ISSN 1851-1317

Fascículo 5 | Cursos de grado

César A. Trejo

Introducción Elemental al Análisis Armónico

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2013

Cursos de grado

Fascículo 5

ISSN 1851-1317 (Versión Electrónica)
ISSN 1851-1295 (Versión Impresa)

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

60

ANALISIS III (FISICOS)

Segunda Parte

INTRODUCCION ELEMENTAL

AL

ANALISIS ARMONICO

Dr. C.A. Trejo

1982

Capítulo 1

ESPACIOS VECTORIALES

1.1. VECTORES FIJOS

La estructura de espacio vectorial es puramente algebraica, pero se inspira en conceptos geométricos que señalaremos muy brevemente y de manera informal.

1.1.1. El lector está habituado a representar desplazamientos, fuerzas, velocidades, etc., mediante *vectores*.

Llamaremos VECTOR FIJO $\overrightarrow{AB}$ *ó* (AB) *a un par ordenado de puntos*, A *y* B, *llamados* ORIGEN *y* PUNTA *del vector, respectivamente.*

1.1.2. Consideremos el conjunto V_A de todos los vectores fijos con origen A. Supondremos conocidas por el lector las operaciones de suma de vectores (fig. 1) y de multiplicación de un vector por un número real (fig. 2). Lo

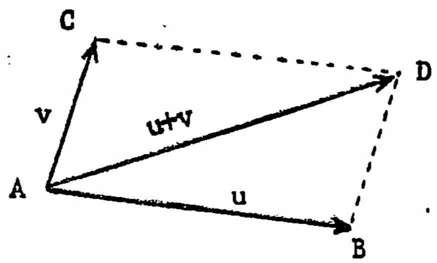


Fig. 1

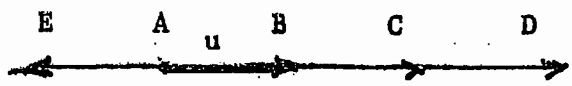


Fig. 2. $\overrightarrow{AC} = 2u$, $\overrightarrow{AD} = 3u$, $\overrightarrow{AE} = (-\frac{3}{2})u$ pero $\overrightarrow{BD} \neq \overrightarrow{AC} = 2u$.

que más importa para nuestro propósito es señalar quee estas operaciones, indicadas por u+v ($u,v \in V_A$) y a.u ($a \in R$, $u \in V_A$), tienen las propiedades P_1, P_2, P_3 que siguen:

P_1. *El conjunto* V_A *es un grupo conmutativo con respecto a la suma de vectores* (o sea, el par ordenado $(V_A,+)$ en un *grupo conmutativo*).

Por definición de grupo conmutativo, esto significa que se cumplen las propiedades:

1) *Asociatividad*: cualesquiera que sean $u,v,w \in V_A$, es

$$(u+v) + w = u + (v+w); \tag{1}$$

2) *Conmutatividad*: cualesquiera que sean u y v de V_A, es

$$u + v = v + u; \tag{2}$$

3) Existe un elemento $\bar{0} \in V_A$, llamado *elemento nulo*, o *neutro aditivo*, tal que

$$u + \bar{0}\ [= \bar{0} + u] = u; \tag{3}$$

(este elemento $\bar{0}$ es el vector nulo $\overrightarrow{AA}$, figura 3).

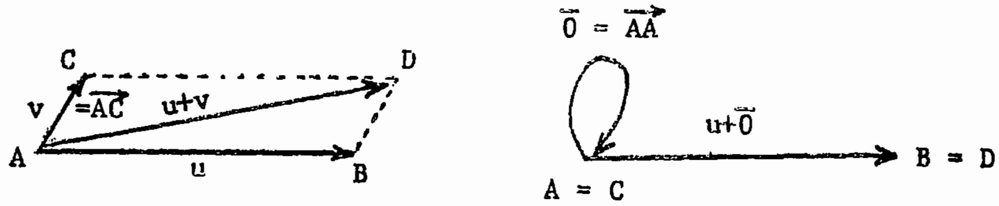


Fig. 3

Se demuestra que el neutro aditivo $\bar{0}$ es *único* (ver 1.2.3.b).

4) Para cada $u \in V_A$ existe un elemento de V_A, llamado *vector opuesto* de u, e indicado por -u, tal que (fig. 4):

$$u + (-u)[=(-u)+u] = \bar{0} \tag{4}$$

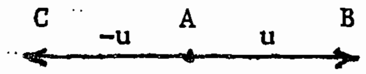


Fig. 4. $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}$ pero $\overrightarrow{BA} \neq -\overrightarrow{AB}$ pues $\overrightarrow{BA} \notin V_A$.

Se demuestra (ver 1.2.3. c) que el vector opuesto de u es *único*, lo que justifica la notación -u.

P_2. *La multiplicación de un vector de* V_A *por un número real tiene estas propiedades:*

2a. *Asociativa combinada:*

$$(a.b).u = a.(b.u), \quad (a,b \in R,\ u \in V_A); \tag{5}$$

2b. *Modular:*

$$1.u = u, \qquad (u \in V_A). \tag{6}$$

P_3. *Las operaciones de suma de vectores y de multiplicación de un vector por un número real están relacionadas por las propiedades:*

3a. *Distributiva:*

$$a.(u+v) = a.u + a.v, \qquad (a \in R, \quad u,v \in V_A); \tag{7}$$

3b. *Distributiva combinada:*

$$(a+b).u = a.u + b.u \qquad (a,b \in R, \quad u \in V_A). \tag{8}$$

1.1.3. *Notas*

a. Cuando se habla simplemente de *asociatividad* suele suponerse que se trata de una única operación que es asociativa. A la propiedad 2a la hemos llamado "asociativa combinada" porque intervienen en ella dos operaciones (en general distintas), que se indican del mismo modo, ambas por un punto o ambas por simple yuxtaposición: la multiplicación ordinaria en R, y la multiplicación de número por vector (ley de composición externa). En el segundo miembro de (5) los dos puntos designan a la ley de composición externa.

b. Por razones análogas se llama "distributiva combinada" a la propiedad 3b.

1.2. CONCEPTO DE ESPACIO VECTORIAL

1.2.1. El conjunto de los vectores fijos de origen común, con las operaciones de adición y multiplicación por un número real (elemento del *cuerpo* R), constituye un ejemplo de la estructura algebraica de *espacio vectorial sobre un cuerpo* K (llamado *cuerpo de escalares*). Nos interesarán especialmente los casos en que K = R (*espacio vectorial real* o sobre los números reales) ó K = C (*espacio vectorial complejo* o sobre los complejos):

DEFINICION

Se llama ESPACIO VECTORIAL (e.v.) *a toda cuaterna ordenada* (V, K, +, .) *tal que* V *es un conjunto,* K *es un cuerpo,* + *es una operación binaria en* V, . *es una operación externa en* V *con operadores en* K, *y se cumplen estas propiedades:*

P_1. *El par ordenado* (V, +) *es un grupo conmutativo:*

P_2. *La ley de composición externa tiene las propiedades:*

2a. *Asociativa combinada:*

$$(a.b).u = a.(b.u), \qquad (a,b \in K, \quad u \in V); \tag{5'}$$

2b. *Propiedad del* 1. Indicando con 1 el elemento neutro de la multiplicación en el cuerpo K, es:

$$1.u = u, \qquad (u \in V). \tag{6'}$$

P_3. *La operación de suma en* V *y la ley de composición externa están vinculadas por las propiedades:*

3a. *Distributiva:*

$$a.(u+v) = a.u + a.v, \qquad (a \in K, \quad u,v \in V); \tag{7'}$$

3b. *Distributiva combinada:*

$$(a+b).u = a.u + b.u, \qquad (a,b \in K, \quad u \in V). \tag{8'}$$

1.2.2. *Notas*

a. La propiedad 2b se llama también "modular". Expresa que 1, que es el elemento neutro (antiguamente llamado "módulo") de la multiplicación en K, es también elemento neutro de la ley de composición externa.

b. Si (V, K, +, .) es un e.v., por P_1, (V, +) es un grupo conmutativo. Como en todo grupo conmutativo se puede definir la *diferencia* así: *pondremos*

$$u - v = u + (-v) \tag{9}$$

donde el elemento $-v$ *es el simétrico u opuesto de* v *en el grupo* $(V,+)$ es decir, el único elemento $w \in V$ tal que $v + w = \overline{0}$, indicando con $\overline{0}$ al elemento neutro de la adición en $(V,+)$.

1.2.3. *Ejercicios*

a. Demostrar que en un e.v. vale esta implicación (*ley cancelativa* de la adición):

$$u + v = u + w \Rightarrow v = w. \tag{10}$$

[*Indicación*: Sumar $-u$ a izquierda y aplicar (1), (4) y (3).]

b. Demostrar que si $\overline{0}$ y $\overline{0}'$ son neutros aditivos, es $\overline{0} = \overline{0}'$.
[Considérese $\overline{0} + \overline{0}'$.]

c. Demostrar que si u' y u'' son ambos opuestos de u, es $u' = u''$.
[$u+u' = \overline{0} = u+u''$ y (10).]

d. Demostrar que en un e.v., para todo escalar a y todo vector u es:

$$0.u = a.\overline{0} = \overline{0}. \tag{11}$$

e. Demostrar que en todo e.v.

$$a.u = \overline{0} \Rightarrow a = 0 \text{ ó } u = \overline{0}. \tag{12}$$

1.3. EJEMPLOS DE ESPACIOS VECTORIALES

1.3.1. Espacios vectoriales R^n y C^n

a. *El espacio vectorial* $(R^2, R, +, .)$ (plano vectorial real).

Sea V el conjunto de todos los pares ordenados de números reales:

$$V = R^2 = R \times R = \{(r_1,r_2) | r_1,r_2 \in R\}, \tag{1}$$

Definiremos en V una operación binaria que llamaremos *suma* y designaremos con "+", así:

$$(r_1,r_2) + (s_1,s_2) = (r_1+s_1,\ r_2+s_2), \tag{2}$$

donde los signos "+" del segundo miembro indican sumas de números.

Es fácil verificar que:

$$(R^2,+) \text{ es un grupo conmutativo.} \tag{3}$$

Por otra parte, definamos una ley de composición externa en R^2 con operadores en R así:

$$h.(r_1,r_2) = (h.r_1,\ h.r_2), \tag{4}$$

donde el punto en el primer miembro indica esa ley de composición (multiplicación de un número real por un elemento de R^2), y los puntos en el segundo miembro indican productos de números.

Con las definiciones (2) y (4) se puede verificar fácilmente que

$$(R^2,\ R,\ +,\ .) \text{ es un espacio vectorial.} \tag{5}$$

b. *El espacio vectorial* $(R^n, R, +, .)$

Todo lo visto en a para R^2 se puede generalizar para el producto cartesiano $R^n = R \times R \times \ldots \times R$ (n factores), o sea para el conjunto

$$R^n = \{(r_1,r_2,\ldots,r_n) \mid r_i \in R\}, \tag{6}$$

de las n-uplas ordenadas de números reales.

Definiendo la *adición* en R^n así:

$$(r_1,r_2,\ldots,r_n) + (s_1,s_2,\ldots,s_n) = (r_1+s_1,\ldots,r_n+s_n) \tag{7}$$

donde los signos "+" del segundo miembro indican sumas de números, y una ley de composición externa que llamaremos *multiplicación* de un número real por un elemento de R^n, así:

$$h.(r_1,r_2,\ldots,r_n) = (h.r_1,h.r_2,\ldots,h.r_n), \tag{8}$$

se constata que:

$$(R^n,\ R,\ +,\ .) \text{ es un espacio vectorial.} \tag{9}$$

c. *El espacio vectorial* $(C^n, C, +, .)$

Todo lo dicho en b subsiste si se supone que los números que allí figuran son *complejos* cualesquiera. O sea, si se considera el producto cartesiano $C^n = C \times C \times \ldots \times C$ (n factores) o conjunto de las n-uplas ordenadas de números complejos, y con estas n-uplas se definen la adición por (7) y la multiplicación por un complejo h por (8). Se constata entonces que:

$$(C^n, C, +, .) \text{ es un espacio vectorial.} \tag{10}$$

1.3.2. *Espacios vectoriales de sucesiones*

Consideremos los conjuntos de las sucesiones de números reales o complejos:

$$R^\infty = \{(a_1,a_2,\ldots)|a_i \in R\}, \quad C^\infty = \{(a_1,a_2,\ldots)|a_i \in C\}. \tag{11}$$

Definiendo la adición de sucesiones por

$$(a_1,a_2,\ldots) + (b_1,b_2,\ldots) = (a_1+b_1,a_2+b_2,\ldots), \tag{12}$$

y la multiplicación de un número real o complejo h por una sucesión respectivamente real o compleja, por

$$h.(a_1,a_2,\ldots) = (h.a_1, h.a_2,\ldots), \tag{13}$$

se constata, siguiendo las pautas de 1.3.1, que

$$(R^\infty, R, +,.) \text{ y } (C^\infty,C, +,.) \text{ son espacios vectoriales.}$$

1.3.3. *Espacios vectoriales de funciones*

a. Llamemos C^R al conjunto de las funciones de R en C (o sea, funciones complejas de una variable real) (*). Entre estas funciones se define la *adición* en la forma habitual; es decir, dadas $f:R \to C$ y $g:R \to C$ se define la función

$$f + g:R \to C \tag{14}$$

(*) La notación C^R obedece a que si A y B son conjuntos finitos de a y b elementos respectivamente, hay b^a funciones de A en B pues para cada elemento de A hay b posibles valores. Entonces si B^A es el conjunto de las funciones de A en B, y llamamos c(H) al cardinal del conjunto H, es

$$c(B^A) = b^a = c(B)^{c(A)}$$

por

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \textit{ para todo } x \in R, \tag{15}$$

o sea, como la función que en cada $x \in R$ vale tanto como la suma de los valores de f y de g en x. Asimismo, para cada número complejo $a \in C$ se define al *producto*

$$a.f:R \to C \tag{16}$$

por

$$(a.f)(x) = a.f(x) \textit{ para todo } x \in R \tag{17}$$

Es fácil verificar que con la operación $(f,g) \to f+g$ definida por (15) y la ley externa $(a,f) \to a.f$ definida por (17), C^R es un e.v. complejo, o sea

$$(C^R, C, +, .) \textit{ es un espacio vectorial.} \tag{18}$$

Por ejemplo, para demostrar que

$$(C^R,+) \textit{ es un grupo conmutativo} \tag{19}$$

hay que probar que

(i) $$(f+g)+h = f+(g+h), \quad (f,g,h \in C^R) \tag{20}$$

(ii) Existe un elemento

$$\overline{0} \in C^R \textit{ tal que } \overline{0} + f = f \textit{ para todo } f \in C^R \tag{21}$$

[Es la función $\overline{0}$ dada por $\overline{0}(x) = 0$, o sea, la función constante de valor 0 para todo $x \in R$]

(iii) Para cada $f \in C^R$ existe un elemento

$$f^* \in C^R \textit{ tal que } f^* + f = \overline{0} \tag{22}$$

[f^* es la función definida por $f^*(x) = -f(x)$; se la indica $-f$.]

(iv) $$f+g = g+f, \quad (f,g \in C^R) \tag{23}$$

b. Sean a y b reales y $a < b$; se prueba como en a que también el conjunto $C^{[a,b]}$ de las funciones complejas definidas en el intervalo $[a,b] = \{x | a \leqslant x \leqslant b\}$ es un e.v. complejo, o sea, que

$$(C^{[a,b]}, C,+,.) \textit{ es un e.v.} \tag{24}$$

c. El conjunto R^R de las funciones *reales* de una variable real es también un e.v. Pero ahora hay que restringir la ley externa $(a.f) \to a.f$ a operadores en R (o sea, $a \in R$) para que el resultado esté también en R^R. Entonces el e.v. es *real*, o sea:

$$(R^R,R,+,.) \textit{ es un e.v.} \tag{25}$$

Análogamente, $R^{[a,b]}$ es un e.v. *real*.

Notemos que C^R y $C^{[a,b]}$ son también espacios vectoriales *reales*. En efecto, la restricción de la ley externa al dominio de operadores R no nos hace salir de las funciones complejas.

1.3.4. *Espacios vectoriales de polinomios*

Sea P_C el conjunto de todos los polinomios con coeficientes complejos. Cada uno se expresará así:

$$p = \sum c_j X^j = c_0+c_1X + c_2X^2 +\dots \quad (c_j \in C) \tag{26}$$

por una suma infinita donde los coeficientes c_j son nulos desde un cierto rango en adelante. Si *todos* los coeficientes c_j son nulos diremos que p es el *polinomio cero*, indicado por $\overline{0}$:

$$\overline{0} = \sum 0X^j = 0 + 0X + 0X^2 + \dots; \tag{27}$$

en caso contrario diremos que p tiene *grado n* si $c_n \neq 0$ y $c_j = 0$ para todo $j < n$.

Entre los polinomios en X se define la *adición* así: dados los polinomios (26) y

$$q = \sum_j d_j\ X^j = d_0 + d_1X + d_2X^2 + \ldots \tag{28}$$

p+q es por definición el polinomio

$$\sum_j (c_j+d_j)X^j = (c_0+d_0) + (c_1+d_1)X + \ldots \tag{29}$$

o sea

$$\sum_j c_j\ X^j + \sum_j d_j\ X^j = \sum_j (c_j+d_j)X^j \tag{29'}$$

donde *en el segundo miembro* el signo "+" indica *sumas de números*. Asimismo, para cada complejo $a \in C$ se define el *producto* $a.p \in P_C$ por

$$a.p = a.\sum_j c_j\ X^j = \sum_j (a.c_j)X^j, \tag{30}$$

donde, *en el último miembro*, el punto indica multiplicación *de números*.

Con estas definiciones (29') y (30) es fácil demostrar que P_C es un e.v. complejo, o sea, que

$$(P_C, C, +.)\ \textit{es un e.v.} \tag{31}$$

1.3.5. *Nota sobre los "vectores" de los físicos.*

Por definición, un *vector* es un elemento de un e.v.(*)

a. Si bien cada vector fijo es un *vector* (elemento del e.v. de los vectores fijos de origen común con él) el conjunto de *todos* los vectores fijos no es un e.v.

Si, por ejemplo, se define la suma u+v como la resultante de la "poligonal vectorial" formada por u y un equipolente a v (fig. 5), es v+u ≠ u+v si u y v

---

(*) Los objetos matemáticos se definen por sus relaciones. Entonces se introduce *primero la estructura* definida por esas relaciones en el conjunto de los objetos de cierta categoría (en nuestro caso la estructura algebraica de e.v.) y luego los objetos mismos como elementos de ese conjunto.

tienen orígenes diferentes.

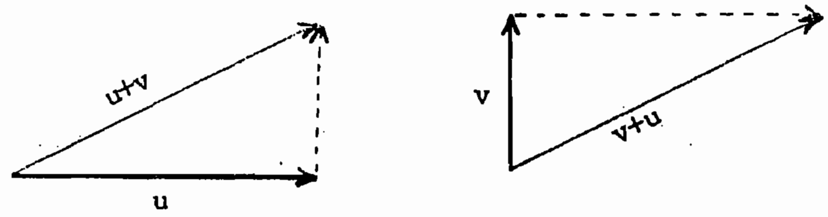


Fig. 5

b. Los "vectores libres" se definen mediante la *equipolencia* de vectores fijos, que es una *relación de equivalencia*. Cada "vector libre" es una clase de equipolencia de vectores fijos. Se demuestra que el conjunto de estos objetos es un e.v., de modo que podemos suprimir las comillas y hablar de *vectores libres*. La dificultad señalada en a desaparece demostrando que las flechas u+v y v+u de fig. 5 son equipolentes.

c. Las fuerzas son vectores fijos y los momentos son vectores libres. (Para pasar de F_1 a un equipolente F_2 (fig. 6) hay que agregar la cupla

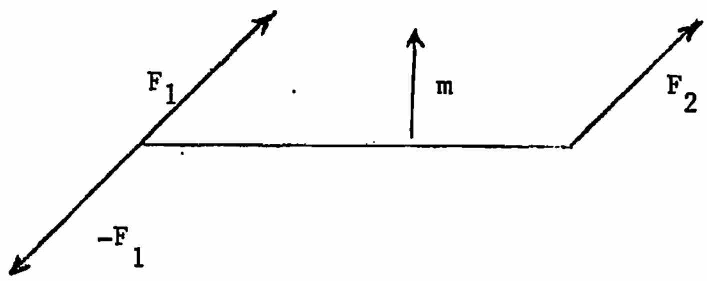


Fig. 6

$(-F_1,F_2)$, de momento $m \neq \overline{0}$ si $F_1 \neq \overline{0}$ y no alineado con F_2).

En sistemas rígidos las fuerzas son "vectores axiles". Pero estos objetos no son *vectores*: no es posible definir en su conjunto A una adición + de modo tal que (A,+) sea un grupo conmutativo.

1.3.6. *Ejercicios*

a. Completar la demostración de (15).

b. Demostrar (20) y (23) e indicar qué otras igualdades hay que probar para completar la demostración de (18).

c. Demostrar (31).

d. Demostrar que P_C es también un e.v. real.

e. (i) Probar que el conjunto P_R de los polinomios con coeficientes reales es un e.v. real.

(ii) Decir porqué no es un e.v. complejo.

f. Demostrar que el conjunto $P_{n,C}$ formado por el polinomio nulo y los polinomios de coeficientes complejos de grado $\leqslant n$ es un e.v. complejo, y también un e.v. real.

g. Decir si es un e.v. el conjunto formado por el polinomio nulo y los de grado = n.

h. *Independencia de la ley modular.* En el conjunto $R \times R$ de los pares de números reales con la adición definida por (2), dar una ley externa con operadores en R como multiplicación de un número real por un elemento de $R \times R$, de modo tal que se cumplan todas las propiedades de la definición 1.2.1, excepto la modular $1.u = u$. (Esto prueba que la ley modular no puede deducirse de las demás).

1.4. COMBINACIONES LINEALES

1.4.1. DEFINICION

Se llama COMBINACION LINEAL (c.l) de los vectores $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *(elementos de un e.v.* V *sobre un cuerpo* K) *a todo polinomio de la forma*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j.u_j = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n, \qquad (1)$$

donde $a_j \in K$ $(j = 1,\ldots,n)$. *Los* a_j *se llaman COEFICIENTES de la c.l.* (1).

1.4.2. Recordemos que dos polinomios $\sum a_ju_j$ y $\sum b_ju_j$ *en las mismas letras* $u_1,\ldots,u_n$ son diferentes si y sólo si difieren en los coeficientes de una de las letras por lo menos, y notemos que hay que distinguir entre c.ℓ. y *resultado* de una c.ℓ., pues puede haber dos polinomios diferentes que dan, sin embargo, el mismo resultado.

1.4.3. *Ejemplo*

Consideremos los vectores u_1 y $u_2 = -u_1$ (*opuesto* de u_1 en V, es decir, tal que $u_1 + u_2 = \overline{0}$). Entonces las dos combinaciones lineales

$$1.u_1 + 1.u_2 \qquad y \qquad 0.u_1 + 0.u_2 \tag{2}$$

que son *diferentes*, pues no tienen los mismos coeficientes, dan, sin embargo, el mismo resultado: el vector $\overline{0}$ (vector nulo de V). En este caso diremos también que el vector $\overline{0}$ admite por lo menos dos *representaciones* diferentes como c.ℓ. de los vectores u_1 y u_2.

1.4.4. *Ejercicios*

a. Hallar infinitas c.ℓ. de los vectores

$$u_1, u_2, u_3 = 3u_1 - u_2 \tag{3}$$

de un e.v. real, con el mismo resultado que

$$2u_1 + 5u_2 - 7u_3. \tag{4}$$

Una respuesta es:

$$(2-3a)u_1 + (5+a)u_2 + (a-7)u_3, \quad (a \in R). \tag{5}$$

b. Con referencia al ejercicio a, decir si (5) da *todas* las soluciones posibles.

c. *Demostrar* que en el e.v. R^3 (ver 1.3.1 b), cada vector u = (a,b,c) se puede representar como c.ℓ. de los vectores

$$(u_1 = (1,0,0), \qquad u_2 = (0,1,0), \qquad u_3 = (0,0,1), \tag{6}$$

unívocamente (prescindiendo del orden en que se escriben los términos).

d. (i) Decir qué vectores de R^3 se pueden representar como c.ℓ. de

$u_1 = (1,0,0)$, $u_2 = (0,1,0)$, $u_3 = (1,1,0)$;

(ii) Para cada uno de ellos indicar todas las c.ℓ. posibles.

e. En el e.v. de los polinomios de coeficientes reales, decir qué elementos se pueden representar como c.ℓ. de

$$p = X-2, \qquad q = X^2 - 4, \qquad r = 1, \tag{7}$$

e indicar cómo.

f. Lo mismo que en e con los vectores (7) sustituidos por

$$p = X-2, \qquad q = X^2-4, \qquad r^* = X^2-2X+2 \tag{7*}$$

1.5. SUBESPACIOS

1.5.1. Vimos en 1.3.4 que el conjunto $V = P_C$ de los polinomios con coeficientes complejos es un e.v. complejo, y que también lo es el *subconjunto* $S = P_{n,C}$ formado por el polinomio nulo y los de grado $\leqslant n$ (1.3.5 ej. f) *con las mismas operaciones definidas en* V (restringidas a $S \subset V$). Esto nos muestra que, en un e.v. V pueda existir un subconjunto propio S que sea a su vez un e.v., con las operaciones definidas en V. Tales subconjuntos, y el mismo V se llaman *subespacios* del e.v. V.

DEFINICION

Se llama SUBESPACIO de un e.v. V a todo subconjunto (propio o no) no vacío $S \subseteq V$ *que sea un e.v. con las mismas operaciones definidas en* V *(en particular, sobre el mismo cuerpo de escalares).*

1.5.2. Un subconjunto S de un e.v. V será un e.v. si se cumplen las propiedades de la definición de 1.2.1, con V sustituido por S. Pero por ser $S \subseteq V$ se siguen verificando P_2 y P_3, así como las propiedades asociativa y conmutativa de la adición, involucradas en P_1. Por ejemplo, puesto qua para todo par (u,v) de elementos de V es

$$u + v = v + u,$$

lo mismo ocurre para todo par (u,v) de elementos de S, pues lo son también de V por ser $S \subseteq V$.

Entonces, para verificar que S es un subespacio bastará comprobar:

(i) que + es una operación binaria *en S*;

(ii) que . es una operación externa *en S* con operadores en K;

(iii) que $\overline{0} \in S$ (pues entonces y solo entonces habrá un elemento nulo $n \in S$, a saber, $n = \overline{0}$, tal que $n + u = u$ para todo $u \in S$; ver 1.5.6 b), y

(iv) que para cada $u \in S$ es $-u \in S$ (pues entonces y sólo entonces habrá en S un elemento u^*, a saber, $u^* = -u$, tal que $u^* + u = \overline{0}$; ver 1.5.6 b). O sea:

El subconjunto $S \subseteq V$ *del e.v.* V *es un subespacio si y sólo si se cumplen estas cuatro condiciones:*

(i) $u,v \in S \Rightarrow u + v \in S$

(ii) $a \in K$ y $u \in S \Rightarrow a.u \in S$

(iii) $\overline{0} \in S$ (S *contiene al vector nulo de* V)

(iv) $u \in S \Rightarrow -u \in S$

1.5.3. *Ejemplo*

Sea $V = C^{[a,b]}$ el e.v. de las funciones complejas definidas en el intervalo $[a,b]$ (1.3.3 b) y S el subconjunto formado por las funciones *continuas* de V, que indicaremos

$$S = C[a,b]. \tag{1}$$

Veamos que S es un subespacio de V, y anticipemos que el e.v. S es uno de los más importantes del Análisis. Se cumplen (i) y (ii) pues la suma de dos funciones continuas es una función continua, y el producto de una función continua por un número es una función continua. Se cumple (iii) siendo $\overline{0}$ la función continua definida por $\overline{0}(x) = 0$ (función constante de valor 0). Finalmente, se cumple (iv) pues si f es una función continua, lo es la función -f definida por $(-f)(x) = -f(x)$.

1.5.4. De hecho no es necesario verificar todas las condiciones (i) a (iv) de 1.5.2. En 1.5.6 c se pide la demostración de este importante teorema:

TEOREMA

Sea V *un e.v. y* S *una parte no vacía de* V; $\emptyset \neq S \subseteq V$. *Las condiciones* C_1 *a* C_3 *que siguen son equivalentes:*

C_1) S *contiene el resultado de toda c.ℓ. de dos de sus elementos:*

$$a,b \in K \quad y \quad u,v \in S \Rightarrow au + bv \in S \tag{2}$$

C_2) S *contiene las diferencias de sus elementos y los múltiplos de cada uno:*

$$u,v \in S \Rightarrow u-v \in S, \quad a \in K \text{ y } u \in S \Rightarrow au \in S \tag{3}$$

C_3) S *es subespacio de* V.

1.5.5. Con referencia al ejemplo de 1.5.3, para probar que (1) es un subespacio de V, en virtud de la equivalencia $C_1 \Leftrightarrow C_3$ basta recordar que toda c.ℓ. de dos funciones continuas da como resultado una función continua.

1.5.6. *Ejercicios*

a. Sean u_1, u_2, u_3 tres vectores de un e.v. V sobre un cuerpo K. Verificar que los siguientes subconjuntos de V son subespacios:

(i) $\{0\}$;

(ii) $\{ku \mid k \in K\}$, conjunto de los múltiplos de un vector;

(iii) $\{k_1u_1 + k_2u_2 + k_3u_3 \mid k_i \in K\}$, conjunto de las c.ℓ. de tres vectores;

(iv) V.

b. Sea $\overline{0}$ el vector nulo de un e.v. V, $-u$ el opuesto de u en V y S un subconjunto de V. Probar que en S:

(i) Existe un neutro aditivo n si y sólo si $\overline{0} \in S$, y en tal caso es $n = \overline{0}$

(ii) Para cada $u \in S$ existe un simétrico $u^* \in S$ si y sólo si $u \in S \Rightarrow -u \in S$, y en tal caso $u^* = -u$.

c. Demostrar el teorema de 1.5.4 mediante la cadena de implicaciones $C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow C_3 \Rightarrow C_1$.

[*Indicaciones*. Para $C_1 \Rightarrow C_2$. Tomar en la implicación (2) a = 1, b = -1, y luego b = 0.

Para $C_2 \Rightarrow C_3$. En la primera (3), tomando v = u probar (iii), tomando $u = \overline{0}$ probar (iv); con (iv) poniendo -v en lugar de v probar (i); finalmente, la segunda (3) es (ii).

Para $C_3 \Rightarrow C_1$. Si S es subespacio, aplicar (ii) y (i) para probar las implicaciones:

$$a,b \in K \text{ y } u,v \in S \Rightarrow au, \quad bv \in S \Rightarrow au+bv \in S.]$$

d. con referencia el e.v. V = C[a,b] de las funciones continuas (1.5.3), probar que el subconjunto S de las funciones que se anulan en un punto x_0 de [a,b] es un subespacio.

e. Sea r un número real. Decir si el subconjunto del e.v. R^3:

$$S = \{(r_1,r_2,r_3) \in R^3 | r_1 + r_2 + r_3 = r\}$$

es un subespacio.

f. Decir cuáles de los siguientes subconjuntos del e.v. R^2 son subespacios:

(i) $\{(r_1,r_2) \in R^2 | r_1 = 0\}$

(ii) $\{(r_1,r_2) \in R^2 | r_1 \geqslant 0\}$

(iii) $\{(r_1,r_2) \in R^2 | r_1 + 3r_2 = 0\}$

(iv) $\{(r_1,r_2) \in R^2 | r_1 . r_2 = 0\}$

(v) $\{(r_1,r_2) \in R^2 | r_1^2 + r_2 = 0\}$

g. Decir cuáles de los siguientes conjuntos de funciones de dominio [0,1] son subespacios del e.v. C[0,1]: Todas las funciones continuas f tales que:

(i) 2f(0) = f(1); (ii) 2 + f(0) = f(1);

(iii) $f(x) \geqslant 0$ para todo x; (iv) f(x) = f(1-x) para todo x

1.6. OPERACIONES CON SUBESPACIOS

1.6.1. TEOREMA

Si S_1 *y* S_2 *son subespacios de un e.v.* V, *entonces su intersección* $S_1 \cap S_2$ *es subespacio de* V.

Demostración

Sean a y b escalares y $u,v \in S_1 \cap S_2$. Entonces $u,v \in S_1$ y por ser S_1 subespacio es en virtud de (2) de 1.5.4: $a.u + b.v \in S_1$. Por análoga razón es $au + bv \in S_2$; luego $au + bv \in S_1 \cap S_2$. Hemos probado así la implicación

$$u,v \in S_1 \cap S_2 \;\Rightarrow\; au + bv \in S_1 \cap S_2$$

que es la (2) de 1.5.4 con $S = S_1 \cap S_2$; luego $S_1 \cap S_2$ es un subespacio.

1.6.2. De manera análoga se prueba el siguiente teorema más general:

TEOREMA

Sea I *un conjunto no vacío de índices y* $(S_i)_{i\in I}$ *una familia de subespacios de un e.v.* V. *Entonces la intersección* $\bigcap_{i\in I} S_i$ *es un subespacio de* V.

1.6.3. TEOREMA

Sea M *un subconjunto cualquiera de un e.v.* V. *Existe un subespacio vectorial* S *de* V, *que es el menor de entre los que incluyen a* M *en el sentido de que:*

(i) $M \subseteq S$

(ii) *Todo subespacio* S' *que incluye a* M *incluye a* S:

$$S' \text{ subespacio y } M \subseteq S' \Rightarrow S \subseteq S'.$$

Demostración

Sea $\{S_i\}$ el conjunto de todos los subespacios que incluyen a M. Este conjunto no es vacío pues V pertenece a él. Sea $S = \bigcap S_i$

(i) Puesto que M es parte de cada S_i, es parte de su intersección. Es decir: $M \subseteq S$.

(ii) Si S' es un subespacio tal que $M \subseteq S'$, entonces S' es uno de los S_i y la intersección S de éstos es parte de él: $S \subseteq S'$

1.6.4. El teorema anterior justifica la definición siguiente:

DEFINICION

Se llama SUBESPACIO GENERADO por un subconjunto M *de un e.v.* V, *al menor subespacio* S *de* V *que incluye a* M. *Diremos que* M *es un CONJUNTO GENERADOR de* S.

El subespacio generado por M se llama también *cápsula lineal* de M. Lo indicaremos M^*.

1.6.5. TEOREMA

Sea M *una parte cualquiera de un e.v.* V. *El SUBESPACIO* M^* *GENERADO por* M *coincide con el CONJUNTO* L *DE LAS C.L. (finitas) de vectores de* M.

Demostración

(i) Puesto que $M \subseteq M^*$ y M^* es subespacio, toda c.ℓ. de elementos de M está en M^*, o sea $L \subseteq M^*$.

(ii) Si u y v son c.ℓ. de vectores de M, lo es también au + bv, o sea, vale la implicación:

$$a,b \in K \quad y \quad u,v \in L \Rightarrow a.u + b.v \in L,$$

y entonces, por la equivalencia de C_1 y C_3 de 1.5.4, L *es un subespacio de* V. Por otra parte, para cada $u \in M$ está en L la "combinación lineal" $1.u = u$; luego $M \subseteq L$. Entonces L es un subespacio que incluye a M, y por la definición de M^* resulta $M^* \subseteq L$.

(iii) De (i) $L \subseteq M^*$ y (ii) $M^* \subseteq L$ resulta $M^* = L$.

1.6.6. Si bien la intersección de dos subespacios es un subespacio (1.6.1), no lo es su unión, pero es útil considerar el subespacio generado por este conjunto.

DEFINICION

Se llama SUMA $S_1 + S_2$ *de dos subespacios* S_1 *y* S_2 *de un e.v.* V, *al subespacio de* V *generado por el conjunto* $M = S_1 \cup S_2$.

Entonces $S_1 + S_2$ es el menor subespacio de V que incluye a S_1 y a S_2. Se prueba que:

1.6.7. $S_1 + S_2$ *es el conjunto de las sumas* $u_1 + u_2$ *con* $u_1 \in S_1$ *y* $u_2 \in S_2$:

$$S_1 + S_2 = \{u | u = u_1 + u_2,\ u_1 \in S_1,\ u_2 \in S_2\}. \tag{1}$$

1.6.8. DEFINICION

Se llama SUMA $S_1 + S_2 + \ldots + S_n$ *de n subespacios* S_i *de un e.v.* V, *el subespacio de* V *generado por el conjunto* $M = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$.

Entonces $S_1 + S_2 + \ldots + S_n$ es el menor subespacio de V que incluye a S_1, a S_2,...,a S_n, y análogamente a (1) se tiene:

$$S_1 + S_2 + \ldots + S_n = \{u | u = u_1 + \ldots + u_n, \quad u_i \in S_i\}. \tag{2}$$

1.6.9. *Ejercicios*

a. (i) Probar que el conjunto de los polinomios de coeficientes complejos múltiplos de un polinomio dado q, es un e.v.

(ii) De (i) y 1.6.1 deducir que el conjunto de los polinomios de la forma $aX^2 + bX^3$ es un e.v.

b. (i) Probar que el conjunto $S = C_I[a,b]$ de las funciones continuas en un intervalo $[a,b]$ y nulas en los puntos de un conjunto $I \subseteq [a,b]$ es un e.v.

(ii) Si $I \subseteq J$ es $C_I[a,b] \subseteq C_J[a,b]$. Si la primera inclusión es estricta; ¿lo es también la segunda?

c. Demostrar el teorema de 1.6.2.

d. Determinar los números h y k de modo tal que $u = (h,3,k,-4)$ pertenezca al subconjunto de R^4 generado por $u_1 = (2,1,-1,0)$, $u_2 = (3,0,2,2)$.

e. Demostrar la proposición 1.6.7.

[*Indicación:* Por 1.6.5 y la definición de $S_1 + S_2$ ver que todo elemento u de $S_1 + S_2$ es c.ℓ. de vectores de S_1 y de S_2; agrupando términos deducir que u se expresa como $u_1 + u_2$ con $u_i \in S_i$. Recíprocamente, toda suma $u_1 + u_2$ con $u_i \in S_i$ está en $S_1 + S_2$.]

f. Probar que:

(i) $S_1 + S_2 = S_2 + S_1$

(ii) $(S_1 + S_2) + S_3 = S_1 + (S_2 + S_3) = S_1 + S_2 + S_3$

(iii) $S_3 \subseteq S_1 + S_1 \Rightarrow S_1 + S_2 + S_3 = S_1 + S_2$

g. Demostrar que: Si S y T son dos subespacios de un e.v. V, las propiedades P_1 y P_2 que siguen, son equivalentes:

P_1. $S \cap T = \{\overline{0}\}$

P_2. Todo vector de S + T se expresa *de una sola manera* en la forma u + v con $u \in S$, $v \in T$.

[Cuando las condiciones equivalentes P_1 y P_2 se cumplen, se dice que la suma S + T es *directa*. Si además S + T = V se dice que S y T son *subespacios suplementarios* en V.]

1.7. DEPENDENCIA LINEAL. BASES Y DIMENSION

1.7.1. DEFINICION

Se dice que el vector u *es LINEALMENTE DEPENDIENTE* (ℓ.d.) *del conjunto de vectores* $\{u_1,\dots,u_n\}$ *si existen escalares* $a_1,\dots,a_n$ *tales que*

$$u = a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n . \qquad (1)$$

O sea, si u admite una representación como c.ℓ. de $u_1,\dots,u_n$.

1.7.2. *Ejercicios*

a. Demostrar que el vector nulo $\overline{0}$ es ℓ.d. de cualquier conjunto $u_1,\dots, u_n$ de vectores.

b. Demostrar que: *si* u *es* ℓ.*d*. *de* $\{u_1,\dots,u_r\}$ *y* $\{u_1,\dots,u_r\} \subset \{v_1,\dots,v_n\}$, *entonces* u *es* *ℓ.d. de* $\{v_1,\ldots,v_n\}$.

c. Demostrar que u_1 es ℓ.d. del conjunto $\{u_2,\ldots,u_n\}$ si y sólo si existen escalares $b_1,\ldots,b_n$, con $b_1 \neq 0$, tales que

$$b_1u_1 + b_2u_2 +\ldots+ b_nu_n = \overline{0}\,. \tag{2}$$

d. Probar que en R^3, $u = (1,7,-1)$ es ℓ.d. del conjunto $\{(0,0,1), (1,3,0), (0,2,0)\}$ y representar u como c.ℓ. de los vectores del conjunto.

e. Mostrar sin ningún cálculo que el vector de R^3 $u = (3,1,-2)$ no es ℓ.d. del conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$ con $u_1 = (1,0,-1)$, $u_2 = (-2,0,2)$, $u_3 = (0,0,3)$.

