ISSN 1853-709X

Fascículo 35

Cursos y seminarios de matemática

Serie A

H. Porta

Temas de análisis funcional

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2011

Cursos y Seminarios de Matemática – Serie A

Fascículo 35

ISSN 1853-709X (Versión Electrónica)
ISSN 0524-9643 (Versión Impresa)

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

CURSOS Y SEMINARIOS DE MATEMATICA

Fascículo 35

TEMAS DE ANALISIS FUNCIONAL

HORACIO PORTA

1989

TEMAS DE ANALISIS FUNCIONAL

HORACIO PORTA

Notas de un curso dictado en Julio - Agosto de 1987.

Introducción

Las fechas de las referencias indicadas al final de estas notas varían desde 1890 hasta 1963. El período más espléndido del análisis funcional va desde 1900 hasta 1930, y el impacto que causaron sus logros no ha amainado todavía. Los temas propuestos son los inevitables, los que la responsabilidad requiere, y se presentan en versiones secas y calmas: hemos elegido no escribir la propaganda correspondiente. Si esto quiere usarse para catalogar estas notas, se deberá concluir que son un manual incompleto de análisis funcional tradicional.

H.P.

CAPITULO I

§ 1. *Teorema de Hahn-Banach*

I.1.1. *TEOREMA* (Hahn-Banach; [5],[6],[26]).

Sea X *un espacio vectorial real y supongamos que* $p : X \to \mathbb{R}$ *es una función tal que*

$$p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$$

$$p(tx) = tp(x)$$

para todo x,y *en* X *y todo* $t\in\mathbb{R}$, $t \geqslant 0$. *Si* $E\subset X$ *es un subespacio vectorial de* X *y* $f : E \to \mathbb{R}$ *una funcional lineal tal que* $f(x) \leqslant p(x)$ *para todo* $x\in E$, *entonces existe una funcional lineal* $F : X \to \mathbb{R}$ *tal que* $F(x) \leqslant p(x)$ *para todo* $x\in X$ *y además* $F(x) = f(x)$ *si* $x\in E$.

Demostración: Sea M el conjunto de todos los pares (H,g) donde H es un subespacio vectorial de X tal que $E\subset H$ y $g : H \to \mathbb{R}$ es una funcional lineal tal que $g(x) \leqslant p(x)$ para todo $x\in H$ y además $g(x) = f(x)$ si $x\in E$. Es claro que $(E,f) \in M$, de manera que M no es vacío. El teorema estará demostrado si probamos que existe algún par en M cuyo primer elemento es X. La relación $(H,g) \leqslant (H',g')$ definida como equivalente a: $H\subset H'$ y $g'(x) = g(x)$ si $x\in H$, es un orden en M; si $N\subset M$ es un subconjunto totalmente ordenado de

M, y K la unión de todos los primeros miembros de pares en N, es claro que $K \subset X$ es un subespacio vectorial. Definamos $k : K \to \mathbb{R}$ mediante: si $x \in H$ para algún $(H,g) \in N$, entonces $k(x) = g(x)$; k está bien definida, ya que dos g coinciden sobre su dominio común de definición. Es claro además que $(K,k) \in M$ y que todo elemento de N está mayorado por (K,k). Luego M es *inductivo superiormente* y contiene por lo tanto elementos maximales (Zorn). Sea (U,u) uno de ellos. Demostraremos que $U = X$. En efecto, si existiera $z \notin U$, $z \in X$, sea $U' = U + \mathbb{R}z$ es subespacio generado por U y z. Para todo $x \in U$, $y \in U$ se tiene

$$u(x+y) \leqslant p(x+y) = p(x-z+y+z) \leqslant p(x-z) + p(y+z),$$

de manera que $u(x) - p(x-z) \leqslant -u(y) + p(y+z)$, donde el primer miembro depende de x y el segundo de y. Se puede concluir entonces que

$$a = \operatorname*{Sup}_{x \in U} [u(x)-p(x-z)] \leqslant \operatorname*{Inf}_{y \in U} [-u(y)+p(y+z)] = b$$

Elijamos ahora $s \in \mathbb{R}$ entre a y b y definamos $u' : U' = U + \mathbb{R}z \to \mathbb{R}$ mediante $u'(x+tz) = u(x) + ts$. Es evidente que u' es lineal y que extiende a u (es decir $u'(x) = u(x)$ si $x \in U$). Veamos que también $u'(v) \leqslant p(v)$ para todo $v \in U'$. Si $v = x+tz$, $t > 0$ se tiene

$$u'(v) = u(x)+ts \leqslant u(x)+tb \leqslant u(x)+t[-u(\tfrac{x}{t})+p(\tfrac{x}{t}+z)]$$

$$= p(x+tz) = p(v).$$

Por otra parte si $t<0$, entonces

$$u'(v) = u(x)+ts \leqslant u(x)+ta \leqslant u(x)+t[u(\tfrac{x}{-t})-p(\tfrac{x}{-t}-z)]$$

$$= -tp(\tfrac{x}{-t}-z) = p((-t)(\tfrac{x}{-t}-z)) = p(x+tz) = p(v).$$

Como el caso $t = 0$ se reduce a $u(x) \leqslant p(x)$, concluímos que $u'(v) \leqslant p(v)$ para todo $v \in U'$ y por lo tanto $(U,u) \leqslant (U',u')$ con $(U,u) \neq (U',u')$ lo que contradice la maximalidad de (U,u). Luego no hay tal z y $U = X$; el teorema está demostrado.

La existencia de medias invariantes sobre el círculo unidad que se obtiene en §2 depende solamente de este teorema y podría demostrarse aquí. Sin embargo para futuras aplicaciones obtendremos algunos corolarios.

Recordemos que un *espacio normado* es un par $(X,\|\ \|)$ tal que

a) X es un espacio vectorial real o complejo,

b) $\|\ \|$ es una función $\|\ \|: X \to \mathbb{R}$ que satisface $\|tx\| = |t|\|x\|$ para todo $x \in X$ y todo escalar t y tal que $d(x,y) = \|x-y\|$ es una *métrica* sobre X.

Toda noción métrica en un espacio normado (esferas, isometrías, etc.) se refiere a la distancia d. En particular la *bola unidad* de $(X, \| \ \|)$ es el conjunto $\{x \in X;\ d(x,0) \leq 1\}$.

Un espacio normado $(X, \| \ \|)$ tal que el espacio métrico asociado (X,d) sea completo se llamará *espacio de Banach (real o complejo)*.

Cuando estén involucrados espacios normados o de Banach, toda mención de continuidad se hace con referencia a la métrica $d(x,y) = \| x-y \|$. En cambio las nociones de *continuidad débil* y *convergencia débil*, que se definirán oportunamente, corresponden a otras topologías sobre estos espacios, por lo que nos cuidaremos de repetir el adjetivo en todas las ocurencias de estos conceptos.

Recordemos también que si X,Y son espacios normados y $T : X \to Y$ es una transformación lineal, entonces T es continua si y solamente si T es *acotada* en la bola unidad de X, o sea si $\operatorname{Sup}\{\| Tx\| ;\ \|x\| \leq 1\} < +\infty$. El conjunto de todas las transformaciones lineales continuas de X en Y se designará mediante $L(X,Y)$. Es un espacio vectorial (con las operaciones definidas punto a punto). Además $\| T \| = \operatorname{Sup}\{\| Tx \| ;\ \| x \| \leq 1\}$ es una norma sobre $L(X,Y)$ y si Y es un espacio de Banach, también $L(X,Y)$ es un espacio de Banach. En particular el espacio de Banach $L(X,\mathbb{K})$, donde $\mathbb{K}$ es el cuerpo de escalares de X, es el *espacio de Banach dual* del espacio normado X, y sus elementos son las *funcionales lineales continuas* sobre X. Adoptamos la notación X' para abreviar $L(X,\mathbb{K})$.

Describamos rapidamente los ejemplos más tradicionales de espacios normados. Tablas más completas y el estudio detallado de las propiedades de estos espacios se encuentran por ejemplo en [6] y [21].

A. $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ con el módulo como norma son espacios de Banach reales; $\mathbb{C}$ es también un espacio de Banach complejo. Ambos se identifican a sus duales.

B. $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ son espacios de Banach para $n = 1,2,\ldots$ con cualquiera de las normas

$$\|(x_1,\ldots,x_n)\|_p = (\Sigma_{j=1}^{n} |x_j|^p)^{1/p}, \quad p \geqslant 1;$$

$$\|(x_1,\ldots,x_n)\|_\infty = \max_{j=1,2,\ldots,n} |x_j|.$$

C. El espacio ℓ^p, $p \geqslant 1$, de las sucesiones $\{x_n\}$ tales que $\Sigma |x_n|^p < \infty$ con la norma

$$\|\{x_n\}\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}$$

es un espacio de Banach. Si $p > 1$ su dual se identifica canonicamente con ℓ^q donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. El espacio ℓ^∞

de las sucesiones x_n acotadas es de Banach con la norma $\|\{x_n\}\|_\infty = \text{Sup}\{|x_n|;\ n = 1,2,\ldots\}$ y se identifica canonicamente con el dual de ℓ^1.

D. $L^p(S,\Sigma,m)$, para $p \geq 1$, el espacio de clases de funciones m-equivalentes con potencia p m-integrable y $L^\infty(\ ,\Sigma,m)$, el espacio de clases de funciones m-equivalentes esencialmente acotadas, son espacios de Banach con las normas

$$\|f\|_p = \left(\int |f(x)|^p dm\right)^{1/p}, \quad p \geq 1$$

$$\|f\|_\infty = \text{Sup. Es. } |f(x)|.$$

Aquí S es un conjunto, Σ una sigma álgebra en S y m una medida definida sobre Σ.

E. $B_{\mathbb{K}}(T)$, el espacio de las funciones acotadas definidas en un conjunto T con valores en $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ es de Banach con la norma $\|f\|_\infty = \text{Sup}\{|f(x)|\ ;\ x \in T\}$. Se puede reemplazar $\mathbb{K}$ por cualquier espacio de Banach y se obtendrá también un espacio de Banach. Es claro que $B_{\mathbb{R}}(\mathbb{N}) = \ell^\infty$, etc.

F. c y c_o, los espacios de sucesiones convergentes y convergentes a cero, respectivamente son espacios de Banach con la norma $\|x\|_\infty$ definida en C. Hay una identificación canónica $\ell^1 = (c_o)'$.

G. $C_{\mathbb{K}}(T)$, el espacio de todas las funciones continuas con valores en K definidas en un espacio compacto T con la norma $\|f\|_\infty = \mathrm{Sup}\{|f(t)|;\ t \in T\}$ es un espacio de Banach.

H. Un espacio de Hilbert es de Banach. El dual de un espacio de Hilbert se identifica con el espacio mediante una aplicación lineal para coeficientes reales, antilineal para coeficientes complejos. Este hecho fué probado por F. Riesz ([21],[46]).

Veamos ahora la versión más corriente del teorema de Hahn-Banach, que se describe en el caso de espacios normados de la siguiente manera.

I.1.2. PROPOSICION. Si $(X, \|\ \|)$ *es un espacio normado real o complejo,* E *es un subespacio vectorial de* X *y* $f : E \to K$ *una funcional lineal continua sobre* E *, entonces existe una extensión* $F : X \to \mathbb{K}$ *de* f*, lineal, continua y tal que* $\|F\| = \|f\|$ *(donde* $\|f\|$ *es la norma de* f *como elemento del dual* E' *y* $\|F\|$ *la de* F *como elemento del dual* X'*).*

Este teorema fue demostrado para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ por Hahn y Banach (loc. cit.) y para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ por Bohnenblust y Sobczyk [8].

Demostración: Consideremos el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Como f es lineal y continua se tendrá $|f(x)| \leq \|f\| \|x\|$ para todo $x \in E$. Si designamos $p(x) = \|f\| \|x\|$, es claro que p satisface las condiciones dadas en I.1.1 y además $f(x) \leq p(x)$ para $x \in E$. Po lo tanto usando I.1.1 se obtiene la existencia de $F : X \to \mathbb{R}$ lineal que extiende a f y con $F(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$. Pero como $-F(x) = F(-x) \leq p(-x) = p(x)$ tendremos en realidad $|F(x)| \leq p(x) = \|f\| \|x\|$ lo que implica $\|F\| = \|f\|$. Veamos el caso complejo. Escribamos

$$(*) \qquad f(x) = f_1(x) + if_2(x), \quad x \in E$$

donde f_1, f_2 son funcionales reales $\mathbb{R}$-lineales. Como f es $\mathbb{C}$-lineal vale $if(x) = f(ix) = f_1(ix) + if_2(ix)$ lo que con $(*)$ da $f_1(ix) = -f_2(x)$, y finalmente $f(x) = f_1(x) - if_1(ix)$. Sea ahora $F_1 : X \to \mathbb{R}$ una extensión ($\mathbb{R}$-lineal!) de f_1 tal que $\|F_1\| = \|f_1\|$ (lo que resulta de la primera parte ya considerada) y definamos $F(x) = F_1(x) - iF_1(ix)$. Es fácil ver que F es $\mathbb{C}$-lineal. Además si $x \in X$ y $F(x) = re^{ia}$, $r \geq 0$, a real, entonces $|F(x)| = r = e^{ia}F(x) = F(e^{-ia}x)$. Pero $|F(x)|$ es real no-negativo de manera que

$$F(e^{-ia}x) = F_1(e^{-ia}x) = |F_1(e^{-ia}x)| \leq \|f_1\| \ \|e^{-ia}x\|$$

$$= \|f_1\| \ \|x\| .$$

Luego $|F(x)| \leq \|f_1\| \ \|x\| \leq \|f\| \ \|x\|$, con lo que concluye la demostración.

