universidad nacional de cuyo
facultad de ciencias

revista matemática cuyana

volumen 2
1956
fascículo 1
páginas 1-51

instituto de matemática
san luis
argentina

REVISTA MATEMATICA CUYANA

La REVISTA MATEMÁTICA CUYANA está destinada a la publicación de trabajos originales en los campos de la matemática pura y aplicada, y aparece en forma de fascículos sueltos sin periodicidad fija, anualmente reunidos en un volumen de 250 páginas, aproximadamente.

Castellano, inglés, alemán, francés e italiano, son los idiomas de la Revista.

Los artículos para la Revista deben ser escritos a máquina con doble espacio y enviados a uno de los miembros del Comité de Redacción.

Los colaboradores tienen derecho a 50 tiradas aparte gratis, de sus artículos, y podrán, si lo desean, recibir hasta 150 tiradas aparte a precio de costo.

En todo lo referente a suscripciones, adquisición de números atrasados, etc., dirigirse al Director del Instituto de Matemáticas, Facultad de Ciencias, San Luis.

universidad nacional de cuyo
facultad de ciencias

revista matemática cuyana

volumen 2
1956
fascículo 1
páginas 1-51

instituto de matemática
san luis
argentina

Particiones en conjuntos de números ordinales*

POR RODOLFO RICABARRA

1. Introducción. El presente artículo consta de tres partes relativamente independientes que presentan, sin embargo, suficientes rasgos comunes en cuanto a método y demostración como para formar parte de un mismo capítulo de la teoría de los números ordinales. La primera parte trata de la profundización de un teorema de Alexandroff-Urysohn sobre funciones de números ordinales en números ordinales. La segunda parte trata sobre la existencia de particiones de una sección de números ordinales en conjuntos positivos (ver definiciones más adelante), con especial énfasis en la intervención de de diferentes axiomas de elección de fuerza creciente. La tercera y última parte está dedicada a dar un teorema de representación de los cuadros ramificados de conjuntos deducidos de particiones de una sección de números ordinales (teorema 7). En esta parte se estudian propiedades ligadas al « orden de anulación » de conjuntos de números ordinales, de interés independiente de la teoría de sucesiones ramificadas.

Este trabajo está orientado hacia — y en verdad ha surgido de — una teoría sobre conjuntos ordenados y ramificados, desarrollada en un seminario sobre el problema de Suslin que funcionara durante más de dos años en Mendoza, La Plata y Bahía Blanca sucesivamente. Deseo dejar sentado aquí mi agradecimiento a los miembros de ese seminario, en especial a la Sta. M. L. Bruschi a quien se deben el teorema 5, § 3, y el lema 4, § 4. Los problemas anunciados en el curso de este artículo, en especial los enunciados al final, tienen mayor interés que el que pueda deducirse automáticamente del texto, porque son cuestiones a decidir dentro de la teoría de conjuntos ordenados y ramificados a la que acabamos de referirnos. Esta teoría, todavía no publicada, será presentada próximamente en forma de libro en una edición de la Universidad Nacional del Sur.

* Recibido el 9 de octubre de 1957.

2. El teorema de la función retractante. En el transcurso de este artículo se considerarán exclusivamente números ordinales y conjuntos de números ordinales contenidos en la sección de los números ordinales menores que el primer ordinal no numerable. Indicaremos con ω_1 a este ordinal, y con $[0, \omega_1)$ a la correspondiente sección. Es cierto que resultados análogos a los que obtendremos son válidos cuando se reemplaza ω_1 por ω_α (un número inicial de cualquier clase de Cantor), pero no nos detendremos en hacer los desarrollos correspondientes. El conjunto $[0, \omega_1)$ puede considerarse, además de conjunto bien ordenado, como un espacio topológico en su topología de intervalo: un conjunto es *cerrado* si contiene los límites de sus sucesiones crecientes. Está claro pues lo que se entiende por «una variable ordinal que converge a ω_1». Diremos que un conjunto A, subconjunto de $[0, \omega_1)$, es *cofinal* en ω_1 (o más propiamente, cofinal en $[0, \omega_1)$), si para todo $\beta < \omega_1$ existe $\alpha \in A$, tal que $\beta \leq \alpha$. Es claro que A es cofinal en ω_1 si y sólo si es no numerable. Sea f una función unívoca cuyo dominio D_f es cofinal en ω_1 y cuyos valores son elementos de $[0, \omega_1)$. Diremos que f converge hacia ω_1 con el argumento si dado $\beta \in [0, \omega_1)$ existe $\alpha \in [0, \omega_1)$ tal que para todo $\gamma \in [\alpha, \omega_1) \cap D_f$ se tiene $f(\gamma) \geq \beta$. Es claro que f, supuesto D_f cofinal en ω_1, converge hacia ω_1 con el argumento si y sólo si f no toma el mismo valor una cantidad no numerable de veces. Si llamamos *conjunto de nivel* de f a un conjunto imagen completa inversa por la función f de un elemento (número ordinal) entonces podemos decir que, supuesto D_f cofinal en ω_1, para que f no converja a ω_1 con el argumento es necesario y suficiente que f tenga un conjunto de nivel no numerable.