1.7.3. DEFINICION

Se dice que el conjunto finito de vectores $\{u_1,\ldots,u_n\}$ *es LINEALMENTE INDEPENDIENTE (ℓ.i.) si ninguno de sus elementos es ℓ.d. del conjunto formado por los restantes.*

O sea, si u_k no es ℓ.d. de $\{u_1,\ldots,u_n\} - \{u_k\}$ $(k = 1,2,\ldots,n)$

1.7.4. *Nota*

La independencia lineal es una propiedad de *conjuntos de vectores*. Sin embargo se suele llamar ℓ.i. *a los vectores mismos*. En este sentido se usa la locución "conjunto de vectores linealmente independientes" en lugar de "conjunto ℓ.i. de vectores".

Por ejemplo, con esta terminología, diremos que *dos vectores* u,v *son ℓ.i.*, si ninguno de ellos es múltiplo del otro, es decir, producto de un escalar por él.

1.7.5. En virtud de 1.7.2 ejercicio c, $\{u_1,\ldots,u_n\}$ *es ℓ.i. si y sólo si no se verifica ninguna relación lineal*

$$b_1u_1 + b_2u_2 + \ldots + b_nu_n = \overline{0} \tag{3}$$

salvo en el caso trivial

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0\,. \tag{4}$$

En efecto, por 1.7.2 c es, por ejemplo, u_1 *ℓ.d.* de $\{u_2,\ldots,u_n\}$ si y sólo si existen escalares $b_1,\ldots,b_n$ con $b_1 \neq 0$, que verifican (3).

Lo que hemos probado equivale a decir que:

$\{u_1,\ldots,u_n\}$ es ℓ.i. si y sólo si vale la implicación

$$b_1u_1 + \ldots + b_nu_n = \overline{0} \Rightarrow b_1 = \ldots = b_n = 0 . \tag{5}$$

O sea, llamando *c.ℓ. trivial* a la que tiene todos su coeficientes nulos:

$\{u_1,\ldots,u_n\}$ es ℓ.i. si y sólo si la única c.ℓ. de $u_1,\ldots,u_n$ que da como resultado el vector nulo es la c.ℓ. trivial.

Esta propiedad, o la implicación (5), pueden darse como *definición de independencia lineal* de $\{u_1,\ldots,u_n\}$.

1.7.6. *Ejemplos*

a. En el e.v. R^2 (1,3,1 a), el conjunto $\{(1,0), (0,1)\}$ es *ℓ.i.*

En efecto, el cero de R^2 es el par $(0,0)$, y puesto que $a.(1,0) + b.(0,1) = (a,0) + (0,b) = (a,b)$, es $a.(1,0) + b.(0,1) = (0,0)$ *si y sólo si* $a = b = 0$.

b. En el e.v. de las funciones de R en R (1.3.3 c) el conjunto $\{f,g\}$ de las funciones dadas por

$$f(x) = x^2, \qquad g(x) = x, \tag{6}$$

es *ℓ.i.* En efecto, de $ax^2 + bx = 0$ resulta, haciendo $x = 1$ y luego $x = -1$:

$$a + b = 0, \qquad a - b = 0,$$

y de aquí resulta $a = b = 0$.

c. En el mismo e.v., el conjunto $\{F,G\}$ de las funciones dadas por

$$F(x) = 2^x, \qquad G(x) = 2^{x+1}$$

no es *ℓ.i.* En efecto, es $a.2^x + b.2^{x+1} = 0$ cualquiera que sea x, para todo par de coeficientes a,b tal que $a = -2b$.

d. En el mismo e.v., el conjunto $\{h,k\}$ de las funciones

$$h(x) = \cos^2 x, \qquad k(x) = \operatorname{sen}^2 x,$$

cuya suma es 1, es ℓ.i. En efecto, de $a.h + b.k = \overline{0}$, o sea de $a \cos^2 x + b \operatorname{sen}^2 x = 0$ para todo x, resulta, haciendo $x = 0$ y luego $x = \pi/2$: $a = 0$, $b = 0$.

1.7.7. DEFINICION

Se dice que el conjunto $\{u_1,\ldots,u_n\}$ *es LINEALMENTE DEPENDIENTE* (ℓ.d.) *si no es* $\ell.i.$

Notemos que aquí damos a la locución "linealmente dependiente" un significado distinto al asignado por la definición de 1.7.1., donde ℓ.d. se refería a un vector con respecto a un conjunto de vectores.

1.7.8. En 1.7.1 y 1.7.3 hemos definido locuciones como "u es ℓ.d. del conjunto *finito* $\{u_1,\ldots,u_n\}$", "el conjunto *finito* $\{u_1,\ldots,u_n\}$ es ℓ.i." Al intentar generalizar estos conceptos para conjuntos cualesquiera (finitos o infinitos) se presenta este inconveniente: solo podemos hablar de *sumas con un número finito de términos*. Pues bien, nos limitaremos a tales sumas y ampliaremos la definición de *combinación lineal* (1.4.1) así:

DEFINICION

Se llama COMBINACION LINEAL de los vectores de un conjunto (finito o infinito)

$$\{u_r\}_{r \in I} \tag{7}$$

a todo polinomio

$$a_1 u_{r_1} + a_2 u_{r_2} + \ldots + a_n u_{r_n}, \tag{8}$$

donde $a_i \in K$ *(cuerpo de escalares) y* $r_i \in I$.

En otras palabras, el conjunto (7) puede ser infinito, pero cada c.ℓ. (8) toma en cuenta solo un número finito de sus elementos, a saber: $u_{r_1}, u_{r_2},\ldots,u_{r_n}$.

En las definiciones de 1.7.1 y 1.7.3 se hacen los cambios consiguientes para que resulten admisibles conjuntos cualesquiera y no solo conjuntos finitos:

1.7.9. DEFINICION (confr. 1.7.1)

Se dice que el vector u *es LINEALMENTE DEPENDIENTE* (ℓ.d.) *del conjunto de vectores* $\{u_r\}_{r \in I}$ *si existen escalares* $a_1,\dots,a_n$ *y elementos de* I: $r_1,\dots,r_n$, *tales que*

$$u = a_1u_{r_1} + \dots + a_nu_{r_n}. \tag{9}$$

O sea, si u admite una representación como c.ℓ. (1.7.8) de los vectores de $\{u_r\}$.

1.7.10. DEFINICION (Confr. 1.7.3)

Se dice que el conjunto de vectores $\{u_r\}_{r \in I}$ *es LINEALMENTE INDEPENDIENTE* (ℓ.*i*.) *si ninguno de sus elementos es* ℓ.d. (1.7.9) *del conjunto formado por los restantes.*

Esta definición puede reformularse así:

Se dice que el conjunto de vectores $\{u_r\}_{r \in I}$ *es* ℓ.*i*. *si todo subconjunto finito de él es* ℓ.*i*. (en el sentido de la definición de 1.7.3).

1.7.11. *Ejercicios*

a. Demostrar que un conjunto $\{u_1,\dots,u_n\}$ es ℓ.i. si y sólo si vale la implicación:

$$\textit{al menos un} \quad b_i \neq 0 \Rightarrow b_1u_1 + \dots + b_nu_n \neq 0. \tag{10}$$

b. Probar que en el e.v. R^2 (1.3.1 a) cualesquiera que sean los números reales r,s el conjunto $\{(1,0), (0,1), (r,s)\}$ es ℓ.d.

c. Determinar en los ejemplos siguientes (i) a (iv) si el conjunto $\{u,v\}$ de vectores de R^2 ó de R^3 es ℓ.i. ó ℓ.d., y en los ℓ.d. dar una c.ℓ. nula no trivial $au + bv = \overline{0}$:

(i) $u = (1,-2)$, $v = (-3,6)$

(ii) $u = (1,-2)$, $v = (3,6)$

(iii) $u = (1,-2,3)$, $v = (4,-8,12)$

(iv) $u = (1,-2,3)$, $v = (-5,10,7)$.

d. Decir para qué valores de k son ℓ.d. los siguientes conjuntos

(i) $\{(2,k), (3,2k+1)\}$ de R^2

(ii) $\{(2,k,6), (3,k+1,8)\}$ de R^3

e. Determinar en los ejemplos siguientes si el conjunto $\{u,v,w\}$ de vectores de R^2 ó de R^3 es ℓ.i. ó ℓ.d., y en los ℓ.d. expresar uno de los vectores como c.ℓ. de los otros:

(i) $u = (3,0)$, $v = (9,0)$, $w = (-5,0)$

(ii) $u = (3,4)$, $v = (-5,3)$, $w = (9,-17)$

(iii) $u = (0,0,3)$, $v = (0,4,0)$, $w = (8,0,0)$

(iv) $u = (2,2,0)$, $v = (0,2,-1)$, $w = (4,2,1)$

f. (i) De cada uno de los siguientes subconjuntos de C^3:

$$M_1 = \{(1,0,1), (0,2,2), (3,7,1)\},$$

$$M_2 = \{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,1)\},$$

$$M_3 = \{(1,i,1+i), (i,-1,2-i), (0,0,3)\},$$

decir si es ℓ.i. ó ℓ.d., dando en este caso una c.ℓ. nula no trivial;

(ii) Para cada M_k ℓ.d. dar una parte N_k ℓ.i. que genere el mismo subespacio, o sea (1.6.4) tal que $N_k^* = M_k^*$.

g. Demsotrar *directamente* que el conjunto $M = \{(a_1,a_2), (b_1,b_2)\}$ de vectores de R^2 es ℓ.d. si y sólo si

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0. \tag{11}$$

h. Probar que en el e.v. de las funciones de R en R (1.3.3. c) el conjunto $\{f,g,h\}$ de las funciones dadas por

$$f(x) = x, \qquad g(x) = \text{sen } x, \qquad h(x) = \cos x,$$

es ℓ.i.

i. Probar que el conjunto $\{f,g,h,k\}$ de las funciones dadas en $[0,a]$ $(a > 0)$ por

$$f(x) = 1, \qquad g(x) = x, \qquad h(x) = \text{sen } x, \qquad k(x) = e^x,$$

es ℓ.i.

j. Probar que: si el conjunto $\{v_1,\ldots,v_n\}$ es ℓ.i., todo subconjunto de él es también ℓ.i.

k. Demostrar que: si $\{u_1,\ldots,u_n\}$ es ℓ.i., y

$$\{u_1,\ldots,u_n,v\} \qquad \textit{es} \quad \ell.\text{d.}, \tag{12}$$

entonces v es ℓ.d. de $\{u_1,\ldots,u_n\}$.

ℓ. Demostrar que si $\{u_1,\ldots,u_n\}$ es ℓ.i. y si v no es ℓ.d. de $\{u_1,\ldots,u_n\}$, entonces $\{u_1,\ldots,u_n,v\}$ es ℓ.i.

m. Demostrar que en el e.v. de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, el conjunto

$$\{f_0,f_1,f_2,\ldots\} \tag{13}$$

de las funciones f_n dadas por $f_n(x) = x^n$ es ℓ.i.

n. Verificar que $A = \{u_1,u_2,u_3\}$ es ℓ.i. si y sólo si $B = \{u_1,u_1 + u_2,u_1 + u_2 + u_3\}$ es ℓ.i.

o. Verificar que $A = \{u_1,u_2,u_3\}$ es ℓ.i. si y sólo si lo es $B = \{u_2 + u_3,\ u_3 + u_1,\ u_1 + u_2\}$.

p. Verificar que el conjunto $\{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ con $v_i = a_iu_1 + b_iu_2$ es ℓ.d., formando una relación de dependencia lineal válida cualesquiera que sean u_1, u_2.

1.8. BASES

1.8.1. *Conjuntos generadores*

En 1.6.4 definimos el *subespacio generado* por un subconjunto M de un e.v. V como el menor subespacio S que incluye a M. También llamamos a M *conjunto* *generador* de S. Luego probamos (1.6.5) que el subespacio $S = M^*$ generado por M coincide con el conjunto de las c.*ℓ*. (finitas) de vectores de M. Por tanto podemos definir un *conjunto generador para todo el espacio* así:

DEFINICION

Se dice que un conjunto $M = \{u_r\}_{r \in I}$ *de vectores de un e.v.* V *es un CONJUNTO GENERADOR para* V, *si todo vector* u *de* V *es ℓ.d. de* M.

O sea (1.7.9) si para cada u de V existen escalares $a_1, \ldots, a_n$ y elementos de I: $r_1, \ldots, r_n$, tales que

$$u = a_1 u_{r_1} + \ldots + a_n u_{r_n}. \tag{1}$$

En lugar de *conjunto generador* se dice también "conjunto *de generadores*" (confr. 1.7.4).

1.8.2. *Ejemplos*

a. Si $\{u_r\}_{r \in I}$ es el conjunto de *todos* los vectores de un e.v. V, entonces $\{u_r\}$ es un conjunto generador para V.

b. En el e.v. R^2 (1.3.1 a), $\{(1,0), (0,1)\}$ es un conjunto generador. En efecto, para todo $(a,b) \in R^2$ es $(a,b) = a.(1,0) + b.(0,1)$.

1.8.3. DEFINICION

Se llama BASE de un e.v. V *a todo conjunto generador para* V, *que sea además ℓ.i.*

1.8.4. *Ejemplos*

a. Probemos que en el e.v. R^n (1,3,1 b) es una base el conjunto

$$B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \text{ con } \begin{cases} u_1 = (1,0,0,\ldots,0) \\ u_2 = (0,1,0,\ldots,0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n = (0,0,0,\ldots,1) \end{cases}$$

donde u_k consta de un 1 en el lugar k, y n-1 ceros. O sea, con el símbolo delta de Kronecker:

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j = k \\ 0 & \text{si} \quad j \neq k, \end{cases}$$

es $u_k = (\delta_{1k}, \delta_{2k}, \ldots, \delta_{nk})$.

(i) B *es un conjunto generador para* R^n. En efecto, todo elemento $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de R^n se representa así:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n. \tag{2}$$

(ii) B *es* $\ell.i.$ En efecto, el vector nulo $\overline{0}$ de R^n es la n-upla $(0,0,\ldots,0)$ y por (2)

$$a_1u_1 + \ldots + a_nu_n = \overline{0} \quad \text{equivale a} \quad (a_1,\ldots,a_n) = (0,\ldots,0)$$

es decir, a $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$. Por tanto se cumple la implicación (5) de 1.7.4:

$$a_1u_1 + \ldots + a_nu_n = \overline{0} \Rightarrow a_1 = \ldots = a_n = 0$$

La base B se llama *base canónica* para R^n.

b. En el e.v. de los polinomios, el conjunto de polinomios

$$B = \{1, X, X^2, \ldots, X^n, \ldots\} \tag{3}$$

es una base. En efecto:

(i) B *es un conjunto generador*. Pues todo polinomio $a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ es una c.ℓ. de los elementos $1, X, \ldots, X^n$ de B, con coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

(ii) B *es* $\ell.i.$ Puesto que el polinomio nulo $\overline{0}$ es el que tiene todos sus coeficientes nulos, se tiene:

$$a_1 X^{r_1} + a_2 X^{r_2} + \ldots + a_n X^{r_n} = \overline{0}$$

equivale a

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0.$$

Notemos que la base (3) es *infinita*.

1.8.5. *Espacios vectoriales finitamente generados*

DEFINICION

Se dice que un e.v. V es FINITAMENTE GENERADO si existe un conjunto generador para V, finito.

Por ejemplo, el e.v. R^2 es finitamente generado en virtud de 1.8.2 b. Más generalmente, por 1.8.4 a, R^n es finitamente generado.

Acerca de los e.v. finitamente generados nos limitaremos a enunciar los teoremas fundamentales:

TEOREMA DE EXISTENCIA DE BASES. Todo e.v. finitamente generado tiene (al menos) una base.

TEOREMA DE COMPLETACION A UNA BASE. En un e.v. finitamente generado, un conjunto l.i. $\{u_1,\ldots,u_r\}$ es una base, o bien existen vectores $u_{n+1},\ldots,u_n$, tales que $\{u_1,\ldots,u_r, u_{r+1},\ldots,u_n\}$ es una base.

1.8.6. *Ejercicios*

a. Demostrar que si $B = \{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ es una base para V, la representación

$$x = x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_nu_n \tag{4}$$

de un vector x de V es *única*.

[Si con la base B se forma una *base ordenada* $(u_1,u_2,\ldots,u_n)$, cada vector de V queda unívocamente determinado por la n-upla ordenada de coeficientes en (4), $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, que llamaremos *n-upla de coordenadas*.]

b. Demostrar que en el e.v. $P_{2,C}$ (1.3.5 f), el conjunto $B = \{1, X, X^2\}$

es una base.

c. Demostrar que:

(i) El conjunto V de las funciones $f: R \to C$ dadas por

$$f(x) = a + b\,x + c\,x^2, \qquad (a,b,c \in C) \tag{5}$$

es un e.v.;

(ii) El conjunto de funciones $B = \{1, x, x^2\}$ es una base de este e.v.

d. Considerando el vector (2,0,0) de R^3, mostrar que {(1,0,1), (0,1,1), (1,-1,0)} *no* es una base de R^3.

e. En el e.v. R^3:

(i) Verificar que el conjunto {(1,2,3), (2,0,1)} es ℓ.i.

(ii) Hallar una base que lo incluya.

1.9. DIMENSION

1.9.1. LEMA

Si $\{u_1,\dots,u_r\}$ *es un conjunto generador de un e.v.* V, *entonces todo conjunto* $\{w_1,\dots,w_r\}$, $(k > r)$, *de más de* r *vectores de* V *es* ℓ.*d.*

Demostración

Puesto que $\{u_1,\dots,u_r\}$ es conjunto generador, es

$$\left.\begin{array}{l} w_1 = a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \dots + a_{1r}u_r \\ w_2 = a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + \dots + a_{2r}u_r \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ w_k = a_{k1}u_1 + a_{k2}u_2 + \dots + a_{kr}u_r \end{array}\right\} \tag{1}$$

que se puede escribir

$$w_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}u_j, \qquad (i = 1,\dots,k). \tag{1'}$$

Bastará probar que existen escalares $c_1,\dots,c_k$ no todos nulos y tales que

$$c_1 w_1 + c_2 w_2 + \dots + c_k w_k = \overline{0}. \tag{2}$$

Para ello consideremos el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + \dots + x_n a_{k1} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_1 a_{1r} + x_2 a_{2r} + \dots + x_n a_{kr} = 0 \end{array}\right\} \tag{3}$$

con r ecuaciones y k incógnitas. Como $k > r$ este sistema tiene soluciones no nulas. Sea $(c_1,\dots,c_k)$ una de ellas: veremos que cumple (2).

En efecto, por ser $(c_1,\dots,c_k)$ solución de (3) es

$$\sum_{i=1}^{k} c_i a_{ij} = 0, \qquad (j = 1,\dots,r), \tag{4}$$

y entonces (por (1') y (4)):

$$\sum_{i=1}^{k} c_i w_i = \sum_{i=1}^{k} c_i \left(\sum_{j=1}^{r} a_{ij} u_j\right) = \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{k} c_i a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{r} 0.u_j = \overline{0}.$$

1.9.2. Del lema precedente resulta:

TEOREMA *Sea* $\{u_1,\dots,u_r\}$ *un conjunto generador de un e.v.* V, *y sea* $\{v_1,\dots,v_s\}$ *un conjunto ℓ.i. Entonces es* $s \leq r$.

1.9.3. TEOREMA *Si* $\{u_1,\dots,u_r\}$ *y* $\{v_1,\dots,v_s\}$ *son bases de un e.v., es* $r = s$.

O sea, todas las bases de un e.v. finitamente generado tienen el mismo número de vectores.

Demostración

Por ser $\{u_1,\dots,u_r\}$ conjunto generador y $\{v_1,\dots,v_s\}$ ℓ.i. es por 1.9.2, $s \leq r$. De igual modo se prueba que $r \leq s$. Luego $r = s$.

1.9.4. El teorema anterior justifica la definición siguiente:

DEFINICION

Se llama DIMENSION de un e.v. V *finitamente generado, y se indica* dim (V), *al número de vectores de una base cualquiera.*

1.9.5. *Nota*

Con recursos superiores (y el uso del axioma de Zermelo o proposiciones equivalentes, por ejemplo el llamado lema de Zorn) se puede generalizar el teorema de 1.9.3 a e.v. cualesquiera (finitamente generados o no) así: *dos bases de un e.v. V tienen el mismo número cardinal.* Llamando dim (V) a este número cardinal se tiene la generalización natural de la definición de 1.9.4. Es V de *dimensión finita*, es decir, el número cardinal dim (V) es finito, si y sólo si V es finitamente generado.

1.9.6. *Ejercicios*

a. Demostrar que: si $\{v_1,\ldots,v_s\}$ es un conjunto ℓ.i. cuyos elementos v_j son ℓ.d. de un conjunto $\{u_1,\ldots,u_r\}$, es $s \leq r$.

b. Probar que para los espacios R^n (1.3.1 b) y $P_{2,C}$ (1.3.5 f) es

$$\dim (R^n) = n, \qquad \dim (P_{2,C}) = 3. \tag{5}$$

c. Probar que: si $\{v_1,\ldots,v_s\}$ es un conjunto ℓ.i. de *s* vectores de un e.v. V finitamente generado, es $s \leq \dim (V)$.

d. Probar que: si V es un e.v. de dimensión n, todo conjunto ℓ.i. $\{u_1,\ldots,u_n\}$ es una base.

e. Demostrar que: si dos subespacios S y T de un e.v. V tienen la misma dimensión n y es $S \subseteq T$, entonces $S = T$

f. (i) Verificar que los vectores de R^4

$$x = (x_1,x_2,x_3,x_4) \quad \textit{tales que} \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \tag{6}$$

constituyen un subespacio S;

(ii) Hallar una base de S;

(iii) Verificar que dim (S) = 3.

Capítulo 2

ESPACIOS METRICOS

2.1. CONCEPTO DE ESPACIO METRICO

2.1.1. El espacio ordinario, con la noción de *distancia* entre dos puntos cualesquiera, constituye el ejemplo natural de la estructura de *espacio métrico*, y las nociones que introduciremos tienen un significado muy intuitivo cuando se refieren al espacio de la geometría elemental. Por otra parte el concepto general de espacio métrico, introducido en 1905 por M. Fréchet, permite dar un alcance mucho más amplio a la idea de *distancia* y a las nociones conexas de *límite*, *continuidad*, etc. Una distancia se caracteriza en abstracto por un corto número de propiedades muy sencillas, presentes en muy diversas situaciones del Análisis que de este modo admiten un tratamiento uniforme y de mayor amplitud que en el Análisis elemental clásico.

2.1.2. Consideremos un conjunto E, a cuyos elementos x,y,z,... llamaremos *puntos*. Asignaremos a cada par (x,y) de puntos de E (elemento de E x E) un número real d(x,y) que llamaremos *distancia* de x a y, de modo que se cumplan estas propiedades, llamadas, *axiomas de distancia:*

d_1. $d(x,y) \geqslant 0$

d_2. $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$

d_3. $d(y,x) = d(x,y)$

d_4. $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$.

Asignar a cada par de puntos de E un número real significa definir una aplicación $d\colon E \times E \to R$ del producto cartesiano E x E en el conjunto R de los números reales. Esta aplicación se llama *distancia en E* si tiene las propiedades d_1 a d_4, y un conjunto E munido de una distancia se llama *espacio métrico*.

Formalicemos estas consideraciones en la definición siguiente:

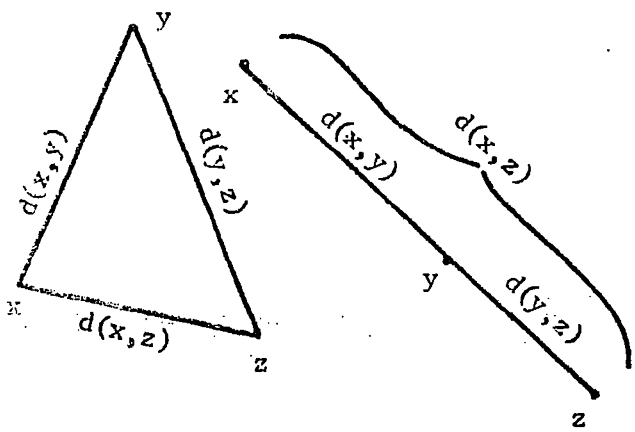
2.1.3. DEFINICION

Un ESPACIO METRICO (e.m.) es un par ordenado (E,d) *donde* E *es un conjunto cuyos elementos se llaman* PUNTOS *y* d *es una aplicación de* E x E *en* R *llamada* DISTANCIA *en* E , *que cumple las condiciones* d_1 *a* d_4.

2.1.4. *Notas*

a. Veremos que en un conjunto E se pueden definir varias distancias d,δ,ρ,.. y por tanto distintos e.m. (E,d), (E,δ), (E,δ),... . No obstante, cuando se sobreentiende la distancia d, en lugar de e.m. (E,d) se dice e.m.E.

b. La propiedad d_4 se llama *desigualdad triangular*. En el espacio ordinario se interpreta así: *en todo triángulo* (la longitud de) *un lado es menor ó igual que la suma de los otros dos* (fig.).



2.1.5. *Ejercicios*

a. Demostrar que si d es una distancia, es

$$|d(x,z) - d(y,z)| \leqslant d(x,y). \tag{1}$$

b. Demostrar que en un e.m.

$$d(x_1,x_n) \leqslant d(x_1,x_2) + d(x_2,x_3) +\ldots+ d(x_{n-1},x_n). \tag{2}$$

c. Demostrar que los axiomas de distancia d_1 a d_4 equivalen al sistema d_1,d_2, d^* : $d(x,z) \leqslant d(y,x) + d(y,z)$.

2.2. EJEMPLOS DE ESPACIO METRICOS

2.2.1. *Recta real*. Se puede considerar a R como un e.m. con la distancia $d(x,y) = |x-y|$. Los axiomas d_1 a d_4 son ahora:

$d_1(R)$: $|x-y| \geqslant 0$

$d_2(R)$: $|x-y| = 0 \Rightarrow x = y$

$d_3(R)$: $|y-x| = |x-y|$

$d_4(R)$: $|x-z| \leqslant |x-y| + |y-z|$.

Sólo es necesario verificar $d_4(R)$. De

$$x-y = a, \quad y-z = b, \quad \text{resulta} \quad x-z = a + b,$$

y entonces $d_4(R)$ equivale a la conocida desigualdad

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|. \tag{1}$$

2.2.2. *Plano complejo*. También se puede considerar a C como un e.m. con la distancia $d(x,y) = |x-y|$. Vale todo lo dicho en 2.2.1. pues (1) subsiste para complejos.

2.2.3. *Espacio métrico discreto*. En un conjunto cualquiera E no vacío definamos la aplicación $d: E \times E \to R$ por

$$d(x,y) = 1 \quad \text{si} \quad x \neq y \qquad d(x,y) = 0 \quad \text{si} \quad x = y. \tag{2}$$

Entonces d es una distancia, llamada *métrica discreta*. La validez de d_1, d_2 y d_3 es obvia; d_4 es inmediata si dos de los tres puntos x,y,z, coinciden, en caso contrario se tiene $d(x,z) = 1$ y $d(x,y) + d(y,z) = 2$, por tanto d_4 se cumple en todos los casos.

2.2.4. *Espacios* R^n *y* C^n. En el espacio tridimensional corriente $R^3 = R \times R \times R$ la distancia euclídea usual está definida por

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2} \tag{3}$$

si $x = (x_1,x_2,x_3)$ e $y = (y_1,y_2,y_3)$. Esto sugiere verificar si en los espacios R^n de las n-uplas de números reales y C^n de las n-uplas de complejos, la aplicación d dada por la raíz no negativa

$$d(x,y) = \sqrt{|x_1-y_1|^2 + |x_2-y_2|^2 + \dots + |x_n-y_n|^2} \tag{4}$$

si $x = (x_1,\ldots,x_n)$ e $y = (y_1,\ldots,y_n)$, es una distancia, es decir, cumple las condiciones d_1 a d_4. Esto podría verificarse directamente pero resultará en forma más sencilla en 3.3.1. b.

2.2.5. *Espacio* $A[a,b]$ *de las funciones reales acotadas.*

Sea $E = A[a,b]$ el conjunto de las funciones reales acotadas, de dominio $[a,b] = \{t | a \leqslant t \leqslant b\}$. Entonces, si $f,g \in E$, $f-g \in E$ y está definido el número

$$d(f.g) = \sup_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t) - g(t)| . \tag{5}$$

La aplicación $d: E \times E \to \mathbb{R}$ definida por (5) es una *distancia* en E, es decir, cumple las condiciones d_1 a d_4. Esto es obvio para d_1 y d_3; vale d_2 pues $d(f,g) = 0 \Rightarrow f(t) - g(t) = 0$ para todo $t \in [a,b]$, o sea $f = g$. Finalmente d_4, que es $d(f,h) \leqslant d(f,g) + d(g,h)$, poniendo

$$f-g = u, \quad g-h = v \quad \textit{de donde} \quad f-h = u + v,$$

se expresa mediante la conocida desigualdad (ver 2.2.7. b.):

$$\sup_{a \leqslant t \leqslant b} |u(t) + v(t)| \leqslant \sup |u(t)| + \sup |v(t)| . \tag{6}$$

2.2.6. *Subespacio de un e.m.;* $C[a,b]$

a. Sea S un subconjunto no vacío de un e.m. (E,d). La restricción de la aplicación $d: E \times E \to R$ a $S \times S$ es obviamente una distancia *en S;* se llama *distancia inducida* en S por la distancia d en E. También se dice que el e.m. definido por esta distancia inducida es el subespacio S del e.m.E.

b. El conjunto $C = C[a,b]$ de las funciones *continuas* en $[a,b]$ es un subconjunto de $E = A[a,b]$ pues toda función continua en un intervalo cerrado es acotada. Por tanto $C[a,b]$ *es un e.m.* con distancia dada por (5).

2.2.7. *Ejercicios*

a. Sean f,g dos funciones de un conjunto no vacío A en R, tales que $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in A$. Demostrar que:

(i) Si g está acotada superiormente, también lo está f

(ii) $\sup\limits_{x \in A} f(x) \leqslant \sup\limits_{x \in A} g(x)$

(iii) ¿Es $\sup\limits_{x \in A} |f(x)| \leqslant \sup\limits_{x \in A} |g(x)|$?

b. Sean f y g dos aplicaciones de A en R. Demostrar que:

(i) Si f y g tienen las cotas superiores H y K, entonces H + K es una cota superior de f + g;

(ii) $\sup\limits_{x \in A} [f(x) + g(x)] \leqslant \sup\limits_{x \in A} f(x) + \sup\limits_{x \in A} g(x)$;

(iii) $\sup\limits_{x \in A} |f(x) + g(x)| \leqslant \sup\limits_{x \in A} |f(x)| + \sup\limits_{x \in A} |g(x)|$.

c. Verificar que la función $\delta : R^n \times R^n \to R$ dada por

$$\delta(x,y) = |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n| \tag{7}$$

si $x = (x_1,\ldots,x_n)$ e $y = (y_1,\ldots,y_n)$, es una distancia en R^n.

d. Verificar que la función $\rho : R^n \times R^n \to R$ dada por

$$\rho(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|,\ldots,|x_n - y_n|\} \tag{8}$$

en una distancia en R^n.

[Notemos que para n = 1 este e.m. y el de c coinciden con el de 2.2.1.]

e. Para R^2 y con referencia a las distancias dadas por (4) , (7) y (8), describir los conjuntos:

(i) $\{x|\ d(x,y) \leqslant 1\}$,

(ii) $\{x|\ \delta(x,y) \leqslant 1\}$,

(iii) $\{x|\ \rho(x,y) \leqslant 1\}$.

f. (i) Demostrar que si $a,b \in R$ es

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} . \tag{9}$$

(ii) Deducir de (i) que en el conjunto R^∞ de todas las sucesiones de números reales $x = (x_1,\ldots,x_n,\ldots)$ la aplicación

$d: R^{\infty} \times R^{\infty} \to R$ definida por

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \tag{10}$$

si $y = (y_1, \ldots, y_n, \ldots)$, es una distancia.

[Indicación. Para (i) separar los casos en que a y b tengan el mismo o diferentes signos y recordar que la función $x/(1 + x)$ es decreciente para $x > 0$.]

g. Verificar que en R^{∞} la distancia d definida por (10) es tal que la distancia entre dos puntos cualesquiera es < 1.

2.3. TOPOLOGIA DE UN ESPACIO METRICO

2.3.1. *Bolas y entornos*

a. DEFINICION

Sea (E,d) *un e.m.,* $a \in E$ *y* $r > 0$. *Llamaremos BOLA ABIERTA, o simplemente BOLA, de CENTRO* $a \in E$ *y RADIO* r *al conjunto*

$$B(a,r) = \{x \in E \mid d(a,x) < r\}. \tag{1}$$

b. DEFINICION

Diremos que el conjunto U *es un ENTORNO del punto* a, *si existe un número* $r > 0$ *tal que*

$$B(a,r) \subset U. \tag{2}$$

En particular, para todo $r > 0$, $B(a,r)$ es entorno de a. Lo llamaremos *entorno simétrico* de a.

2.3.2. *Conjuntos abiertos*

a. DEFINICION

Un punto a se llama PUNTO INTERIOR de un conjunto $H \subseteq E$ *si* H *es entorno de a.*

O sea, si existe $r > 0$ tal que $B(a,r) \subseteq H$.

El conjunto de todos los puntos interiores de un conjunto H se llama *interior de* H, y se anota H°.

b. DEFINICION

Un conjunto A *se llama* ABIERTO *si* $A = A^\circ$.

En otras palabras, A es abierto si y sólo todo punto de A es punto interior de A.

c. TEOREMA

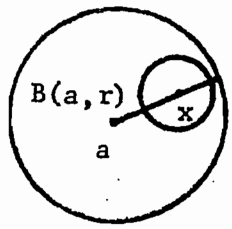
Toda bola abierta B(a,r) *es un conjunto abierto:*

$$B(a,r) = B^\circ(a,r). \tag{3}$$

Demostración

Si $x \in B(a,r)$ es $d(a,x) < r$, o sea

$$h = r - d(a,x) > 0. \tag{4}$$



Se tiene (fig., y 2.3.7. c):

$$B(x,h) \subseteq B(a,r), \tag{5}$$

y esta inclusión muestra que x es punto interior de B(a,r).

d. El teorema siguiente reune las propiedades básicas de los conjuntos (que se toman como punto de partida para definir una topología mediante el concepto de conjunto abierto tomado como primitivo).

TEOREMA

(i) *El conjunto vacío* $\emptyset$ *y el espacio* E *son conjuntos abiertos;*

(ii) *Si* A_1 *y* A_2 *son conjuntos abiertos, entonces su intersección* $A = A_1 \cap A_2$ *es un conjunto abierto;*

(iii) *La unión de una familia cualquiera de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.*

Demostración

(i) Obvio.

(ii) Si $A = \emptyset$ se aplica (i). Supongamos $A \neq \emptyset$ y sea $a \in A$.

Como $a \in A_i$ $(i = 1,2)$ y A_i es abierto, existen números $r_i > 0$ tales que

$B(a,r_i) \subseteq A_i$. Si $r = \min (r_1,r_2)$ es $r > 0$ y la bola $B(a,r)$ está incluída en A_1 y en A_2, y por tanto en su intersección A. Por tanto a es punto interior de A.

(iii) Que a pertenece a la unión U significa que pertenece al menos a un conjunto X_o de la familia. Puesto que X_o es abierto existe un entorno de a incluido en X_o, y por tanto incluido en la unión U. Así, todo $a \in U$ tiene un entorno incluido en U, es decir, U es abierto.

e. *Nota*

La intersección de un número infinito de conjuntos abiertos puede no ser un conjunto abierto. Por ejemplo en la recta real (2.2.1), los conjuntos abiertos $A_n = B(0, 1 + \frac{1}{n}) = \{x \mid |x| < 1 + \frac{1}{n}\}$ tienen como intersección el conjunto $H = \{x \mid |x| \leq 1\}$ que no es abierto pues $1 \in H$ pero $1 \notin H°$.

2.3.3. *Frontera y exterior*

Las definiciones de *punto interior* de H y de *interior* H° (2.3.2 a) pueden completarse con las dos definiciones que siguen.

DEFINICION 1

Sea $H \subseteq E$. *Un punto* a *de* (E,d) *se llama PUNTO FRONTERA de* H *si toda bola* B(A,r) *contiene puntos de* H *y de su complemento* $H' = E - H$. *El conjunto de los puntos frontera de* H *se llama FRONTERA de* H *y se indica* Fr(H).

Ejemplos

a. Para los conjuntos del plano complejo (2.2.2) $B = B(a,r) = \{z \mid |z-a| < r\}$ y $B^* = \{z \mid |z-a| \leq r\}$ es

$$Fr(B) = Fr(B^*) = \{z \mid |z-a| = r\}. \tag{6}$$

b. Sea Q el conjunto de los números racionales. Es $Fr(Q) = R$ pues toda bola contiene puntos de Q y de $Q' = R-Q$. Por esto mismo es $Q° = \emptyset$.

DEFINICION 2

Un punto a *de* E *se llama PUNTO EXTERIOR a* H ($H \subseteq E$) *si existe una bola* $B = B(a,r)$ *disjunta con* H: $B \cap H = \emptyset$. *El conjunto de los puntos exteriores a*

H *se llama EXTERIOR de* H, *y se indice* Ext(H).

Ejemplos

c. Para los conjuntos B y B* de ejercicio a es

$$\mathrm{Ext}(B) = \mathrm{Ext}(B^*) = \{z \in C \mid |z - z_o| > r\} .$$

d. En la recta real R es $\mathrm{Ext}(Q) = \emptyset$.

2.3.4. *Conjuntos cerrados*

a. DEFINICION

Un conjunto H *se llama CERRADO si su complementario* $H' = E - H$ *es abierto.*

Tomando complementos se pueden deducir a partir de propiedades de los conjuntos abiertos, propiedades de los conjuntos cerrados. Sin entrar en detalles señalemos que mediante las llamadas *leyes de De Morgan:*

$$(A \cap B)' = A' \cup B', \qquad (A \cup B)' = A' \cap B',$$

que se extienden a uniones e intersecciones de familias cualesquiera de conjuntos, a partir del teorema de 2.3.2 d se obtiene el siguiente, que reune las propiedades básicas de los conjuntos cerrados:

TEOREMA

(i) *El espacio* E *y el conjunto vacío* $\emptyset$ *son conjuntos cerrados;*

(ii) *Si* H_1 *y* H_2 *son conjuntos cerrados, entonces su unión* $H = H_1 \cup H_2$ *es un conjunto cerrado;*

(iii) *La intersección de una familia cualquiera de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado.*

b. Un conjunto puede ser a la vez abierto y cerrado, y también ni abierto ni cerrado, como muestran estos ejemplos:

(i) E y $\emptyset$ son a la vez abiertos y cerrados;

(ii) En el plano complejo (2.2.2) el conjunto $H = \{z \mid 1 \leqslant |z| < 2\}$ no es ni abierto ni cerrado.

c. *Nota*

La unión de infinitos conjuntos cerrados puede no ser un conjunto cerrado. Por ejemplo, en C (2.2.2), los conjuntos cerrados $F_n = \{z \in C \mid |z| \leq 1 - \frac{1}{n}\}$ tienen como unión la bola abierta $B(0,1) = \{z \mid |z| < 1\}$, que no es un conjunto cerrado.

d. Los conjuntos cerrados pueden definirse de otra manera, equivalente a la de 2.3.4 a:

DEFINICION

Un punto $a \in E$ *se llama ADHERENTE al conjunto* $H \subseteq E$ *si toda bola* $B(a,r)$ *contiene al menos un punto de* H. *El conjunto de los puntos adherentes a* H *se llama ADHERENCIA de* H *(o CLAUSURA de* H*) y se anota* $\bar{H}$.

Se prueba esta propiedad, que puede tomarse también como definición de conjunto cerrado:

Un conjunto H *es cerrado si y solo si coincide con su adherencia:* $H = \bar{H}$.

2.3.5. DEFINICION

Un punto a de E *se llama PUNTO DE ACUMULACION del conjunto* $H \subseteq E$ *si es adherente a* $H - \{a\}$.

