu \int_{-\tau}^{0} (\phi^2(s))'\, ds$$

$$= \phi(0)(a\phi(0) + b\phi(-\tau)) + \mu(\phi(0)^2 - \phi(-\tau)^2).$$

Pero los métodos de Brutus han sido muy criticados por los historiadores (si bien, hasta la fecha, son pocos los que han objetado su efectividad). Así que vamos a dar al César lo que es del César y hacer las cuentas con mayor cuidado. El límite correspondiente al primer término de $\dot{V}(\phi)$ es inmediato y coincide con lo que dio pocos párrafos atrás:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{x_h(\phi)(0)^2 - \phi(0)^2}{2h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{x(h,\phi)^2 - x(0,\phi)^2}{2h}$$

$$= x(0,\phi)x'(0^+,\phi) = \phi(0)(a\phi(0) + b\phi(-\tau)).$$

En cambio, el otro término requiere un poco más de atención, ya que tenemos terminantemente prohibido derivar dentro de la integral. Sin embargo, para cualquier función continua φ, sea o no derivable, se cumple:

$$\lim_{h\to 0^+} \int_{-\tau}^{0} \frac{\varphi(h+s) - \varphi(s)}{h}\, ds = \lim_{h\to 0^+} \frac{\int_{-\tau+h}^{h} \varphi(s)\, ds - \int_{-\tau}^{0} \varphi(s)\, ds}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\int_{0}^{h} \varphi(s)\, ds - \int_{-\tau}^{-\tau+h} \varphi(s)\, ds}{h} = \varphi(0) - \varphi(-\tau).$$

Esto último no es ninguna brutalidad sino simplemente el teorema fundamental del cálculo que, aplicado a la función $\varphi = \phi^2$, nos da exactamente como antes. Entonces podemos asegurar que

$$\dot{V}(\phi) = (a+\mu)\phi(0)^2 + b\phi(0)\phi(-\tau) - \mu\phi(-\tau)^2,$$

es decir, $\dot{V}(\phi) = W^T A W$ donde W es el vector $\begin{pmatrix} \phi(0) \\ \phi(-\tau) \end{pmatrix}$ y la matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ está dada por

$$\begin{pmatrix} \mu + a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & -\mu \end{pmatrix}.$$

Queremos lograr que valga $\dot{V}(\phi) \leq 0$, de modo que tenemos que encontrar condiciones para que A sea definida negativa. Apelando a los cálidos recuerdos de nuestros primeros cursos en la facultad, podemos asegurar que esto ocurre (estrictamente) si el determinante es positivo y el primer coeficiente es negativo, es decir:

$$\mu < -a, \qquad b^2 < -4\mu(\mu + a).$$

Pero el valor $\mu > 0$ lo podemos elegir libremente, de modo que, si a es negativo, conviene tomar $\mu = -\frac{a}{2}$, porque es el que maximiza la función $-\mu(\mu + a)$ y, por consiguiente, da el mejor valor posible para b. En conclusión, una condición suficiente es:

$$b^2 < 4\frac{a}{2}\left(a - \frac{a}{2}\right) = a^2.$$

En otras palabras, cuando $a < 0$ y $|b| < -a$, el equilibrio nulo es asintóticamente estable; nada mal, si tenemos en cuenta que el resultado coincide con lo obtenido en la sección 6 para la estabilidad absoluta (independiente de τ).

Claro que en realidad todo esto es, por el momento, una expresión de deseo, pues apenas nos 'inspiramos' en lo que dice Lyapunov para las ecuaciones ordinarias. Pero es suficiente como para empezar a fantasear: ¿será cierto? La respuesta (felizmente afirmativa) viene dada por el siguiente resultado, llamado *principio de invariancia de LaSalle*.

Teorema 9.2 *Supongamos que F es compacta y sea $V : \overline{U} \to \mathbb{R}$ como antes. Supongamos, además, que para toda $\phi \in U$ la trayectoria $X_t(\phi)$ está acotada y se mantiene dentro de U para todo $t \geq 0$. Entonces $\emptyset \neq \omega(\phi) \subset \mathcal{I}$, donde $\mathcal{I}$ es el subconjunto invariante maximal de $S := \{\psi \in \overline{U} : \dot{V}(\psi) = 0\}$.*

Antes de preguntar ¿y esto con qué se come?, conviene entender mejor lo que ocurre en el ejemplo anterior, para el cual $U = C([-\tau, 0], \mathbb{R})$. Tomando como antes $\mu = -\frac{a}{2} > 0$ y $|b| < -a$, resulta

$$\dot{V}(\phi) = \frac{a}{2}(\phi(0)^2 + \phi(-\tau)^2) + b\phi(0)\phi(-\tau).$$

Completando cuadrados, se ve que

$$\dot{V}(\phi) = \frac{a}{2}(\phi(0) - \phi(-\tau))^2 + (a + b)\phi(0)\phi(-\tau)$$

lo que prueba, en definitiva, que

$$S = \{\psi : \dot{V}(\psi) = 0\} = \{\psi : \psi(0) = \psi(-\tau) = 0\}.$$

Notemos que las trayectorias están acotadas: por ejemplo, se puede ver de manera directa que si $\|\phi\| < R$ entonces la correspondiente solución $x(t) = x(t, \phi)$ satisface $|x(t, \phi)| < R$ para todo t. En efecto, de modo muy similar al que hemos empleado en situaciones anteriores, si suponemos que $x(t_0) = R$ por primera vez en cierto valor t_0, entonces

$$0 \leq x'(t_0) = aR + bx(t_0 - \tau) \leq (a + b)R,$$

lo que es absurdo. De la misma forma se prueba que $x(t) > -R$ para todo t. Por otra parte, es más que claro que la función $F(\phi) := a\phi(0) + b\phi(-\tau)$ es compacta, así que el teorema dice, entonces, que el ω-límite de cualquier ϕ está contenido en $\mathcal{I}$, el subconjunto invariante maximal de S.

Veamos que $\mathcal{I} = \{0\}$ y, en consecuencia, $\omega(\phi) = \{0\}$ para toda ϕ. En efecto, aunque S contiene 'muchas cosas', el subconjunto $\mathcal{I}$ es invariante, lo cual implica que $x_t(\psi) \in \mathcal{I}$ para todo $t \geq 0$ y toda $\psi \in \mathcal{I}$. Pero esto significa que $x_t(\psi)(0) = x_t(\psi)(-\tau) = 0$ para todo $t \geq 0$, es decir:

$$x(t, \psi) = x(t - \tau, \psi) = 0$$

para todo $t \geq 0$. Se deduce que $x(t, \psi) = 0$ para todo $t \geq -\tau$ y, en particular, $\psi \equiv 0$. Vemos, entonces, que el resultado del teorema se ajusta más o menos a lo que esperábamos, así que es hora de pasar a la

Demostración del teorema:

Ya sabemos (¿no?) que $\omega(\phi)$ es no vacío y compacto. Como ya vimos, el límite

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{V(X_{t+h}(\phi)) - V(X_t(\phi))}{h} = \dot{V}(X_t(\phi)) \leq 0$$

dice que la función $t \mapsto V(X_t(\phi))$ es decreciente. Además, se trata de una composición de funciones continuas y está acotada, pues $\mathcal{O}_+(\phi)$ tiene clausura compacta; en consecuencia, $V(X_t(\phi)) \searrow c$ para cierta constante c. Tomemos ahora $\psi \in \omega(\phi)$ y $t_n \to +\infty$ tales que $\Phi(t_n, \phi) \to \psi$. Destrabando lenguas, esto quiere decir que $X_{t_n}(\phi) \to \psi$; luego $V(X_{t_n}(\phi)) \to V(\psi)$, lo que permite concluir que $V(\psi) = c$. En consecuencia,

$$\omega(\phi) \subset \{\psi \in \overline{U} : V(\psi) = c\}.$$

Sabemos también (¿eh?) que $\omega(\phi)$ es invariante, de modo que, para todo $t \geq 0$ y toda $\psi \in \omega(\phi)$ se tiene que $X_t(\psi) \in \omega(\phi)$, de modo que $V(X_t(\psi)) = c$. Esto implica, finalmente, que

$$\dot{V}(\psi) = \lim_{h\to 0^+} \frac{V(X_h(\psi)) - V(\psi)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{c - c}{h} = 0.$$

Como el conjunto invariante maximal $\mathcal{I}$ es -quién lo hubiera dicho- invariante y maximal, se deduce que $\omega(\phi) \subset \mathcal{I}$. □

Para no entusiasmarnos más de la cuenta, conviene aclarar que la construcción de una función de Lyapunov es una tarea bastante artesanal y el esfuerzo no siempre lleva a buen puerto. En general, no es posible afirmar que, dado un equilibrio estable, existe siempre una función de Lyapunov. Para el problema lineal escalar, vimos que la existencia de V está garantizada bajo la hipótesis de que el origen es absolutamente estable (en rigor, se puede probar que son equivalentes), aunque para el caso de un sistema lineal se trata de un problema abierto: ¿la estabilidad absoluta implica la existencia de V? Para analizar esto con más detalle, consideremos el sistema

$$X'(t) = AX(t) + BX(t - \tau)$$

y supongamos que todos los autovalores de A tienen parte real negativa.[27] Con ayuda de alguien que se acuerde algo de álgebra lineal, consideremos una matriz simétrica C tal que $A^T C + CA = -D$, donde D es una matriz diagonal definida positiva. La función de Lyapunov que vamos a considerar ahora es

$$V(\phi) = \phi(0)^T C\phi(0) + \int_{-\tau}^{0} \phi(s)^T E\phi(s)\, ds$$

donde E es una matriz definida positiva que cumplirá el rol de μ en el caso anterior. Es fácil verificar (¡ah, siempre nos dicen lo mismo!) que

$$\dot{V}(\phi) = -\phi(0)^T D\phi(0) + \phi(0)^T (CB + B^T C)\phi(-\tau) + \phi(0)^T E\phi(0) - \phi(-\tau)^T E\phi(-\tau),$$

lo cual, para empeorar un poco las cosas, se puede escribir:

$$W^T M W$$

donde $W = \begin{pmatrix} \phi(0) \\ \phi(-\tau) \end{pmatrix}$ y M es la matriz definida en bloques

$$M = \begin{pmatrix} E - D & \frac{CB+B^T C}{2} \\ \frac{CB+B^T C}{2} & -E \end{pmatrix}.$$

Entonces la pregunta es: ¿bajo qué condiciones sobre A y B se puede garantizar la existencia de E tal que M es definida negativa?