Diremos que f es un función *retractante*, siempre supuesto dominio y contradominio en $[0, \omega_1)$, si $f(\alpha) < \alpha$ para todo α en el dominio de f. Alexandroff-Urysohn [1], observaron el siguiente hecho:

> *toda función retractante definida en $(0, \omega_1)$ tiene un conjunto de nivel no numerable, o sea no converge hacia ω_1 con el argumento.*

La demostración de esta afirmación es sencilla y no la expondremos porque está contenida en la demostración del teorema 1. Llamaremos *teorema de la función retractante* a aquella afirmación de Alexandroff-Urysohn. El objetivo de este parágrafo es dar el dominio máximo de validez del teorema de la función retractante, en el sentido formulado explícitamente en los teoremas 1, 3, 3'. No nos interesan las generalizaciones a ordinales iniciales superiores ya que ellas son enteramente triviales.

Los conjuntos no numerables más interesantes (subconjuntos de $[0, \omega_1))$ son los cerrados cofinales. Un ejemplo es el conjunto de los números indescomponibles (coincidentes con todos sus restos no nulos), o sea los de la forma ω^α (Cantor). Intuitivamente los cerrados cofinales son conjuntos con «muchos» elementos. Quizás la mejor manera de transmitir esta idea es demostrando que

la intersección de los conjuntos de una clase numerable de cerrados cofinales es un cerrado cofinal.

Sea (F_n), $0 \leq n < \omega$, la familia numerable dada de cerrados cofinales. Definimos por inducción una sucesión doble α_n^m, $0 \leq n, m < \omega$ tomando $\alpha_0^0 =$ primer elemento de F_0, $\alpha_1^0 =$ primer elemento de F_1 mayor que α_0^0, $\alpha_n^0 =$ primer elemento de F_n mayor que α_{n-1}^0.... Luego $\alpha_0^1 =$ primer elemento de F_0 mayor que todos los α_n^0, $\alpha_1^1 =$ primer elemento de F_1 mayor que α_0^1, etc. La idea es clara. Supuesto definidos todos los α_n^m por inducción, resulta que $\lim \alpha_n^m$ para $m \to \omega$, es un número independiente de n, que pertenece a todo F_n, o sea es un punto común a todos los F_n, o sea la intersección de los F_n, $0 \leq n < \omega$, es no vacía. Como el razonamiento puede repetirse con la familia de cerrados cofinales $F_n^\alpha = F_n \cap [\alpha, \omega_1)$, deducimos que los F_n tienen puntos comunes tan «grandes» como se quiera o sea que la intersección $\bigcap\limits_n F_n$ es cofinal en ω_1, que era lo que debíamos demostrar.

En particular esto nos muestra que no hay dos cerrados cofinales disjuntos, o también, para que dos conjuntos cerrados sean disjuntos es necesario que uno por lo menos sea numerable.

Los cerrados cofinales tienen pues la siguiente propiedad: tienen una cantidad no numerable de puntos comunes con el conjunto de los puntos de acumulación de cualquier conjunto no numerable. Llamaremos *positivo* a un conjunto que tenga esta propiedad. O sea, un conjunto se dirá positivo si intersecta a todo cerrado cofinal. La clase de los conjuntos positivos incluye a los cerrados cofinales, a los que contienen cerrados cofinales, y conjuntos esencialmente diferentes de estos, como se verá en el § 3. Llamaremos *nulo* a un conjunto que no es positivo. O sea un conjunto es nulo si es disjunto con algún cerrado cofinal. Por lo que hemos visto hasta ahora tenemos

Lema. *Los conjuntos nulos forman un σ-ideal de conjuntos que contiene a los complementarios de los conjuntos cerrados cofinales y por tanto en particular a los conjuntos numerables.*

La vinculación entre los conjuntos nulos y el teorema de la función retractante está dada por el siguiente teorema (Neumer [2], Satz 2 y 3).