O sea, si toda bola B(a,r) contiene al menos un punto de H diferente de a (y por tanto infinitos, 2.3.7). Conviene expresar esto de otro modo: llamaremos *bola reducida* de centro a y radio r al conjunto

$$B_o(a,r) = B(a,r) - \{a\} = \{x \in E \mid 0 < d(a,x) < r\}; \qquad (7)$$

entonces a es punto de acumulación de H si toda bola reducida de centro a contiene al menos un punto de H (y por tanto infinitos).

2.3.6. Con respecto a la relación de inclusión $\subseteq$, el interior H° es el mayor o más incluyente de los conjuntos abiertos incluidos en H, y la adherencia $\bar{H}$ es el menor o menos incluyente de los conjuntos cerrados que incluyen a H. Vale en efecto, este teorema que no demostraremos:

TEOREMA

(i) H° *es la unión de todos los abiertos incluidos en* H;

(ii) $\bar{H}$ *es la intersección de todos los cerrados que incluyen a* H.

2.3.7. Ejercicios

a. Decir qué es la bola (1):

(i) en la recta real (2.2.1);

(ii) en el plano complejo (2.2.2);

(iii) en R^3 (2.2.4);

(iv) en el e.m. discreto (2.2.3), si $r \leqslant 1$,

(v) en el e.m. discreto, si $r > 1$

b. Verificar que un conjunto U es un entorno de un punto a de E si y sólo si existe $r > 0$ tal que

$$d(a,x) < r \Rightarrow x \in U. \tag{8}$$

c. Mediante (4) demostrar en detalle la inclusión (5).

d. Se llama *distancia* d(A,B) entre dos subconjuntos no vacíos de E al número

$$d(A,B) = \inf_{x \in A,\ y \in B} d(x,y) \tag{9}$$

Se llama *distancia* d(x,A) de un punto x al conjunto A, al número

$$d(x,A) = d(\{x\},A) = \inf_{y \in B} d(x,y). \tag{10}$$

(i) Demostrar que

$$d(x,B(a,r)) \geqslant d(a,x) - r. \tag{11}$$

(ii) Dar un ejemplo con $x \notin B(a,r)$, en el cual (11) valga con $>$

e. (i) Verificar que la distancia entre dos conjuntos cumple:

1) $d(X,Y) \geqslant 0$

2) $d(X,Y) > 0 \Rightarrow X \cap Y = \emptyset$

3) $d(X,Y) = d(Y,X)$

4) $d(X,Z) \leqslant d(X,Y) + d(Y,Z)$.

(ii) ¿Vale la implicación contraria a 2)?

f. Se llama *diámetro* $\delta(A)$ de un conjunto no vacío A de un e.m. (E,d) al supremo de las distancias entre dos puntos del conjunto:

$$\delta(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y) \tag{12}$$

Probar que:

(i) El diámetro de la bola $B(a,r)$ es $\leqslant 2r$;

(ii) Puede ser $< 2r$.

g. Un conjunto A se llama *acotado* si su diámetro (12) es finito. Demostrar que la unión de dos conjuntos acotados A,B, es un conjunto acotado.

h. Demostrar que en un e.m. discreto (2.2.3) todo conjunto es abierto.

i. Demostrar las afirmaciones (i) e (ii) de 2.3.4 b.

j. Demostrar que H° es abierto, o sea, que el *interior de un conjunto cualquiera* H *es un conjunto abierto*.

[Indic. Probar que si $x \in H^\circ$ existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq H^\circ$.]

k. Demostrar que todo punto a adherente a H y no perteneciente a H es punto de acumulación de H.

ℓ. Probar que si a es punto de acumulación de H, toda bola reducida de centro a contiene infinitos puntos de H.

m. De los conjuntos $A = B_0(a,r)$, $B = \{x \mid 0 < d(a,x) \leqslant r\}$;

(i) Decir si son abiertos o cerrados

(ii) Indicar el interior, la frontera y el exterior de cada uno.

2.4. LIMITES

2.4.1. Límites de sucesiones

a. DEFINICION

Se dice que la sucesión (x_n) *de puntos de un e.m.* (E,d) *CONVERGE o TIENDE HACIA el punto* $h \in E$, *o que* h *es el LIMITE de* x_n, *si para cada número positivo* $\varepsilon > 0$ *se puede hallar un entero positivo* $N = N(\varepsilon)$ *tal que*

$$n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad d(h,x_n) < \varepsilon \, . \tag{1}$$

Se indica: $x_n \to h$ para $n \to \infty$, o bien $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = h$.

b. Puesto que $d(h,x_n) < \varepsilon$ equivale a $x_n \in B(h,\varepsilon)$ se tiene:

La sucesión (x_n) *converge hacia* h *si y sólo si para cada bola* $B(h,\varepsilon)$ *de centro* h *existe un entero positivo* $N = N(\varepsilon)$ *tal que:*

$$n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad x_n \in B(h,\varepsilon) \, . \tag{2}$$

c. Se prueba como en Análisis elemental para R ó C, que:

El punto $x \in E$ *es adherente (2.3.4 d) al conjunto* $H \subseteq E$ *si y sólo si existe una sucesión* (x_n) *de* H *cuyo límite es* x .

2.4.2. *Espacios métricos completos*

a. DEFINICION

Una sucesión (x_n) *se llama sucesión FUNDAMENTAL o de DE CAUCHY si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un entero* $N = N(\varepsilon)$ *tal que:*

$$m,n \geqslant N \quad \Rightarrow \quad d(x_m,x_n) < \varepsilon . \tag{3}$$

Se prueba (ver 2.4.4 h) que *toda sucesión convergente es de Cauchy,* pero la recíproca no vale en un e.m. cualquiera. Por ejemplo, no vale en el e.m. Q de los números racionales con la distancia $d(x,y) = |x-y|$.

b. DEFINICION

Un e.m. se llama COMPLETO si en él toda sucesión fundamental es una sucesión convergente.

2.4.3. *Espacios métricos completos*

a. DEFINICION

Sean (E,d) y (E*,d*) *e.m. S un subconjunto de* E, $f:S \to E^*$ *una función de* S *en* E^* *y a un punto de acumulación de* S. *Se dice que* f *ONVERGE o TIENDE HACIA el punto* h *de* E* *para* x *tendiendo hacia a, o que h es el límite de* f(x) *para* $x \to a$, *si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un número* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *tal que*

$$x \in S \text{ y } 0 \quad d(x,a) < \delta \Rightarrow d^*(f(x),h) < \varepsilon \quad . \tag{4}$$

Se escribe $f(x) \to h$ para $x \to a$, ó $\lim_{x \to a} f(x) = h$.

Notemos que para que exista el límite para $x \to a$ no es necesario que la función esté definida en a(puede ocurrir que $a \notin S$) y que si lo está no interesa su valor en a.

b. *Ejemplo*

En la recta real (2.2.1) sea $f:R-\{1\} \to R$ dada por $f(x) = (x^2-1)/(x-1)$. La función f está definida sólo para $x \neq 1$ pero existe $\lim_{x \to 1} f(x) =$ $= \lim_{x \to 1} (x+1)(x-1)/(x-1) = \lim_{x \to 1} (x+1) = 2$. La simplificación para pasar del segundo miembro al tercero es válida para todo x del dominio de f.

2.4.4. *Ejercicios*

a. Probar que una sucesión (x_n) es un e.m. no puede converger hacia dos límites h,k diferentes.

b. Demostrar que: *condición necesaria y suficiente para que* $\lim_{n \to \infty} x_n = h$ *es que para cada entorno* V *de* h *exista un entero* N *tal que* $n > N \Rightarrow x_n \in V$.

O sea, cada entorno V de h contiene todos los x_n con eventual excepción de un número finito de ellos.

c. Un conjunto es acotado (2.3.7. g) si y sólo si está incluido en una bola. La sucesión (x_n) se llama *acotada* si lo es el conjunto $\{x_n\}$.

(i) Demostrar que toda sucesión convergente es acotada.

(ii) ¿Es verdadera la recíproca?

d. Se dice que la sucesión (y_k) es una *subsucesión* de la sucesión (x_n) si existe una sucesión estrictamente creciente de números naturales (n_k) tal que $y_k = x_{n_k}$ para todo $k \in N$. En este caso (y_k) se escribe también (x_{n_k}).

Demostrar que: *si* $\lim_{n\to\infty} x_n = h$, *entonces* $\lim_{x\to\infty} x_{n_k} = h$ *para cada subsucesión de* (x_n).

e. Sea (x_n) una sucesión de puntos en un e.m. (E,d). Se dice que un punto $b \in E$ es un *valor adherente* de (x_n) si existe una subsucesión (x_{n_k}) tal que $b = \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$.

(i) Demostrar que si existe $\lim_{n\to\infty} x_n = h$, entonces h es el *único* valor adherente de (x_n).

(ii) ¿Vale la propiedad recíproca?

f. Demostrar que: condición necesaria y suficiente para que $b \in E$ sea un valor adherente de (x_n) es que, para cada entorno V de b y cada entero N exista un $n \geqslant N$ tal que $x_n \in V$.

g. Sea A un subconjunto de E. Demostrar que para cada punto $a \in \bar{A}$ existe una sucesión (x_n) de puntos de A, tal que $\lim x_n = a$.

h. Demostrar que toda sucesión convergente es una sucesión fundamental.

i. Verificar que todo e.m. discreto es completo.

j. Demostrar que si (E,d) es un e.m. completo y A es un subconjunto cerrado de E, entonces el subespacio (A,d) es completo.

k. Demostrar que si: (i) (x_n) es una sucesión fundamental, y (ii) b es un valor adherente de (x_n), entonces es $b = \lim x_n$.

ℓ. Demostrar que: condición necesaria y suficiente para que $\lim_{x\to a} f(x) = h$, es que para cada entorno U^* de h en E^* exista un entorno U de a en E, tal que

$$f(U \cap S) \subset U^*. \tag{5}$$

m. Demostrar que una aplicación f sólo puede tener *un* límite para $x \to a$ en S.

2.5 CONTINUIDAD

2.5.1. *Continuidad en un punto*

a. DEFINICION

Sean (E,d) *y* (E*,d*) *e.m. Diremos que una función* d: $E \to E^*$ *es CONTINUA en un punto a de* E *si*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)\,. \tag{1}$$

b. *Nota*

Puesto que obviamente $\lim_{x \to a} x = a$, (1) puede escribirse así:

$$\lim f(x) = f(\lim x). \tag{2}$$

O sea, la función f es *continua* (en a) *si y sólo si* f *conmuta con el paso al límite* (para $x \to a$).

c. De las definiciones de a y de 2.4.3 a (límite de una función) resulta:

TEOREMA

Sean (E,d) *y* (E*,d*) *e.m. La función* $f: E \to E^*$ *es continua en el punto a de* E *si y sólo si para cada número positivo* $\varepsilon > 0$ *existe un número* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *tal que:*

$$d(a,x) < \delta \quad \Rightarrow \quad d^*(f(a), f(x)) < \varepsilon\,. \tag{3}$$

2.5.2 *Continuidad en un conjunto*

a. DEFINICION

Sean (E,d) *y* (E*,d*) *e.m. Una función* $f: E \to E^*$ *se llama CONTINUA EN UN CONJUNTO* $A \subseteq E$ *si es continua en todo punto de* A, *y se llama CONTINUA si es continua en* E.

b. Sea $f: A \to B$ una aplicación de A en B, A' una parte de A y B' una parte de B. Se llama

imagen (directa) de A' por f: f(A'),

al conjunto de las transformadas de elementos de A':

$$f(A') = \{f(x) \mid x \in A'\} .$$

Se llama

imagen inversa de B' *por* f: $f^{-1}(B')$,

al conjunto de los elementos de A cuyas transformadas pertenecen a B':

$$f^{-1}(B') = \{x \in A \mid f(x) \in B'\} .$$

En 2.5.3 c se pide la demostración de una parte de este teorema:

Sean (E,d) *y* (E^*,d^*) *e.m. Si* f *es una aplicación de* E *en* E^* *las siguientes propiedades son equivalentes:*

(i) f *es continua*

(ii) *Para cada conjunto abierto* A^* *en* E^*, $f^{-1}(A^*)$ *es abierto en* E

(iii) *Para cada conjunto cerrado* F^* *en* E^*, $f^{-1}(F^*)$ *es cerrado en* E.

Notemos que la imagen *directa* de un conjunto abierto (respectivamente: cerrado) por una función continua *no* es, en general, un conjunto abierto (resp.: cerrado). Por ejemplo en la recta real R(2.2.1) $f(x) = x^2$ es continua, pero la imagen del intervalo abierto (-1,1), que es un conjunto abierto, es el intervalo [0,1) , que no es un conjunto abierto.

2.5.3 *Ejercicios*

a. Demostrar que: Una aplicación f de E en E^* es continua en un punto a de E si y sólo si para cada entorno U^* de f(a) en E^* existe un entorno U de a en E, tal que $f(U) \subseteq U^*$.

b. Probar que: Una aplicación $f: E \to E^*$ es continua en un punto a de E si y sólo si para cada entorno U^* de f(a) en E^*, es $f^{-1}(U^*)$ un entorno de a en E.

c. Deducir de b que: La función $f: E \to E^*$ es continua si y sólo si la imagen inversa $f^{-1}(A^*)$ de cada conjunto abierto A^* en E^* es un conjunto abierto en E.

Nota:

Cada una de los propiedades en a,b y c caracteriza las funciones continuas (en un punto para a y b) y puede darse como definición de continuidad que se extiende a espacios topológicos no necesariamente métricos.

De a y b se obtienen condiciones de continuidad (global) suprimiendo las frases: "un punto a de", "de f(a)" y "de a".

2.6. COMPACIDAD Y SEPARABILIDAD

2.6.1. *Compacidad*

a. Se llama *cubrimiento* o *recubrimiento* de un conjunto M a una familia de conjuntos $\{A_i\}_{i\in I}$ cuya unión lo incluya: $\bigcup_{i\in I} A_i \supseteq M$.

DEFINICION

Un e.m. (E,d) se llama TOTALMENTE ACOTADO o PRECOMPACTO si para cada $\varepsilon > 0$ existe un cubrimiento FINITO de E por conjuntos de diámetros (2.3.7 f) $< \varepsilon$.

b. *Nota*

Una definición equivalente es ésta: (E,d) *se llama PRECOMPACTO si para cada $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto FINITO $F \subseteq E$ tal que $d(x,F) < \varepsilon$ para cada* $x \in E$. En términos intuitivos: el e.m. E es "aproximadamente finito". En la teoría de los e.m. estas nociones sustituyen a la noción de "finitud" de la teoría de conjuntos.

c. Obviamente *todo e.m. finito es precompacto*, y también *todo subespacio de un e.m. precompacto es precompacto.*

d. DEFINICION

Diremos que un e.m. es COMPACTO si es precompacto y completo.

e. *Ejemplos*

e_1. Es obvio que todo e.m. finito es completo. Entonces, por c: *todo e.m.*

finito es compacto.

e_2.La recta real E (3.2.1) es un e.m. completo, pero no es precompacto, luego *R no es compacto*. Su subespacio $(0,1)$ es precompacto pero no completo, luego $(0,1)$ *no es compacto*. En cambio $[0,1]$ *es compacto* pues es totalmente acotado y completo.

f. DEFINICION

Sea (E,d) *un e.m. Diremos que un subconjunto* S *de* E *es un CONJUNTO COMPACTO* (respectivamente: *PRECOMPACTO*) si el subespacio (S,d) *es compacto* (resp: *precompacto*).

Por c y puesto que un subespacio (S,d) de un e.m. completo (E,d) es completo si y sólo si es cerrado, resulta: *Un subconjunto de un e.m. compacto es compacto si y sólo si es cerrado.*

g. TEOREMA

Para que un e.m. (E,d) *sea compacto es necesario y suficiente que cada subconjunto infinito de* E *tenga al menos un punto de acumulación.*

Demostración

Si E finito es compacto por e_1, y la condición se cumple pues E no tiene subconjuntos infinitos. Por tanto podemos limitarnos a espacios con infinitos puntos.

(i) Sea (E,d) compacto y S un subconjunto infinito de E. Por ser (E,d) precompacto, dado $\varepsilon > 0$ existe un cubrimiento finito $\{A_1,A_2,\dots,A_n\}$ de E, tal que diam $(A_i) < \varepsilon$. Uno al menos de los conjuntos $S \cap A_i$, digamos $S \cap A_1$, es infinito. Por ser $(S \cap A_1, d)$ precompacto (ver c) hay un cubrimiento finito $\{B_1,\dots,B_m\}$ de $S \cap A_1$ tal que diam $(B_i) < \varepsilon/2$. Uno al menos de los $S \cap B_i$, digamos $S \cap B_1$, es un conjunto infinito. Por sér $(S \cap B_1,d)$ precompacto hay un cubrimiento finito $\{C_1,\dots,C_k\}$ de $S \cap B_1$, tal que diam $(C_i) < \varepsilon/3$. Uno al menos de los $S \cap C_i$, digamos $S \cap C_1$, es infinito,... La sucesión $(x_1,x_2,x_3,\dots)$

formada eligiendo puntos diferentes $x_1 \in S \cap A_1$, $x_2 \in S \cap B_1$, $x_3 \in S \cap C_1, \ldots$ es una sucesión fundamental (pruébese) y por ser E completo existe $a \in E$ tal que $\lim x_n = a$, y a es punto de acumulación de S.

(ii) Recíprocramente, supongamos que cada subconjunto infinito de E tenga al menos un punto de acumulación. Entonces toda sucesión fundamental (x_n) converge hacia el punto de acumulación de $\{x_n\}$, y por tanto E es *completo*. Entonces existiría un número $h > 0$ tal que E no se podría recubrir por un número finito de bolas de radio h. Entonces, dado un punto $x_1 \in E$ existen un punto $x_2 \in E - B(x_1,h)$, un punto $x_3 \in E - B(x_1,h) - B(x_2,h)$, etc. El conjunto infinito $H = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ tiene por construcción la propiedad de que dos cualesquiera de sus puntos verifica:

$$d(x_m, x_n) \geqslant h. \tag{1}$$

Además, por hipótesis, H tiene (al menos) un punto de acumulación a. Entonces en la bola $B(a, h/2)$ habría (infinitos y por tanto) dos puntos x_r, x_s. Por la propiedad triangular es

$$d(x_r, x_s) \leqslant d(x_r, a) + d(a, x_s) < \frac{h}{2} + \frac{h}{2} = h$$

en contradicción con (1).

h. En virtud del teorema anterior podemos dar esta definición equivalente de compacidad:

DEFINICION

Un e.m. (E,d) *se llama COMPACTO si cada subconjunto infinito de* E *tiene al menos un punto de acumulación.*

i. *Ejemplos* (confr. e_2).

i_1. La recta real R no es un e.m. compacto pues el conjunto Z (enteros) no tiene ningún punto de acumulación en R.

i_2. Tampoco es compacto el intervalo abierto $(0,1) = \{x \in R \mid 0 < x < 1\}$. El conjunto infinito $\{1/n \mid n = 1,2,3,\ldots\}$ tiene en R el único punto de acumulación 0, pero $0 \notin (0,1)$.

i_3. En cambio el intervalo cerrado $[0,1] = \{x \in R \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ es compacto. Por ser un subconjunto acotado de R, por el teorema de Bolzano-Weierstrass todo subconjunto infinito de él tiene al menos un punto de acumulación $a \in R$, y como $[0,1]$ es un conjunto cerrado, $a \in [0,1]$.

2.6.2. *Separabilidad*

a. DEFINICION

Sean (E,d) *un e.m., A y B subconjuntos de E. Diremos que A es DENSO RESPECTO DE B si* $\bar{A} \supseteq B$. *Un conjunto A denso respecto de E se llama DENSO EN TODAS PARTES o simplemente DENSO en E.*

b. *Notas*

b_1. Decir que A es *denso respecto de* B equivale a decir que todo punto de B es punto adherente de A, o que todo entorno de un punto de B contiene puntos de A.

b_2. Decir que A es *denso* en E equivale a decir que $\bar{A} = E$, o sea que cada abierto no vacío contiene un punto de A.

c. DEFINICION

Un e.m. (E,d) *se llama SEPARABLE si existe en E un conjunto denso numerable o finito.*

d. *Ejemplo*

La recta real R es un e.m. separable pues el conjunto Q de los números racionales es denso en R y numerable.

2.6.3. *Compacidad y separabilidad*

TEOREMA

Todo e.m. (E.d) *precompacto es separable*

Demostración

Por hipótesis (ver 2.6.1 b) para cada entero $n > 0$ existe un subconjunto finito $F_n \subseteq E$ tal que para todo x de E es $d(x,F_n) < 1/n$. La unión $A = \cup F_n$ es un conjunto finito o numerable, y para cada $x \in E$ es $d(x,A) \leqslant d(x,A_n) < 1/n$. Puesto que la desigualdad $d(x,A) < 1/n$ vale para todo n, es $d(x,A) = 0$, o sea $x \in \bar{A}$. Luego $\bar{A} = E$.

2.6.4. *Ejercicios*

a. Demostrar que en un e.m. discreto E(2.2.3) los conjuntos compactos son los conjuntos finitos y sólo ellos.

b. Probar que si $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \ldots$ es una sucesión decreciente de conjuntos compactos, la intersección $K_1 \cap K_2 \cap K_3 \cap \ldots$ no es vacía. (Lema de Cantor).

[*Indic.* Tómese un punto x_n en cada K_n y considérese el conjunto $M = \{x_1, x_2, \ldots\}$.]

c. Demostrar que en un e.m. compacto E toda sucesión (x_n) que tenga un solo valor adherente R converge hacia h.

[*Indic.* Suponiendo que no fuera $\lim x_n = h$, probar que:

(i) Una subsucesión (x_{n_k}) tendría un valor adherente $\neq h$;

(ii) (x_n) tendría más de un valor adherente.]

d. Demostrar que si en un e.m. E es A denso respecto de B y B denso respecto de C, entonces A es denso respecto de C.

e. Mostrar que el e.m. R^n (2.2.4) es separable.

[*Indic.* Ver 2.6.2 d.]

f. Probar que el e.m. A[a,b] de las funciones reales acotadas de dominio [a,b] (2.2.5) no es separable.

3.7. CONTINUIDAD Y COMPACIDAD

3.7.1. Toda función continua de un e.m. en otro conserva los conjuntos compactos:

TEOREMA

Sea $f: E \to E'$ *una función continua de un e.m. en otro y* K *un conjunto compacto de* E. *Entonces*

$$f(K) = \{y \in E | y = f(x) \text{ para algún } x \in K\} \tag{1}$$

es un conjunto compacto.

Demostración

Sea (y_n) una sucesión en $f(K)$. Para cada n tomemos un $x_n \in K$ tal que $f(x_n) = y_n$. Como K es compacto, (x_n) tiene una subsucesión (x_{n_k}) convergente hacia un elemento de K:

$$\lim x_{n_k} = h \in K. \tag{2}$$

Por ser f continua, (2) implica (ver 2.5.1 b)

$$\lim y_{n_k} = \lim f(x_{n_k}) = f(\lim x_{n_k}) = f(h) \in f(K). \tag{3}$$

Por tanto, toda sucesión (y_n) en $f(K)$ tiene una subsucesión (y_{n_k}) convergente hacia un elemento de $f(K)$, y por tanto $f(K)$ es compacto.

Nota

Se puede demostrar que si $f:S \to T$ es una aplicación biyectiva continua de un conjunto compacto en otro, entonces la aplicación inversa es también continua.

Una aplicación $f:E \to E'$ biyectiva y continua juntamente con su inversa f^{-1} se llama *homeomorfismo* o *transformación topológica.*

El nombre proviene de que f' conserva las propiedades topológicas por ejemplo, un conjunto $A \subseteq E$ es abierto en E si y sólo si $f(A)$ es abierto en E'.

2.7.2. DEFINICION

Sean (E,d) *y* (E',d') *e.m. Una aplicación* $f:E \to E'$ *se llama* UNIFORMEMENTE CONTINUA *si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *tal que*

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon. \tag{4}$$

Toda función uniformemente continua es continua, pero la recíproca no es cierta en general (ver 2.7.4 a y b). El teorema siguiente establece que ambos conceptos son equivalentes para funciones de dominio compacto:

2.7.3. TEOREMA

Toda aplicación continua $f:E \to E'$ *de dominio* E *compacto, es uniformemente continua.*

Demostración

Supongamos que f no sea uniformemente continua. Entonces existirá un número $r>0$ y dos sucesiones (x_n), (y_n) en E, tales que:

$$d(x_n,y_n) < 1/n \qquad y \qquad d'(f(x_n),f(y_n)) \geq r. \tag{5}$$

Por la compacidad de E, existe una subsucesión (x_{n_k}) convergente hacia un un punto $h \in E$, y puesto que $d(x_{n_k},y_{n_k}) < 1/n_k$, por la desigualdad triangular la sucesión (y_{n_k}) también converge hacia h. Por ser f continua resulta entonces

$$\lim f(x_{n_k}) = \lim f(y_{n_k}) = f(h)$$

y esto contradice la segunda (5).

2.7.4. *Ejercicios*

a. Sea (0,1) el intervalo abierto $\{x \in R \mid 0 < x < 1\}$. Demostrar que la función $f: (0,1) \to R$ dada por $f(x) = 1/x$:

(i) Es continua

(ii) No es uniformemente continua

b. Probar que la función $f(x) = x^2$, continua en R, no es uniformemente continua.

c. Para la función $f(x) = \sqrt{x}$, continua en $[0,1]$, mostrar que un número $\delta > 0$ correspondiente a $\varepsilon = 0,001$ en (4) es $\delta = 10^{-6}$.

d. Probar que si f(x) es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, para cada $\varepsilon > 0$ existe una función g(x) cuya gráfica es una quebrada inscrita en la gráfica de f(x), y tal que $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ para todo x de $[a,b]$.

Capítulo 3

ESPACIOS NORMADOS

3.1. CONCEPTO DE ESPACIO NORMADO

3.1.0. *Introducción*

a. Recordemos que en algunos *cuerpos* K, tales como C (complejos), R (reales), Q (racionales), a cada elemento x se puede asignar un número real $|x|$ (valor absoluto de x) y la función valor absoluto verifica:

(i) $|x| \geqslant 0$

(ii) $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$

(iii) $|h.x| = |h|.|x|$

(iv) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.

b. Ahora estudiaresmos una categoría de e.m. con estas propiedades:

P_1) Son *a la vez* e.v. sobre un cuerpo K de escalares en el cual existe una función valor absoluto con las propiedades (i) a (iv).

Salvo indicación expresa entenderemos que K = R (e.v. real) ó K = C (e.v. complejo).

P_2) La distancia d está relacionada con la estructura vectorial por estas propiedades

$$d(x,y) = d(x+z, y+z), \qquad d(hx,hy) = |h|\, d(x,y). \tag{1}$$

Estas propiedades (1) tienen un claro significado intuitivo: la primera indica que la distancia entre dos puntos x,y no cambia si a ambos se aplica una *traslación* z; la segunda indica que si a dos puntos x,y, se aplica una *homotecia* de razón h: $x \to h.x$, su distancia queda multiplicada por $|h|$.

c. Veremos que todo esto se logra en un e.v. real o complejo si en él se puede definir una aplicación en R, llamada *norma*, con propiedades análogas a las (i) a (iv).

3.1.1. DEFINICION

Sea E *un e.v. real o complejo. Una NORMA sobre* E *es una aplicación* $\| \ \|$: $E \to R$ *que cumpla las condiciones:*

n_1. $\|x\| \geq 0$ para todo x de E;

n_2. $\|x\| = 0 \Rightarrow x = \overline{0}$;

n_3. $\|h.x\| = |h|.\|x\|$ *para todo* x *de* E *y todo escalar* h;

n_4. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *para cada par de elementos de* E.

Se usan estas denominaciones: la aplicación $\| \ \|: E \to R$ es *positiva* (n_1) *definida* (n_2), *positivamente homogénea* (n_3) y *subaditiva* (n_4).

3.1.2. DEFINICION

Un e.v. E *munido de una norma* $\| \ \|$ *se llama ESPACIO NORMADO* (e.n.). Se indica (E, $\| \ \|$) o simplemente E si se sobreentiende la norma.

3.1.3. TEOREMA

Si $\| \ \|: E \to R$ *es una norma en el e.v.* E, *entonces*

$$d(x,y) = \|x-y\| \tag{2}$$

es una distancia en E, *que cumple las condiciones* (1).

Demostración

La verificación de los axiomas de distancia d_1 a d_4 en 1.2.1 es trivial. Por ejemplo la desigualdad triangular d_4, o sea $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, equivale a

$$\|x-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| \tag{3}$$

y (3) resulta de $x-z = (x-y) + (y-z)$ aplicando n_4 (que también se llama *desigualdad triangular*).

Las condiciones (1) son

$$\|x-y\| = \|(x+z)-(y+z)\|, \qquad \|hx-hy\| = |h|.\|x-y\|. \tag{4}$$

la primera (4) es una identidad pues $x-y = (x+z) - (y+z)$; la segunda resulta de n_3 así:

$$\|hx-hy\| = \|h.(x-y)\| = |h|.\|x-y\|.$$

3.1.4. Por 3.1.3 un e.n. es un e.m.; la distancia d definida por (2) se llama *distancia inducida* por la norma $\|\ \|$.

En un e.n., conceptos topológicos como *abierto*, *cerrado*, *límite*, etc., y calificativos como *completo*, *compacto*, *separable*, etc., son los que corresponden al e.m. con la distancia inducida por la norma.

3.1.5. DEFINICION

Un e.n. completo se llama ESPACIO DE BANACH.

3.1.6. En 3.1.7 c se pide la demostración de este teorema (continuidad de las operaciones vectoriales y de la norma):

Si E *es un e.n. real o complejo, y* $F_a(u) = a.u.$, $G_u(a) = a.u$ *(a escalar)*, $F_+(u,v) = u+v$ *y* $F(u) = \|u\|$, *Entonces* F_a, G_u, F_+ y F *son funciones UNIFORMEMENTE CONTINUAS en todos sus argumentos.*

3.1.7. *Ejercicios*

a. Un elemento o vector u de un e.n. se llama *unitario* o *normal* si $\|u\| = 1$. Mostrar que si $v \neq \overline{0}$ existe un único vector v_o tal que

$$\|v_o\| = 1 \qquad \text{y} \qquad v_o = h.v \qquad \text{con} \qquad h > 0, \tag{5}$$

y es $v_o = \frac{1}{\|v\|} . v$, que se indica también $v_o = \frac{v}{\|v\|}$.

[v_o se llama elemento o vector normal *de* v.]

b. De n_3 y n_4 deducir

$$\|u-v\| \leqslant \|u\| + \|v\| \tag{6}$$

y de aquí

$$|\,\|u\| - \|v\|\,| \leqslant \|u+v\|. \tag{7}$$

c. Demostrar el teorema de 3.1.6 usando las siguientes identidades: $a.u_1-a.u_2 = a.(u_1-u_2)$, $a_1.u-a_2.u = (a_1-a_2).u$, $(u_1+v_1) - (u_2+v_2) = = (u_1-u_2) + (v_1-v_2)$, y (7).

d. Sea E un e.n. real. Probar que la función $F: R \times E \to E$ dada por $F(a,u) = a.u$ es continua.

[*Indicación*. Usar la identidad

$$a.u-a_o.u_o = a_o.(u-u_o) + (a-a_o).u_o + (a-a_o).(u-u_o) \tag{8}$$

para probar la continuidad en el punto (a_o,u_o) de $R \times E$.]

3.2. DESIGUALDADES DE CAUCHY-SCHWARZ Y DE MINKOWSKI

3.2.1. *n-uplas reales*

a. Sean $x = (x_1,\ldots,x_n)$ e $y = y = (y_1,\ldots,y_n)$ dos n-uplas de números reales. Probemos que se cumple la llamada *desigualdad de Cauchy-Schwarz*:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \,.\, \sum_{k=1}^{n} y_k^2. \tag{1}$$

Para ello observemos que la ecuación de segundo grado en $h \in R$:

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k.h+y_k)^2 = h^2 \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2h \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k + \sum_{k=1}^{n} y_k^2 = 0 \qquad \text{(o)}$$

no puede tener dos raíces reales diferentes pues el primer miembro de (o), por ser una suma de cuadrados, muestra que el trinomio en h es siempre $\geqslant 0$. Por tanto el discriminante de la ecuación (para $Ah^2 + Bh + C = 0$ es $B^2 - 4AC$) es $\leqslant 0$, es decir

$$\left(2 \sum x_k\, y_k\right)^2 - 4 \sum x_k^2 . \sum y_k^2 \leqslant 0$$

y esta desigualdad equivale a (1).

b. De la desigualdad(1) se deduce esta otra, llamada *desigualdad de Minkowski*:

$$\left[\sum_{k=1}^{n} (x_k+y_k)^2\right]^{1/2} \leqslant \left[\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right]^{1/2} + \left[\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right]^{1/2} \tag{2}$$

En efecto, se tiene (aplicando (1) para pasar del 2° miembro al 3°):

$$\sum(x_k+y_k)^2 = \sum x_k^2 + \sum y_k^2 + 2\sum x_k\, y_k \leqslant$$

$$\leqslant \sum x_k^2 + \sum y_k^2 + 2\left[\sum x_k^2 \cdot \sum y_k^2\right]^{1/2} =$$

$$= \sum x_k^2 + \sum y_k^2 + 2\left[\sum x_k^2\right]^{1/2} \cdot \left[\sum y_k^2\right]^{1/2} = \left[(\sum x^2)^{1/2} + (\sum y_k^2)^{1/2}\right]^2$$

y la desigualdad entre los miembros extremos equivale a (2).

3.2.2. *n-uplas complejas*

a. Si $(x_1,\ldots,x_n)$, $(y_1,\ldots,y_n)$ son n-uplas de números complejos, podemos aplicar las desigualdades (1) y (2) a las n-uplas *reales* $(|x_1|,\ldots,|x_n|)$, $(|y_1|,\ldots,|y_n|)$. Obtenemos:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k\, y_k|\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} |y_k|^2, \tag{3}$$

$$\left[\sum_{k=1}^{n} (|x_k| + |y_k|)^2\right]^{1/2} \leqslant \left[\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right]^{1/2} + \left[\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2\right]^{1/2}. \tag{4}$$

b. Puesto que $|x_k+y_k| \leqslant |x_k| + |y_k|$ se obtiene de (4) esta otra desigualdad:

$$\left[\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^2\right]^{1/2} \leqslant \left[\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right]^{1/2} + \left[\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2\right]^{1/2}. \tag{5}$$

c. Las desigualdades (3) a (5) subsisten obviamente si las n-uplas son *reales*. Más aún, *en este caso*, (3) implica (1) y (4) implica (2) pero no recíprocamente; además (2) y (5) son equivalentes.

3.2.3. *Sucesiones de cuadrado sumable*

a. Una *sucesión* de números se llama *de cuadrado sumable* si converge absolutamente la serie formada con los cuadrados de sus términos. Sean

$$(x_1,\ldots,x_n,\ldots); \qquad (y_1,\ldots,y_n,\ldots) \tag{6}$$

sucesiones de números reales o complejos, de cuadrado sumable. Entonces convergen las series $\sum|x_k|^2$, $\sum|y_k|^2$, lo que escribiremos como es habitual para series de términos positivos:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 < \infty . \tag{7}$$

b. En este caso también converge absolutamente la serie $\sum x_k\, y_k$, o sea:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k . y_k| < \infty. \tag{8}$$

Esto es consecuencia de la desigualdad

$$|x_k . y_k| \leqslant \frac{1}{2} (|x_k|^2 + |y_k|^2), \tag{9}$$

que a su vez resulta de $|x_k|^2 + |y_k|^2 - 2|x_k . y_k| = (|x_k| - |y_k|)^2 \geqslant 0$.

De (7) y (8) resulta:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k+y_k|^2 < \infty, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (|x_k| + |y_k|)^2 < \infty \tag{10}$$

pues $|x_k+y_k|^2 \leqslant (|x_k| + |y_k|)^2 = |x_k|^2 + |y_k|^2 + 2|x_k y_k|$.

c. Entonces, en la hipótesis (7) convergen *todas* las series que se obtienen reemplazando $\sum_{k=1}^{n}$ por $\sum_{k=1}^{\infty}$ en las desigualdades (1) a (5). (Por ejemplo, $\sum x_k\, y_k$ converge absolutamente en virtud de (8)).

Pero esta sustitución de *sumas* por *series* significa tomar los límites de aquéllas para $n \to \infty$, pues para una serie convergente es por definición $\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k$.

Entonces podemos considerar las desigualdades (1) a (5) que corresponden a las *sucesiones parciales* de (6):

$$(x_1,\ldots,x_n), \qquad (y_1,\ldots,y_n), \tag{11}$$

y la convergencia de las series nos permite tomar límites para $n \to \infty$, con lo cual subsisten las desigualdades en sentido amplio (con $\leqslant$ o bien $\geqslant$). Así se obtienen *para sucesiones REALES de cuadrado sumable* las desigualdades *de Cauchy-Schwarz*:

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} x_k\, y_k\right]^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \,.\, \sum_{k=1}^{\infty} y_k^2, \tag{12}$$

y *de Minkowski*:

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} (x_k+y_k)^2\right]^{1/2} \leqslant \left[\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2\right]^{1/2} \,.\, \left[\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2\right]^{1/2}, \tag{13}$$

y para *sucesiones* (reales o complejas) *de cuadrado sumable*, las desigualdades *de Cauchy-Schwarz*:

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k\, y_k|\right]^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \,.\, \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2, \tag{14}$$

y *de Minkowski*:

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} (|x_k|+|y_k|)^2\right]^{1/2} \leqslant \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right]^{1/2} + \left[\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2\right]^{1/2}, \tag{15}$$

y

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k+y_k|^2\right]^{1/2} \leqslant \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right]^{1/2} + \left[\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2\right]^{1/2}. \tag{16}$$

3.2.4. *Integrales*

a. Para mayor sencillez nos limitamos aquí a integrales de *funciones continuas en un intervalo cerrado* $[a,b]$ y en 3.5 daremos noticia sobre situaciones más generales.

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones *reales* vale la *desigualdad de Cauchy-Schwarz* siguiente (confr. (1)):

$$\left[\int_a^b f(x)\, g(x)dx\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)dx \,.\, \int_a^b g^2(x)dx, \tag{17}$$

que se demuestra con el método de 3.2.1 a, notando que la ecuación de segundo grado en $h \in R$:

$$\int_a^b [h.f(x)+g(x)]^2dx = h^2\int_a^b f^2dx+2h\int_a^b fg\ dx + \int_a^b g^2\ dx = 0 \tag{18}$$

no puede tener dos raíces reales diferentes.

b. De la desigualdad (17), con el método seguido en 3.2.1 b, se deduce esta otra llamada *desigualdad de Minkowski:*

$$\left[\int_a^b (f+g)^2dx\right]^{1/2} \leqslant \left[\int_a^b f^2\ dx\right]^{1/2} + \left[\int_a^b g^2\ dx\right]^{1/2}. \tag{19}$$

c. Para funciones *cualesquiera* (reales o complejas) aplicando (17) y (19) a las funciones reales $|f(x)|$ y $|g(x)|$ se obtienen estas desigualdades, *de Cauchy-Schwarz:*

$$\left[\int_a^b |f.g|dx\right]^2 \leqslant \int_a^b |f|^2dx\ .\int_a^b |g|^2dx \tag{20}$$

y *de Minkowski:*

$$\left[\int_a^b (|f|+|g|)^2dx\right]^{1/2} \leqslant \left[\int_a^b |f|^2dx\right]^{1/2} + \left[\int_a^b |g|^2dx\right]^{1/2} \tag{21}$$

y puesto que $|f+g| \leqslant |f|+|g|$ se obtiene de (21):

$$\left[\int_a^b |f+g|^2dx\right]^{1/2} \leqslant \left[\int_a^b |f|^2dx\right]^{1/2} + \left[\int_a^b |g|^2dx\right]^{1/2}. \tag{22}$$

3.2.5. *Ejercicios*

a. Demostrar las afirmaciones de 3.2.2 c.

b. Completar la demostración de (17)

c. De (17) deducir la desigualdad (19)

d. Verificar la validez de la identidad de Lagrange:

$$\sum_{k=1}^n x_k^2.\sum_{k=1}^n y_k^2 - \left(\sum_{k=1}^n x_k\ y_k\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n (x_iy_k-x_ky_i)^2. \tag{23}$$

e. Deducir de (23) la desigualdad de Cauchy-Schwarz (1) para n-uplas reales, y que vale con = si y sólo si los números x_k son proporcionales a los

y_k, o sea si y sólo si el conjunto de vectores $\{(x_1,\ldots,x_n),\ (y_1,\ldots,y_n)\}$ es ℓ.d.