Aunque la respuesta más honesta a la pregunta anterior sería, a grandes rasgos, decir 'ni idea', podemos intentar sacar algo en limpio para algunas situaciones específicas. Por ejemplo, sabemos que D es positiva, asi que eligiendo E tal que $D - E$ sea positiva, podemos estar seguros de que M es definida negativa cuando B está suficientemente cerca de la matriz nula. No es gran cosa, pero al menos resulta consistente con el hecho de que las soluciones de la ecuación característica

$$det(I - A - Be^{-\lambda\tau}) = 0$$

tienen parte real negativa para B en cierto entorno de 0.

9.3 Ejercicios

1. Sea $\Phi : \mathbb{R} \times E \to E$ un sistema semi-dinámico autónomo.
   (a) ¿Es cierto que toda solución $s : [0, +\infty) \to E$ se extiende a $\mathbb{R}$?
   (b) Sea $C \subset E$ un conjunto invariante. Dado $c \in C$, probar que existe una solución $s : \mathbb{R} \to E$ tal que $s(0) = c$. ¿Es única?
2. Sea $\Phi : \mathbb{R} \times E \to E$ un sistema dinámico autónomo. Probar que la función $\Phi(t, \cdot) : E \to E$ es biyectiva para todo t. ¿Qué ocurre si E es un espacio métrico?

[27] En el caso escalar, esto equivale obviamente a pedir la condición $a < 0$ que como sabemos, es necesaria para lograr estabilidad absoluta.

3. Dada la ecuación $x'(t) = f(x(t), x(t-\tau))$ con f de clase C^1, probar que si para $a < b$ se cumple

$$f(a, y) \geq 0 \geq f(b, z)$$

para $a \leq y, z \leq b$, entonces el conjunto

$$C := \{\phi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}) : a \leq \phi \leq b\}$$

es positivamente invariante.

4. Dado $a \neq 0$, construir una función de Lyapunov para la ecuación

$$x'(t) = ax(t)^3 + bx^3(t-\tau).$$

5. Consideremos la ecuación

$$x'(t) = bx(t-\tau)(1 - x(t)) - cx(t)$$

con $b > 0$, $c \geq 0$. Probar:

   (a) El conjunto $C := \{\phi : 0 \leq \phi \leq 1\}$ es positivamente invariante.

   (b) Si $c > b$, entonces 0 es un atractor global.

   (c) Volver a probar el punto anterior de otra manera. $\ddot{\smile}$

6. Sea $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 tal que, para cierto $R < 0$, vale

$$\langle f(u), u \rangle < 0 \qquad \text{para } \|u\| = R.$$

   (a) Probar que el sistema $x'(t) = f(x(t), x(t-\tau))$ tiene un punto de equilibrio $e \in B_R(0)$.

   (b) Verificar que si τ es pequeño entonces e es estable. ¿Se puede asegurar que es asintóticamente estable? ¿Qué ocurre cuando τ es grande?

7. Construir una función de Lyapunov para analizar la estabilidad del equilibrio positivo de la ecuación

$$x'(t) = x(t)(1 - ax(t) - bx(t-\tau)),$$

con $a > b > 0$.

10 Bifurcaciones de Hopf

En esta última sección veremos las nociones básicas de la teoría de bifurcaciones de Hopf. Intuitivamente, dado un sistema dinámico, se trata de encontrar soluciones periódicas que, bajo la mirada aprobatoria de Borges, se 'bifurcan' a partir de un punto de equilibrio.

Más en general, dado sistema dinámico que depende de un parámetro, una bifurcación es un cambio topológico en la estructura de las órbitas cuando dicho parámetro cruza cierto valor. Para fijar ideas, consideremos en primer lugar dos sistemas autónomos de ecuaciones ordinarias

$$X'(t) = f(X(t)), \qquad Y'(t) = g(Y(t))$$

con $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ funciones suaves. Se dice que los sistemas dinámicos asociados son *topológicamente equivalentes* cuando existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que las órbitas del primer sistema se transforman en órbitas del segundo sistema, preservándose la dirección en el tiempo. Una noción más general es la de equivalencia local: cuando se trata de sistemas con parámetros

$$X'(t) = f(X(t), \alpha), \qquad Y'(t) = g(Y(t), \beta)$$

con $f, g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ suaves tales que $f(0, \alpha) = g(0, \beta) = 0$, se dice que los sistemas son equivalentes cerca del origen si para α cercano a 0 existe $\beta = \beta(\alpha)$ continua e inyectiva y homeomorfismos $h_\alpha : U_\alpha \to V_\beta$ con U_α, V_β entornos del origen tales que $h_\alpha(0) = 0$ y las órbitas del primer sistema para α que caen en U_α se transforman en órbitas del segundo sistema para β, preservando la orientación. Una bifurcación consiste en un cambio de tipo topológico (es decir, la aparición de un retrato de fase no equivalente) a partir de la variación del parámetro α. Un ejemplo básico es el de la ecuación escalar de segundo orden

$$-u''(t) = \mu u(t)$$

que, como es usual, se transforma en un sistema $X'(t) = AX(t)$ mediante el cambio $x = u$, $y = u'$, con $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mu & 0 \end{pmatrix}$. Cuando $\mu < 0$, los autovalores de A son $\pm\sqrt{-\mu}$ y el origen es un equilibrio inestable; en cambio, para $\mu > 0$ los autovalores son $\pm\sqrt{\mu}i$ y todas las soluciones son periódicas de período $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$. En particular, si estamos interesados en las soluciones T-periódicas para cierto T fijo, entonces al aumentar μ obtenemos uno a uno los valores del espectro del operador $Lu := -u''$ (empezando obviamente por 0, que corresponde a las autofunciones constantes):

$$\sigma(L) = \left\{ \left(\frac{2k\pi}{T} \right)^2 : k \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Existe un teorema muy conocido, el de Hartman-Grobman, que dice que si un equilibrio es *hiperbólico*, es decir, si todos los ceros de la ecuación característica tienen parte real no nula, entonces el tipo topológico queda completamente caracterizado por la cantidad p de autovalores con parte real positiva del sistema linealizado.[28] Es claro, además, que dicha cantidad implica se mantiene por

[28] Por supuesto, en tal caso la cantidad de autovalores con parte real negativa es $n - p$. Esto no vale para las ecuaciones con retardo, aunque todavía es posible probar, bajo hipótesis apropiadas, que el sistema se comporta localmente como el linealizado. Ver [9]

perturbaciones pequeñas del parámetro α, ya que la función característica (en este caso, un polinomio) es continua respecto de α, de modo que los cambios de estructura deben esperarse cuando se pierde hiperbolicidad. En general, esto puede ocurrir cuando para cierto valor del parámetro un autovalor se vuelve 0, pero también cuando aparece un par conjugado de raíces imaginarias puras, dando lugar a órbitas cerradas. Tal es el caso, en general, de las bifurcaciones de Hopf.

Por ejemplo, consideremos como antes el sistema lineal $X' = AX$, ahora con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \mu \end{pmatrix}$$

cuyos autovalores para $|\mu| < 2$ son $\frac{\mu \pm \sqrt{4-\mu^2}\, i}{2}$. Mientras $\mu \neq 0$, el origen es un equilibrio hiperbólico, pero para $\mu = 0$ las raíces características son imaginarias puras y las órbitas son periódicas. Observemos que, cuando $0 < |\mu| < 2$, las órbitas son espirales que, para $t \to +\infty$, convergen al origen si $\mu < 0$ y se alejan si $\mu > 0$.

