ISSN 1853-709X

Fascículo 34

Cursos y seminarios de matemática

**Serie A**

*C. E. D'Attellis*

# Teoría distribucional de sistemas lineales

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2011

**Cursos y Seminarios de Matemática – Serie A**

**Fascículo 34**



ISSN 1853-709X (Versión Electrónica)
ISSN 0524-9643 (Versión Impresa)



Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

CURSOS Y SEMINARIOS DE MATEMATICA
Fascículo 34

# TEORIA DISTRIBUCIONAL DE SISTEMAS LINEALES

Carlos Enrique D'Attellis

1988

# TEORIA DISTRIBUCIONAL
# DE SISTEMAS LINEALES

*Carlos Enrique D'Attellis*

1985

# Proemio y Dedicatoria

El presente texto es producto de un curso dictado en el Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires.

La intención que nos guió fue la de exponer los fundamentos matemáticos de la teoría de sistemas dinámicos lineales, motivando las distintas descripciones de estos sistemas, introduciendo la noción de distribución o función generalizada, y relacionando ambas cosas. Es decir que, pensando en un auditorio integrado por ingenieros, físicos y matemáticos, la exposición permita a todos entrar en estos temas.

Es por ello que, en los primeros parágrafos tratamos de motivar cada concepto a partir de bases elementales; pero, una vez construida cierta estructura, evitamos demostrar todos los resultados que utilizamos de la teoría de distribuciones, porque podemos remitirnos a los textos clásicos. Pretendemos poner énfasis en la teoría de sistemas, y esperamos que, una vez introducidos los conceptos desde un nivel elemental, el lector pueda -interés mediante, y cualquiera sea su formación entre las citadas al comienzo- enfrentar la lectura de los libros fundamentales de la teoría de distribuciones citados en la bibliografía, si es que pretende demostrar algunos resultados usados en la parte final del texto. No se trata de escribir un tratado sobre distribuciones, sino de exponer la teoría de sistemas lineales desde el punto de vista distribucional.

Es común que todos aquellos que hacen aplicaciones de los sistemas lineales, manejen los conceptos básicos -la $\delta$ de Dirac, la convolución con ella, su transformación de Fourier, etc.-, sin justificarlos. Con este texto intentamos explicar el marco teórico correspondiente.

* * *

Como se sabe, en la hechura de un libro intervienen muchas personas que colaboran de una manera u otra; por ejemplo aquellas que siguieron el curso, particularmente Flavia Gómez Beret y Rafael García, que leyeron partes de los manuscritos, e hicieron comentarios y correcciones; o Leticia Scoccia, que tipeó con habilidad los originales.

Pero hay más.

Un inextinguible sentimiento de gratitud me lleva a poner una inscripción, una dedicatoria. "Como todos los actos del universo -cito a Jorge Luis Borges-, la dedicatoria de un libro es un acto mágico. También cabría definirla como el modo más grato y más sensible de pronunciar un nombre". Yo debo pronunciar aquí el de un maestro: Alberto González Domínguez. Cuántas cosas a él se deben.

Carlos Enrique D'Attellis
Octubre de 1985.

# INDICE

## 1. Ejemplo introductorio. Descripción en el tiempo.

Comenzaremos con un ejemplo sencillo, con el objeto de motivar los conceptos que desarrollaremos.

Supongamos un sistema físico cuyo comportamiento está descripto por un sistema de ecuaciones diferenciales lineales y con coeficientes constantes.

La forma general es la siguiente:

$$\dot{x}(t) = A\, x(t) + B\, u(t) \tag{1.1}$$

donde

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad , \quad u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_m(t) \end{pmatrix}$$

$$A \in R^{n \times n} \quad , \quad B \in R^{n \times m}$$

Hallaremos la solución de la ecuación diferencial matricial (1.1), suponiendo la condición inicial

$$x(t_0) = x_0 \quad .$$

Comencemos con la ecuación homogénea, es decir,

$$\dot{x}(t) = A\, x(t) \ .$$

Para ello estudiemos la ecuación matricial

$$\dot{X}(t) = A\, X(t) \tag{1.2}$$

donde $X(t) \in R^{n \times n}$ .

A la matriz solución de esta última ecuación que satisfaga la condición de ser la matriz identidad en $t = t_0$ , la llamaremos matriz de transición, y escribiremos $\phi(t,t_0)$.

Lema 1.1

El determinante de la matriz de transición del sistema (1.2) verifica la ecuación

$$\det\ \phi(t,t_0) = \det\ \phi(\tau,t_0).e^{Tz\ A.(t-\tau)} \ , \tag{1.3}$$

donde Tz A (traza de A) es la suma de los elementos de la diagonal.

Dem.

Si llamamos $\phi(t,t_0) = (\varphi_{ij}(t))_{i,j=1,\ldots,n}$ , resulta, ya que $\dot{\phi} = A\,\phi$ ,

$$\dot{\varphi}_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\varphi_{kj}(t) \quad , \quad i,j=1,\ldots,n \ . \tag{1.4}$$

Se puede ver realizando las operaciones, que

$$\frac{d}{dt}\det\phi(t,t_0) = \det\begin{pmatrix} \dot\varphi_{11} & \dot\varphi_{12} & \cdots & \dot\varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \dot\varphi_{21} & \dot\varphi_{22} & \cdots & \dot\varphi_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn} \end{pmatrix}$$

$$+ \ldots + \det\begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dot\varphi_{n1} & \cdots & \dot\varphi_{nn} \end{pmatrix} .$$

Llevando (1.4) al primer sumando, resulta

$$\det\begin{pmatrix} \Sigma\, a_{1k}\,\varphi_{k1} & \Sigma\, a_{1k}\,\varphi_{k2} & \cdots & \Sigma\, a_{1k}\,\varphi_{kn} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & & \varphi_{nn} \end{pmatrix} .$$

El determinante no cambia si restamos a la primera fila la segunda multiplicada por $a_{12}$ más la $3^a \times a_{13} + \ldots + n^a \times a_{1n}$ ; haciéndolo, queda:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}\,\varphi_{11} & a_{11}\,\varphi_{12} & \cdots & a_{11}\,\varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & & \varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & & \varphi_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot \det \phi(t,t_0) \ .$$

Haciendo lo mismo con los demás sumandos, tenemos

$$\frac{d}{dt} \det \phi(t,t_0) = a_{11} \det \phi(t,t_0) + a_{22} \det \phi(t,t_0) +$$

$$+ \ . \ . \ . + a_{nn} \det \phi(t,t_0) =$$

$$= \mathrm{Tz}\ A \ . \det \phi(t,t_0) \ .$$

Esta ecuación es de la forma

$$\dot{x}(t) = a\, x(t) \ , \qquad x(\tau) = K,$$

cuya solución es

$$x(t) = K \ . \ e^{a(t-\tau)} \ .$$

En nuestro caso,

$$\det \phi(t,t_0) = \det \phi(\tau,t_0)\ e^{\mathrm{Tz}\ A.(t-\tau)} \ ,$$

tal como queríamos.

<u>Corolario 1.2</u>

La matriz de transición $\phi(t,t_0)$ es no singular para todo $t$.

<u>Dem.</u>: basta observar que, por definición, $\phi(t_0,t_0) = I$, de manera que $\det \phi(t_0,t_0) = 1$. Poniendo $\tau = t_0$ en la ecuación (1.3),

$$\det \phi(t,t_0) = e^{Tz\, A\, .\, (t-t_0)} \neq 0 \;\forall t\ .$$

<u>Lema 1.3</u>

La solución general del sistema (1.2) está dada por

$$X(t) = \phi(t,t_0)\ .\ C$$

donde $C$ es una matriz constante arbitraria.

<u>Dem.</u>: $\dot{\phi} = A\,\phi$, de manera que

$$\dot{\phi} C = A\,\phi\, C\ ,$$

y

$$\dot{\widehat{\phi C}} = A\,(\phi C)\ ,$$

lo que muestra que $\phi(t,t_0)C$ es solución.

Por otra parte, sea $X(t)$ una solución arbitraria; entonces

$$\dot{X} = AX\ ,$$

y

$$\dot{X} = \dot{\widehat{\phi\phi^{-1}X}} = \dot{\phi}\ .\ \phi^{-1}X + \phi\,(\dot{\widehat{\phi^{-1}X}}) =$$

$$= A\phi\phi^{-1}X + \phi\,(\dot{\widehat{\phi^{-1}X}}) =$$

$$= A\,X + \phi\,(\dot{\phi^{-1}}\;X) \quad ;$$

comparando con la de arriba

$$\phi\,(\dot{\phi^{-1}}\;X) = 0 \quad ,$$

entonces

$$\dot{\phi^{-1}}\;X = 0 \quad ,$$

$$\phi^{-1}\;X = C \quad \text{constante,}$$

$$X = \phi C \; .$$

como queríamos demostrar.

Veremos ahora algunas importantes propiedades de la matriz de transición.

<u>Lema 1.4.</u>

Dado el sistema vectorial $(x \in R^n)$

$$\dot{x}(t) = A\;x(t) \quad , \quad x(t_0) = x_0 \; ,$$

la solución es

$$x(t) = \phi\,(t,t_0)\;x_0 \; .$$

<u>Dem.</u>:

$$\dot{x}(t) = \dot{\phi}\,(t,t_0)x_0 = A\;\phi\,(t,t_0)x_0 \; ;$$

pero $\dot{x}(t) = A\, x(t)$ ,

de manera que por la unicidad

$$x(t) = \phi(t,t_0)\, x_0 \ .$$

<u>Lema 1.5</u>

Cualesquiera sean $t_0$, $t_1$, $t$ ,

$$\phi(t,t_0) = \phi(t,t_1)\, \phi(t_1,t_0) \ ; \tag{1.5}$$

$$\phi(t_1,t_0) = \phi^{-1}(t_0,t_1) \ . \tag{1.6}$$

<u>Dem.</u>:

Tanto $\phi(t,t_0)$ como $\phi(t,t_1)$ son soluciones del sistema $\dot{X} = A\,X$ .