3.3. EJEMPLOS DE ESPACIOS NORMADOS

3.3.1. *Espacios de n-uplas*

a. Veremos que todos los e.m. introducidos en 2.2, con excepción del e.m. discreto (2.2.3) y el espacio R^∞ de 2.2.6 ejercicio f (ii), son normados, y además completos, es decir son espacios de Banach. En la recta real R (2.2.1) y en el plano complejo C (2.2.2) la distancia

$$d(x,y) = |x-y| \qquad \text{proviene de la norma} \qquad \|x\| = |x|; \tag{1}$$

las propiedades n_1 a n_4 (3,1,1) son las (i) a (iv) de 3.1.0.

b. Los e.m. R^n y C^n (2.2.4) son también normados. La distancia, que en ambos puede expresarse así:

$$d(x,y) = \left[\sum_{k=1}^{n} |x_k-y_k|^2\right]^{1/2} \tag{2}$$

proviene de la norma

$$\|x\| = \left[\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right]^{1/2} \tag{3}$$

Que (3) define una *norma* se prueba viendo que cumple las propiedades n_1 a n_4 de 3.1.1. Esto es obvio para las tres primeras, y n_4 es la desigualdad de Minkowski en la forma (5) de 3.2.2.

3.3.2. *Espacios de sucesiones*

En el conjunto de las sucesiones de cuadrado sumable (3.2.3 a), la función

$$\|x\| = \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right]^{1/2} \qquad \textit{si} \qquad x = (x_1,\ldots,x_n,\ldots) \tag{4}$$

define una norma. En efecto, de las propiedades n_1 a n_4 de 3.1.1 es obvio que valen las tres primeras, y n_4 es la desigualdad de Minkowski en la forma (16).

Se denota con ℓ_2 el correspondiente e.n. (*)

3.3.3. *Espacios de funciones*

a. Los e.m. introducidos en 2.2.5, a saber: el e.m. $A[a,b]$ de las funciones acotadas en el intervalo $[a,b]$ y su subespacio $C[a,b]$ de las funciones continuas en $[a,b]$ son e.n., pues la distancia

$$d(f,g) = \sup_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t)-g(t)| \tag{5}$$

proviene de la norma:

$$\|f\| = \sup_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t)|. \tag{6}$$

Para ver que (6) es una norma hay que verificar que cumple n_1 a n_4 de 3.1.1. Esto es obvio para n_1 a n_3, y n_4 resulta de 2.2.7 b (iii).

b. En el conjunto de las funciones continuas en $[a,b]$, también

$$\|f\|_2 = \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx\right]^{1/2} \tag{7}$$

es una norma, y se indica con $C_2[a,b]$ el correspondiente e.n. (**)

Para ver que (7) es una norma hay que verificar que cumple n_1 a n_4 de 3.1.1. Esto es obvio para n_1 a n_3, y n_4 es la desigualdad de Minkowski para integrales (22) de 3.2.4.

(*) La notación proviene de que este e.n. forma parte de una clase ℓ_p de e.n. de sucesiones, uno para cada $p \geqslant 1$. De ellos daremos noticia en 3.5.

Si las sucesiones que se consideran son *reales* o bien *complejas*, se indica más específicamente: e.n. $\ell_2(R)$ ó e.n. $\ell_2(C)$.

(**) Las notaciones $\|f\|_2$ y C_2, $\|f\|_1$ y C_1 provienen de que consideraremos ciertas normas $\|f\|_p$, una para cada $p > 1$, y e.n. L_p (ver 3.5), C_2 y C_1 son subespacios de L_2 y de L_1 respectivamente.

En el mismo conjunto, también

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx \tag{8}$$

es una norma (ver 3.3.5 p) y se indica con $C_1[a,b]$ el e.n. correspondiente ((**) pie de pág. anterior).

3.3.4. En 3.3.5 ejercicios d, e, f, h y m se establece respectivamente que los e.n. R^n, C^n, ℓ_2, $C[a,b]$ y $A[a,b]$ son espacios de Banach, es decir, e.n. completos. En cambio ni $C_2[a,b]$ ni $C_1[a,b]$ es completo (para C_2 ver 3.3.5 o).

3.3.5. *Ejercicios*

a. Vimos en 3.1 que un e.n. es un e.m. con distancia $d(x,y) = \|x-y\|$, y que esta distancia verifica

$$d(x+z,\ y+z) = d(x,y) \qquad y \qquad d(hx,\ hy) = |h|.d(x,y). \tag{9}$$

Demostrar que si en un e.m. la distancia verifica (9), entonces

$$\|x\| = d(x,0) \qquad \textit{es una norma.} \tag{10}$$

[Nótese que la distancia inducida (3.1.4) por la norma (10) es nuevamente d].

b. Mostrar que en un e.v. real o complejo no hay ninguna norma cuya distancia inducida (3.1.4) sea la métrica discreta (2.2.3) (salvo el caso trivial del e.v. $\{\overline{0}\}$).

c. Mostrar que el e.m. R^∞ de 2.2.7 ejercicio f (ii) no es un e.n.

d. Por la definición de número real, el e.n. R (3.3.1 a) es *completo*. Deducir de aquí que el e.n. R^n (4.3.1 b) es completo.

e. De C completo, deducir que C^n es *completo*.

f. Demostrar que el e.n. ℓ_2 (3.3.2) es *completo*.

Indicación: Sea $\{x^{(n)}\}$ una sucesión fundamental en ℓ_2, con

$$x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}, \ldots);$$

entonces dado $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que

$$n,m > N \Rightarrow \|x^{(n)} - x^{(m)}\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)} - x_k^{(m)}|^2 < \varepsilon. \tag{11}$$

(i) Deducir de (11) que para cada k existe $\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)}$. Pongamos:

$$\lim_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k.$$

(ii) Probar que $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots) \in \ell_2$, y

$$x^{(n)} \to x \text{ en norma, o sea } \lim_{n\to\infty} \|x^{(n)} - x\| = 0, \tag{12}$$

g. Demostrar que $\ell_2(R)$ es *separable* utilizando puntos (sucesiones), con un número finito de componentes no nulas racionales.

[Nótese que las sucesiones de (infinitas) componentes racionales no forman un conjunto numerable].

h. Probar que el e.n. C[a,b] es *completo*.

[*Indicación:* Recordar que el límite de una sucesión uniformemente convergente de funciones continuas es una función continua.]

i. El teorema de aproximación de Weierstrass (ver 6.3) establece que toda función continua en [a,b] es límite uniforme en [a,b] de una sucesión de polinomios. Deducir de él que:

El e.n. C[a,b] *es separable*.

j. Calcular $\|f_i\| = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f_i(t)|$ para las funciones:

$$\left.\begin{aligned} &f_1(x) = \cos n\pi x, \qquad f_2(x) = \operatorname{sen} n\pi x, \\ &f_3(x) = a \cos n\pi x + b \operatorname{sen} n\pi x. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

k. Sea f(x) continua en [a,b] y $M = \max_{a \leq k \leq b} |f(x)|$, $m = \min_{a \leq x \leq b} |f(x)|$. Probar que

$$\|f(x) - c\| = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - c| \geq \frac{M-n}{2}$$

y que esto vale con = sólo para $c = (M+m)/2$.

ℓ. Decir para qué valor de c es mínima la norma

$$\|\cos x - c.x\| = \sup |\cos x - c.x|, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

m. Probar que el e.n. $A[a,b]$ (3.3.3 a) es completo.

n. Calcular $\|f_i\|_2 = \left(\int_0^1 |f_i(x)|^2 dx\right)^{1/2}$ para las funciones (13).

o. Mostrar que el e.n. $C_2[a,b]$ (3.3.3 b) no es completo, considerando en $[-1,1]$ la sucesión de funciones $f_n(t) = \text{arc tg } n\, t$.

p. (i) Demostrar que (8) es una norma;

(ii) Expresar la distancia inducida por ella.

3.4. REPASO SOBRE INTEGRACION

3.4.0. En esta sección reunimos los resultados sobre la integral de Riemann necesarios para el resto del curso.

3.4.1. *Integral de Riemann de una función acotada*

a. Sea $f(x)$ una función real acotada en el intervalo cerrado $[a,b]$. Para cada partición de $[a,b]$:

$$\pi: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b \tag{1}$$

pongamos:

$$m_k = \sup_{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k} f(x), \qquad M_k = \sup_{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k} f(x) \tag{2}$$

y consideremos las sumas (llamadas *sumas inferior y superior* de f en π):

$$s(\pi) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}), \qquad S(\pi) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}). \tag{3}$$

Llamemos *norma* $N(\pi)$ de la partición (1) al máximo de las longitudes de sus intervalos:

$$N(\pi) = \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1}). \tag{4}$$

Una sucesión (π_i) de particiones se llama *especial* si $N(\pi_i) \to 0$. Vale el teorema siguiente:

b. TEOREMA

Sea $f(x)$ *real acotada en* $[a,b]$. *Para toda sucesión especial* (π_i) *de particiones de* $[a,b]$ *existen los límites de las sumas inferiores y superiores de* f:

$$\lim_{i\to\infty} s(\pi_i) = \underline{I}, \qquad \lim_{i\to\infty} S(\pi_i) = \overline{I}, \qquad y\ es \quad \underline{I} \leq \overline{I}. \tag{5}$$

Además, estos límites son independientes de la sucesión especial (π_i) *elegida.* •

c. DEFINICION

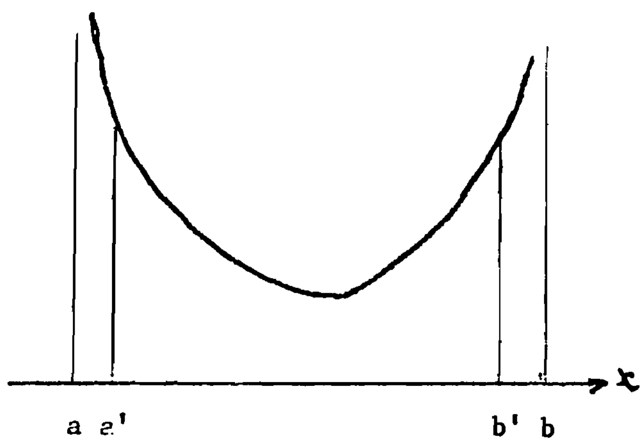
Los límites $\underline{I}$ *e* $\overline{I}$ *se llaman respectivamente INTEGRAL INFERIOR e INTEGRAL SUPERIOR DE DARBOUX de* $f(x)$ *en* $[a,b]$. *Se indican:*

$$\underline{I} = \underline{\int_a^b} f(x)dx, \qquad \overline{I} = \overline{\int_a^b} f(x)dx. \tag{6}$$

d. DEFINICION

Una función real $f(x)$ *se llama R-INTEGRABLE PROPIAMENTE en* $[a,b]$ *si es acotada en* $[a,b]$ *y son iguales sus integrales de Darboux El valor común de llama R-INTEGRAL PROPIA o simplemente INTEGRAL y se indica:*

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$



3.4.2. *Integrales impropias*

a. Sea $f(x)$ integrable propiamente en cada intervalo $[a',b']$ tal que $a < a' < b' < b$ pero no en $[a,b]$. (Fig. pág. anterior). Si además existe el límite

$$\lim_{a'\to a,\quad b'\to b} \int_{a'}^{b'} f(x)dx, \tag{7}$$

$f(x)$ se llama *impropiamente integrable* en $[a,b]$, el límite (7) se llama *integral (impropia)* y se indica $\int_a^b f(x)dx$.

b. Más generalmente, supongamos que $[a,b]$ se pueda descomponer en un conjunto finito o numerable de intervalos I_k sin puntos interiores comunes y tales que en cada uno exista la integral $\int_{I_k} f(x)\,dx$ en el sentido de a. Si además converge absolutamente la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{I_k} f(x)dx, \tag{8}$$

o bien se reduce a una suma finita, $f(x)$ se llama *impropiamente integrable* en $[a,b]$; la suma de (8) se llama *integral (impropia)* y se indica $\int_a^b f(x)dx$.

c. Un punto s de $[a,b]$ se llama *punto singular* de la integral impropia $\int_a^b f(x)dx$ si $f(x)$ no es acotada en ningún entorno de él. Dado $\varepsilon > 0$, el conjunto S de los puntos singulares se puede cubrir con un número *finito* de intervalos I_k de longitudes $|I_k|$ de modo que $\sum |I_k| < \varepsilon$. [Todo conjunto con esta propiedad se llama *de medida de Peano-Jordan nula*].

Además, dado $\eta > 0$ se puede hallar un cubrimiento de S, $C = \cup I_k$, tal que si f_0 es la función *propiamente integrable* nula en C e $= f(x)$ en todo punto de $[a,b]-C$, se tenga:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_0(x)dx \right| < \eta .$$

3.4.3. *Integral de Riemann*

a. DEFINICION

f(x) se llama R-INTEGRABLE en [a,b] *si es R-integrable propiamente o impropiamente en* [a,b].

b. Una función compleja se llama *R-integrable* en [a,b] si lo son sus partes real e imaginaria Re(f(x)) e Im(f(x)).

Se define además:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \mathrm{Re}(f(x))dx + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(x))dx. \tag{9}$$

c. Diremos que f(x) *es integrable en* $[a,\infty)$ si lo es en cada intervalo [a,b] $(t > a)$ y existe el límite

$$\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx, \quad \textit{que se indica:} \quad \int_a^\infty f(x)dx. \tag{10}$$

Análogamente se definen

$$\int_{-\infty}^a f(x)dx = \lim_{u\to-\infty}\int_u^a f(x)dx, \qquad \int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{u\to-\infty, v\to\infty}\int_u^v f(x)dx. \tag{11}$$

3.4.4. *Propiedades de la integral de Riemann*

a. *Si* f(x) *es propiamente integrable en* [a,b] (3.4.1 d), *lo es también* $|f(x)|$.

La recíproca no es cierta. He aquí un ejemplo:

Definamos en [0,1] la función $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional,} \\ -1 & \text{si es irracional,} \end{cases}$

Entonces no existe la integral $\int_0^1 f(t)dt$ pues las integrales de Darboux superior e inferior son diferentes:

$$\overline{\int_0^1} f(t)dt = 1, \qquad \underline{\int_0^1} f(t)dt = -1$$

En cambio, puesto que $|f(t)| = 1$ para todo $t \in [0,1]$, existe la integral

$$\text{y vale} \int_0^1 |f(t)|dt = \int_0^1 1.dt = 1.$$

b. DEFINICION

$f(x)$ *se llama ABSOLUTAMENTE INTEGRABLE en* $[a,b]$ (ó en $[a,\infty)$, $(-\infty,a]$, $(-\infty,\infty)$) *si es integrable juntamente con* $|f(x)|$.

c. En virtud de a, toda función propiamente integrable en un intervalo finito $[a,b]$, es absolutamente integrable.

d. Para toda función absolutamente integrable es

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx \tag{12}$$

y análogamente para $[a,\infty)$, $(-\infty,a]$ y $(-\infty,\infty)$.

e. $f(x)$ se llama *de potencia p integrable* ($p > 0$) si es $f(x)$ integrable y $[f(x)]^p$ absolutamente integrable. Si $p = 2$, $f(x)$ se llama *de cuadrado integrable*. Si f es real es de cuadrado integrable si existen

$$\int_a^b f(x)dx, \quad \text{e} \quad \int_a^b f^2(x)dx.$$

f. Toda función *propiamente* integrable en $[a,b]$ es de potencia p integrable para todo $p > 0$.

g. Toda función continua, o bien de variación acotada (ver 6.2.6), en un intervalo finito $[a,b]$, es propiamente integrable.

h. Para toda función propiamente integrable en $[a,b]$ valen los siguientes *teoremas del valor medio:*

1°) Si $m \leqslant f(x) \leqslant M$ en $[a,b]$, es $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$, siendo μ un número tal que $m \leqslant \mu \leqslant M$.

2°) Sean f y g propiamente integrables en $[a,b]$ y además $g(x)$ positiva y no creciente; entonces existe un número ξ en (a,b), tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx. \tag{13}$$

3.4.5. *Clases de equivalencia de funciones. Clases* I_p $[a,b]$

a. Un conjunto se llama *nulo* o de *medida (de Peano-Jordan) nula* si para cada $\varepsilon > 0$ se puede cubrir por un número *finito* de intervalos con suma de longitudes $= \varepsilon$. Si una función $f(x)$ es integrable en $[a,b]$ lo es toda función $g(x)$ que difiera de ella en un conjunto nulo, y es además

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \,. \tag{14}$$

b. Es fácil verificar que la igualdad de dos funciones salvo en un conjunto nulo es una relación de equivalencia. Entonces, por (14) cabe considerar, a efectos de la integración, no las funciones mismas sino las clases de equivalencia, y así, al hablar de una *función* $f(x)$ sobreentenderemos la *clase de equivalencia de* $f(x)$, formada por todas las funciones que difieren de $f(x)$ en un conjunto nulo.

c. Llamaremos $I_p[a,b]$ al conjunto de las clases de equivalencia de las funciones de potencia p integrable en $[a,b]$ (ver 3.4.5 e). También nos referiremos a $I_p[a,b]$ como un *conjunto de funciones* con el convenio de identificar dos cualesquiera que difieran sólo en un conjunto nulo.

3.4.6. *Ejercicios*

a. Probar las desigualdades

(i) $s(\pi) \leqslant S(\pi)$

(ii) $s(\pi) \leqslant \underline{\int}_a^b f(x)dx \leqslant \overline{\int}_a^b f(x)dx \leqslant S(\pi)$.

b. Sea $f(x)$ R-integrable propiamente en $[a,b]$. Probar que si en cada intervalo $[x_{k-1},x_k]$ de una partición (1) se elige un punto ξ_k y se forma la suma

$$\sum(\pi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

es para toda sucesión especial (π_i) de particiones:

$$\lim_{i\to\infty} \sum (\pi_i) = \int_a^b f(x)dx. \tag{15}$$

3.5. NOTICIA SOBRE ESPACIOS ℓ_p E I_p

3.5.0. En esta sección 3.5 introduciremos infinitos e.n. ℓ_p (uno para cada número real $p \geqslant 1$) cada uno sobre un cierto conjunto de *sucesiones*, e infinitos e.n. I_p, cada uno sobre un cierto conjunto de *funciones*. Estos espacios tienen importancia en el Análisis funcional, pero su estudio detenido excede en mucho el alcance de este curso. Omitimos casi todas las demostraciones. Tampoco podemos considerar los espacios L_p, correlativos de los I_p y más importantes que ellos, pues no tenemos el instrumento matemático esencial para ello, que es la integral de Lebesgue. Damos noticia de resultados en procura de una visión de conjunto, sistematizada.

3.5.1. *Sucesiones de potencia p sumable* (confr. 3.2.3)

a. Una sucesión de números $(x_k) = (x_1,\ldots,x_n,\ldots)$ se llama *de potencia p sumable* si converge absolutamente la serie $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^p$, o sea, si $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty$. El conjunto de estas sucesiones se indica con ℓ_p. *Para $p > 1$* vale el siguiente teorema:

Si $x = (x_1,\ldots,x_n,\ldots) \in \ell_p$, $y = (y_1,\ldots,y_n,\ldots) \in \ell_q$ *y es*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \qquad \textit{o sea} \qquad q = \frac{p}{p-1}, \tag{1}$$

entonces $(x_1y_1,\ldots,x_ny_n,\ldots) \in \ell_1$, *y*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leqslant \left[\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right]^{1/p} \cdot \left[\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q\right]^{1/q}. \tag{2}$$

(2) se llama *desigualdad de Hölder*, y generaliza la desigualdad de Cauchy-Schwarz (14) de 3.2.3, que resulta de (2) para $p = q = 2$.

Dos números, p,q que verifican (1) se llaman *conjugados*. Si $p > 1$ es $q > 1$;

notemos que si $p \to 1$ entonces $q \to \infty$.

b. Mediante (2) se puede demostrar que:

Si (x_k), $(y_k) \in \ell_p$ $(p \geqslant 1)$, *entonces* $(x_k+y_k) \in \ell_p$, *y*

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k+y_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q\right)^{1/q}. \tag{3}$$

(4) se llama *desigualdad de Minkowski* y (16) de 3.2.3 es caso particular de ella para $p = 2$.

3.5.2. *Espacios normados* ℓ_p *con* $1 < p < \infty$

TEOREMA

Sea $p > 1$. *En el conjunto* ℓ_p *de las sucesiones de números* $x = (x_1,\ldots,x_n,\ldots)$ *tales que* $\sum |x_k|^p < \infty$, *la aplicación* $\| \ \|_p : \ell_p \to R$ *definida por*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}. \tag{4}$$

es una norma.

Demostración

La verificación de n_1 a n_3 es trivial, y n_4 es (3).

3.5.3. *El caso* $p = 1$

a. Si $p = 1$ la desigualdad de Minkowski (3) se reduce a

$$\sum |x_k+y_k| \leqslant \sum |x_k| + \sum |y_k| \tag{5}$$

válida en virtud de las desigualdades $|x_k+y_k| \leqslant |x_k| + |y_k|$.

En cambio, en este caso $p = 1$ la desigualdad de Hölder (2) carece de sentido en virtud de la condición (1) que deben cumplir los números p y q. En efecto, si $p = 1$ la primera (1) es $\frac{1}{1} + \frac{1}{q} = 1$, o sea $\frac{1}{q} = 0$, y no hay ningún número q que la verifique.

Notemos estas dos propiedades

(i) Si $p \to 1$, entonces $q = \frac{p}{1-p} \to \infty$;

(ii) Es $$\sum |x_k \cdot y_k| \leq \left[\sum |x_k|\right] \cdot \sup_{1 \leq h < \infty} |y_h| \tag{6}$$

Si convenimos (motivados por (i)) en decir que el conjugado de $p = 1$ es $q = \infty$, y en que

$$\left[\sum |y_k|^q\right]^{1/q} \quad \textit{para} \quad q = \infty \quad \textit{significa} \quad \sup |y_k|, \tag{7}$$

entonces la desigualdad de Hölder vale para todo par (p,q) de números conjugados, incluso $p = 1$, $q = \infty$, en cuyo caso es (6).

b. El teorema de 3.5.2 subsiste para $p = 1$, o sea:

En el conjunto ℓ_1 *de las sucesiones* (x_k) *tales que* $\sum |x_k| < \infty$, $\| \|_1 = \sum |x_k|$ *es una norma.*

En efecto, n_1 a n_3 son inmediatas y n_4 es (5).

3.5.4. *El caso* $p = \infty$

a. Con el convenio (7) la desigualdad de Minkowski (3) subsiste para $p = \infty$ pues en este caso se reduce a

$$\sup_k |x_k+y_k| \leq \sup_k |x_k| + \sup_k |y_k|. \tag{8}$$

b. Extendamos ahora el teorema 3.4.2 al caso $p = \infty$;

En el conjunto, que llamaremos ℓ_∞, *de las sucesiones de números* $x = (x_1,\ldots,x_n,\ldots)$ *acotadas, o sea tales que* $\sup |x_k| < \infty$, *la aplicación* $\| \|_\infty : \ell_\infty \to R$ *definida por*

$$\|x\|_\infty = \sup_k |x_k| \tag{9}$$

es una norma.

En efecto, n_1 a n_3 son inmediatas, y n_4 es (8).

3.5.5. *Desigualdades para integrales*

a. Sea $[a,b]$ un intervalo cerrado en R. Indicaremos con $I_p = I_p[a,b]$ el conjunto de las (clases de equivalencia) de funciones $f: [a,b] \to C$ de potencia p integrable (ver 3.4.5 c). Para $p > 1$ vale el siguiente teorema:

b. (Confr. 3.5.1 a). *Si* $f \in I_p$, $g \in I_q$ *y los números p y q verifican* (1), *entonces* $f.g \in I_1$, *es decir es absolutamente integrable, y es*

$$\int_a^b |f(t).g(t)|dt \leqslant \left[\int_a^b |f(t)|^p dt\right]^{1/p} . \left[\int_a^b |g(t)|^q dt\right]^{1/q} . \quad (10)$$

(10) se llama *desigualdad de Hölder para integrales*. Mediante ella se puede demostrar (confr. 3.5.1 b):

c. *Si* $f,g \in I_p$ ($p \geqslant 1$), *entonces* $f+g \in I_p$, *y es*

$$\left[\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt\right]^{1/p} \leqslant \left[\int_a^b |f(t)|^p dt\right]^{1/p} + \left[\int_a^b |g(t)|^p dt\right]^{1/p} . \quad (11)$$

(11) se llama *desigualdad de Minkowski para integrales.*

3.5.6 *Espacios normados* I_p *con* $1 < p < \infty$

TEOREMA (confr. 3.5.2)

Sea $p > 1$. *En el conjunto* $I_p = I_p[a,b]$ *la aplicación* $\| \ \|_p : I_p \to R$ *definida por*

$$\|f\|_p = \left[\int |f(t)|^p\right]^{1/p} \quad (12)$$

es una norma.

Demostración

La verificación de n_1 a n_3 es trivial, y n_4 es (11).

3.5.7. *El caso* $p = 1$ (confr. 3.5.3 a)

Si $p = 1$, (12) se reduce a

$$\int_a^b |f(t)+g(t)|dt \leqslant \int_a^b |f(t)|dt + \int_a^b |g(t)|dt, \quad (13)$$

que resulta de la conocida desigualdad $|f(t)+g(t)| \leqslant |f(t)| + |g(t)|$.

En cambio, en este caso $p = 1$ la desigualdad de Hölder (10) carece de sentido en virtud de la condición (1) que deben cumplir los números p y q. En efecto, si $p = 1$ la primera (1) de $1/q = 0$, y no hay ningún número q que la verifique.

La propiedad (*)

$$\int_a^b |f(t).g(t)|dt \leqslant \left[\int_a^b |f(t)|dt\right]. \sup_{a \leqslant t \leqslant b} |g(t)| \tag{14}$$

justifica el convenio de que

$$\left[\int_a^b |g(t)|^q\right]^{1/q}, \quad \textit{para} \ q = \infty \ \textit{significa} \ \sup_{a \leqslant t \leqslant b} |g(t)|. \tag{15}$$

Con este convenio la desigualdad de Hölder (10) vale para todo par (p,q) de números conjugados, incluso $p = 1$, $q = \infty$, en cuyo caso es (14).

3.5.8. *El caso* $p = \infty$ (confr. 3.5.4)

a. Con el convenio (15) la desigualdad de Minkowski (11) subsiste para $p = \infty$ pues en este caso se reduce a

$$\sup_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t)+g(t)| \leqslant \sup_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t)| + \sup_{a \leqslant t \leqslant b} |g(t)|. \tag{16}$$

b. Extendamos ahora el teorema de 3.5.6 al caso $p = \infty$.

En el conjunto, que llamaremos $I_\infty = I_\infty[a,b]$, *de las funciones de* $[a,b]$ *en* C *acotadas, o sea tales que* $\sup_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t)| < \infty$, *la aplicación* $\| \ \|_\infty : I_\infty \to R$ *definida por*

$$\|f\|_\infty = \sup_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t)| \tag{17}$$

es una norma.

En efecto, n_1 a n_3 son inmediatas, y n_4 es (16).

3.5.9. *Ejercicios.*

a. En $R^2 = R \times R$:

(*) En la teoría con integral de Lebesgue se toma el *supremo esencial* $\underset{a \leqslant t \leqslant b}{\text{sup es}} |g(t)|$ que se define como el menor número h tal que $\{t \mid |g(t)| > h\}$ sea un conjunto de medida nula.

(i) Escribir las ecuaciones de las "circunferencias"

$$\|x\|_p = (|x_1|^p+|x_2|^p)^{1/p} = 1, \qquad x = (x_1,x_2) \tag{18}$$

para p = 1/2, 1, 2, 10, ∞.

(ii) Representar el primer cuadrante de cada una.

(iii) Decir en qué casos $\|x\|_p$ es una norma.

b. Con referencia a la norma (19) en cada uno de los casos p = 1, p = 2, p = ∞, hallar la mínima distancia del punto (0,2) de R^2 al subespacio $S = \{(x,y)|y = x\}$, indicar los puntos de S para los cuales se alcanza, y representar.

c. En los mismos casos que en b determinar la mejor aproximación al vector (1,1) de R^2 en el subespacio $S = \{(x,x/2)|-\infty < x < \infty\}$.

d. Probar que la suma de dos funciones I_p pertenece a I_p.

[*Indicación*: Acotar $|f+g|^p$.]

e. Demostrar que si $p > 2$: $f,g \in I_p \Rightarrow f.g \in I_{p/2}$.

[*Indicación*: Mostrar que es aplicable la desigualdad de Schwarz (20) de 3.2.4 a $f_1 = f^{p/2}$ y $g_1 = g^{p/2}$ y acotar $\|f.g\|_{p/2}$.]

3.6. SERIES EN ESPACIOS NORMADOS

3.6.0. El concepto de serie tiene ubicación natural en un e.n., por estar éste munido a la vez de una estructura de e.v., que permite formar sumas, y de una estructura topológica (de e.m.) que permite buscar el límite de esas sumas al agregar más y más términos.

3.6.1. *Sucesiones en espacios normados*

a. Lo que hemos visto en 2.4.1 sobre límites de sucesiones en un e.m. subsiste para un e.n. pues éste es un e.m. Lo que allí enunciamos en términos de una distancia, puede expresarse con la norma. Por ejemplo, la definición de 2.4.1 a es ahora:

Se dice que la sucesión (x_n) *de puntos de un e.n.* $(E, \| \|)$ *CONVERGE o TIENDE hacia el punto* $h \in E$, *o que* h *es el LIMITE de* (x_n) *si para cada número positivo* $\varepsilon > 0$ *se puede hallar un entero positivo* $N = N(\varepsilon)$ *tal que:*

$$n > N \Rightarrow \|x_n - h\| < \varepsilon . \tag{1}$$

b. Pero ahora, la estructura vectorial de $(E, \| \|)$ permite definir entre las sucesiones las operaciones de *adición* y de *multiplicación por un escalar* mediante las igualdades:

$$(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n), \tag{2}$$

$$h.(x_n) = (h.x_n). \tag{3}$$

Por ejemplo (2) expresa que se llama *suma* de dos sucesiones (x_n) e (y_n), y se indica $(x_n) + (y_n)$, a la sucesión (x_n+y_n) cuyos términos son los puntos x_n+y_n de E.

3.6.2. *Series*

a. Las definiciones relativas a series en un e.n. son análogas a las de series numéricas. Para la convergencia tenemos:

Una serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \tag{4}$$

cuyos términos son puntos o vectores u_k *de un e.n.* $(E, \| \|)$ *se llama CONVERGENTE si es convergente la sucesión* (S_n) *de las SUMAS PARCIALES*

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n . \tag{5}$$

O sea, si existe en E el límite $S = \lim S_n$. En tal caso S se llama *suma* de la serie (4), y se escribe

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = S , \tag{6}$$

b. Si la serie (4) es convergente se llama *resto* R_n de orden n de ella, a la diferencia $S-S_n$:

$$R_n = S-S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k. \tag{7}$$

Por 3.5.1 a, si (4) es convergente, dado $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que

$$n > N \Rightarrow \|R_n\| = \|S-S_n\| < \varepsilon . \tag{8}$$

c. TEOREMA

Condición NECESARIA *para que la serie* (4) *converja, es que*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \overline{0} . \tag{9}$$

Demostración

De (8) se deduce la implicación

$$n > N+1 \Rightarrow \|u_n\| \leqslant \|S_n-S\| + \|S_{n-1}-S\| < 2\varepsilon .$$

Nota

Que la condición (9) *no es suficiente* para la convergencia de (4) es bien conocido en los casos de R y C.

d. De la continuidad de las operaciones vectoriales (3.1.6) resulta fácilmente:

$$U = \sum u_n \quad y \quad V = \sum v_n \Rightarrow U + V = \sum (u_n+v_n) \tag{10}$$

y para todo escalar h:

$$U = \sum u_n \Rightarrow hU = \sum hu_n. \tag{11}$$

3.6.3. *Convergencia absoluta*

a. DEFINICION

Una serie $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *en un e.n. se llama* ABSOLUTAMENTE CONVERGENTE *si es convergente la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|$ *de las normas de sus términos.*

b. Puesto que la sucesión de números reales $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \|u_k\|$ es creciente, tiene límite finito o infinito según que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|$ sea convergente o divergente. Usaremos estas notaciones;

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\| = \infty \quad \textit{para indicar que} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\| \quad \textit{es divergente,} \tag{12}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\| < \infty \quad \textit{para indicar que} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\| \quad \textit{es convergente,} \tag{13}$$

y análogamente para toda serie *de términos positivos.*

c. TEOREMA

En un espacio de Banach E, *una serie* $\sum u_k$ *absolutamente convergente, es convergente. Además*

$$\|\sum_{k=1}^{\infty} u_k\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|. \tag{14}$$

Demostración

Por hipótesis converge $\sum \|u_k\|$. Luego, para cada $\varepsilon > 0$ existe un entero N tal que para $n > N$ y $p \geqslant 0$ es $\|u_{n+1}\| + \ldots + \|u_{n+p}\| < \varepsilon$. Por tanto

$$\|u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}\| < \varepsilon \qquad \textit{o sea} \qquad \|S_{n+p} - S_n\| < \varepsilon .$$

Entonces (S_n) es una sucesión fundamental y como por hipótesis el espacio E es completo, (S_n) es convergente, ó sea $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ es convergente.

Además es, para cada n: $\|u_1 + \ldots + u_n\| \leqslant \|u_1\| + \ldots + \|u_n\|$ y para $n \to \infty$ se obtiene la desigualdad (14).

3.6.4. *Reordenación de series*

a. DEFINICION

Dadas las series

$$\sum u_n \qquad y \qquad \sum v_n, \tag{15}$$

si existe una biyección $f: N \to N$ *tal que* $v_k = u_{f(k)}$ *para todo* $k \in N$, *se dice que la segunda serie se obtiene de la primera por la REORDENACION de términos* f.

b. DEFINICION

Una serie $\sum u_n$ *se llama INCONDICIONALMENTE CONVERGENTE si converge juntamente con toda otra* $\sum v_n$ *que resulta de ella por reordenación, y con la misma suma.*

c. Es conocido del Análisis elemental que las series *numéricas* incondicionalmente convergentes son las absolutamente convergentes y sólo ellas.

3.6.5. *Noticia sobre familias sumables*

a. En espacios normados es útil esta generalización del concepto de convergencia incondicional, que abarca también conjuntos no numerables de términos (al menos en principio, ver b_2).

DEFINICION

Una familia $\{u_i\}_{i \in I}$ *de vectores de un e.n. se llama SUMABLE con SUMA* U *si para cada número positivo* $\varepsilon > 0$ *existe un conjunto FINITO* $F_o \subseteq I$ *tal que si* F *es un conjunto FINITO que verifique* $F_o \subseteq F \subseteq I$, *es*

$$\|U - \sum_{i\in F} u_i\| < \varepsilon . \tag{16}$$

b. Señalemos sin demostración las propiedades más importantes.

b_1. *Condición de sumabilidad en espacios de Banach.*

Condición necesaria y suficiente para que una familia $\{u_i\}_{i \in I}$ *de vectores de un espacio de Banach sea sumable, es que para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un conjunto finito* $F_o \subseteq I$ *tal que*

$$\|\sum_{i\in R} u_i\| < \varepsilon$$

para todo conjunto finito $R \subseteq I$ *disjunto con* F_o $(R \cap F_o = \emptyset)$.

b_2. *Si* $\{u_i\}_{i \in I}$ *es sumable, el conjunto* $\{i \in I | u_i \neq 0\}$ *es finito o numerable.*

3.6.6. *Ejercicios*

a. (i) Indicar el significado de lim en cada miembro de la equivalencia

$\lim x_n = \overline{0} \Leftrightarrow \lim \|x_n\| = 0$;

(ii) Demostrar esta equivalencia.

b. Demostrar la propiedad $\lim (x_n+y_n) \lim x_n + \lim y_n$ suponiento que existen los límites del segundo miembro.

c. Demostrar que $\lim x_n = h \Leftrightarrow \lim (x_n-h) = \overline{0}$, $\lim (a,x_n) = a.\lim x_n$, aclarando el significado de la equivalencia y de la igualdad con respecto a la existencia de los límites. Distinguir los casos $a \neq 0$ y $a = 0$.

d. (i) Demostrar que $\lim x_n = h \Rightarrow \lim \|x_n\| = \|h\|$;

(ii) ¿Vale la implicación contraria?

e. ¿En qué casos es la convergencia de la sucesión (x_n) de puntos de E, equivalente a la convergencia de la sucesion $(\|x_n\|)$ de números reales?

f. Diremos que una serie $\sum u_n$ en un e.n. $(E, \| \ \|)$ tiene por *mayorante* la serie *numérica* $\sum v_n$ de términos positivos, si $\|u_n\| \leq v_n$. Demostrar que: *Si una serie* $\sum u_n$ *tiene una mayorante* $\sum v_n$ *convergente, es absolutamente convergente.*

g. Verificar que una familia finita de vectores es siempre sumable y que su *suma* en el sentido de 3.6.5 coincide con el concepto elemental de suma de vectores.

3.7. SUBESPACIOS Y PARTES TOTALES

3.7.1. En un e.m. (E, d) cualquier subconjunto no vacío $S \subseteq E$ define un subespacio (ver 2.2.5. b). En cambio, para definir un *subespacio de un e.n.* $(E, \| \ \|)$ admitiremos sólo los *subespacios vectoriales* de E. Si S es un subespacio vectorial de E, la restricción de la norma $\| \ \|: E \to R$ a S es una *norma en S;* la llamaremos *norma inducida* en S por la norma $\| \ \|$ en E. También se dice que el e.n. definido por esta norma inducida es el *subespacio* S del e.n. E.

3.7.2. TEOREMA

Si S *es un subespacio vectorial de un e.n.* E, *su adherencia* $\overline{S}$ *en* E *es también un subespacio vectorial de* E.

Demostración

En virtud de la equivalencia $C_2 \Leftrightarrow C_3$ de 1.5.4, basta demostrar las implicaciones:

(i) $x \in \overline{S}$ e $y \in \overline{S} \Rightarrow x-y \in \overline{S}$;

(ii) $x \in \overline{S} \Rightarrow h\,x \in \overline{S}$ para todo escalar h.

Demostración de (i). En virtud del antecedente existen en S sucesiones (x_n), (y_n) tales que

$$x = \lim x_n, \qquad y = \lim y_n .$$

Pero de $x_n \in S$ e $y_n \in S$ sigue $x_n - y_n \in S$; entonces $x-y = \lim (x_n - y_n)$ es un punto de $\overline{S}$.

Demostración de (ii). Por el antecedente existe en S una sucesión (x_n) tal que $x = \lim x_n$. Pero de $x_n \in S$ sigue $h\,x_n \in S$; entonces $hx = \lim (h\,x_n)$ es un punto de $\overline{S}$.

3.7.3. Sea E un e.n. y M un subconjunto de E. Recordemos (1.6.4) que el *subespacio generado* por M es el menor subespacio M^* que incluye a M, y está formado por las c.ℓ. de vectores de M. Puesto que toda intersección de subespacios cerrados en un subespacio cerrado se puede definir análogamente el *subespacio CERRADO generado* por M como el menor subespacio cerrado M^c que incluye a M. Es $M^c = \overline{M^*}$ (ver 3.7.7 a).

3.7.4. DEFINICION

Sea (E, $\|\cdot\|$) *un e.n. Diremos que un subconjunto* T *de* E *es TOTAL si el subespacio* T^* *generado por* T (1.6.4) *es denso en* E. O sea si el subespacio cerrado generado por T es todo E: $\overline{T^*} = E$.