Teorema. *Sea A un conjunto cofinal en* $[0, \omega_1)$. *Para que exista una función rectractante* f *con dominio* $D_f = A$ *que converja a* ω_1 *con el argumento, es necesario y suficiente que* A *sea un conjunto nulo que no contiene al cero.*

Demostración. Veamos que la condición es suficiente. Sea B un cerrado que contiene al cero, cofinal y disjunto con A. Para cada $\alpha \in A$ definimos $f(\alpha) =$ último elemento de B menor que α, existente por ser B cerrado. Es fácil ver que f es una función retractante que converge a ω_1 con el argumento.

Veamos que la condición es necesaria. Sea A un conjunto cofinal en ω_1 y f una función retractante con $D_f = A$ convergente a ω_1 con el argumento. Evidentemente A no contiene al cero. Vamos a definir por inducción un conjunto cerrado cofinal $B = \{\beta_\alpha\}$, cuyo conjunto de puntos de acumulación (el derivado de B) va a ser un cerrado cofinal disjunto de A. Ponemos $\beta_0 = 0$. Supuesto definido β_α definimos $\beta_{\alpha+1}$ como el primero de los elementos de A, tales que en todos los números mayores o iguales que ellos, f toma valores mayores que β_α. Si α es de segunda especie y β_γ está definido para todo γ con $\gamma < \alpha$, defimos $\beta_\alpha = \lim \beta_\gamma \; (\gamma < \alpha)$. El conjunto $B = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \{\beta_\alpha\}$ es cerrado y sus puntos de acumulación son los β_α con α de segunda especie. Veamos que estos puntos no pertenecen a A. En efecto, si $\beta_\alpha \in A$, la función f está definida sobre β_α, y tenemos $f(\beta_\alpha) < \beta_\alpha$. Si α es de segunda especie, entonces existe un $\gamma < \alpha$ tal que

$$f(\beta_\alpha) < \beta_\gamma < \beta_{\gamma+1} < \beta_\alpha.$$

lo que contradice a la definición de $\beta_{\gamma+1}$.

Esto termina la demostración del teorema.

Q. E. D.

El teorema 1 admite un perfeccionamiento. En efecto, la parte no trivial de este teorema dice que toda función retractante cuyo dominio es un conjunto positivo, tiene un conjunto de nivel no numerable. El perfeccionamiento consiste en mostrar que la función tiene con seguridad un conjunto de nivel positivo. Esto lo deducimos de la consideración de una situación ligeramente más general (teorema 2).

En los siguientes dos teoremas usamos el axioma de elección.

TEOREMA 2. *Sea* (A_α) *una clase de conjuntos disjuntos dos a dos (subconjuntos de* $[0, \omega_1)$*), e indiquemos con* X *al conjunto formado por los primeros elementos de los conjuntos* A_α*. Entonces, condición necesaria y suficiente para que* $\bigcup_\alpha A_\alpha$ *sea un conjunto nulo es que* X *y cada* A_α *sean nulos.*

DEMOSTRACIÓN. Bastará demostrar que si todos los A_α son nulos y X es nulo, entonces $\bigcup_\alpha A_\alpha$ es nulo. Para eso definiremos una función retractante con dominio $\bigcup_\alpha A_\alpha$, que en caso que $\bigcup_\alpha A_\alpha$ sea cofinal en ω_1, convergirá a ω_1 con el argumento. Si $\bigcup_\alpha A_\alpha$ no es cofinal entonces es numerable y por tanto nulo. Nuestra función retractante la definimos por partes: si ξ_α es el primer elemento de A_α, definimos por teor. 1, y para cada α, una función retractante f_α con dominio $A_\alpha - \{\xi_\alpha\}$, a valores mayores o iguales que ξ_α (lo cual siempre es evidentemente posible) y convergente hacia ω_1 con el argumento si el dominio es cofinal en ω_1; si el dominio es numerable tomamos la función idénticamente igual a ξ_α. Sobre X definimos, otra vez usando la hipótesis que X es nulo y aplicando el teor. 1, una función g retractante, salvo quizás en el 0 si X contiene el 0, y convergente hacia ω_1 con el argumento, si X es no numerable; si X es numerable definimos g idénticamente igual a 0. La función f cuya restricción a X coincide con g y cuya restricción a $A_\alpha - \{\xi_\alpha\}$ coincide con f_α, está definida sobre $\bigcup_\alpha A_\alpha$ (salvo eventualmente en el 0 si $0 \in \bigcup_\alpha A_\alpha$), es retractante y converge hacia ω_1 con el argumento, si su dominio es no numerable — por otra parte el único caso que interesa. Dejamos la verificación al lector.