Por el lema 1.3,

$$\phi(t,t_0) = \phi(t,t_1)\ .\ C$$

con C = cte.

Poniendo $t = t_1$ ; resulta

$$\phi(t_1,t_0) = C \ ,$$

de lo que resulta la expresión (1.5).

Demostraremos ahora (1.6).

Por (1.5) ,

$$\phi(t,t_0) = \phi(t,t_1)\phi(t_1,t_0) \ ,$$

y si $t = t_0$ , $\quad I = \phi(t_0,t_1)\phi(t_1,t_0)$ .

Pero también

$$\phi(t,t_1) = \phi(t,t_0)\phi(t_0,t_1) \ ,$$

y si $t = t_1$ , $\quad I = \phi(t_1,t_0)\phi(t_0,t_1)$ .

De ambas igualdades resulta (1.6).

Estamos ahora en condiciones de dar la solución de la ecuación (1.1). Usaremos el método de variación de parámetros. Ya sabemos que

$$\phi(t,t_0) \ . \ C$$

con $C$ = vector constante , es la solución general del sistema homogéneo; haremos $C$ función de $t$ , y buscaremos $C(t)$ de tal manera que $x(t) = \phi(t,t_0)\ C(t)$ sea solución de (1.1).

Supongamos que $x(t) = \phi(t,t_0)\ C(t)$ es solución de (1.1). Entonces,

$$\dot{x}(t) = \dot{\phi}(t,t_0)\ C(t) + \phi(t,t_0)\ \dot{C}(t) =$$

$$= A\ \phi(t,t_0)\ C(t) + \phi(t,t_0)\ \dot{C}(t) =$$

$$= A\ x(t) + \phi(t,t_0)\ \dot{C}(t)\ .$$

Comparando con (1.1) y usando la unicidad de la solución,

$$\phi(t,t_0)\ \dot{C}(t) = B\ u(t)$$

$$\dot{C}(t) = \phi^{-1}(t,t_0)B\ u(t)\ ,$$

y entonces,

$$C(t) = \int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s,t_0)B\ u(s)\ ds$$

$$C(t_0) = 0\ .$$

Ahora

$$x(t) = \phi(t,t_0)\ C(t) =$$

$$= \phi(t,t_0) \int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s,t_0)B\ u(s)\ ds\ .$$

Como la condición inicial es $x(t_0) = x_0$ y $C(t_0) = 0$ ,

$$x(t) = \phi(t,t_0)\ [x_0 + C(t)]\ ,$$

y entonces

$$x(t) = \phi(t,t_0)\ x_0 + \phi(t,t_0) \int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s,t_0) B\ u(s)\ ds =$$

$$= \phi(t,t_0)\ x_0 + \int_{t_0}^{t} \phi(t,s) B\ u(s)\ ds \ , \qquad (1.7)$$

donde hemos usado el Lema 1.5.

La fórmula (1.7) resuelve no sólo el sistema (1.1) sino también el sistema

$$\dot{x}(t) = A(t)\ x(t) + B(t)\ u(t) \ ,$$

cuyos coeficientes dependen de $t$, bajo adecuadas hipótesis sobre $A(t)$ y $B(t)$ (cf.[1]).

Pero nos interesan los sistemas invariantes en el tiempo; nos dedicaremos en lo que sigue al estudio de ellos. Veamos entonces la modificación que introduce esta hipótesis.

Al decir "sistemas invariantes en el tiempo", expresamos que sus características no cambian con el tiempo. Esto significa que el instante en que comenzamos a analizar el sistema, es decir el instante $t_0$, no desempeña un papel fundamental. Los coeficientes son constantes, de manera que una vez fijado el instante $t_0$, el comportamiento del sistema es el mismo independientemente del $t_0$ fijado arbitrariamente.

Pero ¿qué caracteriza el comportamiento del sistema? Como vemos en la fórmula (1.7), es la matriz de transición $\phi(t,t_0)$. ¿Y qué modifica en ella el comentario anterior? Modifica la dependencia respecto del $t_0$. Ya no importa cual sea; importa que una vez fijo sepamos a que distancia estamos de él. De manera que la matriz de transición depende de la diferencia $t - t_0$.

Entonces, para sistemas invariantes en el tiempo como el (1.1), la solución es

$$x(t) = \phi(t-t_0)\, x_0 + \int_{t_0}^{t} \phi(t-s)B\, u(s)\, ds \,. \tag{1.8}$$

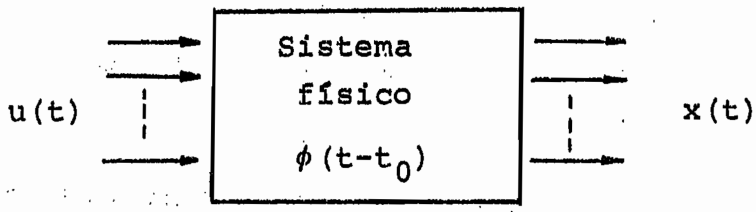
Supongamos que las condiciones iniciales son nulas, es decir $x_0 = 0$ ; queda

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} \phi(t-s)B\, u(s)\, ds \,. \tag{1.9}$$

Esta expresión es del tipo convolución. Ya explicaremos más adelante el hecho que los límites de la integral no sean los clásicos de la convolución, es decir, $+\infty$ y $-\infty$ .

Analicemos la expresión (1.9). Nos dice que en un sistema cuyo comportamiento está descripto por una ecuación diferencial vectorial lineal, con coeficientes constantes y en reposo inicial ($x_0 = 0$), la solución de la ecuación, es decir la respuesta del sistema, está dada por la convolución entre la excitación o entrada $u(s)$ con una función que caracteriza al sistema, $\phi(t-s)B$.

Podemos interpretarlo de la siguiente manera:




es decir, el sistema está caracterizado por una función $\phi(t-t_0)B$, de manera que ante cualquier excitación $u(t)$ la respuesta es la convolución de $\phi B$ con $u$ dada por (1.9).

Lo anterior supone condiciones iniciales nulas; sin embargo, bajo ciertas condiciones de estabilidad, la influencia del término debido a la condición inicial en (1.8), desaparece con el tiempo. Entonces, en estado estacionario, es decir, para tiempos suficientemente grandes, el sistema queda caracterizado por una convolución.

Llegamos así a la cuestión fundamental: la descripción del sistema está dada por una convolución. ¿Es ésto algo particular de nuestro ejemplo, o es un hecho general?

## 2. Ejemplo introductorio. Descripción en frecuencias.

Hasta ahora hemos estudiado el ejemplo propuesto considerando como variable el tiempo. Nos ubicaremos en otro punto de vista para obtener una nueva descripción.

Consideremos entradas sinusoidales en el esquema del parágrafo anterior. Tomaremos, como es usual, oscilaciones complejas $e^{i\omega t}$, debido a que son cómodas para manejar, y si satisfacen una ecuación diferencial lineal de coeficientes constantes, también lo hacen sus partes real e imaginaria. La que tiene significado físico es la parte real de la solución compleja.

Pongamos $u(t) = \alpha\, e^{i\omega t}$ en (1.1). Si ensayamos la solución ($\alpha$ y $\beta$ son vectores)

$$x(t) = \beta\, e^{i\omega t}, \qquad (2.1)$$

resulta

$$i\omega\beta\, e^{i\omega t} = A\beta e^{i\omega t} + B\alpha e^{i\omega t}$$

$$i\omega\beta - A\beta = B\alpha$$

$$\beta = (i\omega I - A)^{-1} B\alpha\,. \qquad (2.2)$$

Si $i\omega$ no es autovalor de la matriz A, a toda entrada de frecuencia $\omega$ le corresponde exactamente una salida de la misma frecuencia.

De (2.1) y (2.2) vemos que

$$\beta\, e^{i\omega t} = (i\omega I - A)^{-1} B\, \alpha\, e^{i\omega t}$$

$$= H(\omega)\, \alpha\, e^{i\omega t} .$$

La relación entre entrada y salida está dada en este caso por la función $H(\omega)$, a la que se llama "respuesta en frecuencia" del sistema.

En general, las funciones excitaciones pueden expresarse como una superposición lineal -en algún sentido- de estas exponenciales: series e integrales de Fourier, desarrollos de funciones casi-periódicas, representación de procesos estocásticos débilmente estacionarios, etc. Esto, asociado con el carácter lineal del sistema, hace que la función respuesta en frecuencia sea otra interesante caracterización del sistema: una caracterización en el dominio frecuencial.

Nuevamente nos planteamos la pregunta con la que finalizamos el parágrafo anterior: ¿es algo particular del ejemplo, o es un hecho más general?

<u>Apéndice</u>: Si $i\omega$ es un autovalor de $A$ (se dice que $\omega$ es una "frecuencia natural" del sistema), a una entrada de frecuencia $\omega$ pueden corresponder o ninguna respuesta de frecuencia $\omega$, o infinitas de la misma frecuencia.

Si hay solución de la ecuación

$$(i\omega I - A)\beta = B\,a \quad ,$$

la respuesta correspondiente a una entrada de frecuencia $\omega$ (que es, recordemos, una frecuencia natural del sistema), es divergente. Esto puede verse con las fórmulas obtenidas en el §1; allí vimos que, con $x(0) = 0$ ,

$$x(t) = \phi(t,0) \int_0^t \phi^{-1}(s,0) B\, u(s)\, ds. \tag{2.3}$$

Pero la matriz de transición es

$$\phi(t,0) = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \ldots \triangleq e^{At} \quad ,$$

ya que derivando término a término (lo que puede justificarse), resulta $A\, e^{At}$ , y $\phi(0,0) = I$.