I.1.3. COROLARIO. Para todo $x \in X$ *vale*

$$\|x\| = \operatorname{Sup}\{ |x'(x)| ; \ x' \in X', \ \|x'\| \leq 1 \}$$

<u>*Demostración:*</u> Es suficiente considerar el caso $x \neq 0$. Es claro que $\|x\|$ no es menor que el supremo del segundo miembro. Veamos que existe $x' \in X'$ tal que $\|x'\| = 1$ y $x'(x) = \|x\|$ con lo que el corolario quedará probado. Para esto es suficiente considerar el subespacio $E = \mathbb{K}x$ y la funcional $f : E \to \mathbb{K}$, $f(tx) = t\|x\|$. Se tiene $\|f\| = 1$. Sea $x' \in X'$ una extensión de f con norma $\|x'\| = \|f\|$ $(=1)$. Entonces $x'(x) = f(x) = 1.\ \|x\| = \|x\|$, como se quería.

I.1.4. COROLARIO. Si $x \in X$ *y* $x'(x) = 0$ *para toda* $x' \in X'$, *entonces* $x = 0$.

Se obtiene a partir de I.1.3.

§ 2. *Medias invariantes en el círculo*

Demostraremos en esta sección la existencia de medias invariantes sobre el círculo $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Este resultado se debe a Banach ([4],[6]). En el Capítulo V veremos algunas generalizaciones que dependen de argumentos de compacidad de los que no disponemos todavía.

Durante toda esta sección, $(X, \| \ \|)$ designará al espacio $X = B_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ de las funciones reales acotadas en el círculo (ver ejemplo E en §I.1), y $x = x(t)$ será un elemento típico de X. También usaremos Φ para designar el conjunto de todas las familias finitas $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de longitud arbitraria formadas por elementos a_j de $\mathbb{T}$. Como siempre que hablamos de *familias*, se aceptan repeticiones. Usaremos $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ para la familia típica en Φ. Finalmente definamos

$$M(x,A) = \operatorname*{Sup}_{s \in \mathbb{T}} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x(s+a_k) \right\}.$$

Es claro que siempre vale

$$(\dagger) \qquad -\|x\| \leqslant \operatorname{Inf}\{x(s);\ s \in \mathbb{T}\} \leqslant M(x,A) \leqslant \operatorname{Sup}\{x(s);\ s \in \mathbb{T}\} \leqslant \|x\|.$$

Además si $x, y \in X$, $A \in \Phi$, entonces

$$(\dagger)\qquad M(x+y,A)\leqslant M(x,A)+M(y,A),$$

$$(*)\qquad M(tx,A)=tM(x,A)\quad \text{si}\quad t\geqslant 0.$$

Sean ahora A y B dos familias $A=(a_1,\ldots,a_n)$, $B=(b_1,\ldots,b_m)$ y definamos $A\times B$ como la familia con nm elementos a_h+b_k, $1\leqslant h\leqslant n$, $1\leqslant k\leqslant m$, tomados en cualquier orden.
Entonces

$$(\P)\qquad M(x,A\times B)\leqslant M(x,A)$$

En efecto,

$$\frac{1}{nm}\sum_h\sum_k x(s+a_h+b_k)=$$

$$\frac{1}{m}\Big(\frac{1}{n}\sum_h x(s+a_h+b_1)+\frac{1}{n}\sum_h x(s+a_h+b_2)+\ldots\Big)$$

$$\leqslant\frac{1}{m}(M(x,A)+M(x,A)+\ldots)=M(x,A),$$

y tomando supremo en $s\in\mathbb{T}$ resulta lo deseado.

Consideremos ahora $p: X\to\mathbb{R}$ definida mediante

$$p(x)=\operatorname*{Inf}_{A\in\Phi} M(x,A)$$

I.2.1. LEMA. Para todo $x,y\in B_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ *se cumple:*

i) $\operatorname{Inf}\{x(s); s \in \mathbb{T}\} \leq p(x) \leq \operatorname{Sup}\{x(s); s \in \mathbb{T}\}$;

ii) $p(tx) = tp(x)$ *si* $t \geq 0$;

iii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$;

iv) *si* $e \in B_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ *es la función constante* $e(s) = 1$ *entonces* $p(ae) = a$ *para todo* $a \in \mathbb{R}$.

Demostración: i) resulta de (†) y ii) de (*). Además de i) se concluye que si x es constante $x(s) = a$ entonces $p(x) = a$, lo que prueba iv). Finalmente si $\epsilon > 0$ y $A, B \in \Phi$ son tales que $M(x,A) \leq p(x) + \epsilon/2$, $M(x,B) \leq p(x) + \epsilon/2$ entonces utilizando (‡) y (¶) se obtiene

$$p(x+y) \leq M(x+y, A\times B) \leq M(x, A\times B) + M(y, A\times B)$$

$$\leq M(x,A) + M(x,B) \leq p(x) + p(y) + \epsilon,$$

de donde resulta iii).

Sea ahora $E \subset B_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ el subespacio vectorial de dimensión 1 formado por las funciones constantes $x = ae$, $a \in \mathbb{R}$ (e es la función, y a definida, $e(t) = 1$). Definamos $f: E \to \mathbb{R}$ mediante $f(ae) = a$. Es claro que $f(x) = p(x)$ si $x \in E$, de manera que podemos aplicar I.1.1 a esta situación para obtener una funcional lineal $F : B_{\mathbb{R}}(\mathbb{T}) \to \mathbb{R}$ que extiende a f y satisface $F(x) \leq p(x)$ para todo $x \in B_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$.

I.2.2. PROPOSICION. La funcional lineal F *tiene las propiedades siguientes:*

i) F *es positiva, es decir, si* $x(s) \geq 0$ *para todo* $s \in \mathbb{T}$, *entonces* $F(x) \geq 0$.

ii) F *es invariante por rotaciones del círculo, es decir si* $x,y \in B_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ *son funciones que cumplen* $x(s+s_o) = y(s)$ *para algún* s_o *y todo* s, *entonces* $F(x) = F(y)$.

iii) $F(e) = 1$.

Demostración: Como $F(x) \leq p(x)$ para toda $x \in B_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ se tiene también $F(x) = -F(-x) \geq -p(-x)$. Supongamos que $x \geq 0$. Entonces $\text{Sup}\,(-x) \leq 0$ y por lo tanto utilizando I.2.1.i) se concluye que $p(-x) \leq \text{Sup}\,(-x) \leq 0$. Luego $F(x) \geq -p(-x) \geq 0$ y i) resulta. Supongamos ahora que x,y satisfacen las condiciones de ii) y consideremos las familias $A_n = (s_o, 2s_o, 3s_o, \ldots, ns_o)$ para $n = 1,2,\ldots$. Entonces

$$\Sigma_{k=1}^{n}(x-y)(s+ks_o) = \Sigma_{k=1}^{n}(x(s+ks_o)-y(s+ks_o))$$

$$= \Sigma_{k=1}^{n}(x(s+ks_o) - x(s+(k+1)s_o))$$

$$= x(s+s_o) - x(s+ns_o) \leq 2\|x\|,$$

y por lo tanto $M(x-y,A_n) \leqslant \frac{1}{n} 2\|x\|$. De aquí resulta $p(x-y) \leqslant 0$, y analogamente $p(y-x) \leqslant 0$. Pero entonces

$$F(x) - F(y) = F(x-y) \leqslant p(x-y) \leqslant 0$$

$$F(y) - F(x) = F(y-x) \leqslant p(y-x) \leqslant 0$$

y vale $F(x) = F(y)$. Esto termina la prueba.

<u>*Observación:*</u> Bajo las hipótesis de ii), en realidad vale $p(x) = p(y)$, $p(x-y) = p(y-x) = 0$ lo que es más fuerte (y fácil de obtener). Esta función p está estudiada en [4].

Si para cada $x \in B_{\mathbb{R}}(\mathbb{T})$ designamos mediante $\check{x}$ la función $\check{x}(s) = x(-s)$, podemos definir una "integral"

$$(\S) \qquad \int x(s)\beta(ds) = \frac{1}{2} F(x) + \frac{1}{2} F(\check{x})$$

donde F es la funcional de I.2.2. Está claro que vale

I.2.3. PROPOSICION. La integral definida por (§) *tiene las propiedades siguientes:*

i) $\int x(s)\beta(ds)$ *está definida para toda función acotada definida en el círculo con valores reales, y es lineal en* x;

ii) *si* $x \geq 0$, *la integral es* ≥ 0;

iii) $\int x(s+s_o)\beta(ds) = \int x(s)\beta(ds)$;

iv) $\int \beta(ds) = 1$;

v) $\int x(s)\beta(ds) = \int x(-s)\beta(ds)$

Una funcional que satisface las propiedades i) a v) se llama un *promedio de Banach* o una *integral de Banach*. Hay muchas integrales de Banach distintas puesto que la funcional utilizada, F, no está unicamente determinada. Todas, sin embargo, extienden a la integral de Riemann. Algunas extienden a la integral de Lebesgue, y otras no [4].

§ 3. *Ecuaciones lineales*.

I.3.1. PROPOSICION. Sea X *un espacio de Banach (real o complejo) y sea* f *una función con valores escalares definida sobre un subconjunto* $G \subset X$. *Para que* f *se pueda extender a una funcional lineal y continua sobre* X *con norma no mayor que* $M > 0$ *es necesario y suficiente para que toda familia finita* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *de elementos de* G *y toda familia de escalares* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *se cumpla*

$$\left|\sum_{h=1}^{n} a_h f(x_h)\right| \leq M \left\|\sum_{h=1}^{n} a_h x_h\right\|.$$

Demostración: Necesidad: sea F la extensión; entonces $F(\Sigma a_h x_h) = \Sigma a_h F(x_h) = \Sigma a_h f(x_h)$ y por lo tanto $|\Sigma a_h f(x_h)| = |F(\Sigma a_h x_h)| \leq \|F\| \|\Sigma a_h x_h\| \leq M \|\Sigma a_h x_h\|$.

Suficiencia: Sea H el subespacio generado por G, es decir el conjunto de todas las combinaciones lineales $\Sigma a_h x_j$ y $g : H \to \mathbb{K}$ la función $g(\Sigma a_h x_h) = \Sigma a_h f(x_h)$; g está bien definida puesto que si $\Sigma a_h x_h = 0$ entonces $|\Sigma a_h f(x_h)| \leq M \|\Sigma a_h x_h\| = 0$, de manera que también $\Sigma a_h f(x_h) = 0$. Además $|g(z)| \leq M\|z\|$ y aplicando I.1.2 se obtiene la extensión buscada.

Veamos una aplicación de I.3.1.

I.3.2. TEOREMA ("Criterio de Helly", v. [6],[28]).

Sea $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_{ik} z_k = c_i$, $i = 1,2,\ldots$ *un sistema de ecuaciones lineales con infinitas incógnitas* $z_1, z_2, \ldots$ *Supongamos que* $\Sigma_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| < \infty$ *para todo* $i = 1,2,\ldots$ *Entonces existe una solución* $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ *con la propiedad* $\sup_k |z_k| \leq M$ *si y solamente si para todo sistema de escalares* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *se tiene*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} b_i c_i \right| \leq M \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{i=1}^{n} a_{ik} b_i \right| .$$

Demostración: Para cada $i = 1,2,\ldots$ la sucesión $x_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots) = (a_{ik})_{k=1}^{\infty}$ es un elemento de ℓ^1 (ver §I.1, Ejemplo C). Sea $G = \{x_i,\ i = 1,2,\ldots\}$ y $f : G \to \mathbb{K}$ la función $f(x_i) = c_i$. Entonces el criterio de Helly se reduce a la Proposición I.3.1 si se recuerda que ℓ^∞ es el dual de ℓ^1 (loc. cit.).

CAPITULO II

§1. *Teorema de Alaoglu-Bourbaki.*

Sea Y un espacio topológico, X un conjunto y consideremos el producto Y^X. Una red $(f_a)_{a\in I}$ en Y^X converge a $f\in Y^X$ en la topología producto si $f_a(x) \to f(x)$ para cada $x\in X$. Si F es un conjunto cualquiera de funciones de X en Y, llamaremos *topología de la convergencia simple* sobre X a la topología en F inducida por la topología producto a través de la inclusión $F\subset Y^X$. Una red convergente para esta topología será *simplemente* o *puntualmente* convergente.

Consideremos el caso en que X es un espacio normado sobre $\mathbb{K}$ ($=\mathbb{R}$ o $=\mathbb{C}$), e $Y=\mathbb{K}$. Como el dual X' de X es un subconjunto de $\mathbb{K}^X$, está determinada en X' la topología de la convergencia simple. En este caso particular será llamada *topología débil* de X'; se la designa habitualmente mediante w^* o, cuando es necesario poner a X y a X' en evidencia, con $\sigma(X',X)$.