El teorema 2 puede aplicarse al caso en que se tiene dada una función definida sobre un dominio, digamos no numerable, considerando la clase de los conjuntos de nivel de dicha función. Ellos forman una clase de conjuntos disjuntos dos a dos. Se obtiene el

TEOREMA 3. *Toda función retractante cuyo dominio es un conjunto positivo tiene un conjunto de nivel positivo.*

DEMOSTRACIÓN. Consideramos la clase de los conjuntos de nivel de la función dada. Bastará demostrar que el conjunto X (definición análoga a la dada en el teorema 2) es nulo, para inferir que alguno de los conjuntos de nivel es positivo. Pero sobre X la función retractante dada es biunívoca, luego ciertamente converge hacia ω_1 con el argumento, si X es no numerable (único caso dudoso). Luego por teor. 1 X es nulo, y el teorema está demostrado.

Un razonamiento análogo permite decir que todo conjunto contenido en el dominio de una función retractante y que intersecta a cada conjunto de nivel en un conjunto nulo es nulo.

El teorema 3 permite la generalización del teorema 1 a varias funciones retractantes.

TEOREMA 3'. *Para toda familia finita de funciones retractantes definidas sobre un conjunto positivo existe un subconjunto positivo del dominio en el cual son constantes todas las funciones de la familia.*

DEMOSTRACIÓN. Sea (f_i), $1 \leq i \leq n$, la familia de funciones dada. Por el teorema 3 existe un conjunto de nivel de f_1 que es positivo. Se restringe la familia (f_i), $2 \leq i \leq n$, sobre dicho conjunto de nivel, y se repite el razonamiento. Una inducción finita nos da la tesis del teorema.

Se verá en el § 3 que el teorema 3' no puede generalizarse a familias infinitas, ni siquiera numerables.

Otra aplicación del teorema 1 la tenemos en lo que llamaremos *el teorema de la función progresante.* La función f con dominio contenido en $[0, \omega_1)$ se dirá progresante si su valor es mayor que el argumento, es decir si $f(\alpha) > \alpha$ para todo α en el dominio de la función.

TEOREMA 4. *El contradominio de una función progresante es un conjunto nulo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea f la función progresante dada y admitamos que su contradominio es no numerable. Para cada β del contradominio de f sea $g(\beta) =$ el primero de los ordinales α tales que $f(\alpha) = \beta$. Es fácil ver que g es una función retractante, biunívoca, y con dominio igual al contradominio de f. De la biunicidad sigue que g converge a ω_1 con el argumento. Luego el teorema 1 nos da la tesis.

La naturaleza paradójica del teorema 4 puede apreciarse mejor en la siguiente formulación: si en cada semirrecta ordinal (α, ω_1) se elige un elemento, entonces el conjunto de elementos así seleccionado es necesariamente un conjunto nulo. El resultado se mantiene si en lugar de elegir un punto se elige un conjunto nulo en cada semirecta. Esto resulta del teorema 2 ya que los conjuntos nulos elegidos pueden suponerse disjuntos — sin pérdida de generalidad — y el conjunto de los primeros elementos de estos conjuntos nulos es nulo por el teorema 4 (correspondiendo al caso de elegir un solo punto en cada semirrecta).