Supongamos, para facilitar, que $A$ es diagonal y sus elementos son $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ . Entonces

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} .$$

Así, dado que $i\omega$ es autovalor, la matriz de transición $\phi(t)$ contiene elementos del tipo $e^{i\omega t}$ , y su inversa, en consecuencia, del tipo $e^{-i\omega t}$. Estos, multiplicados por la entrada $e^{i\omega t}$, da origen a términos constantes en el integrando de (2.3), y en consecuencia la integral tiende a infinito cuando $t \to \infty$.

Vemos así que, cuando la frecuencia $\omega$ de entrada coincide con alguna frecuencia natural del sistema, la solución diverge. Se dice que hay"resonancia".

También se dice que hay resonancia cuando el autovalor es de la forma $\lambda = -\sigma + i\omega_0$ , con $\omega_0$ frecuencia natural. En este caso la integral no diverge, pero la amplitud de la respuesta es, si tenemos en cuenta (2.2), inversamente proporcional a los términos de la matriz $i\omega I - A$, o sea alguna componente es inversamente proporcional a $i\omega - (-\sigma + i\omega_0)$ . Cuando $\omega = \omega_0$ , queda sólo $\sigma$. Si suponemos $\sigma$ pequeño, la amplitud de la salida para esa frecuencia $\omega_0$ es grande, y tiende a $\infty$ cuando $\sigma \to 0$.

## 3. Definición axiomática de sistemas. Respuesta en frecuencia.

Para generalizar los resultados anteriores definiremos a los sistemas dinámicos mediante axiomas. Para ello tomemos del ejemplo que desarrollamos en los parágrafos anteriores las características principales.

Vemos al sistema como un operador $L$ que transforma una función del tiempo $u(t)$ (entrada) en una salida $x(t)$:

$$\xrightarrow{u(t)} \boxed{L} \xrightarrow{x(t)}$$

$$L\,[u(t)] = x(t) \tag{3.1}$$

Sobre tal operador definiremos las características. Diremos que el sistema es lineal si

$$x_1(t) = L\,[u_1(t)] \qquad , \qquad x_2(t) = L\,[u_2(t)]$$

implican que

$$L\,[a_1\, u_1(t) + a_2\, u_2(t)] = a_1\, x_1(t) + a_2\, x_2(t) \;,$$

donde $a_1$ y $a_2$ son escalares.

Es invariante en el tiempo si (3.1) implica que, para cualquier $h$ real,

$$x(t + h) = L[u(t + h)] .$$

Estudiemos el comportamiento de un sistema lineal e invariante ante excitaciones armónicas de distintas frecuencias . A la correspondiente respuesta la llamaremos $\rho_\omega(t)$ , es decir,

$$L[e^{i\omega t}] = \rho_\omega(t) . \qquad (\neq \text{cte.})$$

Observemos que $\rho_\omega(t)$ es un número complejo, ya que por la linealidad

$$\rho_\omega(t) = L[\cos \omega t] + i\, L[\operatorname{sen} \omega t] .$$

Como el sistema es invariante,

$$L[e^{i\omega(t + h)}] = \rho_\omega(t + h) \quad ;$$

pero

$$L[e^{i\omega t}\, e^{i\omega h}] = e^{i\omega h}\, L[e^{i\omega t}] =$$

$$= e^{i\omega h} . \rho_\omega(t) .$$

Podemos afirmar entonces que, para todo $\omega$, h, t, es válida la igualdad

$$\rho_\omega(t + h) = e^{i\omega h} . \rho_\omega(t) .$$

En particular, si $t = 0$, resulta

$$\rho_{\omega}(h) = e^{i\omega h}\,\rho_{\omega}(0) \qquad \forall\, h \in R\,.$$

Poniendo $t$ en lugar de $h$ y llamando $B(\omega)$ a $\rho_{\omega}(0)$, resulta

$$\rho_{\omega}(t) = B(\omega)\, e^{i\omega t}$$

o sea

$$L\,[e^{i\omega t}] = B(\omega)\, e^{i\omega t} \quad . \tag{3.2}$$

Esta fórmula responde al interrogante planteado en el pará grafo 2. Basta una definición axiomática de sistema lineal e invariante, para que la respuesta en frecuencia lo caracterize.

Si escribimos

$$B(\omega) = |B(\omega)|\; e^{i\theta(\omega)} \quad , \tag{3.3}$$

llamaremos a $|B(\omega)|$ <u>ganancia</u> y a $\theta(\omega)$ <u>fase</u> del sistema.

Vemos en (3.2) y (3.3) la acción de un sistema lineal e invariante ante excitaciones armónicas: la respuesta es de la misma frecuencia que la entrada pero modificada en amplitud y desplazada en fase.

<u>Ejemplo 3.1</u>.

Un modelo matemático de un amplificador ideal realizable puede describirse mediante la expresión

$$A[x(t)] = C \, . \, x(t-\tau) \; ,$$

donde x(t) es la señal de entrada, C es el factor de amplificación, y $\tau$ es el tiempo de retardo que impone el amplificador.

Es este un sistema lineal, el que, excitado con $x(t) = e^{i\omega t}$, responde con

$$A[e^{i\omega t}] = C \, e^{i\omega(t-\tau)} = C \, e^{-i\omega\tau} e^{i\omega t} \quad .$$

De acuerdo con nuestra definición, la respuesta en frecuencia es

$$B(\omega) = C \, e^{-i\omega\tau} \, .$$

Entonces, la ganancia y la fase son:

$$|B(\omega)| = C \qquad \text{y} \qquad \theta(\omega) = -\tau\omega \quad ;$$

es decir, la ganancia es constante y el conocimiento de fase es una función lineal de la frecuencia. Los amplificadores reales tratan de lograr estos objetivos en un rango de frecuencias muy amplio.

Observemos que el ejemplo sugiere la definición de un nuevo parámetro equivalente al corrimiento de fase:

$$\tau(\omega) \triangleq \frac{\theta(\omega)}{\omega} \qquad\qquad (\omega \neq 0)$$

que tiene unidades de tiempo $\left( \text{v.gr.}, \dfrac{\text{rad}}{\text{rad/seg}} \right)$ , y llamaremos "función de corrimiento en el tiempo".

Resulta entonces,

$$L\,[e^{i\omega t}] = B(\omega)\; e^{i\omega t} = |B(\omega)|\; e^{i\theta(\omega)}\; e^{i\omega t} =$$

$$= |B(\omega)|\; e^{i\,[\theta(\omega)\; +\; \omega t]} =$$

$$= |B(\omega)|\; e^{i\omega[\,\tau(\omega)\; +\; t]}\;.$$

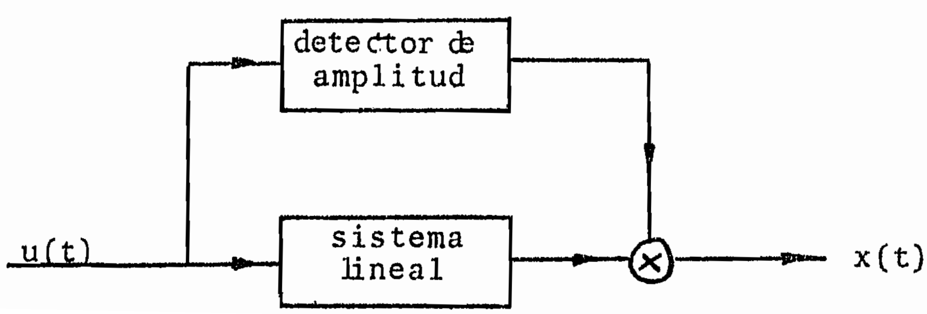
Esto muestra que L desplaza el origen en el tiempo de la armónica de frecuencia $\omega$ en $\tau(\omega)$ unidades.

En el ejemplo anterior

$$\tau(\omega) = -\tau \qquad\qquad \forall\, \omega,$$

una función constante que dice que todas las armónicas son desplazadas en una misma cantidad, es decir, no hay distorsión de fase, como corresponde a un amplificador ideal.

Observación: la clase de sistemas lineales e invariantes no es la mayor que posee la propiedad indicada en la pág.19, como se ve con el siguiente ejemplo no lineal:



## 4. Convolución de Funciones.

Hemos respondido en el parágrafo anterior a la cuestión planteada sobre la caracterización en frecuencias del sistema lineal.

Más laborioso va a resultar encontrar respuesta para la descripción temporal.

Como vimos en nuestro ejemplo, tal descripción estaba dada por una convolución entre la entrada y una función que caracterizaba al sistema; pero esa función quedaba definida en el ejemplo, por los coeficientes de la ecuación diferencial.

En el caso general, esa función es la misma definición del sistema, ya que, una vez conocida, permite determinar la respuesta $x(t)$ correspondiente a cualquier excitación $u(t)$ :

$$u \longrightarrow \boxed{h} \longrightarrow x = h * u \quad .$$

Dado el esquema anterior, la pregunta es: ¿cómo se determina $h$?

Es claro que si existe unidad para la convolución, llamémosla $\delta$ , y la tomamos como entrada, la salida es la misma $h$ ; es decir,

$$\delta * h = h \quad .$$

Y aquí se plantea la pregunta fundamental: ¿existe unidad para la convolución?

Veamos.

Es sabido que si $f, g \in L^1$, resulta que $f * g \in L^1$, y además

$$\| f * g \| \leq \| f \| \, \| g \| \quad ,$$

lo que nos dice que $L^1$ es un álgebra de Banach (ver apéndice).