En virtud de 1.6.5 esto equivale a decir que T es total si *el conjunto de* *las c.ℓ.* (finitas) *de los vectores de* T *es denso en* E. A su vez esto último se expresa así:

Dados $\varepsilon > 0$ y $x \in E$, existe una c.ℓ. de elementos de T:

$$c = h_1 t_1 + \dots + h_r t_r \quad \text{tal que} \quad \|x-c\| < \varepsilon. \tag{1}$$

3.7.5. Cabe preguntarse si un conjunto total T es conjunto generador de *todo* el espacio E, o sea si $T^* = E$. Esto es en general falso para espacios de dimensión infinita. He aquí un ejemplo: Por un célebre teorema de Weierstrass (ver 6.3), toda función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ es uniformemente aproximable por polinomios. O sea, en el e.n. $C[a,b]$ con la norma $\|f\| = \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)|$ (3.3.3 a), si $g \in C[a,b]$ existe una sucesión (p_n) de polinomios tal que $\|g-p_n\| \to 0$. Entonces el conjunto $T = \{1,x,x^2,\dots,x^n,\dots\}$ es total pues el subespacio generado T^*, formado por los polinomios, es denso en $C[a,b]$. Pero T^* es parte *propia* de $C[a,b]$ pues hay funciones continuas que no son polinomios.

3.7.6. Una *sucesión* (x_n) se llama *total* si lo es el conjunto $\{x_n\}$ de sus puntos. La existencia de una sucesión total se vincula estrechamente con la separabilidad (3.6.2):

TEOREMA

En un e.n. $(E, \|\ \|)$ *existe una sucesión total si y sólo si* E *es separable.*

Demostración

Si E es separable, es decir existe un conjunto $\{x_n\}$ denso y numerable, basta tomar sus elementos en un orden cualquiera para tener una sucesión total.

Recíprocamente, sea (x_n) una sucesión total. Sea L_Q el conjunto de todas las c.ℓ. (finitas)

$$r_1\, x_1 + \ldots + r_m\, x_m, \qquad (r_k \in Q). \tag{2}$$

Entonces L_Q es un conjunto numerable y puesto que, por ser (x_n) total, el conjunto L de *todas* las c.*ℓ*. es denso en E basta probar que L_Q es denso en L. Así es, en efecto, pues dado (2), en virtud de la densidad de los racionales en R (reales) o C (complejos), el número

$$\|h_1x_1 + \ldots + h_mx_m - (r_1x_1 + \ldots + r_mx_m)\| \leqslant \sum_{k=1}^{m} |h_k-r_k|.\|x_k\|$$

puede hacerse tan pequeño como se quiera eligiendo convenientemente los r_k.

3.7.7. *Ejercicios*

a. Demostrar que $M^c = \overline{M^*}$.

b. Probar que toda base B de E (1.8.3) es un conjunto total.

Capítulo 4

ESPACIOS PREHILBERTIANOS Y DE HILBERT

4.0. INTRODUCCION

4.0.1. En el marco de los e.n. se estudian las propiedades ligadas a la vez con la distancia y con la estructura de e.v. *¿Podrán estudiarse, también en relación con la estructura de e.v., otras nociones tales como la de ángulo, ortogonalidad, etc.? La pregunta* es pertinente pues estas nociones se presentan en forma natural en el espacio V_A de los vectores fijos de origen común A. *La respuesta* se obtendrá viendo cómo en V_A la ortogonalidad entre vectores, y más generalmente la determinación del ángulo de dos vectores, se relacionan estrechamente con una operación llamada *producto escalar* o *producto interno*. Si bien en V_A el producto escalar de dos vectores se define tomando en consideración el ángulo que forman, se observa que las propiedades de esa operación se obtienen a partir de cuatro de ellas (la conmutatividad y tres vinculadas con la estructura vectorial). Como estas propiedades admiten una formulación similar en un e.v. abstracto, cabe considerar los e.v. provistos de un producto escalar, o sea de una operación que tenga esas propiedades. En tales e.v. hay una métrica no solo para las distancias, sino también para los ángulos.

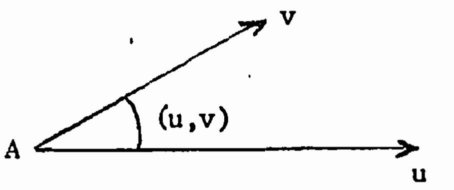
4.0.2. *Producto escalar de vectores fijos.*

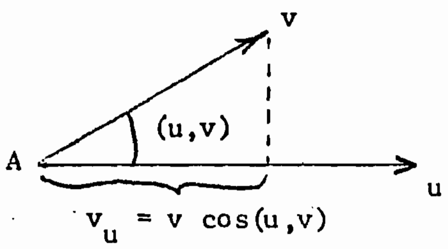
a. Consideremos el conjunto V_A y definamos entre sus elementos (vectores fijos de origen A) una nueva operación (u,v) llamada *producto escalar*, que es una aplicación del producto cartesiano $V_A \times V_A$ en el conjunto R de los escalares (números reales). Se define así:

$$(u,v) = |u| \cdot |v| \cdot \cos(\widehat{u.v}) \qquad (1)$$

siendo u el módulo del vector u y $(\widehat{u.v})$ el ángulo de los vectores u y v.

4.0.2.





En otras palabras:

DEFINICION

Se llama PRODUCTO ESCALAR (u,v) *de dos vectores* u *y* v *de* V_A *al producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman.*

b. Si u y v son *perpendiculares*, $u \perp v$, es $\cos(\widehat{u,v}) = 0$ y por (1) $(u,v) = 0$. Recíprocamente, si $u \neq \bar{0}$, $v \neq \bar{0}$ y $(u,v) = 0$, es $\cos(\widehat{u,v}) = 0$. Entonces: dos vectores no nulos son perpendiculares si y sólo si su producto escalar es 0:

$$\text{Si} \quad u \neq \bar{0} \ \text{ y } \ v \neq \bar{0}: \quad u \perp v \Leftrightarrow u.v = 0, \tag{2}$$

4.0.3. De la definición anterior se deduce (ver segunda figura), que:

El producto escalar de dos vectores es igual al módulo de uno cualquiera de ellos por la proyección ortogonal del otro sobre él:

$$(u,v) = |u| \,.\, v_u = |v| \,.\, u_v. \tag{3}$$

4.0.4. De la definición 4.0.2., la propiedad (3), y conocidas propiedades de las proyecciones, se deduce que el producto escalar tiene las siguientes propiedades, que son precisamente las que interesan para nuestro propósito:

E_1. *Conmutativa:*

$$(u,v) = (v,u) \tag{4}$$

E_2. *Distributiva combinada:*

$$(u,v+w) = (u,v) + (u,w); \tag{5}$$

E_3. *Asociativa combinada:*

$$(a.u,\ v) = a.(u,v); \tag{6}$$

E_4. *Carácter definido positivo:*

$$(u,u) \geqslant 0 \quad y \quad (u,u) = 0 \text{ si y sólo si } u = \bar{0}. \qquad (7)$$

Por ejemplo la igualdad (5) se demuestra así, recordando que la proyección de la suma de dos vectores es igual a la suma de sus proyecciones:

$$(u,v + w) = |u| \cdot (v + w)_u = |u| \cdot (v_u + w_u) =$$
$$= |u| \cdot v_u + |u| \cdot w_u = (u,v) + (u,w).$$

4.1. ESPACIOS PREHILBERTIANOS

4.1.0. Al considerar vectores abstractos elementos *de un e.v. real o complejo* V cualquiera seguiremos un camino inverso al de 4.0.; definiremos un producto escalar (u,v) como aplicación de V x V en R con propiedades que en el caso de un e.v. *real* coinciden con las (4) a (7) de 4.0.4., y sobre la base de este producto definiremos y mediremos longitudes y ángulos.

4.1.1. DEFINICION

Un e.v. real (resp.: *complejo*) V *se llama ESPACIO PREHILBERTIANO si entre sus elementos* u,v,... *está definida una operación binaria* (u,v) *con resultado en* R (resp.: *en* C), *llamada PRODUCTO ESCALAR o PRODUCTO INTERNO, que tiene con respecto a las operaciones de* e.v. *las propiedades siguientes, que llamaremos AXIOMAS DEL PRODUCTO ESCALAR:*

E_1^*. $$(v,u) = \overline{(u,v)} \qquad (1)$$

E_2. *Distributiva combinada:*

$$(u,v + w) = (u,v) + (u,w) \qquad (2)$$

E_3. *Asociativa combinada:*

$$(a.u,v) = a.(u,v) \qquad (3)$$

E_4. *Carácter definido positivo:*

$$(u,u) \geqslant 0 \quad y \quad (u,u) = 0 \Leftrightarrow u = \bar{0}. \qquad (4)$$

4.1.2.

4.1.2. En 4.1.10 a se dan indicaciones para demostrar:

TEOREMA

De E_1^*, E_2 *y* E_3 *se deduce*

$$(u + v, w) = (u,w) + (v,w) \tag{2'}$$

$$(u,a.v) = \bar{a} .(u,v) \tag{3'}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i u_i, \sum_{j=1}^{n} b_j v_j\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_i \overline{b_j}(u_i,v_j), \tag{5}$$

$$(u,\bar{0}) = (\bar{0},u) = 0 \qquad \textit{para todo} \quad u \in V. \tag{6}$$

4.1.3. *Notas*

a. Si V es un e.v.*real* , por ser real el producto escalar la propiedad E_1^* se reduce a la E_1 (conmutatividad) de 4.0.4:

$$(v,u) = (u,v). \tag{1_R}$$

También en este caso la propiedad (5) se reduce a

$$\left(\sum a_i u_i, \sum b_j v_j\right) = \sum_i \sum_j a_i b_j (u_i,v_j). \tag{5_R}$$

En virtud de (5_R), si $u = \sum a_i u_i$, es

$$(u,v) = (\sum a_i u_i,v) = \sum a_i (u_i,v)$$

y si $v = \sum b_j v_j$ es

$$(u,v) = (u,\sum b_j v_j) = \sum b_j (u,v_j):$$

es decir el producto escalar es *lineal en cada uno de sus factores;* se dice que es una forma bilineal.

(5_R) y (1_R) se expresan diciendo que *en un espacio prehilbertiano real, el producto escalar es una forma bilineal simétrica.*

b. En el caso más general considerado en este capítulo si V es un *espacio prehilbertiano real o complejo*, las propiedades (5) y (1) se expresan diciendo que el producto escalar es una *forma hermitiana.*

c. Hasta aquí hemos prescindido del axioma E_4. La forma hermitiana (u,v) se llama *positiva* si $(u,v) \geq 0$ para todo $u \in V$, y sea llama *definida positiva* si además $(u,u) \neq 0$ si $u \neq \bar{0}$. Entonces las axiomas de 4.1.1. *caracterizan* un producto escalar como una *forma hermitiana definida positiva.*

4.1.4. TEOREMA

En todo espacio prehilbertiano se verifica la siguiente DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARZ:

$$|(u,v)|^2 \leq (u,u).\ (v,v), \tag{7}$$

Demostración

Basta (ver 4.1.10 b) demostrar (7) en el caso en que $(v,v) = 1$, o sea, demostrar que:

$$(v,v) = 1 \Rightarrow |(u,v)|^2 \leq (u,u). \tag{8}$$

Por ser $(v,v) = 1$ es

$$0 \leq (u-(u,v)v,\ u-(u,v)v) = (u,u) + |(u,v)|^2 (v,v) - \overline{(u,v)}(u,v) - (u,v)(v,u) =$$

$$= (u,u) + |(u,v)|^2 - |(u,v)|^2 - |(u,v)|^2 = (u,u) - |(u,v)|^2 \tag{9}$$

o sea $|(u,v)|^2 \leq (u,u)$.

4.1.5. TEOREMA

En todo espacio prehilbertianao se verifica la siguiente DESIGUALDAD DE MINKOWSKI:

$$[(u+v\ ,\ u+v)]^{1/2} \leq (u,u)^{1/2} + (v,v)^{1/2}\ . \tag{10}$$

Demostración

Es $(u+v,\ u+v) = (u,u) + (v,v) + (u,v) + \overline{(u,v)}$, y puesto que la suma de un complejo y su conjugado es el doble de la parte real, que a su vez no supera al módulo, se tiene, aplicando luego (7):

$$(u+v,\ u+v) \leq (u,u) + (v,v) + 2\,|(u,v)|$$

$$\leq (u,u) + (v,v) + 2(u,u)^{1/2}\,.(v,v)^{1/2}$$

$$=[(u,u)^{1/2} + (v,v)^{1/2}]^2 \tag{11}$$

y esta desigualdad equivale a (10).

4.1.6. TEOREMA

En un espacio prehilbertiano E, *la función* $\| \ \|$: $E \to R$ *definida por*

$$\|u\| = (u,u)^{1/2} \tag{12}$$

es una norma.

Demostración

Hay que verificar que se cumplen n_1 a n_4 de 3.1.1:

n_1: $\|u\| \geq 0$ para todo u de E,

n_2: $\|u\| = 0 \Rightarrow u = \bar{0}$,

n_3: $\|h.u\| = |h|. \|u\|$,

n_4: $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Ahora bien, n_1 y n_2 son consecuencias de E_4; n_3 resulta de $\|hu\|^2 = (hu,hu) = h\bar{h}\ (u,u) = |h|^2 . \|u\|^2$, y finalmente n_4 equivale a la desigualdad de Minkowski (10).

4.1.7. *Nota*

En un espacio prehilbertiano *real* hay una métrica no sólo para las distancias sino también para los ángulos. En efecto, si $u \neq \bar{0}$ y $v \neq \bar{0}$ la desigualdad de Cauchy-Schwarz (7) equivale a

$$-1 \leq \frac{(u,v)}{\|u\| . \|v\|} \leq 1 \tag{13}$$

y en consecuencia se tiene: Si $u \neq \bar{0}$ y $v \neq \bar{0}$ existe un ángulo ϕ y sólo uno, tal que

$$\cos \phi = \frac{(u,v)}{\|u\| . \|v\|} \quad y \quad -\pi \leq \phi \leq \pi . \tag{14}$$

Esta proposición permite dar la definición siguiente, que obviamente se inspira en (1) de 4.0.2.:

DEFINICION

En un espacio prehilbertiano real se llama ANGULO *de dos vectores* u *y* v *no nulos, al ángulo* ϕ *unívocamente determinado por las condiciones* (14).

4.1.8 DEFINICION (confr. 4.0.2 b)

En un espacio prehilbertiano (real o complejo) E *, se dice que los vectores* u *y* v *son ORTOGONALES, o que el conjunto* {u,v} *es un CONJUNTO ORTOGONAL, y se escribe* $u \perp v$ si

$$(u,v) = 0. \tag{15}$$

Notemos que, por (6), el *vector nulo* 0 *es ortogonal* a todo vector de E.

4.1.9. DEFINCION

Se llama SUBESPACIO de un espacio prehilbertiano E *a todo subespacio vectorial* S *de* E *, en el cual el producto escalar es la restricción a* $S \times S$ *del producto escalar en* E.

Nota

Es inmediato ver que esta restricción es un producto escalar en S, o sea, verifica E_1^*, E_2, E_3 y E_4. O sea, si E es un espacio prehilbertiano *real* [resp.: *complejo*] esa restricción es (ver 4.1.3) una forma bilineal simétrica [resp.: hermitiana] definida positiva.

4.1.10. *Ejercicios*

a. Demostrar el teorema 4.1.2.

[*Indic.*: Para (2') se aplica sucesivamente E_1^* , E_2 y E_1^* ; para (3'), E_1^*, E_3 y E_1^*; (6) resulta de (2) y (2').]

b. Deducir (7) a partir de la implicación (8), con estos pasos:

(i) Si $v = \bar{0}$ vale (7) con = ;

(ii) Si $v \neq \bar{0}$ (7) equivale a la desigualdad que resulta reemplazando v por $a.v$ con $a \neq 0$;

4.1.10.

(iii) Si $v \neq \bar{0}$, eligiendo a se puede lograr que $w = a.v$ verifique $(w,w) = 1$.

c. Demostrar que la desigualdad de Cauchy-Schwarz (7) vale con = si y sólo si $\{u,v\}$ es l.d.

d. En un espacio prehilbertiano *real* la desigualdad de Cauchy-Schwarz (7) es:

$$(u,u)^2 \leq (u,u).\ (v,v). \qquad (7_R)$$

Demostrarla con razonamiento análogo al de 3.2.1 a.

e. En un espacio prehilbertiano *real* demostrar (11) y con ello la desigualdad de Minkowski (10) aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en el desarrollo del primer miembro.

f. Probar que $f(u,v) = (u,v)$ es una función continua de sus argumentos, o sea que, dados $\varepsilon > 0$, u_o y v_o, existe un número positivo $\delta = \delta(\varepsilon, u_o, v_o) > 0$ tal que

$$\|u - u_o\| < \delta \ \text{ y } \ \|v - v_o\| < \delta \Rightarrow |(u,v) - (u_o,v_o)| < \varepsilon. \qquad (10)$$

g. Demostrar que en un espacio prehilbertiano real de dimensión n no existen n + 2 vectores que formen ángulos obtusos dos a dos (o sea que tengan productos escalares todos negativos).

h. (i) Verificar que si $\|u\| = \|v\|$, entonces $u-v$ es ortogonal a $u+v$;

(ii) Interpretar (i) geométricamente en R^2.

4.2. ORTOGONALIDAD. ESPACIOS DE HILBERT

4.2.1. *En un espacio prehilbertiano* E *se dice que* $y \in E$ *es ORTOGONAL a un CONJUNTO* $M \subseteq E$ *si* y *es ortogonal a todos los vectores de* M. Se anota $y \perp M$.

4.2.2. TEOREMA

Sea M *un subconjunto cualquiera de un espacio prehilbertiano* E. *El conjunto*

$$M^{\perp} = \{y \in E \mid y \perp M\} \qquad (1)$$

de los vectores ortogonales a M *es un subespacio vectorial de* E.

Demostración

Por 1.5.4. basta demostrar que si h_1 y h_2 son escalares, $y_1 \perp M$ e $y_2 \perp M \Rightarrow$
$\Rightarrow (h_1 y_1 + h_2 y_2) \perp M$.

Pero el antecedente significa que

$$(y_1,x) = (y_2,x) = 0 \quad \textit{para todo} \quad x \in M,$$

y entonces es también para todo $x \in M$:

$$(h_1 y_1 + h_2 y_2, x) = h_1(y_1,x) + h_2(y_2,x) = 0,$$

o sea $(h_1 y_1 + h_2 y_2) \perp M$.

DEFINICION

El subespacio $M^{\perp}$ *dado por* (1) *se llama SUBESPACIO ORTOGONAL del conjunto* M.

4.2.3. DEFINICION

Un ESPACIO DE HILBERT es un espacio prehilbertiano completo.

4.2.4. *Proyección ortogonal sobre un espacio de Hilbert*

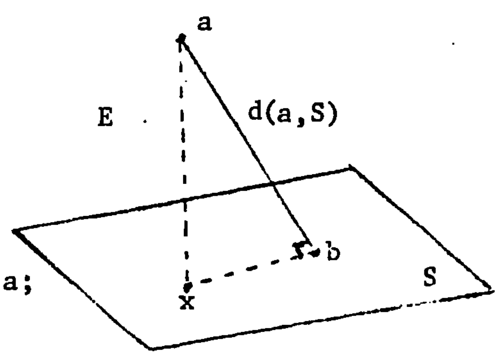
Dados en un espacio prehilbertiano E un punto a y un subespacio *de Hilbert* S, veremos que se cumplen estas cuatro propiedades que intuitivamente parecen obvias pero no valen si el subespacio S no es completo:

(i) La mínima distancia de a a S, $d(a,S) =$
$= \inf\limits_{x\in S} d(a,x) = \inf\limits_{x\in S} \|a-x\|$ *se alcanza para* un segmento ab con $b \in S$;

(ii) Este segmento ab es único;

(iii) b es pie de una perpendicular a S por a;

(iv) Ningún otro punto x de S tiene esta propiedad.



Estas propiedades son objeto de cuatro teoremas con hipótesis común. En un primer estudio pueden omitirse las demostraciones.

HIPOTESIS DE LOS TEOREMAS 1 A 4.

E es un espacio prehilbertiano, a un punto de E y S un subespacio completo, por tanto un espacio de Hilbert.

TEOREMA 1

Existe un punto b $\in$ S *tal que*

$$\|a - b\| = d(a,S). \tag{2}$$

Demostración

Sea $d(a,S) = \inf\limits_{x\in S} \|a-x\| = \delta$. Existe una sucesión (x_n) de puntos de S tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \|a-x_n\| = \delta$. Demostremos que (x_n) es una sucesión fundamental. Si en la identidad (ver 4.2.5 c):

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) \tag{3}$$

se pone $u = a-x_m, v = a-x_n$ se obtiene

$$\|2a- (x_m+ x_n)\|^2 + \|x_n-x_m\|^2 = 2(\|a-x_m\|^2 + \|a-x_n\|^2)$$

o sea:

$$\|x_n-x_m\|^2 = 2(\|a-x_m\|^2 + \|a-x_n\|^2) - 4 \left\|a - \frac{1}{2} (x_n + x_m)\right\|^2. \tag{4}$$

Para $m,n \to \infty$ cada una de las normas del segundo miembro tiende a δ, luego el primer miembro tiende a $2(\delta^2 + \delta^2) - 4\delta^2 = 0$, o sea, (x_n) es una sucesión fundamental. Puesto que, por hipótesis, S es completo, (x_n) converge hacia un vector $b \in S$ para el cual es $\|a-b\| = d(a,S)$.

TEOREMA 2

El punto b que verifica (2) *es único.*

Demostración.

Sea b' otro vector de S para el cual $\|a-b'\| = d(a,S)$. Aplicando (3) ahora con $u = a-b$ y $v = a-b'$ se obtiene

$$\|2a- (b + b')\|^2+ \|b'-b\|^2 = 2(\|a-b\|^2 + \|a-b'\|^2)$$

de donde

$$\|b'-b\|^2 = 4\delta^2 - 4\ \|a- \frac{1}{2}(b + b')\|^2. \tag{5}$$

Puesto que $\frac{1}{2}(b+b')\in S$ es $\|a- \frac{1}{2}(b+b')\|^2 \geqslant \delta^2$ y entonces (5) da $\|b'-b\|^2 \leqslant 0$, de donde $b' = b$.

TEOREMA 3

El punto b *de* S *que verifica* (2) *es tal que*

$$a - b \perp S. \tag{6}$$

Demostración

Si $x \neq \bar{0}$ pertenece a S y h es un escalar no nulo, es $\|a-(b + hx)\|^2 > \delta^2$ o sea

$$(a - b - hx,\ a - b - hx) - \delta^2 > 0, \tag{7}$$

y puesto que $(a-b,\ a-b) = \delta^2$ y la suma de dos complejos conjugados es igual al doble de la parte real $[z+\bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)]$, (7) equivale a:

$$-2 \cdot \mathrm{Re}[\,h(a-b,x)] + |h|^2\ \|x\|^2 > 0. \tag{8}$$

Pero (8) no puede valer para *todo* $h \neq 0$ sino cuando $\mathrm{Re}(a-b,x) = 0$. Análogamente, o sustituyendo x por ix, resulta $\mathrm{Im}(a-b,x) = 0$. Por tanto $(a-b,x)= 0$, y como esto vale para todo x de S, es $(a-b) \perp S$.

TEOREMA 4

b *es el único punto* x *de* S *tal que* $a-b \perp S$.

Demostración

Sea $b' \in S$ tal que $a-b' \perp S$. Entonces, para todo x de S es, por el teorema de Pitágoras (4.2.5 a):

$$\|a-(b'+ x)\|^2 = \|a-b'\|^2 + \|x\|^2. \tag{9}$$

Finalmente, (9) muestra que b' es un punto de S de mínima distancia a a : como por el teorema 2 el único es b, es $b' = b$.

DEFINICION

El punto b *de* S *unívocamente determinado por* (2) *o por* (6) *se llama PROYECCION ORTOGONAL DE* a *SOBRE* S *y se anota* $b = P_S(a)$. *La aplicación* $P_S : E \to S$ *se llama PROYECCION ORTOGONAL SOBRE* S.

4.2.5. *Ejercicios*

a. *Teorema de Pitágoras.* Demostrar que en un espacio prehilbertiano E:

$$u \perp v \quad \Rightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 . \tag{10}$$

b. Verificar que el producto escalar se expresa mediante la norma así:

(i) en un espacio prehilbertiano real,

$$4(u,v) = \|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 ; \tag{11}$$

(ii) en un espacio prehilbertiano complejo,

$$4(u,v) = \|u+v\| - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2 \tag{12}$$

c. (i) Demostrar la igualdad (3).

(ii) Interpretarla geométricamente en R^2.

d. Mostrar que, con las notaciones de 4.2.4, el conjunto $P^{-1}(\bar{0})$ de los vectores cuya proyección ortogonal sobre S en $\bar{0}$ (llamado *núcleo* de P_S) es el subespacio ortogonal $S^\perp$ de S.

e. Hallar un polinomio de grado 2 ortogonal en [0,1] a 1 y a x.

f. Sean u y v $\neq \bar{0}$ vectores de un espacio prehilbertiano V. Hallar el vector de módulo mínimo de la forma w = u+xu ¿Es este vector ortogonal a v? Representar.

g. En R^3, hallar la proyección ortogonal w de v = (2,1,3) sobre el subespacio generado por {u} ={(1,0,1)} .

h. Probar que si S es un subespacio de un espacio prehilbertiano V, entonces el conjunto de vectores $x \in V$ tales que (x,u) = 0 para $u \in S$ es un subespacio $S^\perp$ tal que

$$S \cap S^{\perp} = \bar{0} \quad y \quad S \cup S^{\perp} = V$$

$S^{\perp}$ se llama *complemento ortogonal* de S en V.

i. en R^3, hallar el complemento ortogonal del subespacio generado por $\{(2,1,-1)\}$.

4.3. EJEMPLOS DE ESPACIOS PREHILBERTIANOS Y DE HILBERT

4.3.0. De entre los e.n. considerados en 3.3 y 3.4, veamos cuáles son prehilbertianos, y de entre éstos cuáles son de Hilbert.

4.3.1. La recta real R y el plano complejo C, que son e.n. con la norma $\|x\| = |x|$, son espacios prehilbertianos. En efecto, la norma deriva del producto escalar (4.3.7 (i))

$$(x,y) = x.\bar{y} \tag{1}$$

pues para y = x resulta $(x,x) = x\bar{x} = |x|^2 = \|x\|^2$.

Ambos son espacios de Hilbert, pues son completos (ver 3.3.5 d y e).

4.3.2. Los e.n. R^n y C^n, con la norma (ver 3.3.1)

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{1/2} \tag{2}$$

son espacios prehilbertianos. En efecto, la norma deriva del producto escalar (4.3.7 (ii)):

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k.\bar{y}_k, \ [x = (x_1,\ldots,x_n),\ y = (y_1,\ldots,y_n)\ ], \tag{3}$$

pues para y = x resulta $(x,x) = \sum |x_k|^2 = \|x\|^2$.

Ambos son espacios de Hilbert pues son completos (3.3.5 d y e).

4.3.3. Los e.n. $\ell_2(R)$ y $\ell_2(C)$ de sucesiones reales o complejas de cuadrado sumable (3.3.2), ambos con la norma

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{1/2}, \quad [x = (x_1,\ldots,x_n,\ldots)], \tag{4}$$

son espacios prehilbertianos. En efecto, la norma deriva del producto escalar (4.3.2. (iii)).

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k, \ [x=(x_1,\ldots,x_n,\ldots) \in \ell_2;\ y=(y_1,\ldots,y_n,\ldots) \in \ell_2] \qquad (5)$$

pues para y=x resulta $(x,x) = \sum |x_k|^2 = \|x\|^2$.

Ambos son también espacios de Hilbert pues son completos (ver 3.3.5 f).

4.3.4. Los e.n. $A[a,b]$ y $C[a,b]$ de las funciones respectivamente acotadas y continuas en el intervalo cerrado $[a,b]$, ambos con la norma (ver 3.3.3)

$$\|f\| = \sup_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t)| \quad , \qquad (6)$$

no son espacios prehilbertianos: se puede demostrar que la norma (6) no puede obtenerse a partir de un producto escalar.

4.3.5. El e.n. $C_2[a,b]$ de las funciones continuas en $[a,b]$ con norma (3.3.3 b):

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 \, dt\right)^{1/2} \qquad (7)$$

es un espacio prehilbertiano. En efecto, la norma (7) deriva del producto escalar (4.3.7 (iv)):

$$(f,g) = \int_a^b f(t)\, \overline{g(t)}\, dt$$

pues para g = f resulta $(f,f) = \int_a^b |f(t)|^2 \, dt = \|f\|_2^2$.

Puesto que $C_2[a,b]$ no es completo (3.3.5 c), da un ejemplo de espacio prehilbertiano que no es espacio de Hilbert.

4.3.6. *Nota*

En cambio I_2(3.4.6 y 3.4.7) es un espacio de Hilbert. De los e.n. ℓ_p e I_p considerados en 3.4 sólo son prehilbertianos ℓ_2 e I_2, y ambos son espacios de Hilbert.

4.3.7. *Ejercicio*

Verificar que:

(i) (1) es un producto escalar en R y en C,

(ii) (3) es un producto escalar en R^n y en C^n, (iii). (5) es un producto escalar en ℓ_2

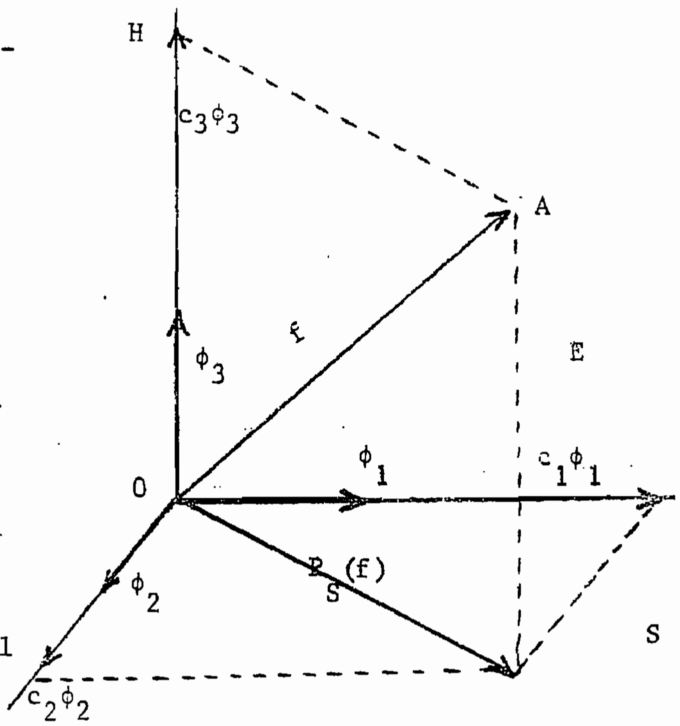
(iv) (8) es un producto escalar en $C_2[a,b]$.

Capítulo 5

SERIES DE FOURIER EN ESPACIOS DE HILBERT

5.0. INTRODUCCION

5.0.0. Los temas de este capítulo 5 se refieren a espacios prehilbertianos, a veces necesariamente completos o de Hilbert. Pero si se los refiere al e.v. de los vectores fijos de origen común en el espacio ordinario tienen un carácter tan elemental e intuitivo que resulta muy orientadora su presentación previa e informal en ese caso.



5.0.1. Si los vectores ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 de origen O son dos a dos perpendiculares diremos que el conjunto $\{\phi_i\} = \{\phi_1,\phi_2,\phi_3\}$ es *ortogonal*. Si además tienen módulo o norma 1 diremos que $\{\phi_i\}$ es un conjunto ortogonal y normal, o *conjunto ortonormal*.

Un conjunto ortonormal $\{\phi_i\}$ está caracterizado por la siguiente *tabla de productos escalares*:

$$(\phi_i,\phi_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} = 1 & \text{si} \quad i = j \\ = 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases} \tag{1}$$

pues por ejemplo $(\phi_1,\phi_2) = 0$ equivale a $\phi_1 \perp \phi_2$, y $(\phi_1,\phi_1) = 1$ equivale a $|\phi_1| = 1$.

5.0.2. Llamaremos *sistema ortonormal* a un conjunto ordenado $(\phi_i) = (\phi_1,\phi_2,\phi_3)$ que cumple (1); (ϕ_i) define un *sistema de coordenadas* para los vectores de origen O, pues si el vector f se expresa por la c.ℓ.

$$f = c_1.\phi_1 + c_2.\phi_2 + c_3.\phi_3 \tag{2}$$

está determinado unívocamente por la terna ordenada de números (c_1,c_2,c_3).

5.0.3. Multipliquemos escalarmente ambos miembros de (2) por cada uno de los vectores ϕ_i; se obtiene

$$(f,\phi_i) = c_1(\phi_1,\phi_i) + c_2(\phi_2,\phi_i) + c_3(\phi_3,\phi_i) = c_i, \tag{3}$$

y reemplazando en (2) resulta:

$$f = (f,\phi_1).\phi_1 + (f,\phi_2).\phi_2 + (f,\phi_3).\phi_3. \tag{4}$$

Los coeficientes $c_i = (f,\phi_i)$ de la c.ℓ. (2) ó (4), o coordenadas de f, se llaman también *coeficientes de Fourier* de f en el sistema ortonormal (ϕ_i), y el segundo miembro de (4) se llama *suma de Fourier* de f en el sistema (ϕ_i).

5.0.4. Para indicar que $\sum c_i\phi_i$ es la suma de Fourier de f se anota $f \sim \sum c_i\phi_i$, que se lee "f tiene por suma de Fourier a $\sum c_i\phi_i$". Entonces

$$f \sim \sum c_i\phi_i \Leftrightarrow c_i = (f,\phi_i). \tag{5}$$

5.0.5. Con referencia a (2) tenemos a la vez

$$f = \sum c_i\phi_i \quad y \quad f \sim \sum c_i\phi_i. \tag{6}$$

Esto parecería indicar que el símbolo $\sim$ es superfluo pues puede sustituirse por =. Pero en el sistema ortonormal $(\phi_1,\phi_2) = (\phi_i)_{i=1,2}$, si $c_1 = (f,\phi_1)$ y $c_2 = (f,\phi_2)$, es

$$f \sim c_1\phi_1 + c_2\phi_2, \quad \textit{pero} \quad f \neq c_1\phi_1 + c_2\phi_2 \tag{7}$$

si f no pertenece al plano de ϕ_1 y ϕ_2: subespacio S generado por $\{\phi_1,\phi_2\}$. En cambio, es

$$c_1\phi_1 + c_2\phi_2 = P_S(f), \tag{8}$$

donde $P_S(f)$ es la proyección ortogonal (4.2.4) de f sobre el subespacio cerrado S.

5.0.6. Formemos el "cuadrado escalar" de (2), o sea, multipliquemos cada miembro escalarmente por él mismo. Resulta por la bilinealidad:

$$(f,f) = (\sum_i c_i\phi_i, \sum_k c_k\phi_k) = \sum_i \sum_k c_i c_k \; (\phi_i,\phi_k).$$

Pero, por (1), en la suma doble para cada i sólo subsiste el término con $k = i$, para el cual es $(\phi_i,\phi_k) = (\phi_i,\phi_i) = 1$. Resulta así

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = |f|^2 \tag{9}$$

que expresa el llamado *teorema de Pitágoras-Parseval.*

5.0.7. Consideremos otro vector g, también expresado por su suma de Fourier en el sistema ortonormal (ϕ_1,ϕ_2,ϕ_3):

$$g = d_1\phi_1 + d_2\phi_2 + d_3\phi_3 \tag{10}$$

con $d_i = (g,\phi_i)$ (coeficientes de Fourier de g) y formemos el producto escalar de (2) y (10). Resulta

$$(f,g) = (\sum c_i\phi_i, \sum d_k\phi_k) = \sum_i \sum_i c_i d_k \; (\phi_i,\phi_k) = \sum_i c_i d_i.$$

Esta igualdad:

$$\sum c_i d_i = (f,g) \tag{11}$$

con $c_i = (f,\phi_i)$, $d_i = (g,\phi_i)$ coeficientes de Fourier de f y de g, se llama *igualdad de Parseval* y generaliza el teorema de Pitágoras-Parseval pues tomando $g = f$ en (11) resulta (9).

5.0.8. Volvamos al sistema ortonormal $(\phi_1,\phi_2) = (\phi_i)_{i = 1,2}$. De la igualdad (8), formando su cuadrado escalar, resulta el teorema de Pitágoras-Parseval para $P_S(f)$:

$$c_1^2 + c_2^2 = |P_S(f)|^2. \tag{9'}$$

Pero $|P_S(f)|^2 \leqslant |f|^2$; entonces (9') da para f la llamada *desigualdad de Bessel:*

$$c_1^2 + c_2^2 \leq |f|^2, \qquad (12)$$

o sea, *en un sistema ortonormal cualquiera* (aquí $(\phi_i)_{i=1,2}$) *la suma de los cuadrados de los coeficientes de Fourier de un vector* f *no supera al cuadrado de su módulo.*

5.0.9. Si $f = \overrightarrow{OA}$, la distancia de A al plano S es

$$|f-P_S(f)| = |f-(c_1\phi_1 + c_2\phi_2)|,$$

y puesto que ésta es la menor de las distancias de A a un punto cualquiera $a_1\phi_1 + a_2\phi_2$ de S, tendremos:

$$|f-(c_1\phi_1 + c_2\phi_2)| \leq |f-(a_1\phi_1 + a_2\phi_2)|. \qquad (13)$$

(13) expresa una importante *PROPIEDAD DE MINIMO* de los coeficientes de Fourier c_i: *de entre todas las c.l.* $\sum a_i\phi_i$, *la que mejor aproxima a* f *por hacer mínimo el módulo de la diferencia* $f-\sum a_i\phi_i$, *es la que tiene por coeficientes los coeficientes de Fourier* c_i.

5.1. SISTEMAS ORTONORMALES

5.1.1. En un espacio prehilbertiano, un conjunto {g,h,r,...} se llama *ortogonal* si sus elementos son dos a dos ortogonales: (g,h) = 0, (g,r) = 0,... El conjunto se llama *normal* si sus elementos tienen norma 1: $\|g\| = \|h\| = \ldots = 1$. Para decir que un conjunto es ortogonal y normal se usa el monstruo idiomático "ortonormal".

DEFINICION

Un conjunto S *de elementos de un espacio prehilbertiano se llama CONJUNTO ORTONORMAL si*

$$f,g \in S \Rightarrow (f,g) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad f = g \\ 0 & \text{si} \quad f \neq g. \end{cases}$$

5.1.2. *Ejemplo*

En el espacio prehilbertiano $C_2[0,1]$ de las funciones continuas en el intervalo $[0,1]$, con el producto escalar (ver 4.3.5)

$$(f,g) = \int_0^1 f(x).\overline{g(x)}\, dx \tag{1}$$

el conjunto

$$\{\phi_n\}_{n \in Z} \quad \textit{con} \quad \phi_n(x) = e^{2\pi inx}, \tag{2}$$

donde el conjunto Z de índices es el de los enteros $Z = \{0,\pm 1,\pm 2,\ldots\}$ es ortonormal. En efecto, si $r \neq s$ es

$$(\phi_r,\phi_s) = \int_0^1 e^{2\pi irx}.e^{-2\pi isx}\, dx = \int_0^1 e^{2\pi i(r-s)x}\, dx = \left[\frac{e^{2\pi i(r-s)x}}{2\pi i(r-s)}\right]_0^1 = 0$$

y

$$(\phi_r,\phi_r) = \int_0^1 e^{2\pi irx}.e^{-2\pi irx}\, dx = \int_0^1 dx = 1.$$

El conjunto ortonormal (2) se llama *trigonométrico* debido a la relación entre las exponenciales imaginarias y las funciones circulares:

$$e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t.$$

5.1.3. TEOREMA

En un espacio prehilbertiano separable E, *todo conjunto ortonormal* S *es finito o numerable*.

Demostración

Por hipótesis existe un conjunto $\{f_n\}_{n \in N}$ numerable y denso en E. Por tanto, a cada $f \in S$ se puede asignar un índice $k = I(f)$ de modo tal que $\|f-f_k\| \leqslant \sqrt{2}/4$. Probemos que esta aplicación $I: S \to N$ es *inyectiva*, o sea que si g es *otro* elemento de $S(g \neq f)$, el índice $j = I(g)$ que se le asigna debe ser diferente de k. En efecto, es

$\|f-g\| = (f-g,\ f-g)^{1/2} = (1+1-0-0)^{1/2} = \sqrt{2} \leq \|f-f_k\| + \|f_k-f_j\| + \|f_j-g\|$

y, puesto que $\|f-f_k\| + \|f_j-g\| \leq (\sqrt{2}/4) + (\sqrt{2}/4) = \sqrt{2}/2$, debe ser $\|f_k-f_j\| \geq \sqrt{2}/2$ y entonces $f_k \neq f_j$. Esta inyección de S en un conjunto numerable N prueba que S es finito o numerable.