II.1.1. TEOREMA (Alaoglu-Bourbaki; [1],[2],[9],[11]).

La bola unidad cerrada de X' *es compacta en la topología débil. Si* X *es separable, la bola unidad cerrada de* X' *es compacta y metrizable en la topología débil.*

Demostración: Sea B' la bola $B'=\{x'\in X';\ \|x'\|\leqslant 1\}$. La demostración se basa en que podemos intercalar entre B' y $\mathbb{K}^X$ un espacio que es compacto por razones generales. Más concretamente, si $x \in X$, sea $C(x)$ el intervalo o disco (según se trate de coeficientes reales o complejos) $C(x) = \{a \in \mathbb{K};\ |a| \leq \|x\|\}$, y definamos $C = \Pi\{C(x);\ x \in X\} \subset \mathbb{K}^X$. Como cada $C(x)$ es compacto, C resulta también compacto por el Teorema de Tijonov. Por otra parte, si $x' \in B'$ entonces $|x'(x)| \leq \|x\|$ de manera que $B' \subset C$. La demostración estará terminada si mostramos que B' es cerrado en C : supongamos que (x'_α) es una red en B' convergente a $c \in C$. Entonces para cada $x, y \in X$, $k \in \mathbb{K}$ se cumple

$$c(x+y) = \lim x'_a(x+y) = \lim x'_a(x) + \lim x'_a(y) =$$

$$= c(x) + c(y),$$

$$c(kx) = \lim x'_a(kx) = k \lim x'_a(x) = kc(x),$$

$$|c(x)| = \lim |x'_a(x)| \leq \sup_a |x'_a(x)| \leq \|x\| ,$$

lo que prueba que c es lineal y acotada con norma no mayor que 1. En definitiva se obtiene $c \in B'$ y entonces B' es cerrada en el compacto C, con lo que B' es compacta como se quería demostrar.

Supongamos ahora que X es *separable*, es decir que existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}$ densa en la bola unidad de X. Observemos que una red $\{x'_\alpha\}_\alpha$ en B' converge débilmente a x' si y solamente si $x'_\alpha(x_n) \to x'(x_n)$ para cada $n = 1,2,\ldots$. En efecto, si esta condición se cumple y $x \in X$, $\|x\| \leq 1$, para cada $\epsilon > 0$ se encontrarán n tal que $\|x-x_n\| \leq \epsilon/3$ y α_0 tal que $|x'_\alpha(x_n) - x'(x_n)| \leq \epsilon/3$ para todo $\alpha \geq \alpha_0$. En estas condiciones,

$$|x'_\alpha(x)-x'(x)| \leq |x'_\alpha(x)-x'_\alpha(x_n)| + |x'_\alpha(x_n)-x'(x_n)| +$$

$$+|x'(x_n)-x'(x)| \leq \|x'\| \; \|x-x_n\| + |x'_\alpha(x_n)-x'(x_n)| +$$

$$+ \|x'\| \; \|x_n-x\| \leq \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon .$$

Luego $x'_\alpha(x) \to x'(x)$ para todo x con $\|x\| \leq 1$, es decir $x'_\alpha \to x'$ débilmente; la recíproca es inmediata. Es suficiente observar ahora que $x'_\alpha(x_n) \to x'(x_n)$ para cada n si y solamente si x'_α converge a x' en la distancia

$$d(y',x') = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \arctan|y'(x_n)-x'(x_n)| .$$

Por lo tanto esta distancia define la topología débil en B' y el teorema está demostrado.

§ 2. *Teoremas de Riesz y de Helly*.

Recordemos que una función $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ es de *varia-*

ción acotada ([7],[21],[46]) en el intervalo [a,b] si las sumas

$$\sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})|$$

están acotadas por un número real M independiente de la partición $a = x_o \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n = b$ del intervalo. El supremo de los valores de tales sumas (es decir el menor M posible) se llama la *variación total* de g sobre $[a,b]$, y se designará aquí mediante $V_a^b(g)$. Llamaremos $BV[a,b]$ al conjunto de todas las funciones reales definidas en $[a,b]$ y de variación acotada en $[a,b]$; es fácil ver que $BV[a,b]$ es un espacio vectorial real. Más aún, si $g \in BV[a,b]$ y $[c,d] \subset [a,b]$, la restricción de g a $[c,d]$ es de variación acotada, con variación total menor o igual que q. Si $g \in BV[a,b]$ y g^+ es la función $g^+(x) = V_a^x(g)$, $a \leqslant x \leqslant b$, entonces g^+ y $g^- = g^+ - g$ son no-decrecientes y en consecuencia: toda función de variación acotada es diferencia de dos funciones no-decrecientes. La afirmación recíproca es obvia ya que funciones monótonas son claramente de variación acotada. Luego esta propiedad caracteriza a $BV[a,b]$.

Si $g \in BV[a,b]$ y f es continua sobre $[a,b]$ se puede demostrar que las sumas

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,(g(x_k)-g(x_{k-1}))$$

tienen límite finito cuando se toman particiones $\{x_k\}$ de $[a,b]$, se eligen puntos ξ_k entre x_{k-1} y x_k, y se refinan las particiones de la manera habitual. El límite es el valor de la *integral de Riemann-Stieltjes* de f con respecto a g, que se designa $\int_a^b f(x)\,dg(x)$. Se demuestra sin dificultad que $f \to \int_a^b f(x)\,dg(x)$ es una funcional lineal sobre $\mathcal{C}[a,b]$ que además satisface

$$\left|\int_a^b f(x)\,dg(x)\right| \leq \|f\|_\infty V_a^b(g)$$

y por lo tanto es *continua*, con norma no mayor que $V_a^b(g)$. Luego cada $g \in BV[a,b]$ define un elemento del dual $\mathcal{C}'[a,b]$ de $\mathcal{C}[a,b]$, o dicho de otra manera, existe una aplicación $\mathcal{S} : BV[a,b] \to \mathcal{C}'[a,b]$ que resulta lineal y además satisface $\|\mathcal{S}g\| \leq V_a^b(g)$. Lo que el teorema de Riesz afirma es que $\mathcal{S}$ es suryectiva. Precisamente:

II.2.1. TEOREMA (F. Riesz, [45],[46])

Toda funcional lineal continua sobre $\mathcal{C}[a,b]$ *es de la forma*

$$f'(f) = \int_a^b f(x)\,dg(x)$$

para alguna $g \in BV[a,b]$ *y vale* $\|f'\| = V_a^b(g)$. *Existe una única* g *que es además continua a derecha en cada* $a < x < b$ *y que cumple* $g(a) = 0$.

La demostración completa puede verse en [7] o en [46], por ejemplo, pero damos a continuación una descripción de los pasos. Sea $f' \in C'[a,b]$ y definamos para $a < x \leqslant b$,

$$g(x) = \lim_{n \to \infty} f'(f_n)$$

donde $\{f_n\}$ es la sucesión de funciones definidas (para n grande) mediante $f(s) = 1$ si $a \leqslant s \leqslant x - \frac{1}{n}$, $f(s) = 0$ si $x \leqslant s \leqslant b$ y f lineal entre $x - \frac{1}{n}$ y x. Es claro que $f_n \in C[a,b]$ pero no hay límite en $C[a,b]$ para la sucesión $\{f_n\}$. Se demuestra sin embargo que el límite que define g existe y es finito y que si se completa g con $g(a) = 0$ resulta una función de $BV[a,b]$; para terminar la demostración se prueba que $f'(f) = \int_a^b f(x)\,dg(x)$ y que g tiene las propiedades enunciadas.

Es natural ahora aplicar el teorema de Alaoglu-Bourbaki (II.1.1) a la situación considerada por el teorema de Riesz. Sin embargo para demostrar el resultado más preciso, veamos primero que $C[a,b]$ es separable.

II.2.2. PROPOSICION. $C[0,1]$ *es separable.*

Es claro que el mismo argumento muestra que $C[a,b]$ es separable para todo $a < b$; esto también resulta de que $C[0,1]$ es isomorfo (= linealmente homeomorfo) a $C[a,b]$ mediante $T : C[a,b] \to C[0,1]$, $(Tf)(x) = f((1-x)a+xb)$.

Demostración de II.2.2. Sean $f \in C[0,1]$, $\epsilon > 0$ y elijamos n tal que si $|x-x'| \leq 2^{-n}$ entonces valga $|f(x)-f(x')| < \epsilon$. Sea ahora $x_o = 0$, $x_1 = 2^{-n}$, $x_2 = 2.2^{-n}$, etc., los puntos de la partición uniforme de paso 2^{-n}. Si $p(x)$ es una poligonal con vértices $(x_k, f(x_k))$ entonces para todo $x \in [x_h, x_{h+1}]$ valdrá $|f(x_k)-f(x)| \leq \epsilon$ y como $p(x)$ está entre $f(x_k)$ y $f(x_{k+1})$ concluímos que $|f(x)-p(x)| \leq |f(x_k) - f(x)| + |f(x_k) - p(x)| \leq 2\epsilon$. Esto prueba que $\| f-p \| \leq 2\epsilon$. Se puede ahora encontrar una poligonal p' con vértices de la forma (x_k, r_k) donde r_k es racional y tal que $\| p-p' \|_\infty \leq \epsilon$: será suficiente que $|r_k - f(x_k)| \leq \epsilon$ para $h = 0,1,\ldots,2^n$. Por lo tanto el conjunto de poligonales p' es numerable y denso, de donde resulta que $C[0,1]$ es separable.

II.2.3. TEOREMA (Helly; v.[27]) *Si $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de funciones de variación acotada en $[0,1]$ tal que $\operatorname{Sup}_n V_o^1(g_n) < \infty$, entonces existen una subsucesión $\{g_{n_n}\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ y una función de variación acotada g tales que para toda función continua f se cumple*

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^1 f(x)\, dg_{n_k}(x) = \int_0^1 f(x)\, dg(x).$$

Demostración. Es suficiente combinar II.1.1 con II.2.1 y II.2.2.

Este resultado (y otros equivalentes) encuentran un campo natural de aplicación en cuestiones de convergencia de variables aleatorias (v. [36]). Ver también [21],[50] para otras aplicaciones.

§ 3. *Interludio topológico.*

II.3.1. TEOREMA. Sea E *un espacio compacto metrizable. Entonces existe una función continua suryectiva* $f : C \to E$, *donde* C *es el conjunto de Cantor.*

Recordemos que C se puede definir como el subconjunto de $[0,1]$ formado por todos los posibles valores $\sum_{n=1}^{\infty} a_n 3^{-n}$ donde $a_n = 0$ ó $a_n = 2$ para cada $n = 1,2,\ldots$. No es difícil ver que si $D = \{0,1\}$, la aplicación $\varphi : D^{\mathbb{N}} \to C$ definida por $\varphi(a_1,a_2,\ldots) = \sum_{n=1}^{\infty} 2a_n 3^{-n}$ es un homeomorfismo de $D^{\mathbb{N}}$ sobre C.

También, la aplicación $\psi : D^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ definida por $\psi(a_1,a_2,\ldots) = \sum_{n=1} a_n 2^{-n}$ es continua y suryectiva (pero no inyectiva'). Por lo tanto $\psi^{\mathbb{N}} : (D^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ es también suryectiva. Pero $(D^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ se identifica con $D^{\mathbb{N}}$ de manera que existe una aplicación $\psi' : D^{\mathbb{N}} \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ que es *continua y suryectiva.* Luego $\pi = \psi'\varphi^{-1}$ es una aplicación $\pi : C \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ *continua y suryectiva.* Sea ahora E un espacio compacto metrizable y d una métrica para E tal que $d(x,y) \leqslant 1$ para todo par $x,y \in E$. Nuestro próximo paso es definir $h : E \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ tal que h es un homeomorfismo de E con $h(E)$. Primero, sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión densa en E (la separabilidad de los compactos metrizables es fácil de obtener; v. [20], [34]) y definamos $h(x) = \{d(x,x_n)\}_{n=1}^{\infty} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$. Como h seguida de cada proyección $[0,1]^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ es de la forma $x \to d(x,x_n)$, que es continua, h es también continua. Además $h(x) = h(y)$ implica $d(x,x_n) = d(y,x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que sólo ocurre cuando $x = y$. Conclusión: h es continua e inyectiva. Pero como E es compacto, eso es suficiente para que $h : E \to h(E)$ sea un homeomorfismo. El teorema II.3.1 se ha reducido entonces a demostrar que *para todo subespacio cerrado* E *de* $[0,1]^{\mathbb{N}}$, *existe una función continua suryectiva* $\varphi_E : C \to E$. Sea $C' = \pi^{-1}(E)$ (como arriba, $\pi : C \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ es cualquier función continua suryectiva). C' es cerrado en C y a C' se aplicará el resultado siguiente:

II.3.2 (v. [34]). *Si* C' *es un subconjunto cerrado de* C, *entonces existe una función continua* $g : C \to C'$ *que coincide con la identidad en* C' *(en otras palabras, todo cerrado de* C *es un retracto de* C*).*

Combinando g y π se obtiene la aplicación $f : C \to E$ deseada: $f = g.\pi$.