En el caso de ecuaciones con retardo, supondremos una familia

$$X'(t) = F(X_t, \mu)$$

en donde $F : C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es suave (tanto como haga falta) y 0 es punto de equilibrio para todo valor del parámetro μ, es decir:

$$F(0, \mu) = 0.$$

Nos interesa analizar el comportamiento del sistema a partir del estudio de la ecuación linealizada

$$X'(t) = L(\mu)(X_t),$$

donde $L(\mu)$ es la diferencial de F respecto de ϕ, es decir:

$$F(\phi, \mu) = L(\mu)(\phi) + R(\phi, \mu)$$

con $\frac{R(\phi,\mu)}{\|\phi\|_\infty} \to 0$ para $\|\phi\|_\infty \to 0$. Recordemos (¡claro, claro!) que, a pesar de que $L(\mu)$ es un operador lineal (continuo) definido en un espacio de dimensión infinita, la ecuación característica asociada al problema lineal tiene la forma

$$\det(\lambda I - L(\mu)_\lambda) = 0,$$

donde $L(\mu)_\lambda$ es una matriz hecha y derecha, cuyo coeficiente ij está dado por

$$(L(\mu)_\lambda)_{ij} = L(\mu)_i(\exp_\lambda e_j).$$

Bajo ciertas condiciones, veremos que si para $\mu = 0$ existen raíces simples $\lambda_0 = \pm i\nu_0$, entonces existe una rama de soluciones periódicas no constantes de la ecuación con período cercano a $\frac{2\pi}{\nu_0}$, correspondientes a valores pequeños de μ.

Antes de pasar al enunciado preciso, veamos un ejemplo típico, la ecuación

$$x'(t) = x(t-1)(x(t)^2 + x(t-1)^2 - \mu).$$

Para $\mu \leq 0$, el origen es el único equilibrio; en cambio, si $\mu > 0$ se tienen también los equilibrios $\pm\sqrt{\frac{\mu}{2}}$: a eso sí que podemos llamar un 'cambio de estructura'. Pero nos interesa todavía más lo que ocurre en otro valor de μ que descubrimos, como quien no quiere la cosa, linealizando. Dicho y hecho, en este caso

$$f(x,y) = y(x^2 + y^2 - \mu) = -\mu y + R(x,y)$$

de modo que la linealización en el origen es

$$x'(t) = -\mu x(t-1).$$

Esta no es otra que la ecuación lineal con feedback que estudiamos en la sección 3. Al cabo de nuestro análisis, por ese entonces todavía ingenuo, para el valor $\mu = \frac{\pi}{2}$ vimos aparecer (a los fines literarios, se puede agregar aquí: 'súbitamente' o 'ante nuestros propios ojos') soluciones periódicas.[29] El equilibrio nulo es asintóticamente estable para $0 < \mu < \frac{\pi}{2}$ y luego se vuelve inestable. Vamos a ver que el problema no lineal presenta un fenómeno similar.

En efecto, podemos intentar directamente una función que tenga la pinta $x(t) := r\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$, para la cual vale

$$x'(t) = -\frac{\pi r}{2}\text{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right), \qquad x(t-1) = r\cos\left(\frac{\pi t}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = r\text{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right),$$

$$x(t)^2 + x(t-1)^2 = r^2.$$

Luego, basta elegir r tal que $-\frac{\pi}{2} = r^2 - \mu$, es decir: $r = \pm\sqrt{\mu - \frac{\pi}{2}}$. Dicho de otra manera, se tiene un *continuo* de soluciones periódicas $x_r = r\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ correspondientes a $\mu = \mu(r) = r^2 + \frac{\pi}{2}$. Esto es, a grandes rasgos, lo que predice el teorema de Hopf, que pronto veremos (¡paciencia! Ya llegará).

Cabe sospechar, sin embargo, que otra vez hemos sido engañados, pues las soluciones que aparecieron tienen todas *exactamente* el mismo período: observando mejor el ejemplo, entendemos que la trampa consiste en que la tan mentada no-linealidad es algo artificial y fue inventada con toda la intención de que (Pitágoras mediante) al evaluarla sobre el lugar indicado se comporte en realidad como un problema lineal. ¿Y cuál es 'el lugar indicado'? Por supuesto, el subespacio generado por $\{\text{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right), \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\}$, que tiene todo el aspecto de ser el núcleo de algún operador. Esto nos lleva a hablar, una vez más, de los problemas resonantes (no está permitido hacer aquí el chiste de que 'estamos resonados').

En el caso anterior, el operador es $Lx(t) := x'(t) + \frac{\pi}{2}x(t-1)$; a fin de buscar soluciones $\frac{\pi}{2}$-periódicas, el problema anterior se puede pensar como

$$Lx(t) = x(t-1)(x(t)^2 + x(t-1)^2 - \mu_0)$$

[29] Observemos también que, cuando $\mu \neq 0$, el origen es el único equilibrio, mientras que para $\mu = 0$ cualquier constante es un equilibrio, lo que nos hace intuir que 'algo especial' ocurre cuando se atraviesa dicho valor.

donde $\mu_0 := \mu - \frac{\pi}{2}$. En general, vamos a ver una manera de buscar soluciones T-periódicas de una ecuación de la forma $Lx = Nx$, donde L es un operador diferencial lineal no inversible en el espacio C_T de funciones continuas T-periódicas y $N : C_T \to C_T$ es no lineal.

Para comenzar, vamos a ver el caso, bastante más sencillo, de resonancia en el autovalor nulo. Consideremos la ecuación

$$X'(t) = F(t, X_t) := NX(t)$$

con $F : \mathbb{R} \times C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ continua y T-periódica en t. En la sección 8.1 vimos una forma de encontrar soluciones por medio del teorema de Schauder, intentando 'zafar' de la resonancia (por decirlo de un modo elegante). Pero ahora apelaremos a toda nuestra sangre fría para atacar la resonancia de frente.

Para empezar, observemos que $LX := X'$ es, interpretado adecuadamente un operador de Fredholm. Esto es lo que se propone probar, más en general, en el ejercicio 6 de la sección 8.1, aunque para mayor claridad lo veremos a continuación de manera directa.

Por un lado, es obvio que el núcleo de L es el conjunto de funciones constantes (identificado con $\mathbb{R}^n$); por otro lado, veamos que su imagen es el conjunto de funciones de promedio 0 , que es precisamente el complemento del subespacio de las funciones constantes.[30]

En efecto, escribiendo la solución del problema $X'(t) = \varphi(t)$ en la forma $X(t) = X_0 + \int_0^t \varphi(s)\, ds$, se verifica que existe solución T-periódica si y solo si $\overline{\varphi} := \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t)\, dt = 0$. Notemos, además, que X_0 se puede elegir libremente, hecho que se debe justamente a que $\ker(L) = \mathbb{R}^n$. Pero esta solución es única si pedimos, por ejemplo, que la solución tenga promedio nulo: para esto, alcanza con elegir el (ahora sí) único X_0 tal que

$$X_0 + \frac{1}{T}\int_0^T \int_0^t \varphi(s)\, ds\, dt = 0$$

En definitiva, lo que hemos hecho es definir un operador inverso a derecha de L, dado por $K\varphi = X$. Es fácil verificar (para usos múltiples) que K es compacto, por ejemplo empleando la fórmula explícita

$$K\varphi(t) := -\frac{1}{T}\int_0^T \int_0^t \varphi(s)\, ds\, dt + \int_0^t \varphi(s)\, ds.$$

En este contexto, observemos que $X \in C_T$ es solución del problema $LX = NX$ si y solo si

$$X - \overline{X} = K(NX).$$

Sin embargo, esta última igualdad lleva implícita una segunda propiedad para NX, necesaria para formar parte del selectísimo conjunto de funciones que se

[30] Por supuesto, el uso del artículo determinado no es del todo correcto, aunque es cierto que, si pensamos en el producto interno de $L^2(0, T)$, entonces se trata efectivamente del complemento ortogonal.

pueden meter dentro de K: su promedio debe ser nulo. Esto hace que sea difícil trabajar con la ecuación anterior, lo que lleva a una primera primera respuesta instintiva ante la dificultad: intentar trabajar en el conjunto $\{X : \overline{NX} = 0\}$ que, con un poco de suerte, es una variedad. Sin embargo, no hace falta pensarlo demasiado para llegar a la conclusión de que conviene buscar otra opción más cómoda.

A tal fin, primero notemos que nos podemos despreocupar por completo de la restricción impuesta por el dominio de K, justamente proyectando NX sobre dicho conjunto: la ecuación anterior se convierte entonces en

1. $X - \overline{X} = K(NX - \overline{NX})$.

Claro que esto no alcanza, ya que además debe valer la llamada *ecuación de bifurcación*:

2. $\overline{NX} = 0$

En resumen, lo anterior muestra que $X \in C_T$ es solución si y solo si se verifican las propiedades 1 y 2. Pero, mejor todavía, podemos resumir ambas propiedades en una única ecuación de punto fijo:

$$X = \overline{X} + \overline{NX} + K(NX - \overline{NX}). \tag{28}$$

10.1 Método de averaging

A modo de ejemplo (algo tendencioso), veamos una aplicación clásica: el método llamado de *averaging*, que sirve para resolver, para ε cercano a 0, ecuaciones del tipo

$$X'(t) = \varepsilon F(t, X_t, \varepsilon).$$

donde $F : \mathbb{R} \times C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es una función suave y T-periódica en t. Haciendo caso omiso de las críticas, llamaremos f a su restricción al subespacio de funciones constantes, es decir, la función $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dada (de un modo un tanto tautológico) por $f(t, X, \varepsilon) := F(t, X, \varepsilon)$. Uno podría preguntarse para qué pedimos 'suavidad' cuando antes alcanzaba con 'continuidad', pero la respuesta es fácil de adivinar: inspirados por (28), vamos a usar el teorema de la función implícita para encontrar una rama de ceros de la ecuación

$$\mathcal{F}(X, \varepsilon) = 0,$$

donde $\mathcal{F}$ es la función definida por

$$\mathcal{F}(X, \varepsilon) := X - \left[\overline{X} + \overline{N_\varepsilon X} + \varepsilon K(N_\varepsilon X - \overline{N_\varepsilon X})\right],$$

con $N_\varepsilon X(t) := F(t, X_t, \varepsilon)$.