5.1.4. a. En lo que sigue hemos de considerar espacios prehilbertianos o de Hilbert *separables*. En virtud del teorema precedente, con todo conjunto ortonormal puede formarse una *sucesión* finita o infinita $(\phi_i) = (\phi_1, \phi_2, \ldots)$, que llamaremos *sistema ortonormal*, y es

$$(\phi_i, \phi_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq k \\ 1 & \text{si} \quad i = k. \end{cases}$$

b. Si el sistema ortonormal (ϕ_i) tiene n elementos convendremos en que en una suma como $\sum_{i=1}^{N} c_i \phi_i$ con $N > n$, o en una serie como $\sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i$, se reemplazan por 0 los términos con $i > n$.

5.1.5. *Ejercicios*

a. Verificar que el conjunto (2) es ortonormal en el espacio $C_2[a,a+1]$ (se dice también que el conjunto es ortonormal en el intervalo $[a,a+1]$).

b. (i) Verificar que el conjunto $\{e^{inx}\}_{n \in Z}$ es ortogonal en $[-\pi,\pi]$;

(ii) Multiplicando cada función por una constante conveniente, obtener que un sistema ortonormal en el mismo intervalo es $\{e^{inx}/\sqrt{2\pi}\}_{n \in Z}$.

c. Probar que todo conjunto ortonormal $\{\phi_i\}$ es ℓ.i.

d. Verificar que los conjuntos

$$\{\cos n\,t\}_{n=0}^{\infty} \qquad y \qquad \{\text{sen } n\,t\}_{n=1}^{\infty} \tag{3}$$

son ortogonales en $[0,\pi]$ y hallar los siguientes sistemas ortonormales en el mismo intervalo:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right\} \cup \left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{ con } n\,t\right\}_{n=1}^{\infty} \qquad y \qquad \left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{ sen } n\,t\right\}_{n=1}^{\infty}. \tag{4}$$

[*Indicación*. Usar

$$\cos p\, t.\cos q\, t = \frac{1}{2}[\cos(p+q)t + \cos(p-q)t] \quad (5)$$

$$\text{sen } p\, t.\text{sen } q\, t = \frac{1}{2}[\cos(p-q)t - \cos(p+q)t].] \quad (6)$$

e. (i) Verificar que el sistema (*sistema trigonométrico*)

$$1, \cos t, \text{sen } t, \ldots, \cos n\, t, \text{sen } n\, t, \ldots \quad (7)$$

es ortogonal en $[0,2\pi]$ pero no en $[0,\pi]$;

(ii) Probar que el correspondiente sistema ortonormal en $[0,2\pi]$ es

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\text{sen } x}{\sqrt{\pi}}, \ldots ; \frac{\cos n\, x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\text{sen } n\, x}{\sqrt{\pi}}, \ldots \quad (8)$$

[*Indicación*. Usar

$$\cos p\, t.\text{sen } q\, t = \frac{1}{2}[\text{sen}(p+q)t - \text{sen}(p-q)t].] \quad (9)$$

5.2. CONSTANTES DE FOURIER. APROXIMACION OPTIMA

5.2.1. DEFINICION

Dados en un espacio prehilbertiano cualquiera E *un conjunto ortonormal* $S = \{\phi_i\}_{i\in I}$ *y un vector* $f \in E$, *se llama CONSTANTE DE FOURIER o COEFICIENTE DE FOURIER* (c.F.) *de* f *respecto del elemento* ϕ_n *de* S, *al número*

$$c_n = c_n(f) = (f,\phi_n). \quad (1)$$

5.2.2. Elijamos un número finito de elementos $\phi_1,\ldots,\phi_n$ del conjunto S y propongámosnos el problema siguiente:

PROBLEMA

Determinar los coeficientes a_k *de la c.l.*

$$g = a_1\phi_1 + a_2\phi_2 + \ldots + a_n\phi_n \quad (2)$$

de modo tal que el resultado g *dé la mejor aproximación en norma a* f. *O sea, determinar los* a_k *de modo que sea mínima la norma* $\|f-g\|$.

SOLUCION

Es

$$\|f-g\|^2 = (f-g,\ f-g) = (f-\sum_{i=1}^{n} a_i\phi_i,\ f-\sum_{j=1}^{n} a_j\phi_j) =$$

$$= (f,f)-\sum_{j=1}^{n} \overline{a_j}\ (f,\phi_j)-\sum_{i=1}^{n} a_i(\phi_i,f) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i\ \overline{a_j}(\phi_i,\phi_j).$$

Por ser $\{\phi_i\}$ ortonormal, en la suma doble, para cada i sólo queda el término con $j = i$, para el cual $(\phi_i,\phi_j) = (\phi_i,\phi_i) = 1$, y teniendo en cuenta (1) queda:

$$\|f-g\|^2 = \|f\|^2-\sum \overline{a_i}\ c_i - \sum a_i\ \overline{c_i} + \sum a_i\ \overline{a_i} =$$

$$= \|f\|^2 + \sum(a_i-c_i)\overline{(a_i-c_i)} - \sum c_i\ \overline{c_i}$$

o sea:

$$\|f-g\|^2 = \|f\|^2 - \sum |c_i|^2 + \sum |a_i-c_i|^2. \qquad (3)$$

Esta igualdad nos da la solución del problema. En efecto, los coeficientes a_i a determinar sólo aparecen en la suma $\sum |a_i-c_i|^2$ que toma su valor mínimo (cero) si $a_i = c_i$. Entonces la c.ℓ. (2) de aproximación óptima a f en norma es la que tiene por coeficientes los c.F. de f:

$$g_o = \sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i = \sum_{i=1}^{n} (f,\phi_i)\phi_i. \qquad (4)$$

Notemos que *la solución es única,* y que el valor que hay que dar a cada coeficiente a_i en (2) *depende sólo de ϕ_i y no de los otros elementos del conjunto ortonormal.* Esto último tiene importancia en los cálculos pues si se busca una aproximación mejor mediante una c.ℓ. como

$$a_1\phi_1 + \dots + a_n\phi_n + a_{n+1}\phi_{n+1} + \dots + a_m\phi_m,$$

subsisten los valores ya calculados para los n primeros coeficientes.

5.2.3. Tomando en (3) $a_i = c_i = (f,\phi_i)$ se obtiene la siguiente *fórmula de Bessel* que expresa el cuadrado de la norma $\|f-g\|$ mínima:

$$\|f-\sum_{i=1}^{n} c_i\phi_i\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2. \qquad (5)$$

De aquí resulta, por ser $\geqslant 0$ el primer miembro, la llamada *desigualdad de Bessel:*

$$\sum_{i=1}^{n} |c_i|^2 \leqslant \|f\|^2. \qquad (6)$$

5.2.4. *Ejercicios*

a. Demostrar que para cada elemento f de un espacio prehilbertiano E con un conjunto ortonormal $\{\phi_i\}_{i\in I}$:

(i) Los c.F. no nulos constituyen un conjunto finito o numerable $\{c_1,c_2,\ldots\}$;

(ii) La serie $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2$ es convergente, y

$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \leqslant \|f\|^2; \qquad (7)$$

(iii) $\lim_{n\to\infty} |c_n| = 0.$

b. Probar que dado en un espacio prehilbertiano E un conjunto ortonormal $S = \{\phi_i\}_{i\in I}$, cada vector f de E es ortogonal a todos los ϕ_i con excepción de un conjunto finito o numerable.

c. En las hipótesis de a, probar que para cada par f,g de funciones de E converge absolutamente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\overline{d_n} \qquad \textit{con} \qquad c_n = (f,\phi_n) \qquad y \qquad d_n = (g,\phi_n). \qquad (8)$$

5.3. SERIES DE FOURIER

5.3.1. Con las hipótesis y notaciones de 5.2.1, se dice que la serie $\sum c_n\phi_n$ es la *serie de Fourier* (s.F.) de $f \in E$, y se anota

$$f \sim \sum c_n\phi_n \qquad (1)$$

si los coeficientes c_n son los c.F. de f en el sistema ortonormal $\{\phi_n\}$. O sea, (1) equivale a

$$c_n = (f,\phi_n). \tag{1'}$$

5.3.2. Nos limitaremos a un ejemplo muy importante. Vimos en 5.1.2 que en $C_2[0,1]$ un conjunto ortonormal es

$$\{\phi_n\}_{n\in Z} = \{e^{2\pi inx}\}_{n\in Z} \tag{2}$$

donde $Z = \{0, \pm1, \pm2,...\}$ es el conjunto de los enteros. Si $f(x)$ es una función continua en $[0,1]$,

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n.e^{2\pi inx} \tag{3}$$

significa por definición que los c_n son los c.F. de f, o sea que

$$c_n = (f,\phi_n) = \int_0^1 f(x).\overline{\phi_n(x)}dx = \int_0^1 f(x)\ e^{-2\pi inx}dx. \tag{3'}$$

Destaquemos que (3) indica *solamente* que vale (3'). En particular (3) no indica nada sobre el carácter de la serie, ni si en el caso de converger para un valor de x, su suma es o no es f(x).

5.3.3. Procuremos justificar la elección de los c.F. c_n como coeficientes de una *serie* (la s.F. de f) y la decisión de destacar el vínculo de esta serie con f.

a. Indiquemos con $\sum^*$ una suma finita. Por lo visto en 5.2.2, toda suma finita $\sum^* c_n\ e^{2\pi inx}$ de términos de la s.F. (3) aproxima a la función f *en norma* (en nuestro ejemplo *en media cuadrática*) *MEJOR* que toda otra c.*ℓ*. $\sum^* a_n\ e^{2\pi inx}$ de las mismas funciones. O sea:

$$\int_0^1 |f(x)-\sum^* c_n\ e^{2\pi inx}|^2dx \leq \int_0^1 |f(x)-\sum^* a_n\ e^{2\pi inx}|^2dx. \tag{4}$$

Sólo en el caso en que la norma mínima

$$\|f-\sum^* c_n\phi_n\| = \left\{\int_0^1 |f(x)-\sum^* c_n.e^{2\pi inx}|^2dx\right\}^{1/2} \tag{5}$$

pueda hacerse tan pequeña como se quiera tomando c.*ℓ*. con más y más términos (veremos en 5.6 cuándo ocurre esto) la s.F. $\sum c_n\phi_n$ converge *en norma* hacia f, lo que se anota

$$\sum c_n\phi_n = f \tag{6}$$

y significa que para cada $\varepsilon > 0$ existe una suma finita $\sum^* c_n\phi_n$ tal que

$$\|f-\sum^* c_n\phi_n\| < \varepsilon. \tag{6'}$$

En cambio, en general,

$$\textit{no es} \qquad \sum c_n\phi_n(x) = f(x) \tag{7}$$

pues esta igualdad indicaría que *para cada* x la serie *numérica* $\sum c_n\phi_n(x)$ converge, y que su suma es *el número* f(x), y ni una cosa ni otra resulta de (6), donde las funciones ϕ_n y f son elementos de un e.n.

b. Consideremos la siguiente función definida por una serie:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} b_k\, e^{2\pi ikx}; \tag{8}$$

sus c.F. se calculan así por (3'), *suponiendo que se pueda integrar término a término*:

$$c_n = \int_0^1 \left(\sum_{-\infty}^{\infty} b_k\, e^{2\pi ikx}\right)e^{-2\pi inx}dx = \sum_{-\infty}^{\infty} b_k \int_0^1 e^{2\pi i(k-n)x}\,dx = b_n$$

pues la última integral vale 1 si k = n y 0 si $k \neq n$ (ver 5.1.2). Entonces

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} b_n\, e^{2\pi inx}, \tag{9}$$

c. Señalemos un caso importante en el cual el cálculo formal hecho en b se puede legitimar, y entonces, en virtud de (8) y (9) puede sustituirse = por $\sim$ o viceversa.

TEOREMA

Si f(x) *es la suma de una serie* (8) *uniformemente convergente, ésta es la s.F. de* f(x).

Demostración

Al multiplicar por $e^{-2\pi inx}$ que es una función acotada, no se destruye la convergencia uniforme de (8), y puesto que una serie uniformemente convergente se puede integrar término a término queda legitimado el cálculo formal hecho en b.

Nota

Este es un teorema especial, referido al conjunto ortonormal (2) y a una serie *trigonométrica* (8). Puede enunciarse así: *si una serie trigonométrica converge uniformemente, es la s.F. de su suma.* Por ejemplo, un "polinomio trigonométrico" $\sum^* b_n\, e^{2\pi inx}$ es la s.F. de su suma.

5.3.4. *Ejercicios*

a. De (3) [o sea, de (3')] deducir que:

(i) $$a.f(x) \sim \sum a\, c_n . e^{2\pi inx}; \tag{10}$$

(ii) Si k es entero ($k \in Z$), entonces:

$$e^{2\pi ikx}.f(x) \sim \sum c_{n-k}\, e^{2\pi inx}; \tag{11}$$

(iii) Si r es real ($r \in R$) y f es periódica con período 1, entonces

$$f(x+r) \sim \sum (c_n\, e^{2\pi inr}).e^{2\pi inx} \tag{12}$$

[formalmente $\sum c_n\, e^{2\pi in(x+r)}$];

(iv) $$\overline{f(x)} \sim \sum \overline{c_{-n}}\, e^{2\pi inx} \tag{13}$$

(v) $$f(-x) \sim \sum c_{-n}\, e^{2\pi inx} \tag{14}$$

[formalmente, con $-n = m$: $f(-x) \sim \sum c_m\, e^{2\pi im(-x)}$].

b. De (3) [o sea, (3')] y

$$g(x) \sim \sum d_n\, e^{2\pi inx} \qquad \text{o sea:} \qquad (g(x),\, e^{2\pi inx}) = d_n \tag{15}$$

deducir

$$f(x)+g(x) \sim \sum (c_n+d_n)e^{2\pi inx}. \tag{16}$$

c. Llamemos *convolución* de f(x) y g(x) a la función $f * g$ tal que

$$(f * g)(x) = \int_0^1 f(t)g(x-t)dt. \tag{17}$$

Deducir de (3) [o sea, (3')] y (15), que

$$(f * g)(x) \sim \sum c_n d_n e^{2\pi inx}. \tag{18}$$

d. Sea $\tilde{g}$ la función definida por $\tilde{g}(x) = g(-x)$. Pongamos $f \# g = f * \tilde{g}$, o sea

$$(f \# g)(x) = \int_0^1 f(t).g(t-x)dt. \tag{19}$$

Deducir de (18) y a (v), que

$$(f \# g)(x) \sim \sum c_n d_n e^{2\pi inx}. \tag{20}$$

e. Deducir de (13) y (20) que

$$(f \# \overline{f})(x) = \int_0^1 f(t)\overline{f(t-x)}dt \sim \sum |c_n|^2.e^{2\pi inx}. \tag{21}$$

f. Verificar que si v es c.*ℓ.* de un conjunto *ortogonal* $\{u_r\}_{r\in I}$, es decir, existen escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ e índices $r_1, r_2, \ldots, r_n$ tales que $v = c_1 u_{r_2} + \ldots + c_n r_{u_n}$, entonces:

$$c_i = \frac{(v, u_{r_i})}{\|r_{u_i}\|^2}.$$

5.4. CONVERGENCIA DE LA s.F. EN UN ESPACIO DE HILBERT

5.4.0. En esta sección supondremos siempre que E es un espacio *de Hilbert separable*. Entonces (5.1.3) un conjunto ortonormal de E es finito o numerable.

5.4.1. TEOREMA

Sea $(\phi_n) = (\phi_1, \phi_2, \ldots)$ *un sistema ortonormal en* E. *La serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k$

es convergente en E, *es decir converge en norma la sucesión* $(f_n) = (\sum_{k=1}^{n} a_k\phi_k)$, *si y sólo si converge la serie de términos positivos* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$.

Además si $f_n \to f$, *entonces* $a_k = (f,\phi_k)$, *es decir, la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\phi_k$ *es s.F. de su suma* f.

Demostración

Si $m > n$ se tiene

$$\|f_m-f_n\|^2 = \left(\sum_{k=n+1}^{m} a_k\phi_k, \sum_{k=n+1}^{m} a_k\phi_k\right) = \sum_{k=n+1}^{m} |a_k|^2. \tag{1}$$

Entonces, para que(f_n) sea una sucesión fundamental en E es necesario y suficiente que para $m,n \to \infty$ el último miembro de (1) tienda a 0, pero esto ocurre si y sólo si $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ es convergente. Por otra parte, puesto que E es *completo* la sucesión (f_n) es convergente si y sólo si es una sucesión fundamental, y esto completa la demostración de la priemra parte.

Si $f_n \to f$ en E (o sea, $\|f_n-f\| \to 0$), por la continuidad del producto escalar (4.1.10 f) tenemos para $n > k$:

$$a_k = (f_n,\phi_k) \to (f,\phi_k) \text{ para } n \to \infty,$$

y como a_k no depende de n debe ser $a_k = (f,\phi_k)$.

5.4.2. TEOREMA

Sea (ϕ_n) *un sistema ortonormal en* E. *Para toda* $f \in E$, *su s.F.*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\cdot\phi_k \qquad \text{con} \qquad c_k = (f,\phi_k) \tag{2}$$

converge en E *(o sea, según la norma). Si su suma es* s, *entonces* f-s *es ortogonal a todas las* ϕ_n.

Demostración

De la desigualdad de Bessel (5.2.3) sigue que $\sum |c_n|^2$ es convergente (5.2.4 a (ii)). Entonces, por 5.4.1 converge la s.F. (2). Finalmente

$$(f-s,\phi_n) = (f,\phi_n)-(s,\phi_n) = c_n-c_n = 0$$

pues $(s,\phi_n) = c_n$ en virtud de la última parte del teorema de 5.4.1.

5.4.3. TEOREMA (Condición de representabilidad)

Sea (ϕ_n) *un sistema ortonormal en* E. *Para que un elemento* f *de* E *sea la suma de su s.F., o sea para que*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k.\phi_k \qquad \textit{con} \qquad c_k = (f,\phi_k) \tag{3}$$

es necesario y suficiente que f *pertenezca al subespacio cerrado* S^c *generado por el conjunto* $S = \{\phi_n\}$.

Demostración

La condición es necesaria pues si f está dada por (3) es $f \in S^c$. Supongamos ahora que $f \in S^c$ y sea s la suma de la serie $\sum a_k.\phi_k$ (que converge por 5.4.2). La diferencia $g = f-s$ pertenece a S^c y es ortogonal a todas las ϕ_n. *Veremos que* $g = \overline{0}$, *o sea* $f = s$.

En efecto, por ser g ortogonal a todas las ϕ_n es ortogonal al subespacio generado por ellas, y por la continuidad del producto escalar (4.1.10 f) también a su adherencia $\overline{S}$ que, por 3.6.3 es S^c. Puesto que también $g \in S^c$, es g ortogonal a sí misma: $(g,g) = 0$, y entonces, $g = \overline{0}$.

5.4.4. *Ejercicios*

a. Interpretar la última parte del teorema de 5.4.2 en la figura de 5.0.1 y con referencia al conjunto $\{\phi_1,\phi_2\}$.

b. Interpretar el teorema de 5.4.3 en el ejemplo de 5.0 y con referencia al conjunto $\{\phi_1,\phi_2\}$.

5.5. CONSTRUCCION DE SISTEMAS ORTONORMALES. EQUIVALENCIA

5.5.1. La demostración del teorema siguiente muestra cómo se puede construir una base ortonormal para el subespacio generado por los elementos de una sucesión.

TEOREMA

Dada una sucesión (f_n) *de elementos de* E *con* $f_n \neq \overline{0}$ *para algún* n, *existe un sistema ortonormal* (ϕ_n) *que genera el mismo subespacio cerrado que el conjunto* $\{f_n\}$.

Demostración

Determinemos por recurrencia: (i) Una subsucesión (f'_n) de (f_n) tal que $\{f'_n\}$ sea ℓ.i. y genere el mismo subespacio y el mismo subespacio cerrado que $\{f_n\}$; (ii) Un sistema ortonormal (ϕ_n) tal que para todo r$\{\phi_1,\ldots,\phi_r\}$ y $\{f'_1,\ldots,f'_r\}$ generen el mismo subespacio.

(i) Sea f'_1 el primer elemento no nulo de la sucesión (f_n), sea f'_2 el primer elemento de (f_n) que no sea ℓ.d. de $\{f'_1\}$ (es decir, que no sea múltiplo de f'_1),... Supuestos determinados los elementos $f'_1,\ldots,f'_k$ de la subsucesión, f'_{k+1} es el primer elemento de (f_n) que no sea ℓ.d. de $\{f'_1,\ldots,f'_k\}$.

(ii) Aplicaremos a la sucesion $(f'_1, f'_2,\ldots)$ el siguiente procedimiento recursivo, llamado *proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt* (J.P. Gram, 1883, E. Schmidt, 1907), que consiste en definir paso a paso dos sucesiones (g_n) y (ϕ_n) así:

$$g_1 = f'_1 \qquad \phi_1 = g_1/\|g_1\|;$$
$$g_2 = f'_2 - (f'_2,\phi_1)\phi_1, \qquad \phi_2 = g_2/\|g_2\|;$$
$$g_3 = f'_3 - (f'_3,\phi_1)\phi_1 - (f'_3,\phi_2)\phi_2, \qquad \phi_3 = g_3/\|g_3\|;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$g_{k+1} = f'_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (f'_{k+1},\phi_i)\phi_i, \qquad \phi_{k+1} = g_{k+1}/\|g_{k+1}\|;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Es inmediato verificar *sucesivamente* que

$$(\phi_1,\phi_1) = 1$$

$(g_2,\phi_1) = 0$ $\{\phi_1,\phi_2\}$ es ortonormal

$(g_3,\phi_1) = (g_3,\phi_2) = 0$ $\{\phi_1,\phi_2,\phi_3\}$ es ortonormal

....

$(g_{k+1},\phi_1) = \ldots = (g_{k+1},\phi_k) = 0$ $\{\phi_1,\phi_2,\ldots,\phi_{k+1}\}$ es ortonormal

....

El proceso para definir (g_n) y (ϕ_n) se corta si y sólo si el conjunto $\{f'_n\}$ es finito: definidos $g_1,\ldots,g_k$ y $\phi_1,\ldots,\phi_k$, se define g_{k+1} salvo en el caso de que la sucesión (f'_n) termine en f'_k.

Definido g_{k+1} no podría definirse ϕ_{k+1} si fuera $\|g_{k+1}\| = 0$, o sea $g_{k+1} = \overline{0}$. Pero en tal caso sería f'_{k+1} ℓ.d. de $\{\phi_1,\ldots,\phi_k\}$ y por tanto ℓ.d. de $\{f'_1,\ldots,f'_k\}$ lo que no es posible en virtud de (i).

5.5.2 DEFINICION

Dos sistemas ortonormales en un espacio prehilbertiano E *se llaman EQUIVALENTES si generan el mismo subespacio cerrado.*

5.5.3. Se puede demostrar (ver 5.5.4 b) que para que dos sistemas ortonormales (ϕ_n) y (ψ_n) sean equivalentes es necesario y suficiente que

$$\psi_k = \sum_{j=1}^{\infty} (\psi_k,\phi_j)\phi_j \qquad \text{y} \qquad \phi_k = \sum_{j=1}^{\infty} (\phi_k,\psi_j)\psi_j \tag{1}$$

o sea, con $c_{kj} = (\psi_k,\phi_j)$; $\psi_k = \sum c_{kj}\phi_j$, $\phi_k = \sum \overline{c_{jk}}\, \psi_j$.

5.5.4. *Ejercicios*

a. Ilustrar geométricamente el proceso de Gram-Schmidt si $\{f'_1, f'_2\}$ es ℓ.i. en R^2.

b. Demostrar la afirmación de 5.5.3 utilizando el teorema de representabilidad (5.4.3).

POLINOMIOS DE LEGENDRE (ejercicios c a ℓ).

c. Por ortogonalización del conjunto de funciones $\{1,x,x^2,x^3,x^4\}$ con el producto escalar

$$(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx, \tag{2}$$

obtener el conjunto

$$\{g_0 = 1,\ g_1 = x,\ g_2 = x^2 - \tfrac{1}{3},\ g_3 = x^3 - \tfrac{3}{5}x,\ g_4 = x^4 - \tfrac{6}{7}x^2 + \tfrac{3}{35}\}.$$

d. Demostrar que los polinomios $p_n(x)$ que se obtienen ortogonalizando el sistema

$$(1, x, x^2, \dots, x^n, \dots) \tag{3}$$

respecto del producto escalar

$$(f,g) = \int_a^b f(x).g(x)\,dx \tag{4}$$

son

$$p_n(x) = c_n \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \\ m_0 & m_1 & m_2 & \cdots & m_n \\ m_1 & m_2 & m_3 & \cdots & m_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{n-1} & m_{n-2} & m_{n-3} & \cdots & m_{2n-1} \end{vmatrix}, \tag{5}$$

siendo c_n constantes

$$m_r = \int_a^b x^r\,dx = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r+1} \quad (r = 0,1,2,\dots). \tag{6}$$

[*Indicación*. Si $p_k(x)/c_k = a_0 + a_1 x + \dots + a_k x^k$ es otro de estos determinantes, con $k < n$, es

$$(p_n(x), p_k(x)) = \int_a^b p_n(x)p_k(x)\,dx = c_n \sum_{j=0}^{k} a_j \int_a^b p_n(x)\,x^j\,dx$$

Por otra parte, multiplicando por x^j la primera fila del determinante en (5) e integrando, resultan determinantes nulos para $j = 0,1,\dots,k$.]

e. Con referencia a d, hallar los factores c_n en función de los momentos

m_r de modo que:

(i) Los polinomios $p_n(x)$ queden normalizados;

(ii) Sea $p_n(1) = 1$.

f. Con referencia a d:

(i) Probar que los polinomios $p_n(x)$ pueden expresarse (salvo un factor k_n) por

$$p_n(x) = k_n \frac{d^n}{dx^n} [(x-a)^n . (x-b)^n]. \qquad (7)$$

(ii) Hallar el factor k_n de modo tal que:

1°) Los polinomios $p_n(x)$ queden normalizados;

2°) Sea $p_n(b) = 1$.

g. Se llaman *polinomios de Legendre* los polinomios

$$P_0(x),\ P_1(x), \ldots, P_n(x), \ldots, [\,P_n(x) \text{ de grado } n\,],$$

obtenidos por ortogonalización de las funciones (3) respecto del producto escalar (2), y tales que $P_n(1) = 1$. Probar que se expresan por la *fórmula de Rodrigues*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n. \qquad (8)$$

h. Partiendo de la fórmula de Rodriguez (8) hallar la siguiente fórmula general de los polinomios de Legendre

$$P_n(x) = \sum \frac{(-1)^p}{2^n} \frac{(2n-2p)!}{p!(n-p)!(n-2p)!} x^{n-2p} \qquad (9)$$

donde la suma se extiende a todos los enteros p tales que $0 \leqslant n-2p \leqslant n$, o sea $0 \leqslant p \leqslant n/2$.

i. Probar que el polinomio de Legendre $P_n(x)$ es una función par o una función impar según sea el índice n par o impar.

j. Comparando los coeficientes de tres polinomios consecutivos resulta la siguiente *fórmula de recurrencia* :

$$nP_n(x) = (2n-1)xP_{n-1}(x)-(n-1)P_{n-2}(x), \tag{10}$$

válida para todo valor de x, y desde n = 2.

De (10) y $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, deducir las expresiones de P_2, P_3 y P_4.

k. Con el mismo método de j, de comparación de coeficientes, resulta esta *fórmula de recurrencia para la derivada* $P'_n(x)$:

$$(x^2-1)P'_n(x) = n\, xP_n(x)-nP_{n-1}(x). \tag{11}$$

Obtener de (11) las igualdades

$$P_n(1) = P_{n-1}(1), \qquad P_n(-1) = -P_{n-1}(-1), \tag{12}$$

y de aquí:

$$P_n(1) = 1, \qquad P_n(-1) = (-1)^n. \tag{13}$$

ℓ. Probar que el polinomio de Legendre $P_n(x)$ tiene n ceros reales, opuestos dos a dos, y todos ellos en el intervalo (-1,1).

[*Indicación*. Considerar los ceros de $(x^2-1)^n$ y aplicar reiteradamente el teorema de Rolle.]

5.6. SISTEMAS ORTONORMALES COMPLETOS

5.6.1. DEFINICION

Un conjunto ortonormal $\{\phi_n\}$ *se llama COMPLETO si no existe ningún otro conjunto ortonormal del cual sea parte propia.*

Se dice también: $\{\phi_n\}$ es un *conjunto ortonormal maximal.*

5.6.2.

En el espacio de Hilber ℓ_2 (4.3.3) de las sucesiones (x_i) tales que $\sum |x_i|^2 < \infty$, el conjunto de las sucesiones

$$x^k = (x_i^{(k)}) \text{ definidas por } x_i^{(k)} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k, \end{cases}$$

o sea, el conjunto

$$\{x^{(1)} = (1,0,0,\ldots), \quad x^{(2)} = (0,1,0,\ldots), \quad x^{(3)} = (0,0,1,0,\ldots),\ldots\} \tag{1}$$

es un conjunto ortonormal completo.

5.6.3. En todo espacio de Hilbert E, a cada conjunto ortonormal $\{\phi_n\}$ se asocian unívocamente otros objetos matemáticos: el subespacio cerrado generado por $\{\phi_n\}$, la asignación de c.F. y de una s.F. a cada elemento f de E, etc. El teorema siguiente establece condiciones equivalentes a la completitud de $\{\phi_n\}$, expresadas mediante esos objetos.

TEOREMA

Condición necesaria y suficiente para que un conjunto ortonormal $\{\phi_n\}$ verifique las seis condiciones siguientes, es que cumpla una cualquiera de ellas:

(i) $\{\phi_n\}$ *es completo;*

(ii) *Unicidad. Si* f *tiene nulos todos sus c.F., entonces* $f = \overline{0}$. *O sea*

$$c_n = (f,\phi_n) = 0 \quad \textit{para todo } n \Rightarrow f = \overline{0}; \tag{2}$$

(iii) *El subespacio cerrado* S *generado por* $\{\phi_n\}$ *es* E;

[O sea, $\{\phi_n\}$ es un conjunto total (3,6,4)];

(iv) *Toda* $f \in E$ *es la suma de su s.F.:*

$$f = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} c_i.\phi_i = \sum_{i=1}^{\infty} c_i.\phi_i \qquad \textit{con} \qquad c_i = (f,\phi_i); \tag{3}$$

(v) *Igualdad de Parseval. Para todo par* f,g *de elementos de* E *es*

$$(f,g) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i.\overline{d}_i \tag{4}$$

siendo c_i *y* d_i *los c.F. de* f *y de* g:

$$c_i = (f,\phi_i), \qquad d_i = (g,\phi_i); \tag{5}$$

(vi) *Teorema de Pitágoras-Parseval. Para todo* f *de* E *es*

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \qquad \textit{con} \qquad c_i = (f,\phi_i). \tag{6}$$

Demostración

Probaremos que cada una de estas condiciones implica la siguiente, y que (vi) $\Rightarrow$ (i). Con esto quedará probada la equivalencia de las seis.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Supongamos que $\{\phi_n\}$ es completo. Si existiera un $f \neq \overline{0}$ ortogonal a todos los ϕ_n, poniendo $\phi_0 = f/\|f\|$ vemos que $\{\phi_0\} \cup \{\phi_n\}$ es un conjunto ortonormal que incluye a $\{\phi_n\}$ como parte propia, contra lo supuesto.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Supongamos válida (ii). Para demostrar que $S = E$ probaremos que no hay ningún $f \notin S$. Si existiera un $f \notin S$, por 5.4.2 y 5.4.3 el elemento $s = \sum (f,\phi_i)\phi_i = \sum c_i\phi_i$ existe, y $s \in S$. Además $g = f-s$ es ortogonal a todos los ϕ_n; entonces, por (ii), es $g = 0$, o sea $f = s$; entonces $f \in S$ contra lo supuesto.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Si el subespacio cerrado generado por $\{\phi_n\}$ es E, entonces por 5.4.3, toda $f \in E$ se expresa en la forma (3).

(iv) $\Rightarrow$ (v). Si vale (iv), entonces para $f,g \in E$ es, con c_i y d_i dadas por (5):

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\cdot\phi_i = f_n \to f, \qquad \sum_{i=1}^{n} d_i\cdot\phi_i = g_n \to g \tag{7}$$

($\to$ indica convergencia en E, según la norma).

Por otra parte

$$(f_n,g_n) = \Big(\sum_{i=1}^{n} c_i\cdot\phi_i,\ \sum_{j=1}^{n} d_j\cdot\phi_j\Big) = \sum_i\sum_j c_i d_j(\phi_i,\phi_j)$$

pero en el último miembro para cada i sólo subsiste el término con $j = i$ y vale $c_i d_i$; por tanto

$$(f_n,g_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i\ d_i.$$

Entonces resulta de (7) por la continuidad del producto escalar (4.1.10 f):

$$(f,g) = \lim_{n\to\infty}(f_n,g_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} c_i d_i = \sum_{i=1}^{\infty} c_i d_i\ .$$

(v) $\Rightarrow$ (vi). Basta tomar $f = g$ en (v).

(vi) $\Rightarrow$ (i). Si $\{\phi_n\}$ no fuera completo existiría un elemento ϕ_0 tal que

$$(\phi_0,\phi_i) = 0 \qquad y \qquad \|\phi_0\| = 1. \tag{8}$$

Pero reemplazando f por ϕ_0 en (6) resulta por las primeras (8):

$$\|\phi_0\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |0|^2 = 0$$

en contradicción con la última (8).

5.6.4. El enunciado del teorema precedente requiere algunos comentarios.

a. Hemos titulado unicidad a la condición (ii).

Veamos que da respuesta *afirmativa* a la pregunta ¿está un elemento de E unívocamente determinado por su s.F.?

Si f_1 y f_2 tienen la misma s.F.:

$$f_1 \sim \sum c_n.\phi_n \qquad y \qquad f_2 \sim \sum c_n.\phi_n \tag{9}$$

es para todo n, si $f_1-f_2 = f$:

$$(f,\phi_n) = (f_1-f_2,\phi_n) = (f_1,\phi_n)-(f_2,\phi_n) = c_n-c_n = 0, \tag{10}$$

y entonces por (ii) resulta $f = \overline{0}$, o sea $f_1 = f_2$.

La equivalencia (i) $\Rightarrow$ (ii) se enuncia entonces así: la completitud del conjunto ortonormal $\{\phi_n\}$ equivale a que una serie $\sum a_n.\phi_n$ no puede ser s.F. de más de una función (aunque puede no serlo de ninguna, o sea, no ser s.F., ver 5.6.5 b.)

Ejemplo

En el espacio R^3 de las ternas ordenadas de números reales $x = (x_1,x_2,x_3)$, $y = (y_1,y_2,y_3)$ con el producto escalar $(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, y con referencia al conjunto ortonormal $S = \{\phi_1 = (1,0,0),\ \phi_2 = (0,1,0)\}$, los elementos diferentes (3,2,1) y (3,2,5) tienen la misma s.F., a saber: $3\phi_1 + 2\phi_2$ [cuya suma (3,2,0) no es igual a ninguno de los elementos dados]. Pero el conjunto ortonormal S no es completo pues es parte propia del conjunto ortonormal $T = \{\phi_1,\phi_2,\phi_3 = (0,0,1)\}$.

Con respecto a T los elementos dados tienen s.F. diferentes:

$$(3,2,1) \sim 3\phi_1+2\phi_2+\phi_3, \qquad (3,2,5) \sim 3\phi_1+2\phi_2+5\phi_3.$$

b. La primera igualdad en (3) se refiere a un límite según la norma de E, o sea, es

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \sum_{i=1}^{n} c_i.\phi_i\| = 0 \tag{11}$$

También hemos escrito la igualdad (3) en la forma

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} c_i.\phi_i \tag{12}$$

que en los espacios de Hilbert *de funciones*, como $C_2[a,b]$, debemos DISTINGUIR de

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i.\phi_i(x). \tag{13}$$

(13) agrupa infinitas igualdades numéricas, una para cada x, (12) significa (11), y ninguna es equivalente a

$$f \sim \sum c_i.\phi_i \qquad \text{ó} \qquad f(x) \sim \sum c_i.\phi_i(x) \tag{14}$$

que *no son igualdades* y significan que los c_i son los c.F. de f: $c_i = (f,\phi_i)$.

c. Sea $S = \{\phi_1,\phi_2,\phi_3,\ldots\}$ un conjunto ortonormal infinito en E, f un elemento de E y $c_i = (f,\phi_i)$ sus c.F. en S. Comparemos las relaciones

$$\|f\|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \qquad y \qquad \|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2. \tag{15}$$

La primera es la desigualdad de Bessel (ver (6) y (7) de 5.2); la segunda expresa el teorema de Pitágoras-Parseval y vale para toda f si y sólo si S es completo.

Formemos la diferencia

$$D_f = \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \geqslant 0 \tag{16}$$

y distingamos los casos $D_f = 0$ y $D_f > 0$.

(i) Si $D_f = 0$, para cada $\varepsilon > 0$ existe una suma finita $\sum^* |c_i|^2$ de términos de la serie $\sum |c_i|^2$, tal que

$$\|f\|^2 - \sum^* |c_i|^2 < \varepsilon \qquad \text{ó} \qquad \|f - \sum^* c_i.\phi_i\|^2 < \varepsilon \tag{17}$$

pues por la fórmula de Bessel (5) de 5.2.3 es

$$\|f - \sum^* c_i.\phi_i\|^2 = \|f\|^2 - \sum^* |c_i|^2. \tag{18}$$

La segunda (17) expresa que *f se aproxima tanto como se quiera en norma por c.ℓ. (finitas) de las* ϕ_i.

(ii) Si $D_f > 0$, para una c.ℓ. (finita) *cualquiera* de las ϕ_i tendremos por la propiedad de aproximación óptima de las c.F., (18) y (16):

$$\|f-\sum^* a_i.\phi_i\|^2 \geq \|f-\sum^* c_i.\phi_i\|^2 = \|f\|^2-\sum^*|c_i|^2 \geq \|f\|^2 - \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 = D_f > 0.$$

O sea, si $D_f > 0$, f no puede aproximarse en norma tanto como se quiera por c.ℓ. $\sum^* a_n.\phi_n$; en efecto, el error es siempre $\geq D_f$.

5.6.5. *Ejercicios*

a. Demostrar que en todo espacio de Hilbert separable E existe un sistema ortonormal completo

b. Mostrar que en un sistema ortonormal infinito numerable $(\phi_1,\phi_2,...)$, $\sum_{n=1}^{\infty} (1/\sqrt{n}).\phi_n$ no es s.F.

c. Con referencia al ejemplo de 5.6.4 a, decir cuáles de las siguientes fórmulas son verdaderas:

(i) En el conjunto ortonormal $S:(3,2,1) \sim 3\phi_1+2\phi_2$, $(3,2,1) = 3\phi_1+2\phi_2$;

(ii) En T: $(3,2,1) \sim 3\phi_1+2\phi_2$, $(3,2,1) \sim 3\phi_1+2\phi_2+\phi_3$, $(3,2,1) = 3\phi_1+2\phi_2+\phi_3$.

d. (i) Demostrar que si S es el subespacio cerrado de E generado por el conjunto ortonormal $\{\phi_i\}$ y $c_i = (f,\phi_i)$, es

$$\sum |c_i|^2 = \|P_S(f)\|^2, \tag{19}$$

donde $P_S(f)$ indica la proyeccion ortogonal de f sobre S (ver 4.2.4)

(ii) Deducir de aquí que $\|P_S(f)\| \leqslant \|f\|$.

e. Deducir de 5.6.4 c que el teorema de Pitágoras-Parseval equivale a que toda $f \in E$ se puede aproximar en norma tanto como se quiera por una c.ℓ. de las ϕ_i (equivalencia (vi) $\Leftrightarrow$ (iv) del teorema de 5.6.3).

f. Probar que el *sistema de H.Rademacher*

$$\phi_n(x) = \text{sg sen}(2^n \pi x), \qquad n = 1,2,\ldots$$

es en $C_2[0,1]$:

(i) ortonormal;

(ii) no completo.