La pregunta anterior será respondida mediante la utilización de la transformación de Fourier, por lo que recordaremos su definición: si $f(t) \in L^1$, llamaremos transformada de Fourier de $f(t)$ a la función

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t} \, dt \; .$$

Es claro que está bien definida y que es acotada, ya que

$$|F(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, dt = \| f \| \quad .$$

También es continua, como veremos a continuación.

$$F(\omega+h) - F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega+h)t} f(t)\, dt - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \left(e^{-iht} - 1\right) f(t) \, dt \; .$$

Entonces

$$|F(\omega+h) - F(\omega)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-iht} - 1||f(t)| \, dt \quad ;$$

el integrando está acotado por una función integrable:

$$|e^{-iht} - 1||f(t)| \leqslant 2|f(t)| \in L^1 \, ,$$

por lo que es válido el teorema de la convergencia mayorada, y entonces

$$\lim_{h\to 0} |F(\omega+h) - F(\omega)| \leqslant \lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-iht} - 1||f(t)| \, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{h\to 0} |e^{-iht} - 1||f(t)| \, dt = 0 \, .$$

Además, por el lema de Riemann-Lebesgue,

$$\lim_{\omega\to\pm\infty} F(\omega) = 0 \, .$$

Resumiendo, si llamamos $C_\downarrow$ al espacio de funciones continuas, acotadas, y que tienden a cero cuando $\omega \to \pm\infty$ , resulta que la transformación de Fourier es un operador lineal que transforma

$$F : L^1 \to C_\downarrow \, .$$

Este opera sobre la convolución de la siguiente manera (ver apéndice):

$$F[f * g] = F[t] . F[g] \quad .$$

Observemos que $C_\downarrow$ también es un álgebra de Banach con el producto usual

$$(f.g)(t) = f(t) . g(t) \quad ,$$

y
$$\|f\| = \sup |f(t)| \quad .$$

Es claro que no hay unidad en $C_\downarrow$ , ya que si $e(t) \in C$ y verifica $e(t) . f(t) = f(t)$ para cualquier $f \in C_\downarrow$ , tendría que ser $e(t) \equiv 1$ , que no pertenece a $C_\downarrow$ .

Pero entonces $L^1$ no tiene unidad; en efecto, si existe $e \in L^1$ tal que $e * f = f$ para toda $f \in L^1$ , resulta

$$F[e] . F[f] = F[f] \quad ,$$

de manera que

$$F[e] \equiv 1 \; ,$$

que no pertenece a $C_\downarrow$ .

Sin embargo, en muchos textos de ingeniería o sistemas se habla de una <u>función</u> $\delta(t)$ que verifica

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \; \delta(\tau - t) \; dt = f(\tau) \quad ,$$

lo que permite caracterizar a los sistemas lineales.

Observemos que, poniendo $\tau = 0$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \delta(t)\, dt = f(0) \quad ; \tag{4.1}$$

sobre esta expresión volveremos más adelante.

Analicemos un poco estas fórmulas para explicar el origen de la definición de una función que sea unidad de la convolución.

Para ello definamos la función

$$h_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\lambda\tau|}\, e^{i\tau x}\, d\tau = \tag{4.2}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2} \quad , \text{ con } \lambda > 0 \; ;$$

resulta que

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_\lambda(x)\, dx = 1 \quad .$$

Teorema 4.1

$g(x)$ acotada, y continua en $x_0$ .

Entonces;

$$\lim_{\lambda \to 0} (g * h_\lambda)(x_0) = g(x_0) \quad .$$

Dem.:

$$(g * h_\lambda)(x_0) - g(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x_0-t)\ h_\lambda(t)\ dt - g(x_0) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [\,g(x_0-t) - g(x_0)]\ h_\lambda(t)\ dt\ .$$

Si ponemos en (4.2) $\lambda = 1$ y $x = t/\mu$ , resulta la función

$$h_1\left(\frac{t}{\mu}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|}\ e^{i\tau\frac{t}{\mu}}\ d\tau\ .$$

Cambiando de variable,

$$z = \frac{\tau}{\mu}\quad ,\quad \mu dz = d\tau\quad ,$$

$$h_1\left(\frac{t}{\mu}\right) = \mu \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|z\mu|}\ e^{izt}\ dz = \mu h_\mu(t)\quad .$$

Obtenemos entonces que

$$h_\mu(t) = \frac{1}{\mu}\ h_1\left(\frac{t}{\mu}\right)\quad .$$

Ahora podemos sustituir $h_\mu(t)$ por una con subíndice fijo: $h_1$ . Resulta

$$(g * h_\mu)(x_0) - g(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty}[\,g(x_0-t) - g(x_0)]\ \frac{1}{\mu}\ h_1\left(\frac{t}{\mu}\right)\ dt$$

$$\eta = \frac{t}{\mu}\qquad\qquad d\eta = \frac{1}{\mu}\ dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} [\, g(x_0 - \eta\mu) - g(x_0)\,]\; h_1(\eta)\; d\eta \; .$$

Queremos tomar límite cuando $\mu \to 0$; para ello observemos que

. $|g(x_0-\eta\mu) - g(x_0)|\,|h_1(\eta)| \leq 2A|h_1(\eta)| \in L^1$ ,

si $|g(x)| \leq A$ ;

. $\lim_{\mu\to 0} [\, g(x_0 - \eta\mu) - g(x_0)\,]\, h_1(\eta) = 0$ , puesto que $g$ es continua en $x_0$ .

Por el teorema de la convergencia mayorada,

$$\lim_{\mu\to 0} (g * h_\mu)(x_0) = g(x_0) \; ,$$

lo que demuestra el teorema.

El teorema nos da una "aproximación a la $\delta$", una aproximación a la unidad de la convolución: mostramos una familia de funciones tales que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_\lambda(x)\; dx = 1 \; ,$$

y, para $g(x)$ acotada y continua,

$$\lim_{\lambda\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\; h_\lambda(x-t)\; dt = g(x) \; .$$

¿Qué sucede si, sin ninguna justificación, pasamos el límite bajo la integral? Hagámoslo.

Como

$$h_\lambda(x-t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\lambda^2+(x-t)^2} & \text{si } x\neq t \\ \\ \dfrac{1}{\lambda} & \text{si } x=t \quad , \end{cases}$$

al hacer $\lambda \to 0$, obtenemos

$$\delta(x-t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\neq t \\ \\ \infty & \text{si } x=t \ . \end{cases} \tag{4.3}$$

Este paso al límite sin justificación es el que da origen a una falsa definición de $\delta(t)$ en tratados sin rigor matemático; la definen como una función que es nula en todo punto menos en el origen, y tal que su integral vale 1. Obviamente inconsistente. Si aceptamos eso, se puede afirmar a partir de (4.3) que

$$n \ . \ \delta(x-t) = \delta(x-t) \ ,$$

y, entonces

$$n.g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \ n\delta(x-t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\delta(x-t)dt = g(x) \ ,$$

de donde $1 = 2 = 3 = \ldots\ldots$

La cuestión está en que no es lícito el paso del límite bajo la integral.

Lo que mostramos es válido no sólo para la familia de funciones $h_\lambda(x)$ que tomamos. Lo es en forma mucho más general, para otras funciones con esas mismas características, es decir, que cuando $\lambda \to 0$ tiendan a ser un pico próximo al eje de ordenadas.

Pero todo conduce a pseudo-definiciones de la $\delta(t)$ que, como vimos, son absurdas.

Para lograr una definición de $\delta$, es decir, de la unidad de la convolución, debemos salir del campo de las funciones, y pasar a otro más general.

A eso vamos.

APENDICE

El hecho que si $f, g \in L^1$ entonces $f * g \in L^1$, es una aplicación del teorema de Fubini, como veremos.

$$h(x) = (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\ g(y)\ dy\ ,$$

y debemos ver que existe

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\ g(y)\ dy\ . \tag{A.1}$$

Pero, si comenzamos con la siguiente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)||g(y)|\ dx\ , \tag{A.2}$$

tenemos que es igual a

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(y)|\, dy \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)|\, dx =$$

$$\tau = x-y \qquad d\tau = dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)|\, dy \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau)|\, d\tau = \|g\|_1\ \|f\|_1\ .$$

Con esto probamos que (A.2) existe, luego (Fubini), también (A.1), como queríamos.

Además,

$$\|f*g\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |(f*g)(x)|\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt \right| dx \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} | f(x-t) \; g(t)| \, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} | g(t)| \, dt \int_{-\infty}^{\infty} | f(x-t)| \, dx = \| g\| \, \| f\| \; .$$

Veamos ahora que $F[f*g] = F[f] \; F[g]$ .

$$F[f*g] = \int_{-\infty}^{\infty} (f*g)(t) . e^{-i\omega t} \, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \, dt \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u) \; g(u) \; du = \text{(Fubini)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \; du \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u) \; e^{-i\omega t} \, dt = \qquad (\tau = t-u)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \; du \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \; e^{-i\omega(\tau+u)} \, dt =$$

$$= F[g] \, . \, F[f] \; .$$

## 5. Distribuciones.

Ya hemos visto la imposibilidad de definir a la $\delta$ como una función, es decir, que a cada número $t$ le haga corresponder otro número $\delta(t)$.

Sin embargo, observamos que nuestro interés está en considerar a la $\delta$ dentro de una expresión integral, nunca sola; aparece siempre dentro de una integral y acompañada por una función.

Entonces la podemos ver como una funcional en lugar de una función, es decir, como una aplicación entre un conjunto de funciones y un conjunto de números. Si llamamos $T$ a la funcional, a cada función $\varphi(t)$ le corresponde el número $T[\varphi(t)]$; en lugar de esta notación emplearemos en adelante $\langle T,\varphi\rangle$, notación de producto interno que coincide, en el caso de funciones, con la integral que usamos antes. Volviendo a (4.1), podríamos definir

$$\langle \delta,\varphi\rangle = \varphi(0) \text{ .}$$

Pero es claro que debemos definir bien el espacio de funciones que usamos como dominio de las funcionales, y las características de éstas.