El lector despierto (¿hmmmmm?) habrá observado que esta definición no es *exactamente* igual a la de antes, ya que al término $\overline{N_\varepsilon X}$ en realidad le hemos birlado un ε: total, ¿quién se fija? Justamente, ese es el truco clave para que la cosa funcione: como no nos interesan las soluciones con $\varepsilon = 0$ pues ya las conocemos (son, lisa llanamente, los elementos de $\mathbb{R}^n$), nuestra definición de $\mathcal{F}$ apunta a que podamos 'ramificar' ceros a partir de ciertas soluciones especiales, aquellas que verifican $\mathcal{F}(X_0, 0) = 0$. Notemos que, aunque la función $\mathcal{F}(\cdot, 0)$ está definida sobre el espacio C_T, cualquiera de sus ceros es necesariamente constante. De esta forma, aunque el panorama es aún bastante sombrío, empieza a mejorar, pues la restricción de dicha función a $\mathbb{R}^n$ tiene un aspecto mucho más agradable. En efecto, cuando X es constante vale $\overline{X} = X$ y entonces

$$\mathcal{F}(X, 0) = -\overline{N_0 X} = -\frac{1}{T}\int_0^T f(t, X, 0)\, dt := \varphi(X),$$

donde (omitiendo un nuevo isomorfismo, ya somos expertos en eso) φ es ahora una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. Con la idea de usar el teorema de la función implícita, necesitamos algún isomorfismo, asi que pediremos que X_0 sea un cero de φ tal que $D\varphi(X_0)$ sea inversible.

Llegado este punto, después de haber lidiado con operadores diferenciables en espacios de Banach, puede resultar preocupante que $D\varphi(X_0)$ no sea, en el fondo, más que una simple matricita. ¿Alcanzará esto para asegurar que la función $D_X\mathcal{F}(X_0, 0) : C_T \to C_T$ es un isomorfismo, tal como pretenden los siempre exigentes usuarios del teorema de la función implícita? Para ganar tiempo, calculemos al menos cuánto vale esta última diferencial, mirando directamente las derivadas direccionales:

$$D_X\mathcal{F}(X_0, 0)(\psi) = \lim_{h\to 0} \frac{\mathcal{F}(X_0 + h\psi, 0) - \mathcal{F}(X_0, 0)}{h}.$$

En lo anterior, cabe aclarar que si bien $X_0 \in \mathbb{R}^n$, lo estamos mirando dentro de C_T; por eso hemos considerado todas las direcciones, dadas por cualquier $\psi \in C_T$. Y si bien $\mathcal{F}(X_0, 0)$ vale 0, conviene tenerlo presente a la hora de calcular el anterior límite metiéndolo (como corresponde, sin preocuparnos por nada) dentro de la integral. Pero basta de dar vueltas y hagámoslo de una vez:

$$\frac{\mathcal{F}(X_0 + h\psi, 0) - \mathcal{F}(X_0, 0)}{h} = \psi - \overline{\psi} + \frac{1}{T}\int_0^T \frac{F(t, X_0 + h\psi_t, 0) - F(t, X_0, 0)}{h}\, dt$$

y, tomando límite,

$$D_X\mathcal{F}(X_0, 0)(\psi) = \psi - \overline{\psi} - \frac{1}{T}\int_0^T D_X F(t, X_0, 0)(\psi_t)\, dt.$$

Esto alcanza para probar directamente que $D_X\mathcal{F}(X_0, 0)$ es biyectiva... y el resto depende de usted[31] (o, mejor dicho, del teorema de la aplicación abierta). En efecto, notemos que

$$D_X\mathcal{F}(X_0, 0)(\psi) = \xi \Leftrightarrow \xi = \psi - w,$$

[31] Para lectores menos vetustos que el autor, conviene aclarar que la frase pertenece al clásico televisivo *Las manos mágicas* en el que, entre otros trucos, se mostraba cómo calcular a gran velocidad la derivada de Fréchet de operadores complicadísimos.

donde

$$w = \overline{\psi} + \frac{1}{T}\int_0^T D_X F(t, X_0, 0)(\psi_t)\, dt \in \mathbb{R}^n.$$

Pero en tal caso $\overline{\xi} = \overline{\psi} - w$ y vale

$$\overline{\xi} = -\frac{1}{T}\int_0^T D_X F(t, X_0, 0)(w + \xi_t)\, dt$$

$$= -\frac{1}{T}\int_0^T D_X F(t, X_0, 0)(w)\, dt - \frac{1}{T}\int_0^T D_X F(t, X_0, 0)(\xi_t)\, dt.$$

Resta observar ahora que, siendo w constante, vale

$$D_X F(t, X_0, 0)(w) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t, X_0 + hw, 0) - f(t, X_0, 0)}{h} = D_X f(t, X_0, 0)(w),$$

lo que nos permite finalmente escribir (otra vez, intercambiando límites con integrales):

$$\overline{\xi} = -D\varphi(X_0)(w) - \frac{1}{T}\int_0^T D_X F(t, X_0, 0)(\xi_t)\, dt.$$

Ya estamos muy cerca de la conclusión: como $D\varphi(X_0)$ es inversible (¡miren a nuestra matricita!), para toda $\xi \in C_T$ existe un único $w \in \mathbb{R}^n$ que verifica lo anterior y entonces $\psi = \xi + w$ es la (única) solución de la ecuación $D_X\mathcal{F}(X_0, 0)(\psi) = \xi$. El teorema de la aplicación abierta es el que termina de garantizar que $\xi \mapsto \psi$ es continua, vale decir, que $D_X\mathcal{F}(X_0, 0)$ es un isomorfismo. Una vez superados los anteriores momentos de alta excitación, podemos ahora serenarnos y, ya más relajados, explicar con tono triunfal: existen $\varepsilon_0 > 0$, $U \subset C_T$ entorno de X_0 y una única función suave $X : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to U$ tal que $X(0) = X_0$ y $\mathcal{F}(X(\varepsilon), \varepsilon) = 0$. Lo cual, dicho de otra forma, significa que para ε chico hay una (única en U) solución $X(\varepsilon)$ del problema T-periódico.

Pero siempre hay alguien que arruina los triunfos; en este caso, nosotros mismos[32] con dos preguntas. La primera: ¿qué ocurre si intentamos aplicar el método a un problema autónomo $X'(t) = \varepsilon F(X_t, \varepsilon)$? El nombre *averaging* hace sospechar que la integración respecto de t no es un detalle menor y, en efecto, la cosa pierde toda su gracia. No se trata de que el teorema de la función implícita no se aplique, solo que ahora φ coincide con $f(\cdot, 0)$ y, en consecuencia, simplemente detecta la existencia de una rama de soluciones constantes (equilibrios). Esto no es casualidad, porque se trata de un problema de resonancia en el autovalor nulo: en las próximas páginas veremos que las bifurcaciones de Hopf se buscan justamente cuando hay autovalores de la forma $\lambda = i\nu_0$ con $\nu_0 \neq 0$.

Y la segunda pregunta es, más bien, una objeción. Según hemos anticipado, al cruzar un valor de bifurcación de Hopf aparecen soluciones con período 'aproximadamente' iguales a cierto T_0, pero que no están fijos. ¿De qué nos sirve aprender a buscar soluciones T-periódicas para un T específico? Dejamos

[32]Se puede traer a colación el escrito de S. Freud sobre *el que fracasa al triunfar*.

esto en suspenso por unos instantes, aunque nos permitimos augurar que -como antes, con algo de sangre fría- la situación finalmente logra acomodarse para que podamos volver a exclamar: ¡que sigan los éxitos!

10.2 Situación general

En la sección previa vimos una manera de resolver, empleando el teorema de la función implícita, ciertos problemas resonantes que se pueden pensar como perturbaciones de algún problema cuyas soluciones son ya conocidas. Sin embargo, el caso analizado, de resonancia en el autovalor nulo, no se aplica a nuestros propósitos de entender el teorema de Hopf. Conviene entonces repasar el método, pero ahora en un contexto más general. Por simplicidad, mantendremos por ahora la forma del problema anterior

$$LX = \varepsilon N_\varepsilon X,$$

aunque el planteo puede generalizarse todavía más. La diferencia es que ahora $L : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ es cualquier operador lineal de Fredholm de índice 0, en el sentido de que los espacios de partida y llegada (para nuestras aplicaciones, C_T en ambos casos) pueden escribirse respectivamente como sumas directas

$$\mathcal{V} = \ker(L) \oplus E, \qquad \mathcal{W} = \mathrm{Im}(L) \oplus F$$

con $\dim(\ker(L)) = \dim(F) < \infty$. Denotemos $K : \mathrm{Im}(L) \to E$ el inverso a derecha de L y fijemos proyectores $P : \mathcal{V} \to \ker(L)$, $Q : \mathcal{W} \to F$ y un isomorfismo $J : F \to \ker(L)$. Para $\varepsilon \neq 0$, la ecuación $LX = \varepsilon N_\varepsilon X$ equivale, como en el caso anterior, a dos igualdades:

1. $X - PX = \varepsilon K(N_\varepsilon X - QN_\varepsilon X)$,

y la ecuación de bifurcación

2. $QN_\varepsilon X = 0$.