Capítulo 6

SERIES DE FOURIER TRIGONOMETRICAS

6.1. FORMA COMPLEJA Y FORMA REAL

6.1.1. En 5.1.1 introdujimos en el espacio de Hilbert $C_2[0,1]$ el sistema ortonormal $(e^{2\pi inx})_{n\in Z}$ con $Z=\{0,\pm 1, \pm 2,\dots\}$ (enteros), y lo consideramos detenidamente en 5.3.2 y 5.3.4. Aquí nos referiremos al espacio de Hilbert $H = L_2[-\pi,\pi]$ de las funciones de cuadrado integrable en el intervalo $[-\pi,\pi]$ con el producto escalar

$$(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx. \tag{1}$$

En H, el sistema $\phi_n(x) = \dfrac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}$ con $n \in Z$ (enteros) es ortonormal (5.1.5.b).

Si $f(x) \in H$, su s.F es

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k . \phi_k(x), \quad con \quad c_k = (f,\phi_k), \tag{2}$$

o sea:

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}, \quad con \quad c_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} dx. \tag{3}$$

Suele escribirse (3) también así, poniendo

$$c'_k = \frac{c_k}{\sqrt{2\pi}}, \quad f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c'_k\, e^{ikx} \quad con \quad c'_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx. \tag{4}$$

6.1.2. En la serie de (4) agrupemos los términos en k y -k. Puesto que $e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t$ se tiene:

$$c'_k e^{ikx} + c'_{-k} e^{-ikx} = c'_k (\cos kx + i \operatorname{sen} kx) + c'_{-k}(\cos kx - i \operatorname{sen} kx) =$$

$$= (c'_k + c'_{-k}) \cos kx + i(c'_k - c'_{-k}) \operatorname{sen} kx.$$

Por tanto podemos escribir también:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx) \tag{5}$$

con

$$a_0 = 2c'_0, \quad a_k = c'_k + c'_{-k}, \quad b_k = i(c'_k - c'_{-k}) \tag{6}$$

o sea, teniendo presente la última (4) y que $\cos t = (e^{it} + e^{-it})/2$ y $\operatorname{sen} t = (e^{it} - e^{-it})/(2i)$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \tag{7}$$

y para $k = 1,2,\ldots$:

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ (e^{-ikx} + e^{ikx})dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\ dx \tag{7'}$$

$$b_k = \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ (e^{-ikx} - e^{ikx})\ dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx\ dx. \tag{7''}$$

O sea, notando que (7) y (7') admiten una expresión única válida para $k = 0,1,2,\ldots$ [por ello se llamó $a_0/2$ al término constante en (5)]:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\ dx; \qquad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx\ dx. \tag{8}$$

$$(k = 0,1,2,\ldots) \qquad\qquad (k = 1,2,\ldots)$$

6.1.3. La s.F en (3) se llama *s.F. trigonométrica* en forma *exponencial compleja*. Esta denominación se extiende a la serie en (4). La serie (5) se llama s.F. *trigonométrica* en forma *real*, y llamaremos C.F. a los coeficientes a_k, b_k, dados por (8).

Notemos que un sistema ortonormal en $[-\pi,\pi]$ es (5.1.5. e):

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}} \quad \frac{\text{sen } x}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\text{sen } nx}{\sqrt{\pi}}, \ldots, \tag{9}$$

de suerte que la denominación s.F. corresponde estrictamente a:

$$f(x) \sim \frac{A_0}{\sqrt{\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} + B_n \frac{\text{sen } nx}{\sqrt{\pi}}\right) \tag{10}$$

con los c.F.:

$$A_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, a_0, \tag{8'}$$

y para n = 1,2,....:

$$A_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\, dx = \sqrt{\pi}\, a_n, \qquad B_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\text{sen } nx}{\sqrt{\pi}}\, dx = \sqrt{\pi}\, b_n \tag{8''}$$

6.1.4. Convendremos en extender f(x) por periodicidad definiéndola en toda la recta real mediante

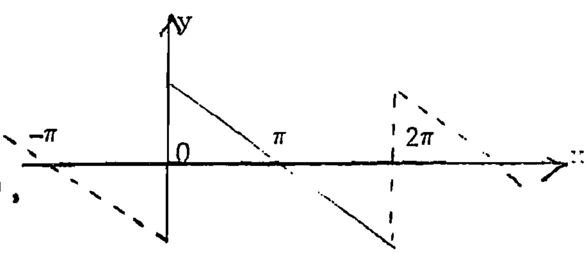
$$f(x + 2k\pi) = f(x). \tag{11}$$

Hecho esto, puesto que cos kx y sen kx tienen el período 2π , en las expresiones (8) de los c.F. se puede tomar como intervalo de integración uno cualquiera de longitud 2π.

6.1.5. *Ejemplo*

Hallar las s.F. de la función f(x) definida *en* $[0,2\pi]$ por

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2} \tag{12}$$



Se tiene

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2}\, dx = \frac{1}{2\pi}\left[\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{2\pi} = 0,$$

y para k > 0, integrando por partes:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi-x}{2}\cos kx\,dx = \frac{1}{2k\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} kx\,dx = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\pi-x}{2}\operatorname{sen} kx\,dx = \frac{1}{k} - \frac{1}{2k\pi}\int_0^{2\pi}\cos kx\,dx = \frac{1}{k}.$$

Por tanto:

$$\frac{\pi-x}{2} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} kx}{k} = \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \dots \qquad (13)$$

6.1.6. *Polinomios trigonométricos*

a. Se llama *polinomio trigonométrico* a toda suma finita de la forma

$$p(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k . e^{ikx}, \qquad (14)$$

que también se puede escribir, agrupando los términos en k y -k, en la forma real:

$$p(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{n} (A_k \cos kx + B_k \operatorname{sen} kx). \qquad (15)$$

Se dice que p(x) es de *grado n* si $c_n \neq 0$ ó $c_{-n} \neq 0$, o lo que es lo mismo, si $A_n \neq 0$ o bien $B_n \neq 0$.

b. Mediante la conocida *fórmula de Moivre*

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^k = \cos kx + i \operatorname{sen} kx$$

de la cual se deduce sucesivamente

$$(\cos x - i \operatorname{sen} x)^k = \cos kx - i \operatorname{sen} kx,$$

$$2 \cos kx = (\cos x + i \operatorname{sen} x)^k + (\cos x - i \operatorname{sen} x)^k,$$

$$2\, i \operatorname{sen} kx = (\cos x + i \operatorname{sen} x)^k - (\cos x - i \operatorname{sen} x)^k,$$

la forma real (15) muestra que un polinomio trigonométrico de grado n es un polinomio de grado n en sen x y cos x.

c. La forma exponencial (14) (y también la conclusión precedente) muestra que si p(x) es un polinomio trigonométrico de grado n, $[p(x)]^r$ $(r = 1,2,\dots)$

es un polinomio trigonométrico de grado r.n.

6.1.7. *Ejercicios*

a. Escribir la s.F.(5) en la forma $\sum c_n \phi_n$ con $\{\phi_n\}$ ortonormal, con expresión explícita de los c.F c_n.

b. Escribir la desigualdad de Bessel (5.2.3 y 5.2.4 a (ii)) para la s.F.(5).

c. Verificar que para la función $f(x) = x$ en $[-\pi, \pi]$, la s.F. en forma exponencial compleja es

$$x \sim i \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{(-1)^k}{k} e^{ikx}, \tag{16}$$

donde el acento indica que se omite el término correspondiente a $k = 0$, y que la s.F. en la forma real (5) es

$$x \sim 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\text{sen } kx}{k}. \tag{17}$$

d. Mostrar que un polinomio trigonométrico de grado n es producto de e^{-inx} por un polinomio de grado $\leq 2n$ en e^{ix}.

e. Expresar cos 3x y sen 3x como polinomios en cos x y sen x.

f. Probar que en (11) p(x) es real si y sólo si $c_{-k} = \overline{c_k}$ $(k = 0,1,2,\ldots)$.

g. Verificar que los coeficientes a_n, b_n de (5) son reales si y sólo si los c_k de (3) verifican $c_{-k} = \overline{c_k}$

h. Verificar que

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} \cdot e^{-inx}\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 2\pi & \text{si } m = n \end{cases} \tag{18}$$

(ver 5.1.5. b) equivale a

$$\int_{\gamma} z^{m-n-1}\, dz = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 2\pi i & \text{si } m = n \end{cases} \tag{19}$$

siendo γ la circunferencia unidad del plano complejo, dada por $\gamma(t) = 1.e^{it}$, $-\pi \leq t \leq \pi$.

i. Deducir de (18) las igualdades

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx.\cos nx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m \neq n \\ \pi & \text{si} \quad m = n \neq 0 \end{cases} \tag{20}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx.\operatorname{sen} nx\, dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad m \neq n \\ \pi & \text{si} \quad m = n \neq 0 \end{cases} \tag{21}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx.\operatorname{sen} nx\, dx = 0. \tag{22}$$

j. Si la función de variable compleja $f(z)$ es analítica en la corona $\{z | r_1 < |z| < r_2\}$, es desarrollable allí en serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} h_n.z^n, \tag{23}$$

absolutamente convergente, de coeficientes

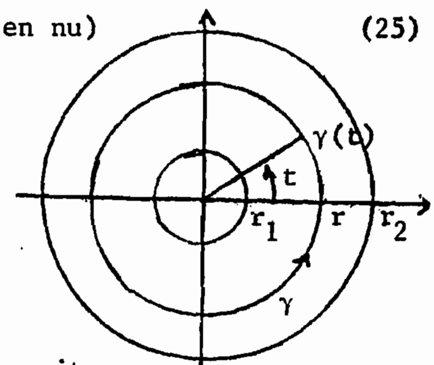
$$h_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}\, d\zeta \tag{24}$$

siendo γ un circuito $\gamma(t) = r\, e^{it}$, $(-\pi \leqslant t \leqslant \pi)$ con $r_1 < r < r_2$. Demostrar que en tal caso es

$$f(r.e^{iu}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nu + b_n \operatorname{sen} nu) \tag{25}$$

con

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(r\, e^{it})dt, \quad (26)$$



y para n entero positivo:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(r.e^{it})\cos nt\, dt; \qquad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(r.e^{it})\operatorname{sen} nt\, dt; \tag{27}$$

(es decir, los c.F. de $g(u) = f(r.e^{iu})$).

k. Sean $x_0, x_1, \ldots, x_n$ números complejos cualesquiera, con $x_0 \neq 0 \neq x_n$. La expresión

$$p(z) = |x_0 + x_1 z + x_2 z^2 + \ldots + x_n z^n|^2 \tag{28}$$

con

$$z = e^{i\phi} \tag{29}$$

es un polinomio no negativo de grado n en ϕ. Hallar sus coeficientes.

ℓ. Sea

$$p(\phi) = \sum_{\nu=0}^{n} (\lambda_\nu \cos \nu\phi + \mu_\nu \operatorname{sen} \nu\phi)$$

un polinomio trigonométrico no negativo de grado n y término constante 1:

$$\lambda_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(\phi)\, d\phi = 1.$$

Probar que

$$\lambda_n^2 + \mu_n^2 \leqslant 1$$

con = sólo para $p(\phi) = 1 + \cos n(\phi-\phi_0)$. (Fejer)

m. Sea $x = \cos \phi$. Probar que

$$T_n(x) = \cos n\phi = \cos n\,(\operatorname{arc}\cos x) \tag{30}$$

es un polinomio de grado n en x (*polinomio de Chebychev*).

Entonces también lo es

$$U_n(x) = \frac{1}{n+1}\, T'_{n+1}(x) = \frac{\operatorname{sen}(n+1)\phi}{\operatorname{sen}\,\phi}, \qquad (n = 0,1,2,\ldots). \tag{31}$$

Indicación: Se usa

$$(\cos\phi + i \operatorname{sen}\phi)^n = \cos n\phi + i \operatorname{sen} n\phi. \tag{32}$$

n. Con referencia a p determinar los ceros de T_n y U_n, y constatar que son reales, diferentes, y están en (-1,1).

o. Probar que los polinomios de Chebychev (30) verifican las relaciones de ortogonalidad

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, T_m(x).T_n(x)\ dx = 0\ , \ (m.n = 0,1,2,\ldots;\ \ m \neq n). \tag{33}$$

p. Probar que:

(i) Es $|T_n(x)| \leqslant 1 \qquad |U_n(x)| \leqslant n+1 \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ n = 1,2,\ldots \end{cases}$ (34)

(ii) En las primeras (34) vale el signo = en n+1 puntos: los n-1 ceros de $U_{n-1}(x)$, x = -1 y x = 1;

(iii) En las segundas (34) vale el signo = sólo para x = -1 y x = 1.

6.2. REPRESENTACION DE UNA FUNCION POR SU S.F.

6.2.1. Una función f(x) *es representable* por su s.F.

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \tag{1}$$

si: (i) la serie es convergente; (ii) Su suma S(x) coincide con f(x). En tal caso puede reemplazarse ∿ por = en (1).

A una serie de $-\infty$ a ∞ como (1) la interpretaremos en el sentido siguiente: *Se dice que la serie* $\sum_{k=-\infty}^{\infty}$ *CONVERGE con SUMA s, y se anota*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k = s \tag{2}$$

si existe $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} u_k$ *y es igual a* s. (3)

6.2.2. He aquí un caso muy importante en que esto ocurre para todo x de $[-\pi,\pi]$. Si es

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \quad \textit{y la serie converge UNIFORMEMENTE en } [-\pi,\pi], \tag{4}$$

entonces (por 5.6.3 c) la serie es la s.F. de su suma

$$S(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}, \quad \text{es decir:} \quad S(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \tag{5}$$

y puesto que (por ser completo el sistema trigonométrico, como veremos en 6.3.3.) si dos funciones tienen la misma s.F son iguales, por (4) y la segunda (5) es f(x) = S(x) y entonces la primera (5) muestra que vale (3) para todo x.

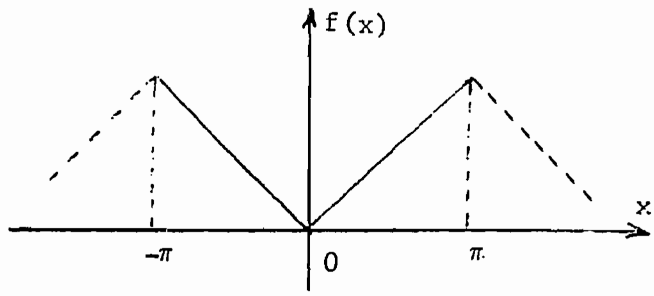
6.2.3. *Ejemplos*

a. Hallemos la s.F. en forma real (6.1.2):

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx) \qquad (6)$$

de la función f definida así:

$$f(x) = |x| \text{ para } -\pi \leqslant x \leqslant \pi \qquad (7)$$



o sea

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{para} \quad -\pi \leqslant x \leqslant 0 \\ x & \text{para} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi . \end{cases} \qquad (8)$$

Los c.F. (8) de 6.1.2 son:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-\pi}^{0} (-x)\,dx + \int_{0}^{\pi} x\,dx \right\} = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x\,dx = \pi,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos kx\,dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \cos kx\,dx = \frac{2}{\pi} \left[x \frac{\operatorname{sen} kx}{k} \right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} kx}{k}\,dx =$$

$$= 0 + \frac{2}{\pi} \left[\frac{\cos kx}{k^2} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k^2} (\cos k\pi - 1) = \begin{cases} -4/(\pi k^2) & \textit{si} \quad k \quad \textit{es impar} \\ 0 & \textit{si} \quad k \quad \textit{es par} \end{cases}$$

y análogamente se halla

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \operatorname{sen} kx\,dx = 0.$$

Reemplazando en (6) se tiene:

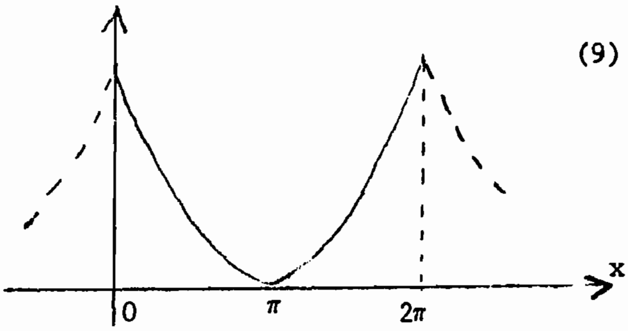
$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \ldots \right], \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi. \qquad (7)$$

Puesto que la serie *converge uniformemente* [por tener la mayorante convergente $\frac{4}{\pi} (1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots)$] se puede sustituir $\sim$ por $=$, y se tiene

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \dots\right] \qquad SI \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi. \tag{8}$$

Para x = 0 se obtiene de (8) la célebre relación para el cálculo de π por una serie:

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \tag{9}$$



b. Hallar la s.F. de

$$f(x) = \left(\frac{\pi - x}{2}\right)^2 \text{ en } [0, 2\pi] \tag{10}$$

Es

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2 dx = \frac{-2}{3}\left[\left(\frac{\pi-2}{2}\right)^3\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi^2}{6}$$

y para $k > 0$ se obtiene, integrando por partes:

$$a_k = \frac{1}{k^2}, \quad b_k = 0.$$

Por consiguiente:

$$\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2 \sim \frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}. \tag{11}$$

Puesto que la serie converge uniformemente (por tener la mayorante convergente $\sum 1/k^2$) se puede sustituir $\sim$ por $=$, y se tiene:

$$\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}. \tag{12}$$

Para x = 0 se obtiene la fórmula debida a Euler:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{13}$$

6.2.4. En 6.1.5. vimos que

$$\frac{\pi - x}{2} \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} kx}{k} \quad \text{en} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi. \tag{14}$$

Probaremos que la serie es convergente, y representa la función en el intervalo *abierto* $(0,2\pi)$.

a. Puesto que la serie (10) es la parte imaginaria de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k}$ probemos la convergencia de ésta. Con los polinomios

$$p_k(x) = \sum_{j=1}^{k} e^{ijx}$$

se tiene:

$$\sum_{k=m}^{n} \frac{e^{ikx}}{k} = \sum_{k=m}^{n} \left[p_k(x) - p_{k-1}(x)\right] \frac{1}{k} = \sum_{k=m}^{n} p_k(x)\left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] + \frac{p_n(x)}{n+1} - \frac{p_{m-1}(x)}{m}$$

y como (ver 6.2.10 b) $|p_k(x)| \leqslant 1/\text{sen}\,(x/2)$, se tiene:

$$\left|\sum_{k=m}^{n} \frac{e^{ikx}}{k}\right| \leqslant \frac{1}{\text{sen}(x/2)}\left[\frac{1}{m} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m}\right] = \frac{2}{m.\,\text{sen}(x/2)}$$

y, puesto que para $m \to \infty$ el último miembro tiende a cero uniformemente en cada intervalo $[\delta, 2\pi - \delta]$ con δ tal que $0 < \delta < \pi$, la serie (10) converge en $[0,2\pi]$ (pues obviamente converge en $x = 0$ y en $x = 2\pi$) y la convergencia **es uniforme en cada intervalo $[\delta, 2\pi - \delta]$ $(0 < \delta < \pi)$.**

b. Pero notemos que (14) se obtiene, salvo el signo, por derivación término a término en (12). La convergencia uniforme probada en a muestra que esta derivación término a término es legítima en cada intervalo $[\delta, 2\pi - \delta]$ y por tanto en el intervalo abierto $(0,2\pi)$. O sea:

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{sen}\, kx}{k} \qquad \textit{si} \qquad 0 < x < 2\pi. \tag{15}$$

(15) da un ejemplo de serie trigonométrica convergente para todo x, que no representa una función continua.

6.2.5. Si f es una función absolutamente integrable sus c.F. verifican

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \tag{16}$$

debido a la convergencia de la serie (confr.5.2.4. a):

$$\sum \left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right).$$

Veremos en 6.2.7. y 6.2.8. que si la función f(x) cumple ciertas condiciones se puede dar más precisión a la propiedad (16) asegurando una determinada velocidad de la convergencia a cero de los c.F. Si ésta asegura la convergencia uniforme de la s.F., tendremos como corolario que la s.F. representa a la función.

6.2.6. Recordemos que una función f(x) se llama *de variación acotada* en $[a,b]$ si para toda partición de $[a,b]$:

$$\pi:\ a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b,$$

la correspondiente "variación de f en π":

$$V(f;\pi) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \tag{17}$$

cumple $V(f;\pi) \leq M$ donde M es una constante independiente de la partición π.

Toda función de variación acotada es acotada.

Vale el siguiente *TEOREMA DE JORDAN*:

La función real f(x) *es de variación acotada en* $[a,b]$ *si y sólo si se puede expresar como diferencia de dos funciones no decrecientes.*

De aquí sigue que en todo punto $c \in [a,b]$ existen los límites laterales

$$f(c+0) = \lim_{x\to 0,\, x>0} f(c+x)\ ,\qquad f(c-0) = \lim_{x\to 0,\, x<0} f(c+x)$$

y además existen $f(a+0)$ y $f(b-0)$.

Por tanto f(x) sólo puede tener discontinuidades de primera especie.

6.2.7. TEOREMA

Si f(x) *es de variación acotada en* $[-\pi,\pi]$, *las sucesiones* $(k.a_k)$ *y* $(k.b_k)$ *son acotadas.*

Demostración

En virtud del teorema de Jordan (6.2.6.) basta demostrar el teorema para f(x) no creciente, y también podemos suponer $f(x) > 0$ pues de lo contrario consideraríamos la función $f(x) + c$ con una constante c conveniente.

Entonces, por el segundo teorema del valor medio (3.4.4 h) para cada k existe un número ξ_k en $(-\pi,\pi)$, tal que

$$a_k = \frac{f(-\pi)}{\pi}\int_{-\pi}^{\xi_k} \cos kx\, dx \quad \therefore \quad k|a_k| \leqslant \frac{f(-\pi)}{\pi} \qquad (k>0)$$

y análogamente para los b_k.

6.2.8. TEOREMA

Sea f(x) continua en el intervalo abierto $(-\pi,\pi)$, derivable "a trozos" (es decir, salvo en un número finito de puntos) y con derivada absolutamente integrable. Entonces los c.F. verifican

$$\lim_{k\to\infty} k.a_k = 0, \qquad \lim_{k\to\infty} k.b_k = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{\pi}. \tag{18}$$

Demostración

De (8) de 6.1.2 resulta por integración por partes

$$a_k = -\frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \operatorname{sen} kx\, dx,$$

$$b_k = \frac{f(-\pi+0) + f(\ -0)}{k\pi} + \frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos kx\, dx,$$

y las integrales tienden a cero para $k \to\infty$ en virtud de (16) aplicada a la función absolutamente integrable $f'(x)$.

6.2.9. De los teoremas de 6.2.7 y 6.2.8 resultan otras consecuencias de interés:

COROLARIO 1

Si f(x) es derivable y con f'(x) de variación acotada, las sucesiones (k^2a_k) y (k^2b_k) son acotadas, es decir, existe un número $H>0$ tal que

$$|a_k| < \frac{H}{k^2}, \qquad |b_k| < \frac{H}{k^2}. \tag{19}$$

De aquí resulta:

COROLARIO 2

Si f(x) *tiene derivada* f'(x) *de variación acotada, su s.F. converge uniformemente y la representa.*

En efecto, por (19) la s.F. converge uniformemente por tener la mayorante convergente $\sum 2H/k^2$, y entonces su suma es f(x).

COROLARIO 3

Si f(x) *tiene derivada segunda* f"(x) *continua en* $[-\pi,\pi]$ *su s.F. converge uniformemente y la representa.*

En efecto, en tal caso f'(x), por tener derivada acotada, es de variación acotada, y se aplica el corolario 2.

6.2.10. *Ejercicios*

a. De (14) obtener la serie de Leibniz para π:

$$\pi = 4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots). \tag{20}$$

b. Usando la expresión de la suma de una progresión geométrica verificar que para

$$p_k(x) = \sum_{j=1}^{k} e^{ijx} \qquad \text{es} \qquad |p_k(x)| \leqslant 1/\text{sen}\,(x/2).$$

c. Deducir de 6.2.5 que si f(x) es absolutamente integrable, es

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \text{sen}(n + \tfrac{1}{2})x\ dx = 0. \tag{21}$$

Nota. (16) y (21) son casos particulares de un teorema de Riemann-Lebesgue que establece para toda f(x) absolutamente integrable y para r con valores reales cualesquiera, que:

$$\lim_{r\to\infty} \int_a^b f(x)\ \cos\ rx\ dx = \lim_{r\to\infty} \int_a^b f(x)\ \text{sen}\ rx\ dx = 0. \tag{22}$$

d. Probar que si f es de variación acotada en [a,b] sólo puede tener un número finito o numerable de discontinuidades (de primera especie, 6.2.6).

6.3. TEOREMAS DE WEIERSTRASS Y COMPLETITUD

6.3.1. TEOREMA

Si $f(x)$ *es continua en* $[-\pi,\pi]$ *y* $f(-\pi) = f(\pi)$, *para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un polinomio trigonométrico*

$$T(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (A_k \cos kx + B_k \operatorname{sen} kx) \tag{1}$$

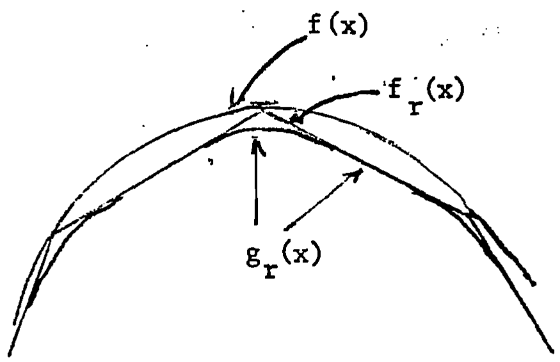
tal que, para todo x de $[-\pi,\pi]$:

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon. \tag{2}$$

Demostración

Dividamos el intervalo $[-\pi,\pi]$ en r partes iguales por los puntos $x_k = -\pi + \frac{2k\pi}{r}$, $(k = 0,1,2,\ldots,r)$, y consideremos la quebrada $y = f_r(x)$ de vértices $(x_k, f(x_k))$. Por la continuidad uniforme de $f(x)$, dado $\varepsilon > 0$ existe r_0 tal que, para todo x:

$$r > r_0 \Rightarrow |f(x)-f_r(x)| < \varepsilon/2. \tag{3}$$



Inscribiendo en cada vértice de la quebrada un arco conveniente puede obtenerse una función $g_r(x)$ *con derivada segunda continua* y que cumpla la misma condición (3) que $f_r(x)$, o sea, para $r > r_0$:

$$|f(x)-g_r(x)| < \varepsilon/2. \tag{4}$$

Por 6.2.9 corolario 3, $g_r(x)$ es la suma de su s.F. que es uniformemente convergente. Si $T(x)$ es una suma parcial de esa serie tal que sea

$$|g_r(x) - T(x)| < \varepsilon/2,$$

de aquí y (4) se deduce (2).

6.3.2. Del teorema anterior, llamado teorema de Weierstrass de aproximación uniforme por polinomios trigonométricos se deduce el siguiente célebre teorema de Weierstrass de aproximación uniforme por polinomios:

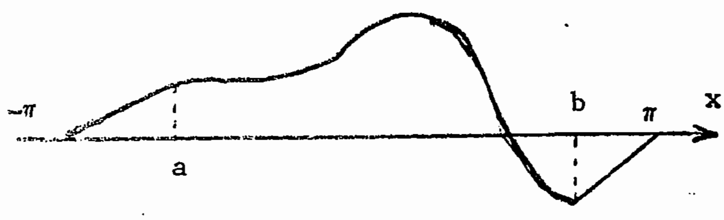
TEOREMA

Si $f(x)$ *es continua en un intervalo cerrado* $[a,b]$, *para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un polinomio* $P(x)$ *tal que, para todo* x *de* $[a,b]$:

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon. \tag{5}$$

Demostración

Por un cambio lineal de variables puede lograrse que $-\pi < a < b < \pi$. Prolongando la gráfica de $f(x)$ con los segmentos $(-\pi,0)(a,f(a))$ y $(b,f(b))(\pi,0)$ se obtiene una función a la que puede aplicarse el teorema de 6.3.1. Entonces existe un polinomio trigonométrico que verifica



$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon/2 \tag{6}$$

para todo x de $[a,b]$.

La serie de Taylor de centro 0 de dicho polinomio trigonométrico tiene radio de convergencia infinito, por tanto converge uniformemente en $[a,b]$ y entonces existe uns suma parcial $P(x)$, que es un polinomio, tal que

$$|T(x) - P(x)| < \varepsilon/2.$$

Finalmente, de aquí y (6) se deduce (5).

6.3.3. *La completitud del sistema ortonormal trigonométrico.*

a. El teorema de 5.6.3 da la equivalencia de la completitud de un conjunto ortonormal $\{\phi_n\}$ (i), la unicidad (ii), etc. Es decir establece una *equivalencia mutua* entre varias propiedades de fundamental importancia: basta demostrar una de ellas para que quedan probadas todas. Pero hasta ahora no lo hemos hecho para ningún sistema ortogonal infinito. Esto es lo que hacemos aquí para el sistema trigonométrico.

b. TEOREMA

En el espacio de Hilbert $E = I_2[-\pi,\pi]$ *de las funciones de cuadrado integrable en* $[-\pi,\pi]$, *el conjunto ortonormal* $\{e^{inx}/\sqrt{2\pi}\}_{n\in Z}$ *con* $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ *(enteros) es completo.*

En virtud del teorema de 5.6.3, este teorema equivale a una cualquiera de las proposiciones siguientes:

(ii) *Si* $f \in I_2[-\pi,\pi]$ *y tiene nulos todos sus* c.F., entonces $f = \overline{0}$, es decir, pertenece a la clase de $\overline{0}$, (ver 3.4.5) , donde $\overline{0}$ es la función dada por $\overline{0}(x) = 0$ para todo x.

(iii) El subespacio cerrado generado por $\{e^{inx}/\sqrt{2\pi}\}_{n\in Z}$ es todo $E = I_2[-\pi,\pi]$.

(iv) Toda función $f \in E$ es la suma de su s.F. en la convergencia según la norma de E, o sea:

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{k=-n}^{n} c_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \right\|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \sum_{k=-n}^{n} c_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \right|^2 dx = 0 . \tag{7}$$

(v) *Igualdad de Parseval.* Para todo par f,g de funciones de cuadrado integrable en $[-\pi,\pi]$ es

$$(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \overline{g(t)}\, dt = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c_i\, \overline{d_i} \tag{8}$$

siendo v_i y d_i los c.F. de f y de g.

(vi) *Igualdad de Pitágoras-Parseval.* Para toda función f de cuadrado integrable en $[-\pi,\pi]$ es $\|f\|^2 = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |c_i|^2$ con $c_i = (f,\phi_i)$, o sea:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |c_i|^2 \quad \text{con} \quad c_i = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{e^{-int}}{\sqrt{2\pi}}\, dt \tag{9}$$

c. *Demostración del teorema*

Probaremos la condición equivalente (vi), o sea la igualdad de Pitágoras-Parseval (9).

La fórmula de Bessel (5.2.3) da, poniendo $S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$;

$$\|f - S_n\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt - \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \tag{10}$$

y entonces (9) equivale a

$$\|f - S_n\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2 \, dx \to 0 \quad \text{para } n \to \infty \tag{11}$$

o sea (9) equivale a que *los polinomios trigonométricos* $S_n(x)$ *DE FOURIER aproximan a* $f(x)$ *en media cuadrática tanto como se quiera.*

Para demostrar esto, en virtud de la propiedad de aproximación óptima (5.2.2) basta probar que: *si* $f(x)$ *es una función de cuadrado integrable en* $[-\pi,\pi]$ *existe una sucesión* $T_n(x)$ *de polinomios trigonométricos que converge en media cuadrática hacia* $f(x)$.

(i) Ahora bien, esto vale si $f(x)$ es *continua* en virtud del teorema de Weierstrass de 6.3.1 pues una sucesión *uniformemente* convergente hacia $f(x)$ converge en media hacia $f(x)$.

(ii) Sea ahora $f(x)$ *real* y propiamente integrable en $[-\pi,\pi]$, y $|f(x)| \leq M$. Dividamos $[-\pi,\pi]$ en r intervalos iguales por los puntos $x_k = -\pi + \frac{2k\pi}{r}$, $(k = 0,1,\ldots,r)$ y sea

$$m_k^{(r)} = \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x). \tag{12}$$

Por definición de integral de Riemann (ver 3.4.1) es

$$\lim_{r\to\infty} \sum_{k=1}^{r} m_k^{(r)} (x_k - x_{k-1}) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx. \tag{13}$$

La suma bajo el límite es la integral $\int_a^b g_r(x)dx$ de la función escalonada $g_r(x)$ definida por

$$g_r(x) = m_k^{(r)} \qquad \text{si} \qquad x_{k-1} < x < x_k.$$

A su vez, cada $g_r(x)$ se puede reemplazar por una función $h_r(x)$ *continua*, con $h_r(-\pi) = h_r(\pi)$, que cumpla también

$$h_r(x) \leqslant f(x), \qquad |h_r(x)| \leqslant M$$

y tal que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} h_r(x)dx \to \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad \text{para} \qquad x \to \infty,$$

y por consiguiente:

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)-h_r(x)]^2 dx \leqslant 2M \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)-h_r(x)]dx \to 0 \qquad \text{para} \qquad r \to \infty. \tag{14}$$

Sean $S_n^{(r)}(x)$ las sumas parciales de la s.F. de $h_r(x)$. Entonces para cada r es en virtud de (i)

$$\int_{-\pi}^{\pi} [h_r(x) - S_n^{(r)}(x)]^2 dx \to 0 \qquad \text{para} \qquad n \to \infty. \tag{15}$$

Finalmente, aplicando sucesivamente la propiedad de aproximación óptima (5.2.2) y la desigualdad de Minkowski (3.2.4 b) se tiene:

$$\left\{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)-S_n(x)]^2 dx\right\}^{1/2} \leqslant \left\{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)-S_n^{(r)}(x)]^2 dx\right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)-h_r(x)]^2 dx\right\}^{1/2} + \left\{\int_{-\pi}^{\pi} [h_r(x)-S_n^{(r)}(x)]^2 dx\right\}^{1/2}$$

y de aquí se deduce, por (14) y (15):

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 dx \to 0 \qquad \text{para} \qquad n \to \infty. \tag{16}$$

(iii) Sea ahora f(x) una función de cuadrado integrable.

Entonces (ver 3.4.2 c) existe una sucesión de funciones $h_r(x)$ propiamente integrables, tal que

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - h_r(x)]^2 dx \to 0 \qquad \text{para} \qquad r \to \infty \tag{14'}$$

y la demostración prosigue como en el tramo de (14) a (16).

6.4. *Convergencia puntual*

6.4.1. La completitud del sistema trigonométrico $(e^{inx}/\sqrt{2\pi})_{n\in Z}$ asegura (ver 6.3.3.a (iv)) que la s.F. de una función $f \in I_2[-\pi,\pi]$ *converge hacia* f *según la norma de* I_2:

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} = \lim \sum_{k=-n}^{\infty} c_k \cdot \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \quad \textit{EN } I_2. \tag{1}$$

Pero esto equivale a (7) de 6.3.3. o sea:

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{k=-n}^{n} c_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \right\|^2 = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \sum_{k=-n}^{n} c_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \right|^2 dx = 0, \tag{2}$$

o sea a la convergencia en media de orden 2 en el intervalo $[-\pi,\pi]$. Entonces la primera igualdad (1) tiene un sentido *global* en el intervalo $[-\pi,\pi]$, no se refiere a ningún valor particular x de éste y no puede sustituirse sin más por la igualdad puntual (o sea referida a cada punto x de $[-\pi,\pi]$):

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \tag{3}$$

que tiene este otro significado: para el valor x que se considera, converge la serie *numérica* del segundo miembro, y su suma es el *número* f(x).

6.4.2. Ahora nos planteamos precisamente este problema (confr. 6.2.1.). *Fijado un* x del intervalo $[-\pi,\pi]$:

P_1. *¿Es convergente la serie numérica* $\sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}/\sqrt{2\pi}$?

Y si tal cosa ocurre:

P_2. *¿Coincide su suma con el valor* f(x) *de* f *en* x?

Si y sólo si las respuestas son ambas afirmativas se puede reemplazar—para ese x— la igualdad (1) por (3).

6.4.3. *Ejemplos*

a. En los ejemplos a y b de 6.2.3. este reemplazo de $\sim$ por $=$ puede hacerse *para todo* x de $[-\pi,\pi]$ y de $[0,2\pi]$ respectivamente.

b. La serie

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx + \dots \tag{4}$$

no solo no representa ninguna función pues no converge para ningún x real, sino que tampoco es s.F. pues los coeficientes son $a_n = 1$ y $b_n = 0$, y no cumple la condición $\lim a_n = 0$ (ver 6.2.5).

No obstante, las sumas parciales de (4) se mantienen uniformemente acotadas en cada subconjunto de $[-\pi,\pi]$ que excluya un entorno de $x = 0$. Ello resulta de la expresión

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})x}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} x}, \tag{5}$$

que puede demostrarse a partir de la siguiente suma de una progresión geométrica de razón e^{ix}:

$$\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \frac{e^{-inx} - e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} = \frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})x} - e^{i(n+\frac{1}{2})x}}{e^{-i\frac{1}{2}x} - e^{i\frac{1}{2}x}}. \tag{6}$$

En efecto, agrupando términos en k y -k se ve que el primer miembro de (6) es $D_n(x)$ y el último es $\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})x \,/\, \operatorname{sen}\frac{1}{2}x$ pues $e^{-it} - e^{it} = -2i \operatorname{sen} t$.

6.4.4. *Integral de Dirichlet*

Para ver si la s.F.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx) \tag{7}$$

converge para un x dado en $[-\pi,\pi]$, y si lo hace hacia f(x), debemos ver si

existe $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$, y si $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$, (8)

siendo $S_n(x)$ la *suma parcial* de

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx). \tag{9}$$

Procuremos expresar esta suma parcial en una forma más manejable y que muestre su relación con f(x). Para ello reemplacemos en (9) los c.F. a_k, b_k por sus expresiones (8) de 6.1.2.:

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1} \cos kx \int_{-\pi}^{\pi}[f(t)\cos kt\,dt + \operatorname{sen} kx \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\operatorname{sen} kt\,dt]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\cos kx \,.\, \cos kt + \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} kt)\right] dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(x-t)\right]dt,$$

o sea, en virtud de (5):

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(x-t)\,dt \tag{10}$$

con

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})t}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}. \tag{11}$$

El segundo miembro de (10) se llama *integral de Dirichlet* y la función (11) *núcleo de Dirichlet*. Tanto S_n como D_n son funciones periódicas de período 2π ; extendiendo f(t) por periodicidad mediante $f(t-2k\pi) = f(t) (-\pi \leqslant t \leqslant \pi)$ se obtiene de (10) con el cambio de variables $u = x-t$

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\, D_n(u)\, du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x-u)\, D_n(u)\, du + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-u)\, D_n(u)\, du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+t)\, D_n(-t)\, dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-t)\, D_n(t)\, dt, \tag{12}$$

y de aquí resulta, puesto que $D_n(-t) = D_n(t)$:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+t) + f(x-t)]\, D_n(t)\, dt. \tag{13}$$

6.4.5. *Condición de convergencia*

Para la función constante $f(x) = 1$ es $a_0 = 2$, $a_k = b_k = 0$ $(k = 1,2,\dots)$; por tanto $S_n(x) = 1$ y resulta de (13)

$$1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} D_n(t)\,dt. \tag{14}$$

Fijado un x, la s.F. (6) converge con suma $S(x)$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$, o sea, si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty}[S_n(x) - S(x)] = 0\,, \tag{15}$$

Pero, en virtud de (13) y (14), es

$$S_n(x) - S(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t) + f(x-t) - 2S(x)]\,D_n(t)\,dt. \tag{16}$$

Entonces, *para cada x la s.F converge con suma* $S(x)$ ***si y sólo si***

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}[f(x+t) + f(x-t) - 2S(x)]\,D_n(t)\,dt = 0\,. \tag{17}$$

6.4.6. *El teorema de localización de Riemann*

LEMA

Sea $f(x)$ *absolutamente integrable en* $[-\pi,\pi]$ *y* δ *un número tal que* $0<\delta<\pi$. *Entonces:*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\delta}^{\pi}[f(x+t) + f(x-t)]\,D_n(t)\,dt = 0. \tag{18}$$

Demostración

Fijado x definamos en $[-\pi,\pi]$ una función g por:

$$g(t) = 0 \quad \text{si } |t| < \delta, \quad g(t) = \frac{f(x-t)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t} \quad \text{si} \quad \delta \leqslant |t| \leqslant \pi.$$

Entonces $g(t)$ es absolutamente integrable, es

$$\int_{\delta}^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)]\, D_n(t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \text{ sen } (n + \frac{1}{2})t\, dt$$

y se aplica 6.2.10 c.