Observemos que de la existencia de aplicaciones continuas suryectivas $f : C \to [0,1]^n$ implica la existencia de curvas de Peano. En efecto por el teorema de Tietze (v. [20]) f tiene una extensión continua $F : [0,1] \to [0,1]^n$ que por lo tanto cubre el abierto $(0,1)^n$. Veremos que este resultado se recupera de un teorema de Banach en la próxima sección.

§4. *Teorema de inmersión de Banach y curvas de Peano*.

II.4.1. TEOREMA (Banach, [6]) *Si* X *es un espacio de Banach real separable entonces existe una transformación lineal isométrica* $T : X \to \mathcal{C}[0,1]$.

Demostración. Como X es separable, de II.1.1 resulta que la bola unidad cerrada B' del dual X' es completa y metrizable para la topología débil. Utilizando II.3.1 podemos obtener una aplicación continua suryectiva $f : C \to B'$ donde C es el conjunto de Cantor. Si $x \in X$, definamos $Tx \in \mathcal{C}[0,1]$ mediante:

$(Tx)(t) = (g(t))(x)$ *si* $t \in C$,

Tx *es lineal en la clausura de cada componente conexa de* $[0,1] \setminus C$.

Es claro que $T : X \to C[0,1]$ es lineal. También

$$\|Tx\|_\infty = \operatorname{Sup}\{|(Tx)(t)| \; ; \; t \in C\}$$

$$= \operatorname{Sup}\{|(g(t))(x)| ; \; t \in C\}$$

$$= \operatorname{Sup}\{|x'(x)| \; ; \; x' \in X', \; \|x'\| = 1\}$$

y como por I.1.3 la última expresión coincide con $\|x\|$, se obtiene $\|Tx\|_\infty = \|x\|$ de manera que T es isométrica y el teorema está probado.

En lo sucesivo, consideremos el espacio euclídeo real n-dimensional $\mathbb{R}^n$ provisto de la norma habitual

$$(*) \qquad \|x\| = \left(\sum_{h=1}^{n} |x_h|^2\right)^{1/2} .$$

Se trata de un espacio de Hilbert real con el producto escalar $[x,y] = \Sigma\, x_h y_h$ del que resulta la norma (*). Por lo tanto si $T : \mathbb{R}^n \to V$ es una transformación lineal biyectiva entre $\mathbb{R}^n$ y un espacio vectorial V, entonces V hereda de $\mathbb{R}^n$ una estructura de espacio de Hilbert definida por el producto escalar $[u,v] = [T^{-1}u, T^{-1}v]$.

II.4.2. TEOREMA (Donoghue; v.[19]) *Sean* $T : \mathbb{R}^n \to C[0,1]$ *una transformación lineal isométrica y* $f_1, f_2, \dots, f_k$ *con* $k < n$, *funciones linealmente independientes* *contenidas en la imagen de* T. *Entonces la curva* $t \to (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_k(t))$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ *cubre un abierto de* $\mathbb{R}^k$.

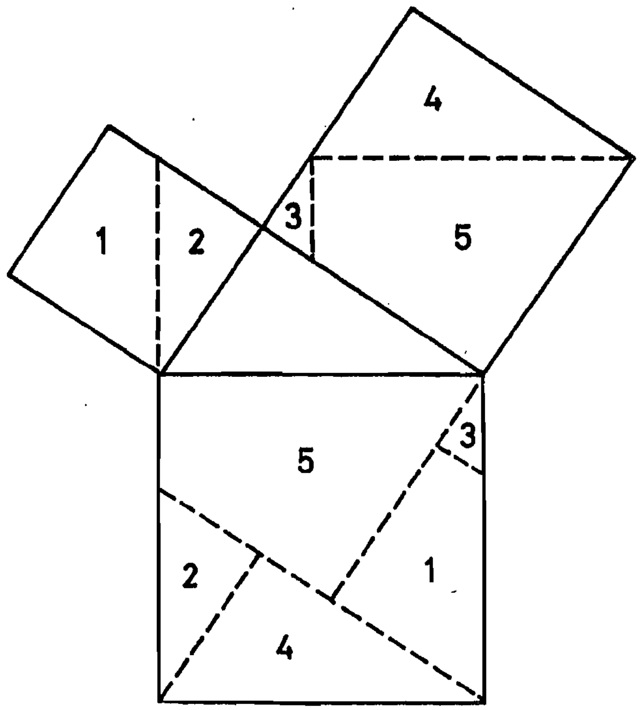
Demostración. De las hipótesis resulta que V tiene una estructura de espacio de Hilbert cuya norma coincide con la norma supremo de funciones. Si $0 \leqslant t \leqslant 1$, la funcional sobre V definida por $b \to b(t)$ es lineal y continua con norma 1 de manera que existe una función $K_t \in V$ tal que $\|K_t\| = 1$ y $f(t) = [f, K_t]$ para toda $f \in V$. Supongamos que $f \in V$ tenga $\|f\| = 1$. Como $t \to f(t) = [f, K_t]$ es continua, existe $s \in [0,1]$ tal que $[f, K_s] = \sup_t |f(t)| = \|f\| = 1$. Pero entonces $|[f, K_s]| = \|f\| \, \|K_s\|$ y como ocurre siempre en un espacio con producto escalar esto implica $K_s = \pm f$. Esto implica que la esfera $S = \{ f \in V;\ \|f\| = 1\}$ de V coincide con $K \cup (-K)$ donde $K = \{K_t;\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$. Sea ahora L el subespacio de V generado por $f_1, f_2, \ldots, f_k$ y Z su ortogonal, de manera que $V = L \oplus Z$ y $[x, z] = 0$ si $x \in L$ y $z \in Z$. Como $\dim L = k < \dim V$ es claro que $Z \neq 0$. Llamemos $P : V \to L$ a la proyección de $Y = L \oplus Z$ sobre el primer sumando. Es claro que $\|x \oplus z\|^2 = \|x\|^2 + \|z\|^2$ (teorema de Pitágoras, v. [23], Libro I, Proposición 46), de manera que si $\|x\| \leqslant 1$, $x \in L$ y z es cualquier elemento de Z tal que $\|z\|^2 = 1 - \|z\|^2$, entonces $P(x \oplus z) = x$ y por lo tanto $P(S) = P(K) \cup P(-K)$ *cubre la bola unidad* B de L. Como $t \to K_t$

es continua, K y a posteriori $P(K)$ y $P(-K)$, son compactos. De allí resulta que como $P(K) \cup P(-K)$ tiene interior no vacío en L, entonces $P(K)$ o $P(-K)$ (y por lo tanto ambos!) tiene interior no vacío en L. Finalmente si $D : L \to \mathbb{R}^k$ es el isomorfismo $Dv = \{[f_j,v]\}_{j=1,2,\ldots,k}$, entonces la imagen de la curva $t \to DK_t$ cubre un abierto en $\mathbb{R}^k$ y como vale $(DK_t)_j = [f_j,K_t] = f_j(t)$, el teorema está probado.

Mediante manipuleos elementales y utilizando II.4.1 y II.4.2 se concluye también:

II.4.3. COROLARIO. Para cada $k = 1,2,\ldots$ *existe una curva continua* $t \to (f_1(t),f_2(t),\ldots,f_k(t))$, $0 \leq t \leq 1$ *cuya imagen es la bola unidad de* $\mathbb{R}^k$.

Este es el resultado probado originariamente (para $k = 2$) por Peano (v. [43]).



4
1
2
3
5
5
3
2
1
4

CAPITULO III

§ 1. *Teorema de Baire*

III.1.1. TEOREMA. (Baire, v. [3],[10] note historique).

Sea X *un espacio métrico completo y* $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión de abiertos densos de* X *. Entonces* $\cap\{G_n \; ; \; n \geqslant 1\}$ *es denso en* X.

Demostración. Sea W un abierto no vacío de X. Demostraremos que $\cap G_n$ tiene un punto en común con W. Puesto que G_1 es denso, $W\cap G_1$ es un abierto no vacío. Sean $x\in W\cap G_1$ y $0 < r_1 \leqslant 1$ tales que la bola cerrada $\bar{B}(x_1,r_1)$ con centro en x_1 y radio r_1 satisfaga $\bar{B}(x_1,r_1)\subset W\cap G_1$. El conjunto $\bar{B}(x_1,r_1)\cap G_2$ tiene interior no vacío (porque G_2 es denso y abierto); sean entonces $x_2\in \bar{B}(x_1,r_1)\cap G_2$ y $0\leqslant r_2 \leqslant 1/2$ tales que $\bar{B}(x_2,r_2)\subset \bar{B}_1(x_1,r_1)\cap G_2$. El procedimiento se repite para producir puntos $x_1,x_2,\ldots$ y bolas $\bar{B}_1\supset \bar{B}_2\supset\ldots$ tales que $\bar{B}_{n+1}\subset \bar{B}_n\cap G_{n+1}$. Es inmediato (ya que $r_n\to 0$) que la sucesión de los centros $\{x_n\}$ es de Cauchy; sea entonces $x_\infty = \lim x_n$ su límite. Como $x_m\in \bar{B}_n$ para todo $m \geqslant n$ se concluye que $x_\infty\in \bar{B}_n$ para todo n, y entonces $x_\infty \in \bar{B}_n$. Como además $\cap \bar{B}_n\subset\cap G_n$ y $\bar{B}_1\subset W$ se concluye que $x_\infty\in(\cap G_n)\cap W$ con lo que se prueba que $\cap G_n$ es denso como se quería.

III.1.2. COROLARIO. Bajo las mismas hipótesis, una unión numerable de cerrados con interior vacío tienen también interior vacío.

Definición: Un subconjunto A de un espacio topológico X es *magro* si su clausura tiene interior vacío. Un subconjunto $B \subset X$ es de *primera categoría* si se lo puede cubrir con una familia numerable de conjuntos magros. Si en X todo subconjunto de 1ª categoría tiene interior vacío, se dice que X es un *espacio de Baire*.

El teorema III.1.1 equivale a afirmar que un espacio métrico completo es un espacio de Baire (usar el corolario III.1.2). Bourbaki [10] y Dugindji [20] dan los teoremas habituales sobre espacios de Baire. Oxtobz ([42]) ha obtenido un ejemplo de un espacio de Baire X tal que $X \times X$ no es de Baire.

§ 2. *Funciones continuas no derivables*

III.2.1. *TEOREMA* (Banach,[6]). *El subconjunto de* $C[0,1]$ *formado por las funciones derivables en algún punto interior de* $[0,1]$ *es de primera categoría.*

Demostración. Sea N_n el conjunto de las funciones $f \in C[0,1]$ tales que para algún $x \in [0,1 - \frac{1}{n}]$ se cumple $|(f(x+h)-f(x))/h| \leq n$ para todo $0 < h \leq 1/n$. Si $f \in C[0,1]$ es derivable en algún punto de $(0,1)$, entonces es evidente que f pertenece a un N_n adecuado y por lo tanto $N = \cup\{N_n \; ; \; n = 1,2,\ldots\}$ contiene a todas las funciones continuas derivables en algún punto de $(0,1)$. Afirmamos que N_n es cerrado para cada $n = 1,2,\ldots$. En efecto supongamos que $0 < h_o \leq \frac{1}{n}$ y sea $g : \mathcal{C}[0,1]\times[0,1-1/n] \to \mathbb{R}$ la función $g(f,x) = |(f(x+h_o)-f(x))/h_o|$. Esta función g es continua para la topología producto y entonces el conjunto

$$F(n,h_o) = \{(f,x);\ g(f,x) \leq n\}$$

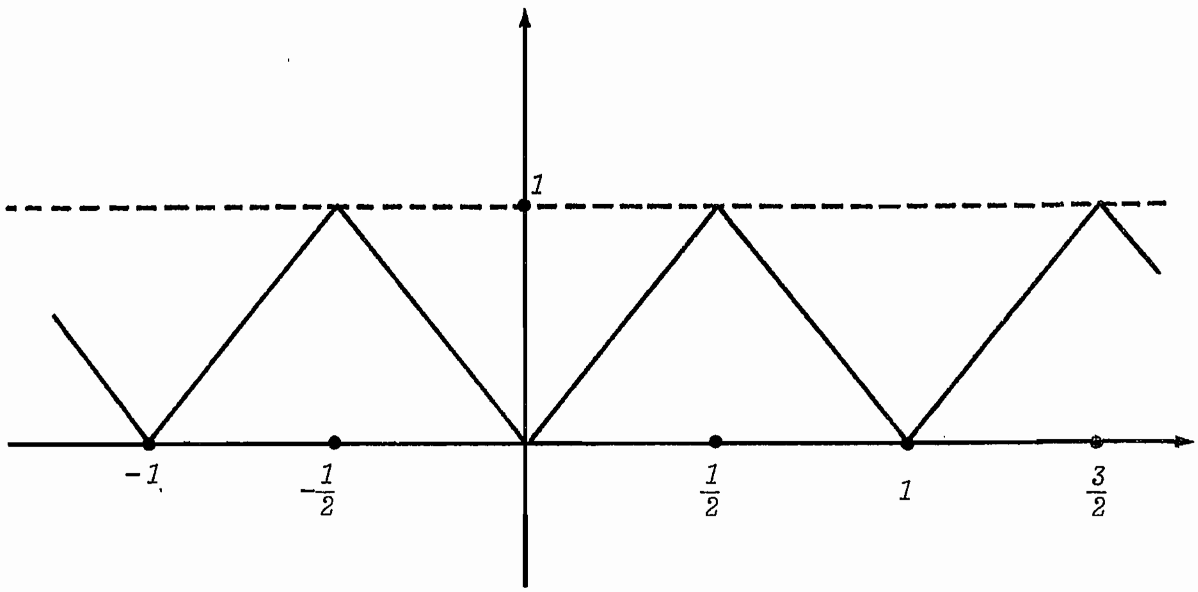
es cerrado en $\mathcal{C}[0,1]\times[0,1-1/n]$. Como $[0,1-1/n]$ es compacto, la proyección de $F(n,h_o)$ sobre el primer factor $\mathcal{C}[0,1]$ debe ser cerrada, es decir

$$F'(n,h_o) = \{f\in\mathcal{C}[0,1];\ \exists\, x\in[0,1-1/n] \text{ tal que } g(f,x) \leq n\}$$

es cerrado en $\mathcal{C}[0,1]$. Pero entonces $N_n = \cap\{F'(n,h_o);\ 0 < h_o \leq 1/n\}$ es también cerrado, como queríamos.