Hay distintos espacios de funciones que son útiles. Comenzaremos con el siguiente.

### Definición 5.1

Llamaremos $D$ al espacio de funciones infinitamente diferenciables ($C^\infty$) y de soporte acotado; indicaremos

$$\text{sop}\,\varphi = \overline{\{t \,/\, \varphi(t) \neq 0\}}\ .$$

Es claro que $D$ es un espacio vectorial.

Un ejemplo de función perteneciente a este espacio es el siguiente

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t^2}} & \text{si } |t| < 1 \\ 0 & \text{si } |t| \geq 1 \end{cases}\ ,$$

Un par de teoremas nos darán resultados que utilizaremos más adelante, y además, nos mostrarán que las funciones de $D$ están próximas a otro tipo de funciones.

Teorema 5.2

$f(t)$ continua, y nula fuera de un conjunto acotado. Entonces existe $\{\Phi_a\} \subset D$ tal que

$$\Phi_a(t) \xrightarrow[a \to 0]{\cdot} f(t)$$

Dem.:

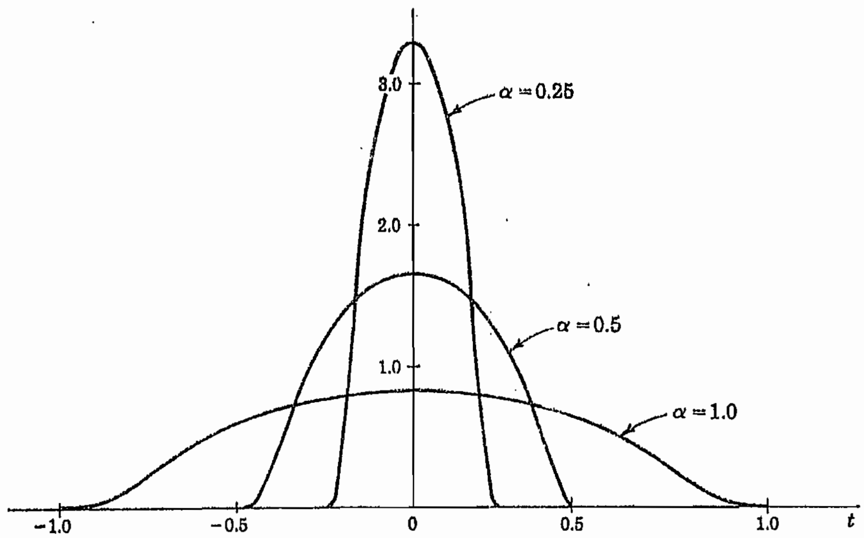
Llamemos

$$\varphi_a(t) = \frac{\varphi\left(\frac{t}{a}\right)}{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\frac{t}{a}\right)\, dt} \qquad a > 0\ ,$$

donde $\varphi(t)$ es la función del ejemplo anterior.

Estas funciones $C^\infty$ son nulas en $|t| \geq a$, y además satisfacen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_a(t)\, dt = 1$$




Definamos

$$\Phi_a(t) = (f * \varphi_a)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, \varphi_a(t-\tau)\, d\tau \quad ,$$

y demostremos que $\Phi_a(t) \in D$.

Es claro que $\Phi_a$ tiene soporte acotado, ya que lo tienen tanto $f$ como $\varphi_a$. Entonces la integral es sobre un intervalo finito; el integrando es continuo respecto de $(t,\tau)$ y tiene derivada parcial respecto de $t$ ($\varphi_a \in C^\infty$), que también es una función continua de $(t,\tau)$. Entonces se puede derivar con respecto a $t$ dentro de la integral [2]. Como $\varphi_a \in D$, la nueva integral satisface las mismas condiciones, y siguiendo el procedimiento, $\Phi_a(t) \in C^\infty$. Así resulta que $\Phi_a(t) \in D$.

Veremos que éstas son las funciones que sirven para la aproximación:

$$|f(t) - \Phi_a(t)| = |f(t) - \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\varphi_a(t-\tau)\, d\tau| =$$

$$= |\int_{-\infty}^{\infty} [f(t) - f(\tau)]\, \varphi_a(t-\tau)\, d\tau| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f(\tau)|\, \varphi_a(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{|t-\tau|<a} |f(t) - f(\tau)|\, \varphi_a(t-\tau)\, d\tau .$$

Como $f$ es uniformemente continua en el compacto que es soporte de $\varphi_a$, $|f(t) - f(\tau)| < \epsilon$ para todo par $t,\tau$ que cumpla $|t-\tau|<\delta$. Tomando $a<\delta$,

$$|f(t) - \Phi_a(t)| \leqslant \epsilon \int_{|t-\tau|<a} \varphi_a(t-\tau)\, d\tau = \epsilon .$$

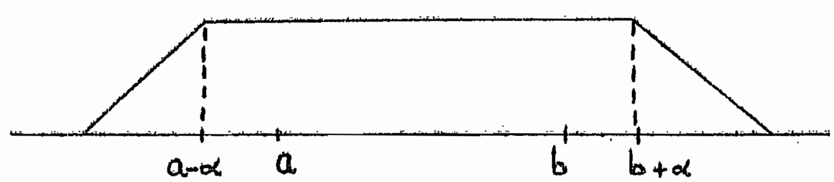
<u>Teorema 5.3</u>

Si $f \in C^\infty[R]$, entonces, dado cualquier intervalo finito $[a,b]$, existe $\varphi(t) \in D$ tal que

$$\varphi(t) = f(t) \quad \text{en} \quad [a,b].$$

Dem.

Construyamos primeramente una función $\varphi_1 \in D$ que sea igual a uno en $[a,b]$. Para ello tomemos una función continua $h(t)$ que sea uno en $[a-\alpha, b+\alpha]$, $\alpha > 0$, y $h(t) = 0$ fuera de un intervalo más grande:




Definamos

$$\varphi_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, \varphi_\alpha(t-\tau)\, d\tau ,$$

donde $\varphi_\alpha$ es la misma del teorema anterior.

Entonces, por el soporte de $\varphi_\alpha$,

$$\varphi_1(t) = \int_{t-\alpha}^{t+\alpha} h(\tau)\, \varphi_\alpha(t-\tau)\, d\tau ,$$

que como vimos en el teorema anterior, pertenece a D.

Si $t \in [a,b]$ ,$\tau \in [a-\alpha, b+\alpha]$ , y en ese intervalo, $h(\tau) = 1$.

De manera que si $t \in [a,b]$ ,

$$\varphi_1(t) = \int_{t-\alpha}^{t+\alpha} \varphi_\alpha(t-\tau)\, d\tau = 1 .$$

Tenemos así una función que pertenece a D y vale 1 en el intervalo $[a,b]$.

Ahora,

$$f(t).\varphi_1(t) \in C^\infty ,$$

y además, $f(t).\varphi_1(t)$ es de soporte acotado porque lo es $\varphi_1$.

Entonces, $f(t).\varphi_1(t) = f(t)$ en $[a,b]$, porque $\varphi_1 = 1$ allí.

Tenemos definido el espacio D y algunos resultados sobre aproximación con esas funciones.

Nos interesamos ahora por las funcionales lineales y continuas definidas en D.

Las definiciones son las conocidas:

. linealidad

$$<T, a\varphi_1 + b\varphi_2> = a <T,\varphi_1> + b <T,\varphi_2> ;$$

. continuidad

Si $\{\varphi_n\}$ converge a $\varphi(t)$, entonces

$$<T,\varphi_n> \to <T,\varphi> ;$$

la última es la convergencia de una sucesión numérica, pero debemos definir el significado de la expresión "$\varphi_n(t)$ converge a $\varphi(t)$".

Definición 5.4

$\{\varphi_n(t)\} \subset D$ converge a cero en $D$ si todas las $\varphi_n$ se anulan fuera de cierta región acotada fija, la misma para todas ellas y convergen uniformemente a cero, junto con las sucesiones de derivadas de todo orden.

Es decir, $\exists$ K acotado tal que

$$\varphi_n(t) = 0 \quad \text{si} \quad t \notin K \ , \ \forall n \ ,$$

y dado $\epsilon > 0$ y $k \in N$, existe $N_k$ tal que si $n \geq N_k$ entonces $|\varphi_n^{(k)}(t)| < \epsilon$.

Ahora estamos en condiciones de definir la continuidad de las funcionales: diremos que $T : D \to R$ es continua si

$$\varphi_n \xrightarrow{D} \varphi \quad \Rightarrow \quad \langle T,\varphi_n \rangle \to \langle T,\varphi \rangle \ .$$

Definición 5.5

Una distribución (o función generalizada) es una funcional lineal y continua definida en $D$. Llamaremos $D'$ al espacio de distribuciones. [3], [4]

Veamos unos ejemplos.

1. Sea $f(t) \in L^1_{loc}$ (localmente integrable).

Podemos definir

$$<f,\varphi> = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\ dt \qquad (5.1)$$

para cada $\varphi \in D$; la integral existe en la región acotada sop $\varphi(t)$, pues allí $f$ es integrable.

La linealidad es clara. Veamos la continuidad.

Si $\varphi_n \xrightarrow{D} \varphi$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_n(t)\ dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\ dt \quad ,$$

ya que el integrando converge uniformemente en una región acotada. Así tenemos que una función localmente integrable determina una distribución a través de la expresión (5.1). Estas distribuciones que provienen de funciones son llamadas <u>regulares</u>.

2. Definamos la funcional

$$<\delta,\varphi> = \varphi(0) \qquad \forall \varphi \in D \ ,$$

que es, evidentemente, lineal y continua. Así, $\delta \in D'$.