TEOREMA DE LOCALIZACION

Sea $f(x)$ *absolutamente integrable en* $[-\pi,\pi]$ *y* $x \in [-\pi,\pi]$. La *s.F. de* f *converge en* x *si y sólo si existe un número* δ *con* $0 < \delta < \pi$, *tal que exista el límite*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{0}^{\delta} [f(x+t) + f(x-t)]\, D_n(t)\, dt \,. \tag{19}$$

Además, si el límite existe es igual a la suma de la serie en x.

Demostración

En virtud de (13) y (18), existe $\lim_{n\to\infty} S_n(x)$ si y solo si existe el limite (19), y en caso afirmativo es igual a éste.

Nota

El teorema de localización establece que el comportamiento de la s.F. de f en x está determinado por el comportamiento de f en un entorno arbitrariamente pequeño de x. El resultado es sorprendente pues en el valor de la s.F. en un punto x intervienen todos los c.F., cada uno de los cuales depende de *todos* los valores de f en $[-\pi,\pi]$. Pero (18) muestra que para $n\to\infty$ el integrando se diluye en infinitas oscilaciones que se compensan en el límite, y si no ocurre otro tanto en la integral (13) es por el denominador de $D_n(t)$, nulo en el origen, siendo éste y su entorno lo que influye solamente en el límite.

6.4.7. *Ejercicios*

a. Utilizando $e^x = \sum_{0}^{\infty} x^n/n!$ y $e^{ix} = \cos x + i \text{ sen } x$ calcular las sumas de las series

$$c(x) = 1 + \frac{\cos x}{1!} + \frac{\cos 2x}{2!} + \frac{\cos 3x}{3!} + \dots$$

$$s(x) = \frac{\text{sen } x}{1!} + \frac{\text{sen } 2x}{2!} + \frac{\text{sen } 3x}{3!} + \ldots$$

[*Indic.*: Formar c + is y c - is.]

b. Separando partes reales e imaginarias en

$$\sum_{n=0}^{\infty} (r.e^{ix})^n = \frac{1}{1-re^{ix}}, \quad (0 < r < 1),$$

probar que

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx = \frac{1-r\cos x}{1-2r\cos x+r^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n \text{sen } nx = \frac{r.\text{ sen } x}{1-2r\cos x+r^2}.$$

c. Obtener (5) utilizando la identidad

$$\text{sen}(k+\frac{1}{2})x - \text{sen}(k-\frac{1}{2})x = 2 \text{ sen } \frac{1}{2} x. \cos kx. \tag{20}$$

6.5. CRITERIOS DE CONVERGENCIA

6.5.1. Vimos en 6.4.5. que para que en un punto x la s.F. de $f(x)$ converja hacia S es necesario y suficiente que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t) - 2S]\, D_n(t)\, dt = 0 \tag{1}$$

El teorema de localización (6.4.6) permite reducir el intervalo de integración a $[0,\delta]$ cualquiera que sea $\delta > 0$, pues la integral en $[\delta,\pi]$ tiende siempre a cero para $n\to\infty$. Si además se reemplaza en (1) $D_n(t)$ por su expresión (11) de 6.4.4., se tiene la condición equivalente

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\delta} \frac{f(x+t)+f(x-t)-2S}{2\,\text{sen}(t/2)} \text{sen}(n+\frac{1}{2})t\, dt = 0 \tag{2}$$

Esta condición (2) se cumple,(en virtud de 6.2.10 c) si el primer factor del integrando es una función absolutamente integrable, y entonces resulta este criterio de convergencia:

TEOREMA

Condición SUFICIENTE para que la s.F. de f(x) converga con suma S en el punto x es que la función de t

$$F(t) = \frac{f(x+t)+f(x-t)-2S}{2\ \mathrm{sen}(t/2)} \tag{3}$$

sea absolutamente integrable en un intervalo $[0,\delta]$ *con* $\delta > 0$.

6.5.2. Puesto que la función

$$G(t) = \frac{2\ \mathrm{sen}(t/2)}{2(t/2)} = \frac{2\ \mathrm{sen}(t/2)}{t}$$

completada por G(0) = 0, es contínua y acotada en todo el eje real, F(t) es absolutamente integrable si y sólo si lo es el producto F(t).G(t) y así resulta de 6.5.1 el sencillo y eficaz criterio siguiente:

CRITERIO DE DINI

Condición SUFICIENTE para que la s.F. de f(x) converga con suma S en el punto x es que exista un número $\delta > 0$ *tal que la función de t*

$$H(t) = \frac{t(x+t)+f(x-t)-2S}{t} \tag{4}$$

sea absolutamente integrable en el intervalo $[0,\delta]$.

Esto equivale a que la función

$$K(t) = \frac{f(x+t)-f(x)}{t}$$

sea absolutamente integrable en $[-\delta,\delta]$. (5)

La última parte resulta de la identidad (ver 6.5.7 a.):

$$\int_{-\delta}^{\delta} K(t)\,dt = \int_0^{\delta} H(t)\,dt. \tag{6}$$

Nota. En particular, para S = f(x) se tiene una condición suficiente para que en un punto x la s.F. de f(x) *conver a* y *represente* a la función. Las funciones H(t) y K(t) son ahora, respectivamente:

$$H_0(t) = \frac{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)}{t}, \qquad K_0(t) = \frac{f(x+t)-f(x)}{t}. \tag{7}$$

6.5.3 a. Diremos que la función $f(x)$ satisface una *condición de Lipschitz* con constante M y exponente h, o que $f(x)$ pertenece a la *clase* $Lip_M h$, $M \geq 0$, $0 < h \leq 1$, si

$$|f(x+1)-f(x)| \leq M.|t|^h. \tag{8}$$

b. Por ejemplo, la clase $Lip_M 1$ consta de las funciones con *razón incremental* $[f(x+t)-f(x)]/t$ acotada, de módulo $\leq M$. En particular. Si $f(x)$ tiene derivada acotada: $|f'(x)| \leq M$, entonces $f(x) \in Lip_M 1$.

c. La clase Lip h es por definición el conjunto de todas las funciones $f(x)$ que verifican (8) para *algún* M, o sea:

$$Lip\ h = \bigcup_{M>0} Lip_M h.$$

6.5.4. Del criterio de Dini se deducen varios importantes criterios que dan condiciones suficientes sobre la función $f(x)$, para que ésta sea *desarrollable en s.F.* (es decir, para que la s.F. de $f(x)$ converja hacia $f(x)$) en un punto x o en un intervalo.

COROLARIO 1

Si la función continua $f(x)$ *pertenece a* Lip h *con* $0 < h \leq 1$, *es desarrollable en s.F.*

En efecto, en tal caso existe un $M \geq 0$ tal que

$$|K_0(r)| = \left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}\right| \leq M\ t^{h-1} \tag{9}$$

y esta desigualdad asegura la integrabilidad absoluta de $K_0(t)$ en un intervalo $[-\delta,\delta]$ $(\delta > 0)$.

COROLARIO 2

La función $f(x)$ *es desarrollable en s.F. en todo punto donde admita derivada finita*

En efecto, en tal caso es $f(x) \in Lip\ 1$.

COROLARIO 3

Si en un punto x *de discontinuidad de primera especie ambas ramas admiten tangentes*, la s.F. *de* f *converge en* x *hacia el promedio* $[f(x+0)+f(x-0)]/2$ *de los límites laterales.*

En efecto, en tal caso, poniendo en (4)

$$S = [f(x+0)+f(x-0)]/2 \tag{10}$$

resulta

$$H(t) = \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t} + \frac{f(x-t)-f(x-0)}{t} \tag{11}$$

y ambos términos del segundo miembro son absolutamente integrables en $[0,\delta]$.

6.5.5. El criterio siguiente, que no demostraremos, se refiere a un intervalo (y no a cada punto x como el de Dini):

CRITERIO DE JORDAN:

La s.F. de una función absolutamente integrable f(x) *converge en todo intervalo donde* f(x) *tenga variación acotada* (6.2.6). *La convergencia es uniforme hacia* f(x) *en cada intervalo interior a un intervalo de continuidad, y en los puntos de discontinuidad de primera especie la s.F. converge hacia el promedio* (10) *de los límites laterales.*

6.5.6. Los ejemplos siguientes muestran que los criterios de Dini y de Jordan no se incluyen uno al otro.

a. Para $f(x) = 1/\ln(1/x)$ en $0 < x < \pi$, $f(x) = 0$ en $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$ se cumple el criterio de Jordan con s.F. convergente, pero en x = 0 no se cumple la condición de Dini pues

$$\int_0^\delta \frac{dt/t}{\ln(1/t)} = \left[-\ln(\ln\frac{1}{t})\right]_0^\delta = +\infty.$$

b. En cambio $f(x) = x^h \operatorname{sen}(1/x)$ en $0 < x < \pi$ $(0 < h < 1)$, $f(x) = 0$ en $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$, cumple el criterio de Dini en x = 0 con s.F. convergente, pero

$f(x)$ no cumple el criterio de Jordan pues no es de variación acotada.

6.5.7. *Ejercicios*

a. Demostrar la identidad (6) descomponiendo en dos el intervalo de integración del primer miembro.

b. Verificar que para funciones definidas en un intervalo finito $[a,b]$ es $\mathrm{Lip}\, h \supseteq \mathrm{Lip}\, k$ si $0 < h \leq k \leq 1$.

c. Verificar que si $f(x)$ cumple (8) con $h > 1$, para todo x, se reduce a una constante.

6.6. SERIES DE COSENOS Y SERIES DE SENOS

6.6.1. Una función $f(x)$ se llama *par* si $f(-x) = f(x)$. Por ejemplo $\cos x$, pues $\cos(-x) = \cos x$; $f(x) = 2-x^2 + 3x^4$, y todo polinomio con potencias de x de exponentes pares. La función $f(x)$ se llama *impar* si $f(-x) = -f(x)$; ejemplos $\operatorname{sen} x$, pues $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$; $f(x) = 3x - x^3$, y todo polinomio con potencias de x de exponentes impares. Las funciones

$$f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x \ ; \qquad g(x) = x-2x^2$$

no son ni pares ni impares.

6.6.2. Nos será útil el sencillo lema siguiente sobre la integral de una función par o de una función impar en un intervalo $(-L,L)$ simétrico respecto del origen:

LEMA

Si $f(x)$ *es PAR se tiene* (fig.1):

$$\int_{-L}^{L} f(x)\, dx = 2 \int_{0}^{L} f(x)\, dx, \tag{1}$$

y si $f(x)$ *es IMPAR se tiene* (fig.2):

$$\int_{-L}^{L} f(x)\, dx = 0. \tag{2}$$

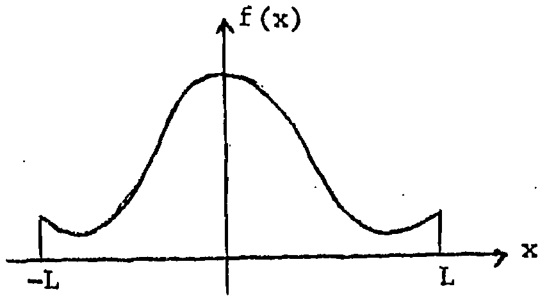


Fig. 1

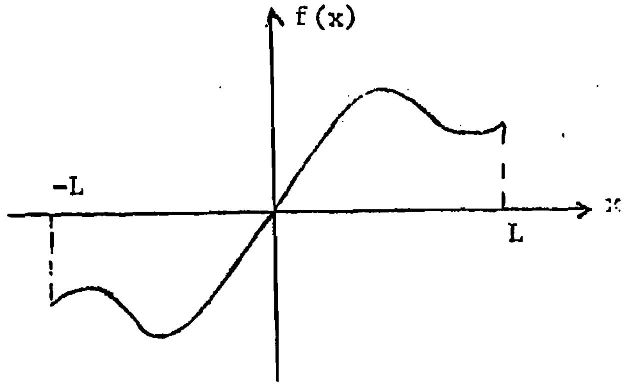


Fig. 2

Este lema es intuitivamente evidente y su demostración se hace en ambos casos descomponiendo $\int_{-L}^{L}$ en $\int_{-L}^{0} + \int_{0}^{L}$ y haciendo un cambio de variables en $\int_{-L}^{0}$ (Ver 6.6.5 a).

6.6.3. Para representar una función f(x) por su s.F. en un intervalo de longitud 2π la prolongaremos por periodicidad a partir de él. En las figuras 3 y 4 se representan funciones en $[-\pi,\pi]$ y en $[0,2\pi]$ respectivamente, y ambas se prolongan por periodicidad

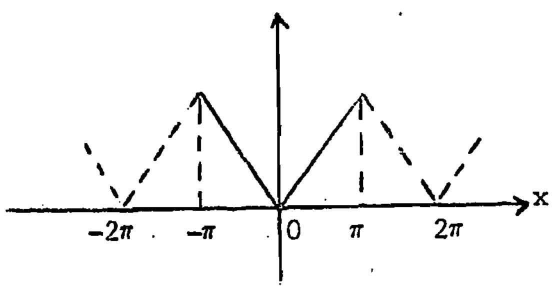


Fig. 3

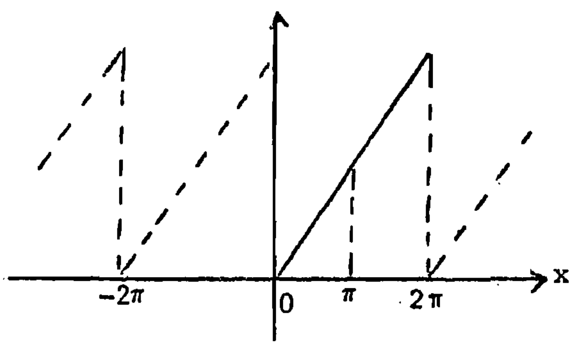


Fig. 4

como indican las líneas de trazos.

Del lema anterior se deduce:

TEOREMA

Si f(x) *es PAR su s.F. es una serie DE COSENOS:*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_n \cos nx, \tag{3}$$

y es

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx, \quad (n = 0,1,2,\ldots) \tag{4}$$

Si f(x) *es IMPAR su s.F. es una serie DE SENOS:*

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx, \tag{5}$$

y es

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\, dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\operatorname{sen} nx\, dx, \quad (n = 1,2,\ldots) \tag{6}$$

Demostración

Se aplica el lema de 6.6.2 a las integrales en los segundos miembros de (4) y (6), pues si f(x) es *par*, es

f(x) cos nx *par*, y f(x) sen nx *impar*,

y si f(x) es *impar*, es

f(x).cos nx *impar*, y f(x) sen nx *par*.

6.6.4. Una función f(x) se puede desarrollar *en un intervalo de longitud* π en una s.F. de cosenos, y también en una s.F. de senos. Por ejemplo, si f(x) está definida en $[0,\pi]$, si se prolonga al intervalo $[-\pi,0]$ poniendo

$$f(-x) = f(x), \quad \text{ó} \quad f(-x) = -f(x) \tag{7}$$

se obtiene, respectivamente, una función par o una función impar, cuya s.F. es, respectivamente, una serie de cosenos o una serie de senos.

6.6.5. *Ejercicios*

a. Demostrar el lema de 6.6.2

b. Sea f una función real definida en $[-\pi,\pi]$, y

$$g(x) = f(x)+f(-x), \qquad h(x) = f(x)-f(-x); \tag{8}$$

(i) Probar que g es par y h es impar;

(ii) Deducir de aquí que toda función real en $[-\pi,\pi]$ puede expresarse como suma de una función par y una función impar.

c. Demostrar que si

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$$

es

$$\frac{f(x)+f(-x)}{2} \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx,$$

y

$$\frac{f(x)-f(-x)}{2} \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen} kx.$$

d. Mostrar que si f es impar y $f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, entonces $c_n = -c_{-n}$.

e. Mostrar que si f es par y $f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$, entonces $c_n = c_{-n}$

f. Verificar que en $[0,\pi]$ es

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\left[\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \ldots\right].$$

g. Verificar que la s.F. de $f(x) = \left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2$ en $[0,2\pi]$ es una serie de cosenos.

h. (i) Mostrar que los desarrollos de Fourier de

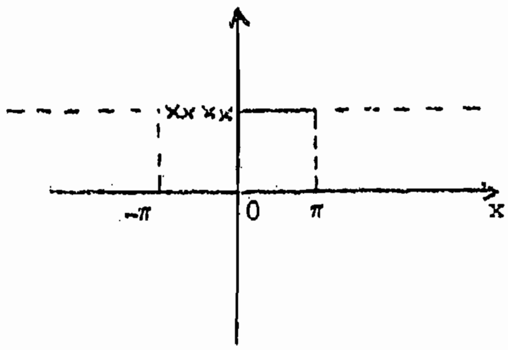
$$f(x) = \pi/4 \quad \text{en} \quad (0,\pi) \tag{9}$$

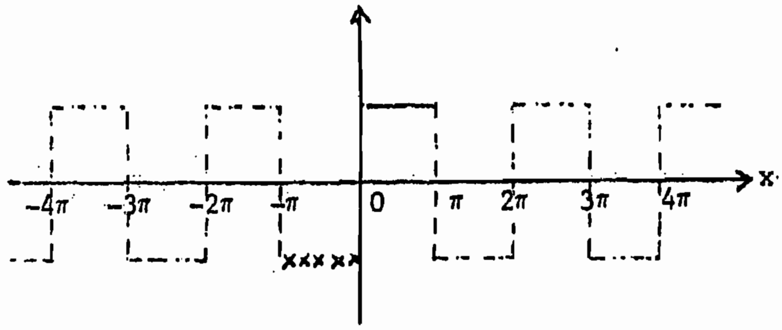
en series de cosenos y de senos son respectivamente:

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\cos 0 \tag{10}$$

$$f(x) \sim \operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5} + \ldots \tag{11}$$

(ii) Interpretar las figuras:





(iii) Expresar la suma de la serie en (11).

(iv) Decir para qué valores de x puede reemplazarse $\sim$ por = en (11).

i. Obtener de h la suma de la serie numérica:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \tag{12}$$

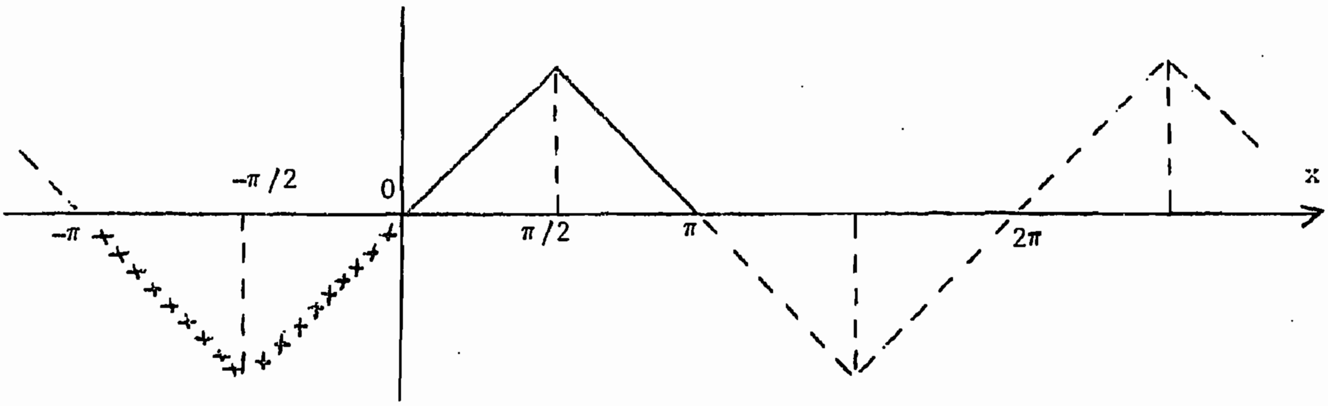
j. (i) Mostrar que la s.F. de senos de

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{en} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi/2 \\ \pi - x & \text{en} \quad \pi/2 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

es

$$f(x) \sim \frac{4}{\pi}\left[\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3^2} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5^2} + \dots\right] \tag{13}$$

(ii) Interpretar la figura siguiente y mostrar que representa la suma s(x) de la serie (13).



(iii) Decir para qué valores de x puede reemplazarse $\sim$ por = en (13).

Capítulo 7

LA TRANSFORMACION DE FOURIER

7.1. SERIE DE FOURIER EN UN INTERVALO CUALQUIERA

7.1.1. El conjunto de funciones

$$1, \cos\frac{nx}{\lambda}, \quad \operatorname{sen}\frac{nx}{\lambda}; \qquad (n = 1,2,3,\ldots) \tag{1}$$

es ortogonal en cualquier intervalo $[a, a+2\pi\lambda]$ de longitud $2\pi\lambda$, respecto del producto escalar

$$(f,g) = \int_a^{a+2\pi\lambda} f(x).g(x)\,dx. \tag{2}$$

Con respecto al correspondiente sistema ortonormal (ver 7.1.3 a) la s.F. de una función $f(t)$ es

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{nt}{\lambda} + b_n \operatorname{sen}\frac{nt}{\lambda}\right), \tag{3}$$

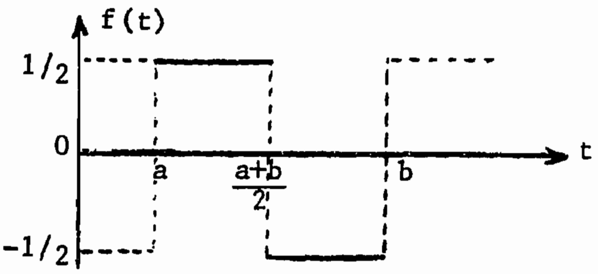
con los c.F. dados por

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi\lambda}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(x)\cos\frac{nx}{\lambda}\,dx, \quad (n = 0,1,2,\ldots) \\ b_n &= \frac{1}{\pi\lambda}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(x)\operatorname{sen}\frac{nx}{\lambda}\,dx, \quad (n = 1,2,\ldots) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

7.1.2. *Ejemplo*

Representar en s.F. en el intervalo $[a,b]$ la función $f(t)$ dada por

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{para} \quad a < t < \frac{a+b}{2} \\ -\frac{1}{2} & \text{para} \quad \frac{a+b}{2} < t < b. \end{cases}$$



Es $\lambda = (b-a)/(2\pi)$. Prolongando $f(t)$ como función periódica de período $2\pi\lambda = b-a$ resulta una función *impar* de $x-a$. Es $a_n = 0$ y

$$b_n = \frac{4}{b-a}\int_0^{(a+b)/2} \frac{1}{n}.\operatorname{sen}\frac{2\pi n(x-a)}{b-a}\,dx = \begin{cases} 2/(\pi n) & (n \text{ impar}) \\ 0 & (n \text{ par}). \end{cases}$$

Entonces

$$f(t) \sim \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\left[\operatorname{sen}\frac{2\pi(2k-1)(t-a)}{b-a}\right]. \tag{5}$$

7.1.3. *Ejercicios*

a. Hallar el sistema ortonormal correspondiente a (1) con respecto al producto escalar (2).

b. Obtener (3) y (4) mediante el cambio de variables $x/\lambda = x'$.

c. Reducir el ejemplo de 7.1.2 a 6.6.5 h mediante un cambio de variables.

7.2. INTEGRAL DE FOURIER

7.2.1. Reemplazando en (3) a_n y b_n por sus expresiones (4), la s.F. de $f(x)$ en el intervalo $(-\pi\lambda, \pi\lambda)$ se puede escribir así:

$$f(t) \sim \frac{1}{2\pi\lambda}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(x)\,dx +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi\lambda}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(x)\cos\frac{nx}{\lambda}\,dx.\cos\frac{nt}{\lambda} + \frac{1}{\pi\lambda}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(x)\operatorname{sen}\frac{nx}{\lambda}\,dx.\operatorname{sen}\frac{nt}{\lambda}\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi\lambda}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(x)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi\lambda}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(x)\left[\cos\frac{nx}{\lambda}\cos\frac{nt}{\lambda} + \operatorname{sen}\frac{nx}{\lambda}\operatorname{sen}\frac{nt}{\lambda}\right]dx,$$

o sea:

$$f(t) \sim \frac{1}{2\pi\lambda}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi\lambda}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(x)\cos\frac{n(t-x)}{\lambda}\,dx. \tag{6}$$

Pongamos $\frac{n}{\lambda} = \omega_n$ y $\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = \frac{n+1}{\lambda} - \frac{n}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$. Entonces la serie en (6) puede escribirse así:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(\omega_n).\Delta\omega_n \tag{7}$$

siendo

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(x)\ \cos\ \omega(t-x)dx. \qquad (8)$$

Procedamos ahora sin preocuparnos por las condiciones de validez de las consideraciones puramente formales que siguen:

Queremos representar la función f(t) para *todo* t real. Para pasar del intervalo $(-\pi\lambda,\ \pi\lambda)$ de la representación (6) a toda la recta real R debemos hacer $\lambda \to \infty$. Las *series* (7) se asemejan a las *sumas* (finitas) de Riemann. Cabe conjeturar que aproximan la integral $\int_0^\infty \varphi(\omega)d\omega$, y entonces para $\lambda \to \infty$ la representación (6) se convierte en

$$f(t) \sim \frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \cos\ \omega(t-x)dx. \qquad (9)$$

Esta es la llamada *integral de Fourier* que (con ciertas restricciones, como las que veremos en 7.2.3) representa en $(-\infty,\infty)$ la función *arbitraria* f(t) en la misma forma en que una s.F. representa una función *periódica.*

Nótese que en la integral reiterada (9) *no* puede invertirse el orden pues la integral $\int_0^\infty \cos\ \omega(t-x)d\omega$ no es convergente.

7.2.2. Puesto que

$$\cos\ \omega(t-x) = \cos\ \omega t.\cos\ \omega x + \text{sen}\ \omega t.\text{sen}\ \omega x,$$

(9) se puede escribir en la siguiente forma, mas parecida a una *serie* de Fourier:

$$f(t) \sim \int_0^\infty \left[a(\omega).\cos\ \omega t + b(\omega).\text{sen}\ \omega t\right]d\omega, \qquad (10)$$

siendo (análogamente a los c.F.):

$$\left.\begin{aligned} a(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x).\cos\ \omega x.dx \\ b(\omega) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x).\text{sen}\ \omega x.dx \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

7.2.3. Sería difícil justificar lógicamente la línea intuitiva de pensamiento que hemos seguido al final de 7.2.1. Es mas fácil demostrar directamente como con las s.F., condiciones para que la integral de Fourier (9) *converja* y además *represente la función* f(t). Por ejemplo vale el teorema siguiente, que no demostraremos (ver Rey Pastor, Pi Calleja y Trejo: Análisis matemático, III, § 99-2):

TEOREMA

Si f(t) *es absolutamente integrable en* $(-\infty,\infty)$, *en todo punto* t *en el cual se cumplan condiciones suficientes de convergencia de la* s.F. *de* f(t) *hacia* S, *es*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty d\omega \int_{-\infty}^\infty f(x)\cos\omega(t-x)\,dx = S, \tag{12}$$

o sea:

$$S = \int_0^\infty [\,a(\omega).\cos\omega t + b(\omega).\operatorname{sen}\omega t\,]\,d\omega. \tag{13}$$

7.3. TRANSFORMACION DE FOURIER

7.3.1. Sea f(t) una *función par*: f(-t) = f(t). Entonces, en virtud de (11) es $b(\omega) = 0$ y (13) da, para S = f(t), la expresión:

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\omega t.d\omega \int_0^\infty f(x)\cos\omega x.dx, \tag{14_c}$$

llamada *fórmula del coseno de la integral de Fourier* o también *integral de Fourier-coseno.*

Poniendo

$$F_c(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos\omega x.dx, \tag{15_c}$$

la fórmula (14_c) da

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_c(\omega).\cos t\omega.d\omega. \tag{16_c}$$

Las expresiones (15_c) y (16_c) muestran que existe una relación recíproca entre las funciones f(t) y $F_c(\omega)$: se dice que son *transformadas de Fourier por el coseno* (o *de Fourier-coseno*, t.F_c.) una de otra.

Indicando con $\mathfrak{F}_c$ la transformación de Fourier-coseno (15_c) y (16_c) se expresan respectivamente así:

$$F_c = \mathfrak{F}_c(f), \qquad f = \mathfrak{F}_c(F_c) \tag{17_c}$$

de donde resulta, reemplazando la primera en la segunda:

$$f = \mathfrak{F}_c(\mathfrak{F}_c(f)), \tag{18_c}$$

y de aquí, aplicando a ambos miembros la *transformación inverva* $\mathfrak{F}_c^{-1}$:

$$\mathfrak{F}_c^{-1}(f) = \mathfrak{F}_c(f). \tag{19_c}$$

o sea: *la inversa de* $\mathfrak{F}_c$ *es la misma* $\mathfrak{F}_c$.

7.3.2. Si f(t) es una *función impar*: f(-t) = -f(t), por (11) es $a(\omega) = 0$ y (13) da, para S = f(t):

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \operatorname{sen} \omega t.\,d\omega \int_0^\infty f(x) \operatorname{sen} \omega x.\,dx, \tag{14_s}$$

llamada *fórmula del seno de la integral de Fourier*, o bien *integral de Fourier-seno*.

Poniendo

$$F_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(x) \operatorname{sen} \omega x.\,dx, \tag{15_s}$$

(14_s) da:

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_s(\omega) \operatorname{sen} t\omega.\,d\omega. \tag{16_s}$$

(15_s) y (16_s) expresan una relación recíproca entre las funciones f(t) y $F_s(\omega)$: se dice que son *transformadas de Fourier por el seno* (o *de Fourier-seno*, t.F_s.) una de otra.

Indicando con $\mathfrak{F}_s$ la transformación de Fourier-seno (15_s) y (16_s) se expresan así:

$$F_s = \mathfrak{F}_s(f), \qquad f = \mathfrak{F}_s(F_s), \tag{17_s}$$

y de aquí resulta sucesivamente, como en 7.3.1:

$$f = \mathfrak{F}_s(\mathfrak{F}_s f), \tag{18_s}$$

y

$$\mathfrak{F}_s^{-1}(f) = \mathfrak{F}_s(f). \tag{19_s}$$

7.3.3. *Forma compleja*

Consideremos la fórmula (12) para $S = f(t)$ (caso en que la integral de Fourier representa a la función), o sea:

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega(t-x).dx.$$

Puesto que la integral interior

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega(t-x).dx$$

es *función par de* ω, se tiene

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega(t-x).dx. \tag{a}$$

Por otra parte es

$$0 = \frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{sen}\,\omega(t-x).dx, \tag{b}$$

pues la integral interior es *función impar de* ω.

Sumando miembro a miembro (a) y (b) se obtiene la llamada *integral de Fourier en forma compleja*:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i\omega(t-x)}.dx. \tag{14}$$

De aquí resultan las siguientes fórmulas, ahora no completamente recíprocas:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx, \tag{15}$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \tag{16}$$

La función F se llama *transformada de Fourier* (t.F.) de f. La fórmula (16) también se puede escribir (poniendo $\tau = -t$):

$$f(-\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\ e^{-i\omega\tau} d\omega, \tag{17}$$

de suerte que si se indica con $\hat{f}$ la t.F. de f, se tiene:

$$\hat{\hat{f}}(\tau) = f(-\tau). \tag{18}$$

Indicando con $\mathfrak{F}$ la *transformación* de Fourier, (15) y (16) se escriben respectivamente:

$$F = \mathfrak{F}(f), \qquad f = \mathfrak{F}^{-1}(F), \tag{19}$$

pero ahora es $\mathfrak{F}^{-1} \neq \mathfrak{F}$.

7.3.4. *Ejercicios*

a. Hallar las t.F_c y t.F_s:

$$\mathfrak{F}_c(f) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t)\ \cos \omega t . dt, \tag{20}$$

$$\mathfrak{F}_s(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t)\ \text{sen}\ \omega t . dt, \tag{21}$$

de la función (decrecimiento exponencial):

$$f(t) = e^{-ht}, \qquad (h > 0,\ 0 \leqslant t < \infty). \tag{22}$$

Indicación: Integrando por partes se obtiene

$$\mathfrak{F}_c = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{2}{\pi}} - \frac{\omega}{h}\mathfrak{F}_s, \qquad \mathfrak{F}_s = \frac{\omega}{h}\ \mathfrak{F}_c \tag{23}$$

y de aquí se despejan:

$$\mathfrak{F}_c(e^{-ht}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{h}{h^2+\omega^2}\,, \qquad \mathfrak{F}_s(e^{-ht}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\omega}{h^2+\omega^2}\,. \tag{24}$$

b. Con las notaciones de (15_c), (15_s) y (15), verificar que si f(t) es una función *real*:

(i) Las partes real e imaginaria de $F(\omega)$ son respectivamente:

$$R(\omega) = \mathrm{Re}[F(\omega)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega t\, f(t)dt,$$

$$I(\omega) = \mathrm{Im}[F(\omega)] = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sen}\, \omega t.\, f(t)dt; \tag{25}$$

(ii) $R(\omega)$ es par e $I(\omega)$ es impar:

$$R(-\omega) = R(\omega), \qquad I(-\omega) = -I(\omega); \tag{26}$$

(iii)

$$F(-\omega) = \overline{F(\omega)}. \tag{27}$$

c. Con las notaciones de b es

$$F(\omega) = R(\omega) + i\, I(\omega) = |F(\omega)|.e^{i.\varphi(\omega)} \tag{28}$$

siendo $\varphi(\omega)$ el argumento de $F(\omega)$:

$$\varphi(\omega) = \arg F(\omega) = \mathrm{arc\ tg}\,\frac{I(\omega)}{R(\omega)}\,. \tag{29}$$

Se llama *espectro de amplitud* de f(t) al valor absoluto $|F(\omega)|$ de su t.F., y *espectro de fase* de f(t) al argumento $\varphi(\omega)$ de su t.F. Verificar que *si* f(t) *es real* su espectro de amplitud es par y su espectro de fase es impar:

$$f(t) \text{ real } \Rightarrow [\,|F(-\omega)| = |F(\omega)|, \quad \varphi(-\omega) = -\varphi(\omega)].$$

[*Indicación*: (27)].

d. Probar que la t.F. de la función decrecimiento exponencial (22), o sea

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-ht} & \text{si } t \geqslant 0, \end{cases}$$

es

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{h+i\omega}\,; \tag{30}$$

(i) Por cálculo directo;

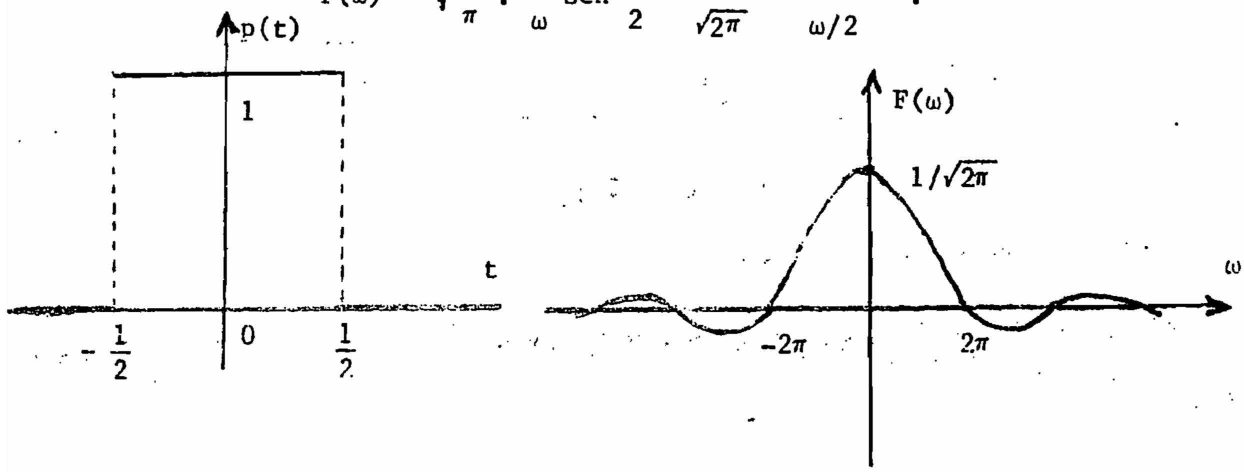
(ii) Utilizando (25) y (24).

e. Verificar que la t.F. del *pulso unidad* (fig.):

$$p(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |t| \leq 1/2, \\ 0 & \text{si} \quad |f| > 1/2, \end{cases} \tag{31}$$

es (fig.):

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\omega} \operatorname{sen} \frac{\omega}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\operatorname{sen}(\omega/2)}{\omega/2} . \tag{32}$$



f. Verificar que la transformación de Fourier es *lineal*, es decir: *si* $\mathfrak{F}[f_1(t)] = F_1(\omega)$ y $\mathfrak{F}[f_2(t)] = F_2(\omega)$,

$$\mathfrak{F}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 F_1(\omega) + c_2 F_2(\omega). \tag{33}$$

g. Verificar que si $\mathfrak{F}[f(t)] = F(\omega)$ y c es una constante real, es

$$\mathfrak{F}[f(ct)] = \frac{1}{|c|} F(\frac{\omega}{c}). \tag{34}$$

Nota :

(34) es la *propiedad de compresión-expansión* de la transformación de Fourier: la gráfica de f(ct) se obtiene de la de f(t) *contrayéndola en la escala del tiempo* t por el factor c, y la gráfica de F(ω/a) se obtiene de la de F(ω) *expandiéndola en la escala de frecuencias* por el mismo factor c.

h. Calcular la t.F. del *pulso unitario de altura* h:

$$p_h(t) = \begin{cases} h & \text{si} \quad |t| \leq 1/(2h), \\ 0 & \text{si} \quad |t| > 1/(2h); \end{cases} \tag{35}$$

(i) Por cálculo directo

(ii) Utilizando (32), (33) y (34).

Respuesta:

$$F_h(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\operatorname{sen}[\omega/(2h)]}{\omega/(2h)} . \tag{36}$$

Nota

Las gráficas de $P_h(t)$ y de $F_h(\omega)$ son las representadas en e, cambiando ambas escalas en la primera y sólo la de abscisas en la segunda: en ésta la primera onda superior va desde $-2\pi h$ hasta $2\pi h$.

Para $h \to \infty$, $p_h(t)$ tiende a la "función" δ de Dirac y $F_h(\omega)$ tiende a la función constante de valor $1/\sqrt{2\pi}$. El concepto de transformación de Fourier se extiende a distribuciones, y se prueba que la t.F. de la medida δ de Dirac es.

$$\mathfrak{F}[\delta(t)] = 1/\sqrt{2\pi},$$

i. Demostrar la propiedad siguiente, llamada *de desplazamiento en el tiempo* de la t.F.:

$$\mathfrak{F}[f(t)] = F(\omega) \Rightarrow \mathfrak{F}[f(t-\tau)] = F(\omega)e^{-i\omega\tau}. \tag{37}$$

j. Demostrar la propiedad siguiente, llamada *de desplazamiento en la frecuencia* de la t.F.:

$$\mathfrak{F}[f(t)] = F(\omega) \Rightarrow \mathfrak{F}[f(t)e^{i\alpha t}] = F(\omega-\alpha). \tag{38}$$

k. Mostrar que

$$\mathfrak{F}[f(t)] = F(\omega) \Rightarrow \mathfrak{F}[f(t) \cos \alpha t] = \frac{1}{2}[F(\omega-\alpha)+F(\omega-\alpha)]. \tag{39}$$

[Se usan (38) y $\cos \alpha t = \frac{1}{2}(e^{i\alpha t} + e^{-i\alpha t})$.]

ℓ. Observando que la función (coseno de duración finita d)

$$f(t) = \begin{cases} = \cos \alpha t & \text{si} \quad -d/2 \leqslant t \leqslant d/2 \\ = 0 & \text{si} \quad |t| > d/2 \end{cases}$$

se puede expresar como "función modulada por un pulso" así:

$$f(t) = p(t/d).\cos \alpha t \tag{40}$$

siendo p(t) la función pulso unidad (31), mostrar que su t.F. es

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \frac{\operatorname{sen} d(\omega-\alpha)/2}{\omega-\alpha} + \frac{\operatorname{sen} d(\omega+\alpha)/2}{\omega+\alpha} \right| . \tag{41}$$

[Se aplica (34) para hallar la t.F. de p(t/d) a partir de (32). Luego se aplica (39).]