Ahora demostraremos que N_n tiene interior vacío. Si $f\in N_n$ y $\epsilon > 0$, según la demostración de II.2.2, existe una poligonal p con vértices sobre los números diádicos $q2^{-n}$, $q = 0,1,\ldots,2^n$ tal que $\|f-p\| < \epsilon$ de manera que para demostrar que en todo entorno de f hay funciones fuera de N_n será suficiente hacerlo para las poligonales, es decir podemos suponer que f misma es una poligonal con vértices en $(q2^{-n}, f(q2^{-n}))$. Sea ahora $t\in\mathcal{C}[0,1]$ la función

$t(x) = aP(2^{\ell} x)$ donde a y ℓ son números positivos que se determinarán y P es la función de la figura



Como $\|t\| = a$ es claro que $\|(f+t)-f\| \leqslant \epsilon$ para toda elección de $a<\epsilon$. Sea ahora $0 \leqslant x \leqslant 1-1/n$. Cualquiera sea $0<h \leqslant 1/n$ se tiene

$$\frac{(f+t)(x+h)-(f+t)(x)}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{t(x+h)-t(x)}{h}$$

o sea

$$\left|\frac{(f+t)(x+h)-(f+t)(x)}{h}\right| \geqslant \left|\frac{t(x+h)-t(x)}{h}\right| - \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|$$

Es claro por otra parte que $M = \mathrm{Sup}_{x,h}|(f(x+h)-f(x))/h| < \infty$ ya que f es una poligonal y que

$$\mathrm{Sup}\{|(t(x+h)-t(x))/h|;\ h>0\} = a2^{\ell+1}$$

cualquiera sea x fijo. Si se eligen a y ℓ tales que $a < \epsilon$, $a2^{\ell} > M+n$, es claro que cualquiera sea $0 \leqslant x \leqslant 1/n$ existirá $0 < h \leqslant 1/n$ tal que $|t(x+h)-t(x)|/h \geqslant a2^{\ell}$ y por lo tanto se tendrá

$$\left| \frac{(f+t)(x+h)-(f+t)(x)}{h} \right| > n$$

o en otras palabras, $f+t \notin N_n$ y $\|(f+t)-f\| < \epsilon$, lo que termina la demostración de que N_n tiene interior vacío. Con esto termina también la prueba del teorema que ya entonces $N = \cup N_n$ es primera categoría, y a posteriori el conjunto de funciones continuas derivables en algún punto interior de $[0,1]$, por estar contenido en N, es también de primera categoría.

III.2.2. COROLARIO. Toda función real continua en $[0,1]$ *se puede aproximar uniformemente por funciones continuas no derivables en ningún punto de* $(0,1)$. *

El mismo tipo de argumento se utiliza para demostrar por ejemplo que el conjunto de funciones C^{∞} que son analíticas en algún punto es de 1ª categoría en la topología adecuada (ver [20], XIV, 4,3). Por lo tanto, "la mayoría de las funciones C no son analíticas en ningún punto".

§ 3. *Teorema de Banach-Steinhaus y series de Fourier divergentes.*

III.3.1. TEOREMA (Banach-Steinhaus). *Si* $\{T_j\}_{j\in J}$ *es una familia de operadores lineales continuos de un espacio de Banach* X *en otro* Y *tal que para cada* $x\in X$ *valga* $\mathrm{Sup}\{\|T_j x\| ; j\in J\} < \infty$, *entonces* $\mathrm{Sup}\{\|T_j\| , j\in J\} < +\infty$.

Demostración. Sea Y_1 la bola unidad cerrada de Y y $B = \cap\{T_j^{-1}(Y_1); j\in J\}$. Puesto que Y_1 es cerrado y cada T_j continuo, se concluye que B es un cerrado de X, evidentemente convexo y simétrico respecto de $0\in X$. Además si $x\in X$ y $n\geqslant \mathrm{Sup}\{\|T_j x\|; j\in J\}$, entonces $\frac{1}{n}x\in B$, de manera que $X = \cup\{nB; n = 1,2,...\}$. Pero entonces por III.1.2, algún nB tiene interior no vacío y es calro que en este caso mismo tiene interior no vacío ($x \to nx$ es un homeomorfismo de X sobre X). Probemos que entonces 0 es un punto interior de B. Si una bola V con centro t y radio $r>0$ está contenida en B, entonces $-V$, la bola con igual radio y centro en $-t$, también está contenida en B, por simetría. Como B es también convexo, vale $\frac{1}{2}(V+(-V)) \subset B$. Pero $\frac{1}{2}(V+(-V))$ contiene a la bola con centro en 0 y radio r, como queríamos probar. Finalmente, si $\|x\| \leqslant 1$ entonces $rx \in B$ y por lo tanto $\|T_j rx\| \leqslant 1$ de manera que $\|T_j\| \leqslant 1/r$ para todo j, lo que demuestra el teorema.

Aplicaremos este teorema para demostrar que algunas funciones continuas tienen series de Fourier divergente en un punto (o en un conjunto numberable). Si $f \in \mathcal{C}\,[0,2]$, sea

$$S(f) = \frac{a}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

son serie de Fourier, es decir

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\, dx, \qquad n = 0,1,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} nx\, dx, \qquad n = 1,2,\ldots$$

Definamos $S_N(f)$ como la suma parcial

$$S_N(f) = \frac{a_o}{2} + \Sigma_{n=1}^{N} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx.$$

Se demuestra mediante identidades trigonométricas (v. por ejemplo [32],[33]) que

$$[S_N(f)](x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\frac{\operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})(t-x)}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(t-x)}\,dt.$$

En particular

$$[S_N(f)](0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,\frac{\operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})t}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\,dt.$$

Observemos que la funcional $A_N : f \to [S_N(f)](0)$ es lineal y continua sobre $C[0,2]$. Más aún, es claro que

$$(*) \qquad \|A_n\| \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})t}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\right| dt$$

(y esta integral es finita ya que el integrando, completado con el valor $N+\frac{1}{2}$ en 0 y en 2 es *continuo* sobre $[0,2\pi]$). Por otro lado si llamamos $g_N(x)$ a la función

$$g_N(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{x} \frac{\operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})t}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\,dt$$

es claro que

$$A_N(f) = \int_0^{2\pi} f(x)\,dg_N(x)$$

y por lo tanto por el teorema de Riesz (II.2.1),

$$(\dagger) \qquad \|A_N\| = V_0^{2\pi}(g_N).$$

Sin embargo la variación de g_N es igual a

$$(\dagger)\qquad V_0^{2\pi}(g_N) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})t}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\right| dt$$

ya que en general, si h es continua (o aún $h\in L^1$, aunque con una demostración diferente), y $g(x) = \int_a^x h(t)\,dt$, entonces

$$|g(x_i)-g(x_{i-1})| = \left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} h(t)\,dt\right| \geq m_i(x_i-x_{i-1})$$

donde $m_i = \min\{|h(t)|;\ x_{i-1}\leq t\leq x_i\}$. Luego

$$V_a^b(g) \geq \Sigma\, m_i(x_i-x_{i-1})$$

para toda partición $a = x_o \leq \ldots \leq x_n = b$. Como estas son sumas de Riemann de $|h|$ se concluye que $V_a^b(g) \geq \int_a^b |h(t)|\,dt$. La desigualdad contraria es inmediata: $\Sigma|g(x_i)-g(x_{i-1})| = \Sigma\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} h(t)\,dt\right| \leq \Sigma\int_{x_{i-1}}^{x_i}|h(t)|\,dt = \int_a^b |h(t)|\,dt$ y entonces $V_a^b(g) = \int_a^b |h(t)|\,dt$. Entonces usando (†) y (‡)

$$(**)\qquad \| A_N \| = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})t}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\right| dt,$$

que mejora (*).

III.3.2. LEMA. La sucesión

$$c_N = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})\,t}{2\ \operatorname{sen}\frac{1}{2}\,t}\right|\ dt$$

no es acotada.

<u>*Demostración*</u>. En el intervalo $\left[\frac{\pi}{4N+2},\ \frac{3\pi}{4N+2}\right]$ vale $\left|\operatorname{sen}(N+\frac{1}{2})\,x\right| \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$. Análogamente esta desigualdad vale en cada uno de los intervalos

$$\left[\frac{5\pi}{4N+2},\ \frac{7\pi}{4N+2}\right],$$

$$\left[\frac{9\pi}{4N+2},\ \frac{11\pi}{4N+2}\right],\ \text{etc.}$$

Se concluye que

$$c_N \geqslant \frac{\sqrt{2}}{4\pi}\sum_{j=0}^{j=2N}\int_{\frac{4j+1}{4N+2}\pi}^{\frac{4j+3}{4N+2}\pi}\frac{dt}{|\operatorname{sen}\frac{t}{2}|} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{\sqrt{2}}{4\pi}\sum_{j=0}^{j=2N}\int_{\frac{4j+1}{4N+2}\pi}^{\frac{4j+3}{4N+2}\pi}\frac{dt}{|\frac{t}{2}|} \geqslant$$

$$\geq \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \sum_{j=0}^{j=2N} \frac{2\pi}{4N+2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}\,\frac{4j+3}{4N+2}} = \sqrt{2} \sum_{j=0}^{j=2N} \frac{1}{4j+3} \,,$$

y es claro que la serie $\Sigma\, 1/(4j+3)$ diverge, de donde resulta el lema.

III.3.3. COROLARIO. Existen funciones continuas, tales que las sumas parciales $S_N(f)$ *no son acotadas en* 0.

Demostración. Resulta de combinar III.3.1 con III.3.2 y (**).

Mediante manipuleos elementales a partir de f con las propiedades de III.3.3 se pueden describir funciones tales que en un conjunto finito o numberable de valores prefijados entre 0 y 2π, tengan serie de Fourier con sumas parciales no acotadas *en todos ellos*. Por otra parte, la serie de Fourier de una función *continua* no pueden diverger a $+\infty$ o a $-\infty$ en ningún punto, ya que sus sumas son convergentes a un valor finito (detalles en [32], p. 52, por ejemplo).

CAPITULO IV

§1. *Algebras de Banach*.

Referencias generales para este Capítulo son [12],[44],[21], [29] (vol. II), [39].

IV.1.1. Definición: Un *álgebra de Banach* (real o compleja) es un par $(A,\|\cdot\|)$ en el que A es un álgebra (real o compleja, respectivamente) y $\|\ \|$ una norma sobre A tales que

i) A con la norma $\|\ \|$ y la estructura de espacio vectorial subyacente es un espacio de Banach;

ii) para todo par de elementos a,b en A se tiene $\|ab\| \leqslant \|a\|\,\|b\|$.

IV.1.2. Nota. Sin la completitud $(A,\|\ \|)$ se llama un álgebra normada. La completación de un álgebra normada es un álgebra de Banach. Por abuso de lenguaje diremos "A es un álgebra de Banach" cuando no haya posibilidad de confusión acerca de la norma que deberá ser usada.

IV.1.3. Ejemplos:

A. $\mathbb{C}$ con su estructura ordinaria es un álgebra de Banach real y también compleja.

B. Si X es un espacio de Banach, $L(X)$ con las operaciones vectoriales ordinarias, la norma de operadores y la composición de operadores como producto, es un álgebra de Banach. En particular el álgebra $M_n(\mathbb{K})$ de las matrices $n\times n$ con coeficientes en $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, es un álgebra de Banach de dimensión n^2 sobre $\mathbb{K}$. Estas álgebras siempre tienen identidad.