Observemos que se trata de ecuaciones en espacios diferentes, así que para reunirlas en una sola de la forma $\mathcal{F}(X, \varepsilon) = 0$ como hicimos en el ejemplo previo, necesitamos hacer uso del isomorfismo J. Con esta idea en mente, definimos

$$\mathcal{F}(X, \varepsilon) := X - PX - JQN_\varepsilon X - \varepsilon K(N_\varepsilon X - QN_\varepsilon X)$$

y verificamos que se cumple lo que queríamos. En efecto, si para $X \in C_T$ vale $\mathcal{F}(X, \varepsilon) = 0$, entonces aplicando P de ambos lados se deduce (pues $PK = 0$) que $JQN_\varepsilon X = 0$. Luego $QN_\varepsilon X = 0$ y $X = PX + \varepsilon KN_\varepsilon X$, lo que muestra, aplicando L, que $LX = \varepsilon N_\varepsilon X$. Recíprocamente, si $X \in C_T$ es solución del problema, entonces $X - PX = \varepsilon KN_\varepsilon X$. Por otra parte, $QLX = 0$, de donde se deduce que $\varepsilon QN_\varepsilon X = 0$ y, finalmente, $\mathcal{F}(X, \varepsilon) = 0$.

A fin de aplicar ahora el teorema de la función implícita, observemos como antes que

$$\mathcal{F}(X, 0) = 0 \Leftrightarrow X \in \ker(L) \text{ y } JQN_0 X = 0.$$

De este modo, podemos definir la función $\varphi : \ker(L) :\to \ker(L)$ dada por $\varphi(X) := JQN_0X$, que permitirá asegurar la existencia de soluciones para ε chico, siempre que exista $X_0 \in \ker(L)$ tal que

- $\varphi(X_0) = 0$.
- $D\varphi(X_0)$ inversible.

Esto se ve exactamente igual que en el ejemplo anterior, pues se puede verificar (esto queda como ejercicio) que

$$D_X\mathcal{F}(X_0, 0)(\psi) = \psi - P(\psi) - JQ(DN_0X_0(\psi))$$

y luego

$$D_X\mathcal{F}(X_0, 0)(\psi) = \xi \Leftrightarrow \xi = \psi - w$$

con $w = P\psi + JQ(DN_0X_0(\psi)) \in \ker(L)$. En consecuencia, la última igualdad equivale a

$$D_X\mathcal{F}(X_0, 0)(w) = \xi - D_X\mathcal{F}(X_0, 0)(\xi).$$

Pero tanto X_0 como el w que buscamos están en $\ker(L)$, de modo que

$$D_X\mathcal{F}(X_0, 0)(w) = \lim_{h\to 0} \frac{JQ(N_0(X_0 + hw)) - JQ(N_0(X_0))}{h} = D\varphi(X_0)(w).$$

Esto prueba que existe un único w que satisface lo pedido; de esta forma, $D_X\mathcal{F}(X_0, 0)$ es biyectiva y, por el teorema de la aplicación abierta, se deduce que es un isomorfismo.

A modo de ejemplo, consideremos la ecuación

$$u''(t) + u(t) = \varepsilon g(u(t), u(t - \tau)) := \varepsilon Nu(t),$$

con $N : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$. En este caso $Lu := u'' + u$, cuyo núcleo en $C_{2\pi}$ es el subespacio generado por $\{\cos t, \operatorname{sen} t\}$, mientras que $\operatorname{Im}(L)$ es el complemento ortogonal de $\ker(L)$ respecto del producto interno de $L^2(0, 2\pi)$, vale decir, el conjunto de aquellas $\varphi \in C_T$ tales que

$$\int_0^{2\pi} \varphi(t)\cos t\, dt = \int_0^{2\pi} \varphi(t)\operatorname{sen} t\, dt.$$ [33]

En este caso vale, entonces, $P = Q$ y $J = Id$. Para $u \in \ker L$, es decir, $u(t) = a\cos t + b\operatorname{sen} t$, calculamos $\varphi(u) = QN(u) = \alpha\cos t + \beta\operatorname{sen} t$, donde α y β son los coeficientes de Fourier

$$\alpha = \alpha(u) := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(u(t), u(t - \tau))\cos t\, dt,$$

$$\beta = \beta(u) := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(u(t), u(t - \tau))\operatorname{sen} t\, dt.$$

[33] Esto sale haciendo la cuenta o, más directamente empleando la simetría de L.

Para aquellos que pensaban que la expresión 'ignorar los isomorfismos' no era más que una forma de hablar, presentamos aquí un ejemplo bien tangible de tal ignorancia, pensando directamente $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como $\varphi(a,b) := (\alpha, \beta)$. De esta forma, la diferencial de φ se obtiene calculando las derivadas parciales; por ejemplo, la derivada $\frac{\partial \alpha}{\partial a}(a,b)$ vale:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial g}{\partial x}(u(t),u(t-\tau))\cos^2 t + \frac{\partial g}{\partial y}(u(t),u(t-\tau))\cos t\cos(t-\tau)\right)dt.$$

Un caso especialmente sencillo está dado por $g(x,y) = y$, es decir, la ecuación lineal $u''(t) + u(t) = \varepsilon u(t-\tau)$, para la cual se obtiene la matriz ignorante

$$D\varphi(a,b) = \frac{1}{\pi}\begin{pmatrix} \int_0^{2\pi}\cos t\cos(t-\tau)\,dt & \int_0^{2\pi}\operatorname{sen} t\cos(t-\tau)\,dt \\ \int_0^{2\pi}\cos t\operatorname{sen}(t-\tau)\,dt & \int_0^{2\pi}\operatorname{sen} t\operatorname{sen}(t-\tau)\,dt \end{pmatrix}$$

que milagrosamente (léase: haciendo cuentas) se transforma en

$$D\varphi(a,b) = \begin{pmatrix} \cos\tau & \operatorname{sen}\tau \\ -\operatorname{sen}\tau & \cos\tau \end{pmatrix}.$$

En definitiva, la matriz será ignorante pero al menos es inversible, lo que refleja el hecho obvio (¿por qué?) de que la única solución para $\varepsilon \neq 0$ chico es la trivial. Pero además dice que para perturbaciones pequeñas de g hay una única solución 2π-periódica cerca del origen.

Pasemos ahora al teorema. Como dijimos, queremos aplicar lo anterior para estudiar el comportamiento de un sistema $X'(t) = F(X_t, \mu)$ cerca de un valor de bifurcación de Hopf. Recordemos que F es suave y vale $F(0,\mu) = 0$ para todo μ, lo que permite escribir $F(\phi,\mu) = L(\mu)\phi + R(\phi,\mu)$ donde $L(\mu) := D_\phi F(0,\mu)$ y R es el resto de Taylor. Sin pérdida de generalidad, vamos a suponer que el valor de bifurcación es $\mu = 0$, lo que nos lleva a formular nuestra principal hipótesis de la siguiente manera:

(H1) La ecuación lineal $X'(0) = L(0)X_t$ tiene una raíz característica simple y puramente imaginaria $\lambda_0 = i\nu_0$ con $\nu_0 > 0$.

Para fijar ideas, supongamos por un momento que se trata de una ecuación escalar, de modo que la hipótesis anterior dice que $\cos(\nu_0 t)$ y $\operatorname{sen}(\nu_0 t)$ están en el núcleo del operador $x' - L(0)x$ en el espacio de funciones T_0-periódicas, donde $T_0 := \frac{2\pi}{\nu_0}$. Pero, además, queremos que no haya más cosas en ese núcleo, de modo que impondremos una hipótesis adicional: para cualquier otra raíz característica $\lambda \neq \pm i\nu_0$ vale

$$\lambda \neq m\lambda_0 \qquad \forall\, m \in \mathbb{Z}. \tag{29}$$

En efecto, si $\lambda = im\nu_0$ fuera raíz característica para algún $m > 1$, entonces $\cos(m\nu_0 t)$ y $\operatorname{sen}(m\nu_0 t)$ serían soluciones $\frac{2\pi}{m\nu_0}$-periódicas que, en particular, pertenecen al espacio C_{T_0}.

Como vimos en la sección 6, la ecuación característica es

$$h(\lambda,\mu) := \det(\lambda I - L(\mu)_\lambda) = 0,$$

así que nuestra primera hipótesis dice que $h(\lambda_0,0) = 0$ y $\frac{\partial h}{\partial\lambda}(\lambda_0,0) \neq 0$, en donde (aclaramos, por las dudas) $\frac{\partial}{\partial\lambda}$ se usa para denotar la derivada de $h(\cdot,0)$ como función de variable compleja. Por el teorema de la función implícita (la gran estrella de estos últimos tiempos), existen $\mu_0 > 0$ y una curva suave $\lambda : (-\mu_0,\mu_0) \to \mathbb{C}$ tal que $\lambda(\mu)$ es raíz característica simple de $L(\mu)$ y $\lambda(0) = \lambda_0$. Achicando μ_0 si hace falta, podemos suponer que $\mathrm{Im}(\lambda(\mu)) \neq 0$, es decir, que la curva $\lambda(\mu)$ se mantiene en el semiplano (abierto) superior. La siguiente hipótesis consiste en que además sea transversal al eje imaginario, lo que se traduce en una condición sencilla: $\mathrm{Re}(\lambda'(0)) \neq 0$. Por conveniencia, invirtiendo la orientación de μ si hace falta, podemos suponer también que

$$\mathrm{Re}(\lambda'(0)) > 0, \tag{30}$$

es decir, la curva pasa del segundo cuadrante al primero por el valor λ_0 (la rima es involuntaria. Hasta aquí, veníamos hablando en prosa sin saberlo).