Estos problemas sobre funciones retractantes están estrechamente vinculados con teoremas de puntos fijos. Nos limitaremos a dar un ejemplo. Si f es una función definida en todo $[0, \omega_1)$ tal que $f(\alpha) \leq \alpha$ para todo α, y f converge hacia ω_1 con el argumento, entonces del teorema 1 resulta que el conjunto $\{\alpha : f(\alpha) = \alpha\}$, conjunto de puntos fijos de f, contiene un cerrado cofinal en ω_1.

Observación 1. No sabemos si es posible eliminar la intervención del axioma de elección en los teoremas 2, 3, 3'. Más precisamente no sabemos si es posible dar un método constructivo que permita, dado un conjunto nulo, construir un cerrado cofinal disjunto con él, o, equivalentemente, construir una función retractante que tenga al conjunto nulo dado por dominio y que sea convergente a ω_1 con el argumento.

3. Existencia de n-particiones en conjuntos positivos. El ejemplo más elemental de conjunto positivo es el de cerrado cofinal en ω_1. Más generalmente es positivo cualquier conjunto del filtro engendrado por los cerrados cofinales en ω_1. Si indicamos con (CC) a este filtro, tenemos:

Condición necesaria y suficiente para que la clase de los conjuntos positivos coincida con (CC) es que (CC) sea un ultrafiltro, o equivalentemente, que la clase de los conjuntos positivos sea un filtro, o también que no existan dos conjuntos positivos disjuntos.

Un teorema de Ulam [3], pág. 145, muestra que existen conjuntos positivos disjuntos si se acepta el axioma de elección. Sin embargo parece imposible (por lo menos parece muy difícil), construir por inducción transfinita un conjunto positivo cuyo complementario sea tambien positivo, sin usar ninguna forma del axioma de elección, y parece razonable preguntarse si el postulado que (CC) sea un ultrafiltro no será compatible con los demás axiomas de una teoría de conjuntos donde no hay axiomas de elección.

Si llamamos n-partición de un conjunto a especificar a una partición en n conjuntos (n es un número cardinal), podemos decir que el objetivo de este parágrafo es mostrar que uno de los axiomas zermelianos más débiles que se conocen (el axioma (Z_0), abajo) implica la existencia de una 2-partición de $[0, \omega_1)$ en conjuntos positivos, mientras que aumentando la fuerza del axioma (axioma (II), abajo) se obtienen particiones en $\aleph_1$ conjuntos positivos. La idea parece ser que a medida que se aceptan axiomas zermelianos más y más fuertes se obtienen n-particiones en conjuntos positivos con n más y más grande.

Llamaremos n-*función de partición*, o brevemente n-función a una función definida sobre una clase de conjuntos a especificar en cada caso, que asocia a cada conjunto de la clase una partición de dicho conjunto en n conjuntos no vacíos. Las n-funciones más sencillas son las que se obtienen « por semejanza » a partir de una n-partición de $[0, \omega_1)$ fija; estas n-funciones están definidas sobre la clase de todos los conjuntos no numerables y para cada uno de estos conjuntos la partición se define a través del isomorfismo ordinal « canónico » del $[0, \omega_1)$ con el conjunto no numerable dado, como la imagen de la partición dada en $[0, \omega_1)$. Estas n funciones se dirán *deducidas de una* n-*partición*. Llamaremos n-p-*función* a una n-función de partición cuyo dominio es la clase de los conjuntos *positivos*, que parte a cada positivo en n componentes *positivas*.

Indicaremos con (Z_0) al axioma zermeliano que dice que $\aleph_1$ es menor o igual que $2^{\aleph_0}$, o sea que pide la existencia de un conjunto de números reales de potencia $\aleph_1$.

TEOREMA 5 (BRUSCHI). (Z_0) *implica la existencia de una* 2-p-*función.*

DEMOSTRACIÓN. Como el conjunto de las permutaciones de los enteros naturales tiene la potencia del continuo, (Z_0) equivale a la existencia de una familia (h_α), $0 \leq \alpha < \omega_1$ de tales permutaciones que supondremos diferentes dos a dos. Vamos a dar explícitamente para cada conjunto A positivo una 2-partición en conjuntos positivos.

Sea A un conjunto positivo dado y consideremos la subfamilia de los h_α con los índices α restringidos a A. Por hipótesis cada h_α es una correspondencia biunívoca del conjunto $(0, 1, 2, ...)$ sobre sí mismo. Si definimos

$$A_n^0 = \{ \alpha \epsilon A : h_\alpha(0) = n \},$$