C. Si E es un espacio localmente compacto y $C^b_{\mathbb{K}}(E)$ es el espacio de las funciones con valores en $\mathbb{K}$, continuas y acotadas sobre E, con la norma

$$\|f\| = \operatorname{Sup}\{|f(x)|\,;\ x\in E\}$$

y la suma y el producto definidas punto por punto (esto es, $(f\times g)(x) = f(x) + g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$) es un álgebra de Banach conmutativa con identidad. El conjunto $C^c_{\mathbb{K}}(E)$ de las funciones de $C^b_{\mathbb{K}}(E)$ con soporte compacto es un *ideal* de $C^b_{\mathbb{K}}(E)$, cuya clausura $C^o_{\mathbb{K}}(E)$ es el álgebra de Banach de las funciones nulas en ∞, que no tiene unidad si E no es compacto; por otra parte, cuando E es compacto

$$C^c_{\mathbb{K}}(E) = C^o_{\mathbb{K}}(E) = C^b_{\mathbb{K}}(E) = C_{\mathbb{K}}(E).$$

D. Sea $A = \ell^1(\mathbb{Z}) = \{(a_n)_{n\in\mathbb{Z}} : \|(a_n)\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n| < \infty\}$ con la suma y el producto por escalares habituales y con el producto definido por

$$(ab)_n = \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p b_{n-p} \ ,$$

para $a = (a_n)$, $b = (b_n)$.

Esta álgebra de Banach es un caso particular de la situación $A = L^1(G,dx)$ donde G es un grupo localmente compacto, dx una medida de Haar en G y el producto de f y g en A está definido por

$$(fg)(x) = \int_G f(y)g(xy^{-1})dx.$$

E. Si $a \in \ell^1(\mathbb{Z})$ y $\hat{a} : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ está definida por

$$\hat{a}(e^{it}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{int}$$

es claro que $a \to \hat{a}$ es un homomorfismo inyectivo de $\ell^1(\mathbb{Z})$ en $C_{\mathbb{C}}(\mathbb{T})$. Su imagen

$$\hat{A} = \{\hat{a} : a \in \ell^1(\mathbb{Z})\}$$

con la norma $\|\hat{a}\| = \|a\|_1$ es llamada el *álgebra de Wiener* ([44]) y coincide con el álgebra de las sumas de las series de Fourier absolutamente convergentes. Este es un caso particular de la situación habitual en la teoría de dualidad de grupos localmente compactos ([12]).

§ 2. *Espectros y caracteres.*

En este parágrafo A es un álgebra de Banach compleja con identidad e.

IV.2.1. Definición. Si $x \in A$ el *espectro* de X es el conjunto

$$Sp(x) = \{\lambda \in \mathbb{C};\ x-\lambda \text{ no es inversible en } A\}.$$

Entonces un elemento $x \in A$ es inversible exactamente cuando $0 \notin Sp(x)$. Es fácil ver que si $h : A \to B$ es un homomorfismo (no necesariamente continuo) que respeta las identidades entonces $Sp(x) \supset Sp(h(x))$ cualquiera sea $x \in A$.

IV.2.2. Definición. Un *carácter* de A es homomorfismo de A en $\mathbb{K}$ que respeta las identidades. El conjunto de los caracteres de A se denota con $Car(A)$.

IV.2.3. Definición. Si x A la *transformada de Fourier-Gelfand* de x es la función $Gx : Car(A) \to \mathbb{C}$ definida mediante

$$Gx : c \to c(x).$$

La aplicación $G : A \to \mathbb{C}^{\mathrm{Car}(A)}$ se llamará la *transformación de Fourier-Gelfand.*

IV.2.4. *Proposición.* G es un homomorfismo de álgebras.

IV.2.5. *Proposición.* *La imagen de la función* Gx *está contenida en* $\mathrm{Sp}(x)$.

Demostración: Si $a = Gx(c) = c(x)$ entonces $c(x-ae) = c(x) - ac(e) = 0$ pues $c(e) = 1$ y por lo tanto $x-ae$ no puede ser inversible, ya que en general si $z \in A$ es inversible y $c \in \mathrm{Car}(A)$ $1 = c(e) = c(z.z^{-1}) = c(z)c(z^{-1})$ y, a fortiori, $c(z) \neq 0$.

§ 3. *Algebras de Banach conmutativas.*

Supondremos que este parágrafo que A es un álgebra de Banach conmutativa compleja con identidad e tal que $\|e\| = 1$.

IV.3.1. PROPOSICION. Todo carácter de A *es continuo. Su norma como funcional lineal es 1.*

Demostración: Sean $x \in A$, $\|x\| \leq 1$, $c \in \mathrm{Car}(A)$ y $k = c(x)$, Supongamos que $|k| > 1$. Entonces $y = k^{-1}x$ satisface $\|y\| < 1$ y $c(y) = 1$. Es claro que la serie $y + y^2 + y^3 + \ldots$ es absolutamente convergente (pues $\|y\| + \|y^2\| + \|y^3\| + \ldots \leqslant \|y\| + \|y\|^2 + \|y\|^3 + \ldots \leqslant \|y\|(1 - \|y\|)^{-1}$). Sea $z = y + y^2 + \ldots$; se puede verificar sin dificultad que $yz+y = z$. Entonces $c(y)c(z) + c(y) = c(z)$ y como $c(y) = 1$ se concluye que $c(z)+1 = c(z)$, lo que es absurdo. Esto partió de suponer $|k| > 1$. Por lo tanto $|k| \leqslant 1$ o sea que si $\|x\| \leqslant 1$ también $|c(x)| \leqslant 1$.

Como además $c(e) = 1$, está claro que $\|c\| = 1$ y la proposición queda demostrada.

En particular, $\mathrm{Car}(A)$ es un subconjunto de la esfera unidad del espacio dual A' de A:

$$\mathrm{Car}(A) \subset S = \{ a' \in A' : \|a'\| = 1\}.$$

IV.3.2. PROPOSICION. $\mathrm{Car}(A)$ *es débilmente cerrado.*

<u>*Demostración:*</u> Si $\{c_j\}$ es una red en $\mathrm{Car}(A)$ débilmente convergente a un cierto $a' \in A'$ entonces para todo x,y en A

$$\begin{aligned} a'(xy) &= \lim c_j(xy) = \lim c_j(x)c_j(y) \\ &= \lim c_j(x) \lim c_j(y) = a'(x)a'(y), \end{aligned}$$

y también $a'(e) = \lim c_j(e) = 1$, de manera que $a' \in \mathrm{Car}(A)$, como queríamos probar.

Combinando este resultado con el teorema de Alaogly-Bourbaki (II.2.1) resulta

IV.3.3. COROLARIO. Car(A) *es compacto en la topología de la convergencia puntual sobre los elementos de* A.

La siguiente es una de las propiedades fundamentales de las álgebras de Banach.

IV.3.4. PROPOSICION. Si G(A) *designa el grupo multiplicativo de los elementos inversibles de* A *entonces* G(A) *es abierto en* A *y con la topología inducida por la norma* G(A) *es un grupo topológico.*

Demostración. Si $\|a\| < 1$, ya se demostró en IV.3.1 ya que la serie $e + a + a^2 + \dots$ converge a un elemento b. Se tiene $(e-a)b = b(e-a) = e + a + a^2 + \dots - a - a^2 - \dots = e$. Luego $e-a$ es inversible y $b = (e-a)^{-1}$. Esto prueba que la bola abierta de centro e y radio 1 está contenida en G(A). Sea x G(A). Si $\|a\| < \|x^{-1}\|^{-1}$ entonces $1 > \|x^{-1}\| \|a\| \geqslant \|x^{-1}a\|$ y por lo anterior $e-x^{-1}a$ G(A); pero entonces

$$(x-a)(e-x^{-1}a)^{-1}x^{-1} = x(e-x^{-1}a)(e-x^{-1}a)^{-1}x^{-1} = e$$

y

$$(e-x^{-1}a)^{-1}x^{-1}(x-a) = (e-x^{-1}a)^{-1}(e-x^{-1}a) = e$$

y entonces $x-a$ es también inversible, con inversa $(x-a)^{-1} = x^{-1}(e-x^{-1}a)^{-1}$. Esto prueba que si $x \in G(A)$ la bola abierta de centro x y radio $\|x^{-1}\|^{-1}$ está contenida en $G(A)$. Luego $G(A)$ es abierto en A. Es claro que el producto en $G(A)$ es continuo. Para probar la continuidad de la inversa basta mostrar que si $a_n \to 0$ y $x \in G(A)$ entonces $(x-a_n)^{-1} \to x^{-1}$. Pero como

$$(x-a_n)^{-1}-x^{-1} = x^{-1}(e-x^{-1}a_n)^{-1}-x^{-1}$$

$$= -x^{-1}(e-(e-x^{-1}a_n)^{-1}),$$

se concluye que

$$\|(x-a_n)^{-1}-x^{-1}\| \leq \|x^{-1}\| \|e-(e-x^{-1}a_n)^{-1}\|$$

$$= \|x^{-1}\| \|x^{-1}a_n + (x^{-1}a_n)^2 + \dots\|$$

$$\leq \|x^{-1}\|^2 \|a_n\| (1-\|x^{-1}a_n\|)^{-1}$$

que tiende a 0 cuando $n \to \infty$, como queríamos probar.

IV.3.5. COROLARIO. El espectro de un elemento $x \in A$ *es un conjunto compacto.*

Demostración. Si $|k| > \|x\|$ entonces $x-ke = k(k^{-1}x-e)$ y como $\|k^{-1}x\| < 1$, por IV.3.4 $k^{-1}x-e$ tiene inversa y entonces $k \notin Sp(x)$, lo que prueba que $Sp(x)$ está contenida en la bola cerrada del plano $\mathbb{C}$ con centro O y radio $\|x\|$.

Además, si $k \notin Sp(x)$ y $|k-k'| < \epsilon$ entonces

$$\|(x-ke) - (x-k'e)\| = |k-k'| < \epsilon$$

de manera que, cuando ϵ es suficientemente chico (por ejemplo menor que $\|(x-ke)^{-1}\|^{-1}$) resulta de IV.3.4 que $x-k'e$ es también inversible, es decir que $k' \notin Sp(x)$. En consecuencia $\mathbb{C} \setminus Sp(x)$ es abierto y así $Sp(x)$ resulta cerrado y acotado como se quería probar.

IV.3.6. COROLARIO. Sean $x \in A$ *y* $k \notin Sp(x)$. *Si* $R(x,k) := (x-ke)^{-1}$ *entonces para cada funcional lineal continua* x' *sobre* A *la función*

$$f(k) = x'(E(x,k))$$

es holomorfa en el abierto $\mathbb{C} \setminus Sp(x)$. *Además, si* $\|x\| < k$ *se cumple* $|f(k)| \leqslant \|x'\| \, |k|^{-1}(1-\|k^{-1}x\|)^{-1}$.

<u>*Demostración*</u>. Un argumento trivial prueba la igualdad

$$R(x,k) - R(x,h) = (k-h)R(x,k)R(x,h)$$

de donde

$$\frac{R(x,k) - R(x,h)}{k-h} = R(x,k)R(x,h).$$

Como la operación $x \to x^{-1}$ es continua en $G(A)$, por IV.3.4, también $k \to R(x,k)$ es continua de manera que si tiene

$$\lim_{h \to k} \frac{R(x,k) - R(x,h)}{k-h} = R(x,k)^2 .$$

Pero entonces

$$\lim_{h \to k} \frac{f(k)-f(h)}{k-h} = \lim_{h \to k} x' \left(\frac{R(x,k)-R(x,h)}{k-h}\right)$$

$$= x'(R(x,k)^2)$$

y por lo tanto f es holomorfa.

Finalmente, si $|k| \quad \|x\|$ tenemos

$$|f(k)| \leqslant \|x'\| \ \|R(x,k)\|$$

$$= \|x'\| \ \|(x-ke)^{-1}\|$$

$$= \|x'\| \ |k^{-1}| \ \|(k^{-1}x-e)^{-1}\|$$

$$\leqslant \|x'\| \ |k|^{-1}(1-\|k^{-1}x\|)^{-1}$$

como se quería probar.

IV.3.7. COROLARIO. (Teorema de Gelfand-Mazur, [25],[37]).

Si A *es un álgebra de Banach compleja y* $x \in A$ *entonces* $Sp(x) \neq \emptyset$.

<u>*Demostración*</u>. Supongamos que $Sp(x) = \emptyset$. Entonces para cada x' A', $f(k) = x'(R(x,k))$ es una función *entera* que satisface $|f(k)| \leq |k|^{-1} \, |1-\|x\| \, |k|^{-1}|$ cerca de infinito y por lo tanto $f \to 0$ cuando $|k| \to \infty$. En particular f es acotada y por el teorema de Liouville ([13]) f es constante y ya que $f \to 0$, será necesariamente $f \equiv 0$; es decir que $x'(R(x,k)) = 0$ para todo $k \in \mathbb{C}$, y como esto vale para toda $x' \in A'$ por el teorema de Hahn-Banach (I.1.4) debe ser $R(x,k) = 0$, lo que no es posible pues $R(x,k)$ es inversible. Esto demuestra que $Sp(x) \neq \emptyset$.

IV.3.8. COROLARIO. $\mathbb{C}$ *es la única álgebra de Banach compleja que es un cuerpo.*

<u>*Demostración*</u>. Si el álgebra de Banach A es un cuerpo entonces $k-ke$ es inversible siempre que no sea 0. Como $Sp(x) \neq \emptyset$ existe, y es obviamente único, un número complejo k_x tal que $x-k_xe = 0$, o sea $x = k_xe$. Claramente la correspondencia $x \to k_x$ define un isomorfismo entre A y $\mathbb{C}$.