Es interesante observar que esta distribución no es regular. En efecto, supongamos que existe $f \in L^1_{loc}$ tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\ dt = \varphi(0) \qquad \forall \varphi \in D \ .$$

En particular, si tomamos

$$\varphi_a(t) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-t^2}} & \text{si } |t| < a \\ 0 & \text{si } |t| \geq a , \end{cases}$$

resulta

$$\{\varphi_a(t)\} \xrightarrow[a\to 0]{} 0 \quad \text{(menos en } t=0);$$

pero

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi_a(t)\,dt = \varphi_a(0) = e^{-1} .$$

Dado que el límite pasa bajo la integral por las razones ya apuntadas, tenemos

$$e^{-1} = \lim_{a\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi_a(t)\,dt = 0,$$

absurdo que demuestra la afirmación.

La convergencia de una sucesión de distribuciones $\{f_n\}$ es la convergencia débil, esto es,

$$< f_n, \varphi > \longrightarrow < f, \varphi > \qquad \forall \varphi \in D ,$$

y se puede demostrar que $f \in D'$ [4].

Las distintas operaciones con distribuciones (dejemos de lado la suma y el producto por escalar) son definidas a partir de las distribuciones regulares, ya que éstas provienen de funciones y con ellas sabemos operar.

Por ejemplo, para definir una traslación observamos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\,\varphi(t)\;dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t+\tau)\;dt$$

por un cambio de variables, de manera que, en general, ponemos

$$< f(t-\tau)\,,\ \varphi\,(t) > \overset{\Delta}{=} < f(t)\,,\ \varphi(t+\tau) > .$$

Es para destacar que no es posible definir en general la multiplicación de distribuciones; ya hay problemas en el caso regular, porque si tomamos

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{|t|}} \in L^1_{loc} \quad ,$$

resulta

$$f^2(t) = \frac{1}{|t|}$$

que no es integrable en intervalos que contienen el origen.

Lo que siempre se puede definir es el producto de una distribución por una función $C^\infty$ ; la definición surge del caso regular en forma inmediata:

$$< f.g,\varphi > = < f,g.\varphi > ,$$

donde $f \in D'$ y $g \in C^{\infty}$.

Pasemos a la <u>derivación</u>. Si $f(t) \in L^1_{loc}$ y es derivable, resulta, integrando por partes

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\varphi(t)\, dt = \varphi(t)\, f(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi'(t)\, dt =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi'(t)\, dt ,$$

ya que $\varphi \in D$.

Entonces, la definición es

$$\langle f', \varphi \rangle = -\langle f, \varphi' \rangle ,$$

y se comprueba fácilmente que es una funcional lineal y continua.

Como $\varphi$ es infinitamente diferenciable, resulta que las distribuciones también lo son.

Veamos un ejemplo. Si tomamos la función escalón

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geq 0 , \end{cases}$$

define una distribución por ser $L^1_{loc}$.

$$\langle u', \varphi \rangle = -\langle u, \varphi' \rangle = -\int_0^{\infty} \varphi'(t)\, dt = -\varphi(\infty) + \varphi(0) =$$

$$= \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle,$$

es decir, $u' = \delta$ .

La derivación es una operación lineal y continua en $D'$. Veamos esto último.

Sea $\{f_n\} \subset D'$, $\{f_n\} \xrightarrow{D'} f$.

Entonces,

$$<f_n^{(k)}, \varphi> = <f_n, (-1)^k \varphi^{(k)}> \to <f, (-1)^k \varphi^{(k)}> = <f^{(k)}, \varphi> .$$

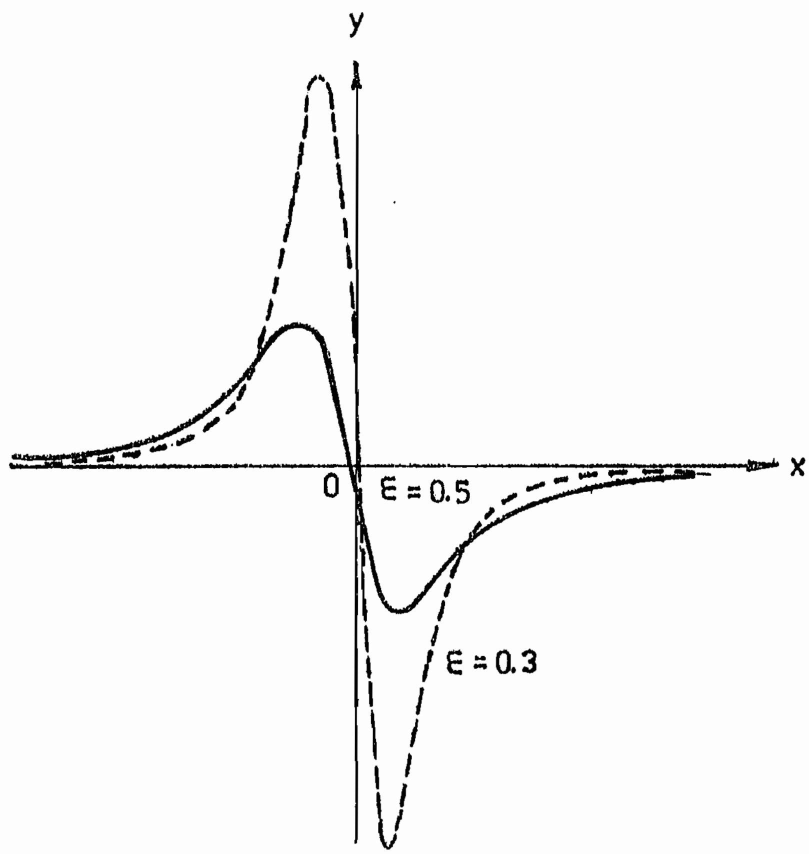
Esto nos permite consignar el siguiente hecho sobre la derivada de la $\delta$ de Dirac. Ya hemos visto que

$$\frac{\lambda}{\lambda^2 + x^2} \xrightarrow{D'} \delta(x) \quad ;$$

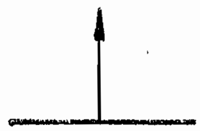
de manera que, por la continuidad que demostramos,

$$- \frac{2 \lambda x}{(\lambda^2 + x^2)^2} \xrightarrow[\lambda \to 0]{D'} \delta'(x) .$$

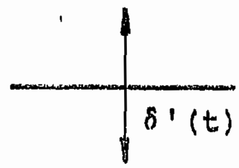
Es instructivo hacer la representación gráfica


y
x
0
ε = 0.5
ε = 0.3

Esa es la razón por la cual en algunos textos se utiliza el siguiente simbolismo:



$\delta(t)$



$\delta'(t)$

La distribución $\delta$ aparece también al derivar funciones derivables por tramos. Supongamos que $f(t)$ lo sea, con saltos de altura $h_1,\ldots,h_n$ , en los puntos $t_1,\ldots,t_n$.

Definamos

$$f_1(t) = f(t) - \sum_{k=1}^{n} h_k \, u(t-t_k) \ ,$$

donde $u(t)$ es la función escalón. La función $f_1(t)$ es continua y tiene la misma derivada que $f(t)$ excepto en $t_1,\ldots,t_n$. La distribución regular $f_1$ definida por la función $f_1(t)$, tiene derivada $f_1'$ que coincide con la distribución regular definida por la función $f'(t)$:

$$\langle f_1', \varphi \rangle = \int f_1'(t)\,\varphi(t)\,dt = \int f'(t)\,\varphi(t) = \langle f', \varphi \rangle .$$

Resulta así que, derivando distribucionalmente,

$$f' = f_1' + \sum_{k=1}^{n} h_k . \delta(t-t_k) \ ,$$

es decir, las discontinuidades en los puntos $t_k$ contribuyen con el término $h_k.\delta(t-t_k)$ a la derivada.

El concepto de convergencia en $D'$ permite asignar un sentido distribucional a integrales impropias que divergen en el sentido clásico. Consideremos

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos \omega t \, d\omega \quad ,$$

que es divergente para cada $t$.

Tenemos

$$\frac{1}{\pi}\int_0^b \cos \omega t \, d\omega = \frac{\operatorname{sen} bt}{\pi t} \quad ,$$

y las funciones del segundo miembro son localmente integrables, por lo que definen distribuciones regulares. Analicemos entonces la convergencia en el sentido distribucional; para cada $\varphi \in D$ ,

$$\lim_{b\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} bt}{t} \varphi(t) \, dt = \varphi(0) \quad ,$$

de manera que, desde el punto de vista distribucional, cuando $b\to\infty$, converge a $\delta(t)$; podemos entonces escribir, en forma simbólica,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos \omega t \, d\omega = \delta(t) \qquad (5.1)$$

La integral analizada aparece en el estudio de la transformación de Fourier, en la memoria original [5] (cf.[6]). No fue un error involuntario de Fourier utilizar esa integral divergente, ya que comenta: "así, la función representada por la integral

$$\int_0^\infty \cos \omega(x-t)\, d\omega$$

tiene la singular propiedad que, si se la multiplica por una función cualquiera $f(t)$ y si se integra con respecto a $t$ entre límites infinitos, el resultado es igual a $\pi . f(x)$; de manera que el efecto de la integración es cambiar $t$ por $x$ y multiplicar por el número $\pi$". Justamente el sentido de la fórmula (5.1).

## 6. Convolución de Distribuciones (I).

Para definir la convolución de distribuciones necesitaremos algunos resultados previos y la operación de producto tensorial de distribuciones.

Lema 6.1

Si $\varphi(t,\tau) \in D_{t,\tau}$ y $g(\tau) \in D'_{\tau}$ , entonces

$$\theta(t) \triangleq \langle g(\tau), \varphi(t,\tau) \rangle \in D_t \quad .$$

Dem.:

a) $\theta(t) \in C^{\infty}$ :

$$\frac{\theta(t+\Delta t)-\theta(t)}{\Delta t} = \langle g(\tau), \frac{\varphi(t+\Delta t,\tau)-\varphi(t,\tau)}{\Delta t} \rangle$$

por la linealidad de $g$ .