Como anticipamos, la idea es emplear el teorema de la función implícita para deducir la existencia de una rama de soluciones T-periódicas no constantes, con T cercano a T_0 y μ chico. Esto nos permite retomar una pregunta que dejamos picando unas páginas atrás: ¿de qué sirve haber aprendido a encontrar soluciones con período fijo, si en realidad va a ser variable y -para peor-, vaya uno a saber de qué manera? Pero aquí es donde recobramos nuestra tan promocionada (en realidad algo inflada... así es el marketing) sangre fría para proponer la transformación $Y(t) = X(\eta t)$ con η cercano a 1.

Así, el problema original

$$X'(t) = F(X_t,\mu) \tag{31}$$

se convierte en uno equivalente con período fijo. Pero no todo es soplar y hacer botellas: a causa del retardo, nos veremos obligados a efectuar unos retoques. En efecto, al reemplazar en la ecuación obtenemos

$$Y'(t) = \eta X'(\eta t) = \eta F(X_{\eta t},\mu)$$

que *no es* igual a $\eta F(Y_t,\mu)$, como ingenuamente podíamos esperar. Sin embargo, la cosa se arregla observando que

$$X_{\eta t}(\theta) = X(\eta t + \theta) = X\left(\eta\left(t + \tfrac{\theta}{\eta}\right)\right) = Y\left(t + \tfrac{\theta}{\eta}\right).$$

Luego, el nuevo problema a considerar es

$$Y'(t) = \eta F(Y_{t,\eta},\mu) \tag{32}$$

donde $Y_{t,\eta}(\theta) := Y(t + \frac{\theta}{\eta})$. De acuerdo con la definición,

$$Y(t + T_0) = X(\eta(t + T_0)) = X(\eta t + \eta T_0),$$

de modo que X es ηT_0-periódica si y solo si Y es T_0-periódica.

Teniendo en cuenta el desarrollo de Taylor de primer orden para F y el hecho de que suponemos η cercano a 1, la idea consiste en pensar la ecuación (32) como una perturbación de la ecuación lineal $Y'(t) = L(0)Y_t$. En otras palabras, consideraremos el espacio C_{T_0} y el operador resonante $\mathcal{L}Y := Y'(t) - L(0)Y_t$. La ecuación se escribe entonces como

$$\mathcal{L}Y = N_{\mu,\eta}Y,$$

con

$$N_{\mu,\eta}Y(t) = \eta F(Y_{t,\eta}, \mu) - L(0)Y_t = \eta L(\mu)Y_{t,\eta} - L(0)Y_t + \eta R(Y_{t,\eta}, \mu)$$

donde R es el resto de Taylor. Y, como se puede adivinar, las hiṕotesis están puestas para que todo funcione bien. Para el lector rebosante de optimismo, cabe aclarar que la aplicación del método anterior para $\eta \approx 1$ y $\mu \approx 0$ no es inmediata.[34] Pero apelando a la solidaridad o, mejor, a la fe ciega del lector obtenemos (dijo el mosquito) el teorema de Hopf:

Teorema 10.1 *Supongamos que valen (H1), (29) y (30). Entonces existen $\varepsilon_0 > 0$, funciones pares $\mu(\varepsilon) \geq 0$ y $T(\varepsilon) > 0$ para $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ con $\mu(0) = 0$, $T(0) = T_0 := \frac{2\pi}{\nu_0}$ y soluciones $T(\varepsilon)$-periódicas no constantes $p_\varepsilon = \varepsilon q_\varepsilon$ del problema (31), con q_0 una solución T_0-periódica del problema lineal $X' = L(0)X_t$. Más aún, estas soluciones son localmente únicas salvo cambios de fase, es decir: existen μ_0, β_0, $\delta > 0$ tales que si X es una solución T-periódica para algún $\mu \in (-\mu_0, \mu_0)$ tal que $\|x\|_\infty < \beta_0$ y $|T - T_0| < \delta$ entonces $X(t) = p_\varepsilon(t + s, \varepsilon)$ para algún $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ y algún s.*

La demostración rigurosa se puede mirar en el libro de Hale (en caso de dificultad, siempre queda el recurso extremo de invocar aquel célebre precepto: *se mira y no se toca*). Pero para los objetivos de este trabajo es suficiente observar que se ve reflejada la situación que anticipamos, en forma intuitiva, en las páginas previas. A decir verdad, el teorema dice un poco más: al mirar la 'letra chica', vemos que en realidad la perturbación se escribe en términos de un parámetro ε; de esta forma, tanto μ como el período $T = \eta T_0$ de las soluciones obtenidas son funciones de ε. Esto da la pista justamente de cómo se bifurca una rama de soluciones a partir de un elemento del núcleo de $\mathcal{L}$, que es el q_0 del enunciado.

Concretamente, el teorema nos asegura que existe un intervalo $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ y funciones pares $\mu(\varepsilon) \geq 0$ y $T(\varepsilon) = \eta(\varepsilon)T_0 > 0$; en rigor, si se pide mayor suavidad para F entonces se puede decir algo todavía más preciso:

$$\mu(\varepsilon) = \mu_1\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)$$

$$T(\varepsilon) = T_0[1 + \tau_1\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)].$$

[34]A modo de entretenimiento, se puede observar en primer lugar que ahora $\mathcal{L}$ no es simétrico respecto del producto de L^2, así que para encontrar su imagen habría que calcular su adjunta.

Cabe mencionar, además, que estos desarrollos son algo más que una 'cara bonita', pues en realidad brindan información adicional sobre la estabilidad de las soluciones (entendida de la misma forma en que definimos la estabilidad de un equilibrio). En efecto, si todas las otras raíces características para $\mu = 0$ tienen parte real negativa, entonces p_ε es asintóticamente estable cuando $\mu_1 > 0$ (bifurcación supercrítica) e inestable cuando $\mu_1 < 0$ (bifurcación subrcrítica). Por supuesto, puede ocurrir también que $\mu_1 = 0$: el caso extremo es el de la ecuación lineal

$$x'(t) = \left(\mu - \frac{\pi}{2}\right) x(t-1)$$

para la cual $\mu \equiv 0$ y $T \equiv 4$. Cosa bastante evidente, por otra parte, ya que las soluciones 4-periódicas para $\mu = 0$ son combinaciones lineales de $\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$ y $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right)$. Tales objetos se pueden escribir en la forma $x(t) = \rho\cos\left(\frac{\pi t}{2} - \omega\right)$, de modo que se verifica la tesis del teorema con $q_\varepsilon(t) := \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$.

A modo de ejemplo algo más sofisticado, veamos cómo calcular de manera cuidadosa (bah, ¡más o menos!) la bifurcación de Hopf para la ecuación

$$x'(t) = -\alpha x(t-1)(x(t)+1). \tag{33}$$

A pesar de tratarse de un problema más simple que la ecuación algo sospechosa que vimos al comienzo de la sección, la existencia de soluciones periódicas no constantes no es tan fácil de probar de manera directa (el lector interesado puede verlo -y tocarlo- en el libro de Hale). La linealización da, otra vez, una ecuación que ya conocemos bien,

$$x'(t) = -\alpha x(t-1),$$

que tiene raíces características simples $\pm\frac{\pi}{2}i$ para $\alpha = \frac{\pi}{2}$, mientras que las restantes raíces características tienen parte real negativa (ver sección 3). Para ubicarnos en el contexto del teorema, llamemos $\mu = \alpha - \frac{\pi}{2}$ y entonces resulta:

$$h(\lambda, \mu) = \lambda + \left(\mu + \frac{\pi}{2}\right) e^{-\lambda}.$$

Derivando en forma implícita en $\mu = 0$ la igualdad $h = 0$ se obtiene

$$\lambda'(0) + e^{-\lambda(0)} - \frac{\pi}{2}\lambda'(0)e^{-\lambda(0)} = 0$$

y, teniendo en cuenta que $\lambda(0) = \frac{\pi}{2}i$, calculamos:

$$\lambda'(0) = \frac{i}{1 + \frac{\pi}{2}i} = \frac{\frac{\pi}{2} - i}{1 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}.$$

En consecuencia, $\mathrm{Re}(\lambda'(0)) > 0$, así que todas las hipótesis del teorema de Hopf se satisfacen... ¡Bravo! Pero al cabo de tanta satisfacción, no está mal preguntarse: ¿de qué tipo de bifurcación se trata? El teorema nos dice que para ε chico existen $\mu(\varepsilon)$ y soluciones $T(\varepsilon)$-periódicas no constantes con $T(\varepsilon)$ cercano a $\frac{2\pi}{\pi/2} = 4$ y $\mu(\varepsilon) \approx \mu_1\varepsilon^2$. Nuestra satisfacción llegaría a niveles nunca antes alcanzados si pudiéramos conocer al menos el signo de μ_1, para poder decir si las soluciones obtenidas son estables (o se hacen).