IV.3.9. *Notas.* **Las demostraciones que hemos presentado son fácilmente generalizables al caso no conmutativo. Sin embargo, en el caso de álgebras de Banach no conmutativas puede ocurrir que Car(A) sea vacío (el caso más simple es el de $A = M_n(\mathbb{C})$**

§4. *Teorema de Wiener-Levy*

Supongamos que X es un espacio de Banach y g una función del intervalo $[a,b]$ con valores en X. Entonces se pueden definir las sumas de Riemann
$S = \Sigma_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) g(c_i)$ para cualquier partición $a = t_o \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n = b$ y cualquier elección de puntos intermedios $c_i \in [t_{i-1}, t_i]$. Si la red de Sumas de Riemann converge en X, su límite se llama la *integral* de g, y se designa con la notación ordinaria

$$\lim S = \int_a^b f(t)\,dt.$$

El mismo argumento usado en análisis elemental para probar que toda función *continua* es integrable Riemann se puede aplicar en este caso (o aún en el caso en que X es solamente localmente convexo y casi-completo) para obtener la misma conclusión: toda función *continua* $g : [a,b] \to X$ es integrable Riemann. Naturalmente valen también las leyes de linealidad con respecto a g y aditividad con respecto al intervalo. Finalmente, si $x' \in X'$, el dual de X, se tendrá $x'(S) = \Sigma (t_i - t_{i-1}) x'(g(c_i))$ y de la continuidad de x' resultará que

$$x'\left(\int_a^b g(t)\,dt\right) = \int_a^b x'(g(t))\,dt.$$

Si suponemos que X es complejo y $\gamma : [a,b] \to C$ un camino suave, entonces para cada f con valores en X definida en un conjunto que contenga a $v([a,b])$, podemos considerar la integral

$$\int_a^b f(v(t))v'(t)\,dt,$$

donde $v'(t) = \frac{dv}{dt}(t)$. Esta integral existe si f es continua y v es un camino suave (C^1). No es difícil probar que si $w : [a,b] \to \mathbb{C}$ es el camino $w = v \circ H$, donde H es cualquier difeomorfismo de $[a,b]$ que conserva la orientación (es decir, $H(a) = a$, $H(b) = b$), entonces

$$\int_a^b f(v(t))v'(t)\,dt = \int_a^b f(w(t))w'(t)\,dt.$$

Notaremos sencillamente

$\int_v f(k)\,dk$

el valor de la integral $\int_a^b f(v(t))v'(t)dt$; si $x' \in X'$ se tiene

$$x'\left(\int_v f(k)\,dk\right) = \int_v x'(f(k))\,dk.$$

Un estudio completo de estas cuestiones puede verse en [29].

IV.4.1. TEOREMA. (Wiener-Levy, [35],[51]).

Sea A *un álgebra de Banach compleja conmutativa y con unidad,* $x \in A$ *y* f *una función holomorfa definida en un abierto que contiene a* Sp(x) *. Entonces existe* $y \in A$ *tal que*

$$Gy = f_\circ Gx.$$

<u>*Demostración*</u>. Sea v un camino suave que encierra a Sp(x) y contenido en el dominio de f (si Sp(x) es conexo, tal camino existe siempre; si no, será necesario considerar una familia finita de caminos: la idea es la misma). Definamos

$$(*) \qquad y = (2\pi i)^{-1}\int_v f(k)R(x,k)\,dk.$$

Esta integral existe porque f y R(x,) son continuas sobre

$v([a,b])$, ya que éste no corta a $Sp(x)$. Demostraremos que el elemento y definido por (*) es solución de lo propuesto. En efecto, si $c \in Car(A)$, se tiene

$$c(y) = (2\pi i)^{-1} \int_v c(f(k)R(x,k))dk =$$

$$= (2\pi i)^{-1} \int_v f(k)(c(x)-k)^{-1}dx$$

y, ya que según IV.2.5 se tiene $c(x) \in Sp(x)$, que es interior a v, por el teorema de Cauchy

$$(2\pi i)^{-1} \int_v f(k)(c(x)-k)^{-1}dk = f(c(x)).$$

Luego $c(y) = f(c(x))$ para todo $c \in Car(A)$, lo que equivale a la tesis: $Gy = f_o Gx$.

Este teorema afirma entonces que las funciones holomorfas operan sobre el álgebra GA. Veremos un caso concreto interesante en la próxima sección.

§5. *El álgebra de Wiener*

Sea A el álgebra $A = \ell^1(\mathbb{Z})$ con el producto definido en IV.1.3.D. En lo que sigue $\delta_{n,m}$ será la "delta de

Knonecker" (= 1, si $n = m$; = 0, si $n \neq m$). La sucesión $e = \{\delta_{n,0}\ ;\ n \in \mathbb{Z}\}$ es la identidad de A. Si $d = \{\delta_{n,1}\ ;\ n \in \mathbb{Z}\}$ y $d' = \{\delta_{n,-1}\ ;\ n \in \mathbb{Z}\}$ entonces $dd' = d'd = e$ (o sea $d' = d^{-1}$) y para toda sucesión $a = \{a_n\ ;\ n \in \mathbb{Z}\}$ se tiene $(da)_n = a_{n-1}$, $(d'a)_n = a_{n+1}$. En particular $d^m = \{\delta_{n,m}\ ;\ n \in \mathbb{Z}\}$ cualquiera sea $m \in \mathbb{Z}$.

Por otra parte $a = \Sigma\, a_n\, d^n$, y la serie es convergente en A, de manera que d *genera* A, en un sentido u otro. En definitiva, *los caracteres de* A *quedan determinados por su valor en* d. Veamos cómo se calculan. Podemos comenzar eligiendo $\tau = e^{it} \in \mathbb{T}^1$. Definamos ahora $c\ :\ a \to \Sigma_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \tau^n = \Sigma_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\, e^{int} = \hat{a}(\tau)$ (aquí $\hat{a}$ tiene el mismo sentido dado en IV.1.3.E). Entonces c_τ es un carácter de A. En efecto,

$$c_\tau(ab) = (ab)^\wedge(\tau) = (\hat{a}\hat{b})(\tau) = \hat{a}(\tau)\hat{b}(\tau) = c_\tau(a)\,c_\tau(b),$$

y $c_\tau(e) = 1$, de manera que $c_\tau \in \mathrm{Car}(A)$.

Sea ahora c un carácter arbitrario de A. Como $\|d\| = \|d'\|$ $(= \|d^{-1}\|) = 1$, se tendrá necesariamente $|c(d)| = 1$, y entonces $c(d) = \tau = e^{it} \in \mathbb{T}^1$. Pero entonces c coincide con c_τ en d, y por una observación anterior, $c = c_\tau$. Eso prueba que los caracteres de A son exactamente los homomorfismos $c_\tau\ :\ a \to \hat{a}(\tau)$; y de allí resulta que $(ga)(c_\tau) = \hat{a}(\tau)$, de manera que si se identifica Car(A) con $\mathbb{T}^1$ (es decir ca da c_τ con τ), el algebra de Wiener (IV.1.3.E) queda identificada con el álgebra $G\ell^1(\mathbb{Z})$ de las transformadas de Fourier-Gelfand de las series biláteras sumables. De IV.4.1 resulta entonces:

IV.5.1. TEOREMA. Si $f(t) = \Sigma_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{int}$ *es una serie de Fourier absolutamente convergente y* F *una función holomorfa en un entorno del conjunto* $\{f(t);\ t\in \mathbb{T}^1\}$, *entonces la serie de Fourier de* $F(f(t))$ *es también absolutamente convergente.*

Este teorema fué demostrado por Wiener (loc.cit.) para el caso $F(z) = \frac{1}{z}$, y por Levy (loc.cit.) como queda enunciado. La versión abstracta IV.4.1 se debe a Gelfand. Otras propiedades del álgebra de Wiener están estudiadas en [33].

CAPITULO V

§1. *Medias en grupos y semigrupos*

Sea S un conjunto, y $X = B_{\mathbb{R}}(S)$ el espacio de Banach de las funciones reales acotadas definidas en S, con la norma $\| f \| = \operatorname{Sup}\{|f(s)| \,;\, s \in S\}$. Si $f \in X$, abreviamos $f \geqslant 0$ la condición: $f(s) \geqslant 0$ para todo $s \in S$, y designamos además $e \in X$ la función $e(s) = 1$ para todo $s \in S$.

Definición: Una *media* sobre S es una funcional lineal k sobre $X = B_{\mathbb{R}}(S)$ que satisface

1) $k(e) = 1$.

2) $k(f) \geqslant 0$ si $f \geqslant 0$.

De 1) y 2) resulta: si $\| f \| \leqslant 1$ entonces $e+f \geqslant 0$ y $e-f \geqslant 0$ y por lo tanto $1+k(f) \geqslant 0$ y $1-k(f) \geqslant 0$ lo que sólo ocurre si $|k(f)| \leqslant 1$. En definitiva, k es continua y $\| k \| \leqslant 1$. Como $k(e) = 1$, en realidad $\| k \| = 1$.

Supongamos ahora que S es un *semigrupo*. Para cada $s \in S$ y cada $f \in X$ definamos f_s mediante $f_s(s') = f(ss')$. Es claro que $f_s \in X$ y que para cada $s \in S$ fijo, la correspondencia $f \to f_s$ es lineal y continua, con norma no mayor que 1; además $e_s = e$ para todo $s \in S$.

Definición: Una media k sobre el semigrupo S es *invariante* a izquierda si $k(f_s) = k(f)$ para toda $f \in X$ y todo $s \in S$. Un semigrupo es *mediable* a izquierda si posee una media invariante a izquierda.

Análogos conceptos pueden definirse reemplazando "a izquierda" por "a derecha" si en lugar de f_s se considera f^s definida por $f^s(s') = f(s's)$. En lo que sigue nos restringimos al caso de invariancia a izquierda, y usaremos simplemente *invariante*, *mediable*, etc.

V.1.1. LEMA. *Todo semigrupo abeliano es mediable*.

Demostración: Sea S un semigrupo abeliano, $X = B_{\mathbb{R}}(S)$ y $K \subset X'$ (X' = dual de X) el conjunto de las funcionales k que satisfacen 1) y 2), es decir el conjunto de las medias sobre S. Es claro que K es convexo y no vacío, ya que las "medidas de Dirac" $\delta_s(f) = f(s)$ pertenecen a K para cada $s \in S$ fijo. Es inmediato que además K es cerrado en la topología débil del dual para X' y como cada $k \in K$ tiene norma 1, se concluye que K es compacto en esa topología (Alaoglu-Boubaki, II.1.1).

Designemos con $T(s) \in L(X)$ (= espacio de operadores lineales continuos de X en X) el operador $T(s)f = f_s$ y sea ${}^tT(s) \in L(X')$ su *traspuesto*, definido por $({}^tT(s)x')(f) = x'(T(s)f) = x'(f_s)$. Es fácil ver que ${}^tT(s)K \subset K$ cualquiera sea $s \in S$. Además, *una media* $k \in K$ *es invariante si y solamente si* ${}^tT(s)k = k$ *para todo* $s \in S$. El lema se ha reducido entonces a demostrar que existen puntos fijos comunes a todas las aplicaciones ${}^tT(s)$. Para esto definamos cuando $s \in S$ y $n = 1,2,\ldots$ la aplicación $u(n,s) : X' \to X'$ mediante

$$u(n,s)x' = \frac{1}{n+1}(x' + {}^tT(s)x' + \ldots + {}^tT(s^n)x').$$

Como K es convexo, es claro que permanece invariante por todas las $u(n,s)$. Llamemos $K(n,s) = u(n,s)K$. Demostraremos que $\cap\{K(n,s) : n = 1,2,\ldots, s \in S\}$ no es vacío mediante dos observaciones. Primero, cada $u(n,s)$ es continua para la topología débil del dual(porque toda traspuesta lo es) y por lo tanto *cada* $K(n,s)$ *es débilmente compacto*. Segundo, una intersección finita

$$K(n_1,s_1) \cap K(n_2,s_2) \cap \ldots \cap K(u_m,s_m)$$

siempre contiene a $U = u(n_1,s_1)u(n_2,s_2)\ldots u(n_m,s_m)K$ (que obviamente no es vacío) ya que como S es abeliano, las $u(n,s)$ conmutan y se puede obtener U componiendolas en cualquier orden. Tomemos ahora un elemento $k \in K$ que pertenezca a todo $K(n,s)$. Eso significa que $k = u(n,s)k(n,s)$ para adecuados $k(n,s) \in K$. Tendremos

$$\frac{1}{n+1}(k(n,s) + {}^tT(s)k(n,s) + \ldots + {}^tT(s^n)k(n,s)) = k$$

y entonces también aplicando ${}^tT(s)$:

$$\frac{1}{n+1}({}^{t}T(s)k(n,s) + \ldots + {}^{t}T(s^{n+1})k(n,s)) = {}^{t}T(s)k$$

de manera que restando

$$\frac{1}{n+1}(k(n,s) - {}^{t}T(s^{n+1})k(n,s)) = k - {}^{t}T(s)k.$$

Pero entonces

$$\|k-{}^{t}T(s)k\| \leq \frac{1}{n+1}(\|k(n,s)\| + \|{}^{t}T(s^{n+1})k(n,s)\| \leq \frac{2}{n+1}$$

y por lo tanto $k = {}^{t}T(s)k$, lo que como se dijo equivale a que k sea invariante.