Pero la función $\varphi(t+\Delta t,\tau)-\varphi(t,\tau)/\Delta t$ es nula fuera de una región fija y continua para todo $t$ , por lo que (cf.[7]),

$$\frac{\varphi(t+\Delta t,\tau)-\varphi(t,\tau)}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{\bullet} \frac{\partial\varphi(t,\tau)}{\partial t} ,$$

y lo mismo con las siguientes derivadas, ya que $\varphi \in C^{\infty}$ . Ahora por la continuidad de $g$ ,

$$\frac{\theta(t+\Delta t)-\theta(t)}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} < g(\tau), \frac{\partial \varphi(t,\tau)}{\partial t} > ,$$

y en forma análoga para las siguientes derivadas.

b) sop $\theta(t)$ es acotado: como $\varphi(t,\tau)$ tiene soporte acotado, sop $\varphi(t,\tau) \subset I \times J$ , donde $I,J$ son dos intervalos finitos. Si $t \notin I$ , $\varphi(t,\tau) = 0 \quad \forall \tau$ , de manera que $\theta(t) = < g(\tau), 0 > = 0$ .

El producto tensorial es una operación que combina una distribución $f(t) \in D'_t$ con una $g(\tau) \in D'_\tau$ , para dar una distribución que indicaremos $f(t) \otimes g(\tau) \in D'_{t,\tau}$ , de acuerdo con la siguiente

Definición 6.2

$$<f(t) \otimes g(\tau), \varphi(t,\tau) > = <f(t), <g(\tau), \varphi(t,\tau) >>$$

$\forall \varphi(t,\tau) \in D_{t,\tau}$ .

Observemos que el Lema 6.1 da sentido al segundo miembro de la definición. Probaremos que $f(t) \otimes g(\tau) \in D'_{t,\tau}$ . Claramente es una funcional lineal; para demostrar la continuidad, debemos ver que si $\{\varphi_n(t,\tau)\} \xrightarrow{D_{t,\tau}} 0$ , entonces

$$<f(t), <g(\tau), \varphi_n(t,\tau)>> \to 0 .$$

Dada la continuidad de $f$ basta probar que

$$\psi_n(t) = \langle g(\tau), \varphi_n(t,\tau)\rangle \xrightarrow{D_t} 0 \ .$$

Todas las funciones $\psi_n(t)$ tienen sus soportes contenidos en una región fija, ya que así sucede con las $\varphi_n(t,\tau)$. Queda por demostrar que $\{\psi_n^{(k)}(t)\} \xrightarrow{\cdot} 0$ , $\forall k$ . Supongamos que no es así, es decir, que existe un $k$ para el que, un $\epsilon > 0$ y una sucesión $\{t_n\}$ verifican

$$|\psi_n^{(k)}(t_n)| > \epsilon \quad .$$

Usando lo demostrado en la parte a) del Lema 6.1,

$$|\psi_n^{(k)}(t_n)| = \left|\langle g(\tau), \frac{\partial^k}{\partial t^k}\varphi_n(t,\tau)\Big|_{t=t_n}\rangle\right| > \epsilon , \tag{6.1}$$

Pero $\{\varphi_n(t,\tau)\} \xrightarrow{D_{t,\tau}} 0$ , de manera que

$$\lambda_n(\tau) \triangleq \frac{\partial^k}{\partial t^k}\varphi_n(t,\tau)\Big|_{t=t_n} \in D_\tau$$

convergen a cero en $D_\tau$ .

Como $g(\tau) \in D'_\tau$ ,

$$\langle g(\tau), \psi_n(\tau)\rangle \to 0 \ ,$$

lo que contradice (6.1).

**Definición 6.3**

$f \in D'$ es nula en un abierto $U$ si $<f,\varphi> = 0$ para toda $\varphi \in D$ con sop $\varphi \subset U$ . El conjunto nulo de $f$ es la unión de los abiertos en los que $f$ es nula. Su complemento es el soporte de $f$ .

Por ejemplo, sop $\delta(t) = \{0\}$ .

Teorema 6.4

$f,g \in D'$ ,

$$\text{sop } (f \otimes g) = \text{sop } f \times \text{sop } g \ .$$

Dem.:

$(\subset)$ Supongamos que $t_o \notin$ sop $f$ , es decir, existe un entorno $N$ de $t_o$ tal que

$$<f(t),\eta(t)> = 0 \quad \forall \eta \in D \ , \ \text{sop } \eta \subset N \ .$$

Si $\varphi(t,\tau) \in D_{t,\tau}$ con sop $\varphi(t,\tau) \subset N \times R$ ,
la función

$$\theta(t) \triangleq <g(\tau),\varphi(t,\tau)> \in D \ ,$$

por el Lema 6.1.

Entonces,

$$<f(t) \otimes g(\tau),\varphi(t,\tau)> = <f(t),\theta(t)> = 0 \ .$$

ya que $\text{sop } \theta(t) \subset N$ y $N$ está en el conjunto nulo de $f$ .

Hemos probado así que si $t_o \notin \text{sop } f$ , entonces $(t_o,\tau_o) \notin \text{sop } f(t) \otimes g(\tau)$ $\forall \tau_o$ . Análogamente, si $\tau_o \notin \text{sop } g$ , resulta que $(t_o,\tau_o) \notin \text{sop } f(t) \otimes g(\tau)$.

En forma equivalente, si $(t_o,\tau_o) \in \text{sop } f(t) \otimes g(\tau)$ , $(t_o,\tau_o) \in \text{sop } f \times \text{sop } g$ .

($\supset$) Sean $t_o \in \text{sop } f$ y $\tau_o \in \text{sop } g$ .
Tomemos una función $\psi(t) \in D$ , tal que

$$t_o \in \text{sop } \psi(t) \quad \text{y} \quad \langle f(t),\psi(t)\rangle \neq 0$$

y una función $\theta(\tau) \in D$ , tal que

$$\tau_o \in \text{sop } \theta(\tau) \quad \text{y} \quad \langle g(\tau),\theta(\tau)\rangle \neq 0 \ .$$

Entonces, $\psi(t).\theta(\tau) \in D_{t,\tau}$.

Si $U$ es un abierto que contiene al $\text{sop } \psi$ y $V$ un abierto que contiene al $\text{sop } \theta$ , resulta:

$$(t_o,\tau_o) \in U \times V \ ,$$

$$\text{sop } [\psi(t).\theta(\tau)] \subset U \times V \ .$$

De manera que

$$<f(t) \otimes g(\tau),\psi(t)\theta(\tau)> = <f(t),<g(\tau),\psi(t)\theta(\tau)>> =$$

$$= <f(t),\psi(t) <g(\tau),\theta(\tau)>> =$$

$$= <f(t),\psi(t)> <g(\tau),\theta(\tau)> \neq 0 .$$

Esto nos dice que $U \times V$ no es del conjunto nulo de $f \otimes g$.

Entonces, $(t_o, \tau_o) \in \text{sop } f(t) \otimes g(\tau)$.

Estamos en condiciones de motivar la definición de convolución. Como ya hemos visto en § 4, si $f$ y $g \in L^1$,

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\, d\tau ,$$

y $f * g \in L^1$.

Estamos tratando de definir la convolución para distribuciones; comencemos, como siempre, por el caso regular. Para tal caso tenemos

$$<f * g ,\varphi> = \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(t) . \varphi(t)\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dt \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\, d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\varphi(t)\, dt =$$

$$(t-\tau = x)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\, d\tau \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x+\tau)\, dx \, .$$

Es decir, para definir la convolución tenemos que darle sentido a la expresión

$$<f * g , \varphi> = <g(t) , <f(\tau) , \varphi(\tau+t)>> =$$

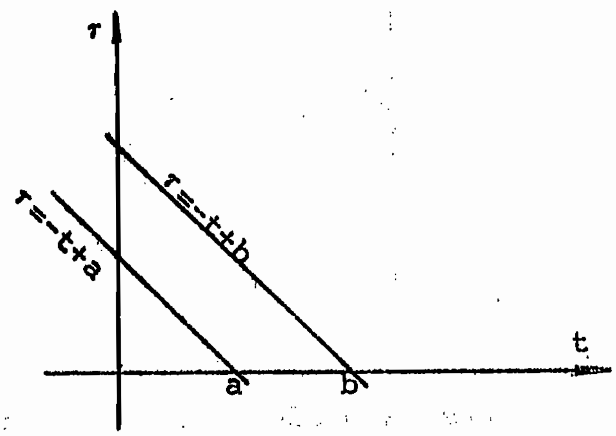
$$= <g(t) \otimes f(\tau) , \varphi(\tau+t)> \quad ;$$

y análogamente a

$$<f(t) ,<g(\tau) , \varphi(\tau+t)>> = <f(t) \otimes g(\tau) , \varphi(\tau+t)>$$

para $\varphi \in D$ .