Veamos, en primer lugar, quién podría jugar el papel de q_0. Según mencionamos pocos párrafos atrás, los elementos del núcleo del operador $\mathcal{L}x(t) := x'(t) + \frac{\pi}{2}x(t-1)$ en el espacio C_4 de funciones $4-$periódicas se pueden escribir en la forma $\rho\cos\left(\frac{\pi}{2}t - \omega\right)$. Además, como buscamos después soluciones de la pinta $\varepsilon q_\varepsilon$, el valor ρ se lo podemos enchufar al ε y, mediante un elegante cambio de fase, podemos suponer que $\omega = 0$. En definitiva, todo esto para decir que nuestro punto de partida va a ser, lisa y llanamente, $q_0(t) := \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.

Por otra parte, vimos que la manera de transformar soluciones de período "casi" igual a 4 en soluciones 4-periódicas consiste en definir $y(t) := x(\eta t)$, de modo que la ecuación se convierte en

$$y'(t) = \eta x'(\eta t) = -\eta\alpha x(\eta t - 1)(x(\eta t) + 1) = -\eta\alpha y\left(t - 1/\eta\right)\left(y(t) + 1\right).$$

Es un posible ejercicio escribir desarrollos apropiados para $y(t)$, μ y η, para intentar deducir el signo de μ_1. Sin embargo, el método más eficiente de lograr esto consiste en esperar un poco, pues el resultado se deduce de manera directa del ejemplo más general que veremos a continuación.

10.3 La ecuación con feedback negativo

En esta sección analizaremos la bifurcación de Hopf para la ecuación

$$x'(t) = -f(x(t-\tau))$$

con f suave tal que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$. Para ponerlo en términos del problema (31), aclaremos que aquí el parámetro es τ; por comodidad, podemos llamar $u(t) := x(\tau t)$ a fin de transformar la ecuación en otra con retardo fijo:

$$u'(t) = \tau x'(\tau t) = -\tau f(x(\tau t - \tau)) = -\tau f(u(t-1)). \tag{34}$$

Como sea, uno tiene el derecho de preguntarse de qué extraña manera esta ecuación es, según dijimos, 'más general' que el ejemplo de la sección anterior. Pero es recomendable no perder la calma y observar, en primer lugar, que si x es una solución de (33) tal que $x(0) > -1$, entonces $x(t) > -1$ para todo $t > 0$. Esto se prueba más o menos igual que en situaciones anteriores: integrando la ecuación, se ve, para $t > 0$,

$$x(t) + 1 = (x(0) + 1)e^{-\alpha\int_0^t x(s-1)\,ds} > 0.$$

De esta forma, si lo que nos interesa es estudiar la dinámica cerca del origen, podemos escribir $u(t) = \ln(x(t) + 1)$ y la ecuación resultante es

$$u'(t) = -\alpha x(t-1) = -\alpha\left(e^{u(t-1)} - 1\right),$$

que tiene la misma forma que (34) con $\alpha = \tau$ y $f(u) = e^u - 1$. Notar que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$: al menos en este caso, podemos afirmar que no se nos ha escapado ningún detalle.

A fin de estudiar la ecuación (34) notemos, para empezar, que el desarrollo de Taylor de f es $f(u) = u + R(u)$, de modo que la linealización es la misma que antes: $x'(t) = -\tau x(t-1)$. Luego, para $\mu = \tau - \frac{\pi}{2}$ se cumplen las hipótesis del teorema de Hopf. Y, al igual que en el caso previo, podemos suponer que nuestra rama de soluciones $\varepsilon q_\varepsilon(t)$ arranca a partir de $q_0(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$.

A continuación, teniendo en cuenta que el problema se piensa como una perturbación de la ecuación $u'(t) = -\frac{\pi}{2}u(t-1)$, necesitamos saber cuál es la imagen del operador $\mathcal{L}u := u'(t) + \frac{\pi}{2}u(t-1)$. Por supuesto, la respuesta sería inmediata si $\mathcal{L}$ fuera simétrico respecto del producto de $L^2(0,4)$, pero eso no ocurre; sin embargo, se puede observar que aquí el operador adjunto $\mathcal{L}^*$ es muy fácil de calcular, pues si u y v son 4-periódicas entonces

$$\int_0^4 \mathcal{L}u(t)v(t)\,dt = \int_0^4 [u'(t)+\frac{\pi}{2}u(t-1)]v(t)\,dt = \int_0^4 u(t)\left[-v'(t) + \frac{\pi}{2}v(t+1)\right]dt.$$

Podría parecer preocupante que en un texto sobre ecuaciones con retardo nos veamos obligados a incluir una ecuación 'avanzada' de la forma $v'(t) = \frac{\pi}{2}v(t+1)$; sin embargo, queda claro que la teoría completa de ecuaciones con retardo debe incluir también los retardos negativos. En definitiva, $\mathcal{L}^*u = -u'(t) + \frac{\pi}{2}u(t+1)$ y, al calcular la ecuación característica $-\lambda + \frac{\pi}{2}e^{\lambda} = 0$ vemos (quizás sin demasiada sorpresa) que $\ker(\mathcal{L}^*) = \ker(\mathcal{L})$. En efecto, cambiando λ por $-\lambda$ se obtiene la ecuación característica asociada a $\mathcal{L}$ y, en consecuencia, los dos operadores tienen las mismas raíces características pero con signos opuestos. Pero cuando se trata de buscar soluciones periódicas hay que mirar las raíces que caen sobre el eje imaginario, para las cuales invertir el signo es lo mismo que conjugar. En resumen, como la imagen de $\mathcal{L}$ es un conjunto cerrado, podemos lanzar la siguiente afirmación, un tanto temeraria:

$$\mathrm{Im}(\mathcal{L}) = \ker(\mathcal{L}^*)^\perp = \ker(\mathcal{L})^\perp.$$

Antes de continuar, pensemos un poco: si estamos en C_4, ¿de qué complemento ortogonal estamos hablando? Obviamente, se trata de mirar las cosas ahora dentro de $L^2(0,4)$ aunque, en ese caso, para que la anterior afirmación sea cierta, tendríamos que poder asegurar que $\mathrm{Im}(\mathcal{L})$ es un subespacio cerrado... cosa que sabíamos, pero no en L^2 sino en C_4. De hecho, esto nunca va a ser cierto a menos que redefinamos $\mathcal{L}$ en un conjunto más apropiado (¿cuál?).

En fin, son muchas las objeciones: más que temeraria, la afirmación hace agua por todos lados y nos trae un nostálgico recuerdo del *methodus Brutus* implementado unas cuantas páginas atrás. Pero como aquel entonces, la conclusión es esencialmente correcta pues, ajustando los detalles correspondientes (como de costumbre, la tarea sucia queda para el lector) se puede verificar que la imagen de $\mathcal{L}$ está efectivamente dada por aquellas funciones periódicas que son ortogonales (en el sentido de L^2) a las funciones $\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ y $\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)$, es decir:

$$\mathrm{Im}(\mathcal{L}) = \left\{ y \in C_4 : \int_0^4 y(t)\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\,dt = \int_0^4 y(t)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)\,dt = 0 \right\}.$$

Por supuesto, para evitar suspicacias, es posible hacer también la cuenta de manera directa empleando (por ejemplo) el desarrollo de Fourier. Por comodidad, vamos a emplear la base compleja $\{e_n := e^{in\frac{\pi}{2}t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Escribiendo $x = \sum x_n e_n$, la ecuación $x'(t) + \frac{\pi}{2}x(t-1) = \varphi(t)$ se transforma en

$$\frac{\pi}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n(in + (-i)^n)e_n = \varphi = \sum \varphi_n e_n.$$

Como $in + (-i)^n$ se anula si y solo si $n = \pm 1$, se deduce que la condición necesaria y suficiente para que haya solución es que $\varphi_\pm 1 = 0$. En otras palabras (presten atención, los desconfiados), φ debe ser ortogonal a $\cos(\frac{\pi}{2}t)$ y $\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2}t)$. La solución se calcula entonces despejando los coeficientes de x:

$$x_n = \frac{2}{\pi}\frac{\varphi_n}{in + (-i)^n}. \tag{35}$$

Pasemos ahora a las cuentas específicas de la bifurcación de Hopf. Escribiendo como antes $y(t) = x(\eta t)$, la ecuación se convierte en

$$y'(t) = -\eta\tau f\left(y(t - 1/\eta)\right). \tag{36}$$

La solución que buscamos es de la forma

$$y(t) = \varepsilon q_0(t) + \varepsilon^2 y_1(t) + \varepsilon^3 y_2(t) + \ldots$$

con $q_0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ y las funciones y_j ortogonales a $\cos(\frac{\pi}{2}t)$ y $\mathrm{sen}(\frac{\pi}{2}t)$. Además, el teorema nos dice que

$$\tau = \frac{\pi}{2} + \mu_1\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)$$
$$\eta = 1 + \eta_1\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4).$$