V.1.2. LEMA Sea G un grupo, y $H \subset G$ un subgrupo normal de G. Si H y G/H son mediables, entonces G es mediable.

Demostración: Sean h y k medias sobre H y G/H, respectivamente. Si $f \in B_{\mathbb{R}}(G)$ y $x \in G$ definamos $f^{(x)} \in B_{\mathbb{R}}(H)$ por $f^{(x)}(s) = f(xs)$. Es claro que si $y = xa$ con $a \in H$, entonces $f^{(y)} = (f^{(x)})_a$ de manera que $h(f^{(x)}) = h(f^{(y)})$. Luego se puede definir una función $F: G/H \to \mathbb{R}$ por la fórmula $F(xH) = h(f^{(x)})$. Sea finalmente $j(f) = k(F)$. Veamos que j es una media invariante sobre G. Supongamos que $\Psi(x) = \varphi(zx)$ para $z \in G$ fijo y todo $x \in G$ (o sea $\Psi = \varphi_z$)

y llamemos Φ, $\Psi \in B_{\mathbb{R}}(G/H)$ a las funciones asociadas a φ y Ψ, es decir $\Phi(x,H) = h(\varphi^{(x)})$ $\Psi(xH) = h(\Psi^{(x)})$. Se comprueba sin dificultad que $\Psi(xH) = \Phi(zxH) = \Phi(zHxH) = \Phi_{zH}(xH)$, o sea $\Psi = \Phi_{zH}$. Pero entonces por la invariancia de k, $k(\Psi) = k(\Phi)$ de donde $j(\Psi) = j(\varphi)$, como se quería demostrar.

V.1.3. COROLARIO (von Neumann 41)

Todo grupo resoluble es mediable.

__Definición:__ Sean G un grupo y X un espacio de Banach. Una *representación* de G en X es una aplicación $R : G \to L(X)$ tal que $R(1) = I$, $R(gg') = R(g)R(g')$ para todo $g,g' \in G$. La representación R es *acotada* si $\operatorname{Sup}\{\|R(g)\|;\ g \in G\} < +\infty$..

V.1.4. PROPOSICION. Si G es mediable y H un espacio de Hilbert, para cada representación acotada R de G en H existe un operador inversible $U \in L(H)$ tal que $UR(g)U^{-1}$ es unitario para todo g.

__Demostración:__ Supongamos que $M = \operatorname{Sup}\{\|R(g)\|;\ g \in G\}$. Sea (x,y) el producto escalar en H y k una media invariante sobre G. Si para cada par $x,y \in H$, $f_{x,y} \in B_{\mathbb{R}}(G)$ es la función $f_{x,y}(s) = (R(g)x, R(g)y)$, entonces $[x,y] = f(f_{x,y})$ es bilineal (sesquilineal en el caso complejo si se quiere considerar) y además

$$(*) \qquad [x,x] = k(f_{x,x}) \leqslant \| f_{x,x} \| \leqslant M^2 \| x \|^2 .$$

Por otra parte como $x = R(g^{-1})R(g)x$ para todo $g \in G$ tendremos

$$\|x\|^2 \leqslant M^2 \|R(g)x\|^2 = M^2 f_{x,x}(g)$$

de donde

$$(**) \qquad \|x\|^2 \leqslant M^2 [x,x].$$

En definitiva, (*) y (**) significan que [,] es un producto escalar que define una norma $[x,x]^{1/2}$ equivalente a la original de H, y por lo ttanto ([46], § 84) existe $U \in L(H)$ inversible tal que $(Ux,Uy) = [x,y]$ para $x,y \in H$. Ahora

$$(UR(g)U^{-1}x, UR(g)U^{-1}y) = [R(g)U^{-1}x, R(g)U^{-1}y]$$

$$= k(f_{R(g)U^{-1}x, R(g)U^{-1}y})$$

y por la invariancia de k

$$[R(g)U^{-1}x, R(g)U^{-1}y] = k(f_{U^{-1}x, U^{-1}y}) =$$

$$= [U^{-1}x, U^{-1}y] = (UU^{-1}x, UU^{-1}y) = (x,y).$$

Luego $UR(g)U^{-1}$ es unitario cualquiera sea g G. Para grupos arbitrarios no vale la conclusión de la Proposición V.1.4 (v. [22]).

V.1.5. COROLARIO (Nagy, [38]) *Si* H *es un espacio de Hilbert y* $V \in L(H)$ *es inversible y además* $\|V^n\| \leqslant M$ *para* $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, *entonces existe* $U \in L(H)$ *tal que* UVU^{-1} *es unitario*

Es suficiente tomar $G = \mathbb{Z}$ en V.1.4, con $R(n) = V^n$.

Escolio: El grupo libre de dos generadores no admite medias invariantes (es decir no es mediable). Esto se debe a un argumento simple (observado por von Neumann; ver [41]): sea G libre con generadores u, v y $A \subset G$ el subconjunto formado por la identidad y las palabras que terminan en una potencia no nula de u. Es claro que A, Av^{-1}, Av^{-2} son disjuntos de a pares de manera que cualquier media invariante k satisfará $k(f+f_v+f_{v^2}) = 3k(f) \leqslant 1$ donde f es la función característica de A. Luego $k(f) \leqslant 1/3$. Por otra parte si $x \in G$ entonces $x \in A$ ó $xu \in A$ de manera que $G = A \cup Au^{-1}$ y entonces $f(x) + f_u(x) \geqslant 1$ y se concluye $2k(f) \geqslant 1$, lo que contradice la desigualdad anterior $k(f) \leqslant 1/3$. Por lo tanto G no es mediable. Por otra parte todo grupo finito es mediable con una media invariante única dada por

$$k(f) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} f(g)$$

donde n es el número de elementos de G.

Observemos que la Proposición I.2.3 es en realidad un corolario inmediato de V.I.3, aunque la demostración dada haya sido completamente diferente.

Más aplicaciones de medias invariantes se describen en [14],[15],[16],[17] (teoría ergódica, en particular), [18] y [48] (álgebras de von Neumann (= W*)). Caracterizaciones internas de grupos mediables han sido obtenidas por Følner[24]. La demostración de Følner ha sido simplificada por Namioka [40].

REFERENCIAS

[1] ALAOGLU, Leon. "Weak convergence of linear functionals", Bull. A.M.S., vol. 44 (1938)p. 196.

[2] ALAOGLU, Leon. "Weak topologies of normed linear spaces", Annals of Math., vol. 41 (1940) pp 252-267.

[3] BAIRE, R. "Sur les fonctions de variables réelles", Ann. di Mat., t. III (1899) p. 1.

[4] BANACH, S. "Sur le probleme de la mesure", Fund. Math., vol. IV (1923) pp. 7-33.

[5] BANACH, S. "Sur les fonctionelles linéaires, II". Studia Math., vol. I (1929) pp. 223-239.

[6] BANACH, S. "Théorie des opérations linéaires", Monografie Mat. n° 1, Warszawa, 1932.

[7] BARTLE, R. "The elements of real Analysis", John Wiley (1964 y ediciones posteriores).

[8] BOHNENBLUST, H.F. and SOBCZYK, A. "Extensions of functionals on complex linear spaces", Bull. A.M.S., vol. 44 (1938) pp. 91-93.

[9] BOURBAKI, N. "Sur les espaces de Banach", C.R. Acad. Sci. Paris, t. 206 (8 juin 1938), pp. 1701-1704.

[10] BOURBAKI, N. "Topologie Générale", Cahp. 9, A.S.I. 1045, Hermann, Paris.

[11] BOURBAKI, N. "Espaces vectorials topologiques", A.S.I. 1189, 1229, Hermann, Paris.

[12] BOURBAKI, N. "Théories Spectrales", Chap. 1, A.S.I. 1332, Hermann, Paris.

[13] CARTAN, H. "Fonctions holomorphes d'une ou plusieurs variables complexes", Hermann, Paris.

[14] DAY, Mahlon M., "Amenable Semigroups", Ill. J. Math., vol. 1(1957), pp. 509-544.

[15] DAY, Mahlon M., "Means for the bounded functions and ergodicity of the bounded representations of semi-groups", Trans. A.M.S., vol. 69 (1950) pp. 276-291.

[16] DAY, Mahlon M., "Convolutions, means, and spectra", Ill. J. Math., vol. 8(1964), pp. 100-111.

[17] DAY, Mahlon, M., "Fixed-point theorems for compact convex sets", Ill. J. Math., vol. 5(1961), pp. 585-590 y vol. 8 (1964), p. 713.

[18] DIXMIER, J., "Les moyennes invariantes dans les semi-groupes et leurs applications", Acta Szeged, vol. 12(1950) pp. 213-227.

[19] DONOGHUE, W. "Continuous functions spaces isometric to Hilbert space", Proc. A.M.S., vol. 8(1957), pp. 1-2.

[20] DUGUNDJI, J. "Topology", Allyn and Bacon, Boston (1965).

[21] DUNFORD, N. and SCHWARTZ, J.T., "Linear operators", Interscience, New York (Parts I, II and III).

[22] EHRENPREIS, L. and F.I. MAUTNER, "Uniformly Bounded representations of groups", Proc. Nat. Acad. Sci., vol. 41 (1955), pp. 231-233.

[23] EUCLIDES, Elementos.

[24] FØLNER, E. "On groups with full Banach mean value", Math. Scand. vol. 3(1955), pp. 243-254.

[25] GELFAND, I. "Normierte Ringe", Mat. Sbornik, vol. 9 (1941) pp. 3-24.

[26] HAHN, H. "Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räume", J. reine u. angew. Math., vol. 157 (1927), pp. 214-229.

[27] HELLY, E. "Über lineare Funktional-operatoren", S.-B. Akad. Wiss. Wien, Ser. Math.-Naturwiss., vol. 121(1912) pp. 265--297.

[28] HELLY, E. "Über Systeme linearen Gleichungen mit unendliche

vielen Unbekanten", Monatsh. f. Math. u. Phys., vol. 31 (1921), pp. 60-91.

[29] HILLE, E. and R. PHILLIPS, "Functional Analysis and semi-groups", A.M.S. Coll. Publ., N° 31, 1957.

[30] JACOBSON, N. "Structure of Rings", A.M.S. Coll. Publ., N° 37, 1956.

[31] JAMES, R.C., "A non-reflexive Banach space isometric with its second dual", Proc. Nat. Acad. Sci., vol. 37(1951), pp. 174-177.

[32] KAHANE, J.-P., "Teoría constructiva de funciones", Cursos y Seminarios n° 5, Departamento de Matemática, Fac. Ciencias Exactas, UBA, 1961.

[33] KAHANE, J.-P., "Algebras de convolución de sucesiones, funciones y medidas sumables", Cursos y Seminarios n° 6, Departamento de Matemática, Fac. Ciencias Exactas, UBA, 1961

[34] KURATOWSKI, C., "Topologie", Monografie Mat. n° 20, P.A.N. Warszawa, 1952.

[35] LEVY, P. "Sur la convergence absolue des séries de Fourier Comp. Math., vol. 1(1934), pp. 1-14.

[36] LOEVE, M., "Probability theory", van Nostrand, 1955.

[37] MAZUR, S., "Sur les anneaux linéaires", C.R. Acad. Sci. Paris, t. 207(1938), pp. 1025-1027.

[38] NAGY, B. , "On uniformly bounded linear transformations in Hilbert space", Acta Szeged, vol. 11(1947), pp. 152--157.

[39] NAIMARK, M. A., "Normed rings", Noordhoff, Gröninger, 1959.

[40] NAMIOKA, I., "Følner's conditions for amenable groups", Math. Scand. vol. 15(1964), pp. 18-28.

[41] von NEUMANN, J., "Zur allgemeiner Theorie des Masses", Fund. Math., vol. 13(1929), pp. 73-116.

[42] OXTOBY, J. "Cartesian products of Baire Spaces", Fund. Math., vol. 49(1961), pp. 157-166.

[43] PEANO, G., "Sur une aire quiremplit toute une aire plane", Math. Ann., vol. 36(1890), pp. 157-160.

[44] RICKART, C., "General theory of Banach algebras", van Nostrand, 1960.

[45] RIESZ, F., "Sur les opérations fonctionnelles linéaires", C. R. Acad. Sci. Paris, t. 149(1909), pp. 974-977.

[46] RIESZ, F. and B. SZ.-NAGY, "Functional Analysis", Ungar.

[47] RUDIN, W., "Real and Complex Analysis", McGraw Hill, 1966.

[48] SCHWARTZ, J.T., "Two finite, non-hyperfinite, non-isomorphic factors", Comm. Pure Appl. Math., vol. 16(1963) pp. 19-26.

[49] SCOTT, W., "Group theory", Prentice Hall, 1964.

[50] SMIRNOF, L., "A course of higher mathematics", vol. V, Pergamon Press, 1964.

[51] WIENER, N., "Tauberian Theorems", Annals Math., vol. 33 (1932), pp. 1-100.

[52] YOSIDA, K., "Functional Analysis", Springer Verlag, Berlin, 1964.