Observemos que se puede escribir

$$\frac{1}{\eta} = \frac{1}{1 - [-\eta_1\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)]} = \sum_{k\geq 0}[-\eta_1\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)]^k = 1 - \eta_1\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)$$

de modo que

$$y\left(t - \frac{1}{\eta}\right) = y(t-1) + y'(t-1)\eta_1\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4).$$

Vamos a reemplazar ahora todo en la ecuación (36). Lo que queda no es muy alentador, pero hay que tener paciencia:

$$\varepsilon q_0'(t) + \varepsilon^2 y_1'(t) + \varepsilon^3 y_2'(t) + O(\varepsilon^4) = -\eta\tau f(y(t - 1/\eta)$$

$$= -\left(\frac{\pi}{2} + (\eta_1 + \mu_1)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)\right) f(y(t-1) + y'(t-1)\eta_1\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4))$$

Si ahora desarrollamos en serie de Taylor

$$f(y) = y + \frac{f''(0)}{2}y^2 + \frac{f'''(0)}{6}y^3 + \dots$$

y luego igualamos los términos correspondientes a ε^j para $j \leq 3$, resulta:

$$q_0'(t) = -\frac{\pi}{2}q_0(t-1).$$

¡Vaya novedad! Esto ya lo sabíamos, pues $q_0(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$. Pasemos al término siguiente:

$$y_1'(t) = -\frac{\pi}{2}\left[y_1(t-1) + \frac{f''(0)}{2}q_0^2(t-1)\right]$$

es decir

$$y_1'(t) = -\frac{\pi}{2}\left[y_1(t-1) + \frac{f''(0)}{2}\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right]$$

Como y_1 es ortogonal a $\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ y $\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)$, empleando la fórmula (35) se obtiene (de manera única) y_1. Finalmente, queda la ecuación para y_2, que es todavía un poco más fea:

$$y_2'(t) = -\frac{\pi}{2}\left[y_2(t-1) + \eta_1 q_0'(t-1) + \frac{f'''(0)}{6}q_0^3(t-1)\right] + (\eta_1 + \mu_1)q_0(t-1).$$

Más y más cuentas (que pasaremos disimuladamente por alto, pero pueden verse con lujo de detalles en [8]) llevan por fin a la siguiente conclusión:

$$sgn(\mu_1) = sgn\left[f''(0)^2(11\pi - 4) - 5\pi f'''(0)\right].$$

Llegado este punto, debemos confesar que, sin hacer las cuentas (o tener a mano un gurú muy certero) no es fácil adivinar de antemano el resultado previo con tanta precisión. Pero, a grandes rasgos, podemos decir que la bifurcación es subcrítica si $f''(0)^2$ es 'grande' en comparación con $f'''(0)$ y subcrítica en caso contrario.

10.4 Ejercicios

1. Analizar la estabilidad y la dirección de la bifurcación de Hopf para la ecuación (34) con f una función impar.

2. Estudiar la bifurcación de Hopf para el equilibrio positivo de la ecuación de Nicholson (ver ejercicio 2 de la sección 6). Idem para los modelos del ejercicio 2 de la sección 8.

3. Decidir en qué casos se verifican las hipótesis del teorema de bifurcación de Hopf para el caso de una ecuación de segundo orden de la forma

$$x''(t) + ax'(t-\tau) + bx(t) = 0$$

con $a, b > 0$. *Sugerencia*: reescalar la ecuación para que quede $\tau = 1$. Encontrar la ecuación característica y analizar la bifurcación de Hopf para el mínimo valor $\tau_0 > 0$ tal que existe una raíz característica puramente imaginaria.

11 Apéndice

11.1 Repaso de ecuaciones ordinarias (ejercicios)

1. **Existencia**:

   Sean $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un abierto, $(t_0, x_0) \in \Omega$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ una función continua, localmente Lipschitz en x. Entonces el problema

   $$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{37}$$

   admite una (única) solución $x : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to \mathbb{R}^n$ para cierto $\delta > 0$. Dar una cota inferior para δ.

2. **Lema de Gronwall - Unicidad**:

   (a) Sean $u, v : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ continuas tales que

   $$u(t) \leq \alpha + \int_{t_0}^{t} u(s)v(s)\, ds$$

   para todo t y cierto $\alpha \geq 0$. Entonces

   $$u(t) \leq \alpha e^{\int_{t_0}^{t} v(s)\, ds}$$

   para todo t. Deducir que si $x, y : J \to \mathbb{R}^n$ son soluciones de (37) con f como en el ejercicio 1 y el intervalo J es un entorno de t_0, entonces $x = y$.

   (b) Extender la desigualdad de Gronwall para una función $\alpha = \alpha(t)$ creciente.

3. **Dependencia continua**:

   Sean f y x como en el ejercicio 1, y consideremos un punto $(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0) \in B_r(t_0, x_0)$ para $r > 0$ suficientemente pequeño. Probar que la solución $\tilde{x}$ del problema

   $$\begin{cases} \tilde{x}' = f(t,\tilde{x}) \\ \tilde{x}(\tilde{t}_0) = \tilde{x}_0 \end{cases}$$

   verifica

   $$|\tilde{x}(t) - x(t)| \leq \alpha e^{L|t-t_0|}$$

   para ciertas constantes $\alpha = \alpha(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0), L \geq 0$, y t cerca de t_0, en donde α verifica: $\alpha(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0) \to 0$ para $(\tilde{t}_0, \tilde{x}_0) \to (t_0, x_0)$.

   (a) Deducir que el flujo Φ definido por $\Phi(t, t_0, x_0) := x(t)$ es una función continua.

   (b) Probar que si f es de clase C^1 entonces Φ es de clase C^1.

4. **Extensión de soluciones - Intervalo maximal**:

   Sean Ω, $(t_0, x_0) \in \Omega$, f como en el ejercicio 1, y sea $K \subset \Omega$ un compacto.

   (a) Probar que si una solución de $x' = f(t, x)$ definida en $[t_0, t_1)$ no se puede extender hasta t_1, entonces existe $\delta > 0$ tal que $(t, x(t)) \notin K$ para $t \in (t_1 - \delta, t_1)$.

   (b) Concluir que si $[t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \subset \Omega$ entonces $|x(t)| \to \infty$ para $t \to t_1^-$.

   (c) Probar que existe un único intervalo abierto I que contiene a t_0 y una única solución $x : I \to \mathbb{R}^n$ que no se puede extender fuera de I.

5. Probar que si $f : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es continua, localmente Lipschitz en x y tiene crecimiento a lo sumo lineal en x (es decir, $|f(t, x)| \leq a|x| + b$), entonces toda solución del problema $x' = f(t, x)$ puede extenderse a todo el intervalo $[t_0, t_1]$.

6. Sea $f : [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ continua y *globalmente* Lipschitz en x con constante L, y consideremos el operador $T : C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \to C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ definido por

   $$Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds.$$

   Probar que para $x, y \in C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ se tiene:

   $$\|T^n x - T^n y\| \leq \frac{(t_1 - t_0)^n L^n}{n!} \|x - y\|,$$

   en donde $T^n = T \circ \ldots \circ T$ (n veces). Deducir que si n es grande, T^n es una contracción y tiene, en consecuencia, un único punto fijo. ¿Tiene esto alguna relación con el ejercicio 5?

7. **Estabilidad**:

   Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localmente Lipschitz y sea x una solución del problema $x'(t) = f(x(t))$ definida en un entorno de $t = 0$. Probar:

   (a) Si $f(x(0)) \neq 0$ entonces x es una función estrictamente monótona.

   (b) Si $x(0) \in (a, b)$, con $a < b$ dos ceros consecutivos de f, entonces x está definida en $[0, +\infty)$ y vale

   $$\lim_{t \to +\infty} x(t) = a \qquad \text{o} \qquad \lim_{t \to +\infty} x(t) = b.$$

   (c) Sea e un cero de f. Probar que si $f'(e) < 0$ entonces e es un equilibrio asintóticamente estable y si $f'(e) > 0$ entonces es inestable.

11.2 Repaso general

Revisar los siguientes temas:

1. Diferenciación en el sentido de Fréchet.
2. Teorema de la Función Implícita.
3. Teorema de Arzelá-Ascoli.
4. Funciones analíticas.
5. Teorema de residuos.
6. Teorema de Rouché.
7. Transformada de Laplace.

References

[1] R. Bellman, K. Cooke, Differential-Difference Equations, Academic Press, 1963.

[2] C. Corduneanu, Almost periodic functions. Interscience Publishers, New York-London-Sydney, 1968.

[3] I. Gyori, G. Ladas, Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications. Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford, 1991.

[4] J. Hale, Theory of Functional Differential Equations. Springer-Verlag, New York, 1977.

[5] C. Rogers: A Less Strange Version of Milnors Proof of Brouwers Fixed-Point Theorem. The American Mathematical Monthly, Vol. 87, 7 (1980), 525-52.

[6] R. Ortega, Degree theory and almost periodic problems. Differential equations, chaos and variational problems, vol. 75 of Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 345–356. Birkhäuser, Basel, 2008.

[7] W. Rudin, Análisis Real y Complejo. Pearson, 1985.

[8] H. Smith, An Introduction to Delay Differential Equations with Applications to the Life Sciences, Springer-Verlag, New York, 2011.

[9] N. Sternberg, A Hartman-Grobman Theorem for a Class of Retarded Functional Differential Equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications 176 (1993), 156–165.