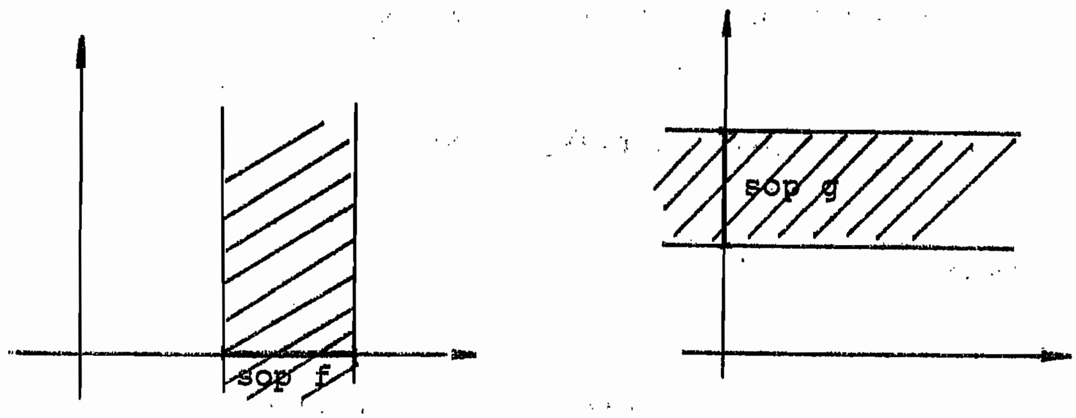
La primera observación es que el soporte de $\varphi(t+\tau)$ no es acotado. En efecto, supongamos que sop $\varphi$ = $[a,b]$ ; entonces, $\varphi(t+\tau) \neq 0$ si $a \leqslant \tau + t \leqslant b$ , o sea $-t + a \leqslant \tau \leqslant -t + b$ ;



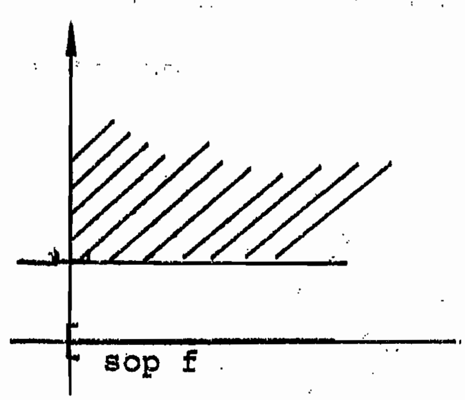

Una manera de darles sentido a las expresiones anteriores es hacer hipótesis de tal manera que resulten soportes acotados.

Recordando el Teorema 6.4, hacemos las siguientes observaciones:

1. Si $f$ ó $g$ tienen soporte acotado, $\text{sop } f \times \text{sop } g$ está contenido en una banda vertical y horizontal de ancho finito.




2. Si $f$ y $g$ tienen soportes acotados por la derecha, resulta la siguiente zona:




Análogamente para soportes acotados por la izquierda.

En cualquiera de los casos mostrados, $\text{sop } f \times \text{sop } g$ tiene intersección $\Omega$ acotada con $\text{sop } \varphi(t+\tau)$, que es la banda inclinada que ya vimos. Eso buscábamos. Podemos darle sentido a la convolución poniendo

$$<f * g , \varphi> = <f(t) \otimes g(\tau), \lambda(t,\tau)\varphi(t+\tau)>,$$

donde $\lambda(t,\tau) \in D_{t,\tau}$ y vale uno en un entorno de $\Omega$ (ver Apéndice). Entonces, siempre que las distribuciones que intervienen verifiquen alguna de las condiciones establecidas, podemos considerar a $f * g$ como una funcional definida en $D$ ; se puede ver que es lineal y continua. Asi, si se cumplen algunas de las hipótesis sobre el soporte de $f$ y $g$, resulta $f * g \in D'$ .

Dado que $\delta(t)$ tiene soporte acotado, la podemos convolucionar con cualquier distribución de $D'$ . Calculemos $\delta * f$ :

$$<f * \delta , \varphi> = <f(t) \otimes \delta(\tau), \varphi(t+\tau)> =$$

$$= <f(t), <\delta(\tau), \varphi(t+\tau)>> =$$

$$= <f(t), \varphi(t)> \quad , \quad \forall \varphi \in D .$$

Es decir, $f * \delta = f$ .

Esto responde la pregunta planteada en el § 4 acerca de la unidad de la convolución. Existe en las distribuciones y no en las funciones, y es la $\delta$ definida en el § 5.

APENDICE

Hemos dado sentido a la convolución de distribuciones en el caso en que la intersección del soporte de $f(t) \otimes g(\tau)$ y el soporte de $\varphi(t+\tau)$ sea un conjunto acotado $\Omega$, poniendo

$$<f(t) \otimes g(\tau) , \lambda(t,\tau)\varphi(t+\tau)> ,$$

donde $\lambda(t,\tau) \in D_{t,\tau}$, y es igual a uno en un entorno de $\Omega$.

Justificaremos esto, mostrando que los valores de una función $\varphi(t,\tau) \in D_{t,\tau}$, fuera de un entorno del sop $f(t) \otimes g(\tau)$, pueden modificarse sin que cambie el valor de la distribución sobre esa función.

Comenzaremos con la siguiente

Definición A.1

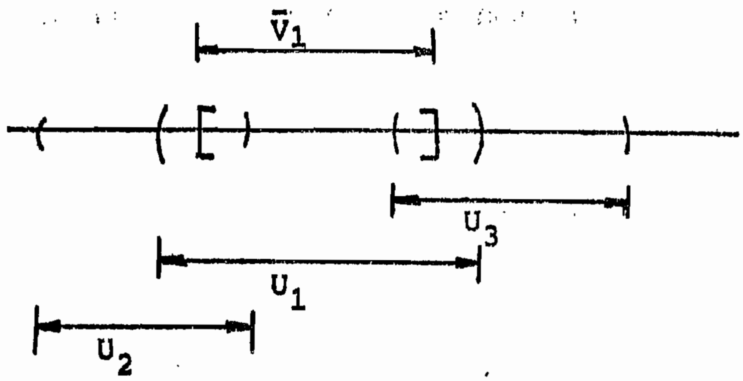
Una familia $\{U_j\}_{j=1}^{\infty}$ de conjuntos abiertos acotados de $R^n$ forman un cubrimiento localmente finito de $R^n$, si cada $x \in R^n$ pertenece sólo a un número finito de $U_j$.

Lema A.2

Sea $\{U_j\}$ un cubrimiento localmente finito de $R^n$; entonces, existe otra colección numerable de abiertos $V_j$ que cubren $R^n$, tal que $V_j \subset \bar{V}_j \subset U_j$, para todo $j$.

Dem.: Construyamos la colección en forma inductiva.

El siguiente esquema muestra la situación para el primer conjunto:




$\{V_1, U_2, U_3, \ldots\ldots\}$ es un cubrimiento localmente finito y $\bar{V}_1 \subset U_1$.

Supongamos ahora que $V_1, \ldots, V_{k-1}$ son tales que $\bar{V}_j \subset U_j$ , $j = 1, \ldots, k-1$ , y que

$$\{V_1, \ldots, V_{k-1}, U_k, U_{k+1}, \ldots.\}$$

es un cubrimiento localmente finito de $R^n$ .

Si quitamos del mismo el abierto $U_k$ y tomamos complemento, definimos

$$F_k \triangleq \mathcal{C}[V_1 \cup \ldots \cup V_{k-1} \cup U_{k+1} \cup \ldots,\ldots] \quad ,$$

que es cerrado, y además, $F_k \subset U_k$ (en efecto, si $x \in F_k$ , $x \notin V_i$ $i=1,\ldots,k-1$ , $x \notin U_i$ $i \geq k+1$ , de manera que $x \in U_k$).

Ahora elegimos $V_k$ como un abierto que contiene a $F_k$ y cuya clausura está contenida en $U_k$.

<u>Lema A.3</u> (Partición de la unidad)

Dado un cubrimiento $\{U_k\}$ localmente finito en $R^n$, existe una sucesión de funciones $\{e_k(t)\} \subset D$ tal que

i) $0 \leq e_k(t) \leq 1$ ,

ii) sop $e_k(t) \subset U_k$ ,

iii) $\sum_k e_k(t) = 1$.

Observemos que por ii), la suma que aparece en iii) tiene una cantidad finita de términos.

<u>Dem.</u>:

Usemos el cubrimiento $\{V_k\}$ dado por el Lema A.2.

Podemos construir funciones (ver parágrafo 5) $h_k(t) \in D$ tales que:

. $h_k(t) = 1$ si $t \in \bar{V}_k$

. $h_k(t) = 0$ si $t \notin U_k$

. $0 \leq h_k(t) \leq 1$ .

Definamos

$$h(t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(t) ;$$

para cada $t$ es una suma finita, por el carácter localmente finito del cubrimiento, y además, $h(t) \geq 1$ .

Las funciones buscadas son

$$e_k(t) = \frac{h_k(t)}{h(t)} \quad .$$

Teorema A.4

$f \in D'$ , $\{U_a\}$ abiertos.

Si $f = 0$ en cada $U_a$ , entonces $f = 0$ en $\Omega = \bigcup\limits_{a} U_a$.

Dem.:

Podemos suponer que cada abierto $U_a$ tiene diámetro menor que uno.

Debemos probar si $\psi(t) \in D$ con sop $\psi \subset \Omega$ , entonces, $\langle f,\varphi\rangle = 0$ .

Sea $E$ un conjunto abierto tal que sop $\psi \subset E \subset \bar{E} \subset \Omega$ . A partir de la familia $\{U_a\}$ podemos -agregando conjuntos abiertos que no corten a $E$ - , obtener un cubrimiento de $R$ mediante abiertos de diámetro menor que uno.

De este cubrimiento de $R$ , podemos tomar un subcubrimiento localmente finito. En efecto, $R = \cup\,[k,k+1]$ , y cada intervalo tiene un subcubrimiento finito; la unión de todos ellos resulta un cubrimiento numerable de $R$ , que es localmente finito dada la cota uniforme de los diámetros. Llamemos $\{V_k\}$ a tal cubrimiento localmente finito, y $\{e_k(t)\}$ a la partición de la unidad correspondiente (Lema A.3).

La función $\psi(t) \in D$ , puede ser escrita como sigue:

$$\psi(t) = \sum_k \psi(t)\, e_k(t) \ ,$$

donde la suma es finita (recordar que $\Sigma\, e_k(t) = 1$), $\psi(t).e_k(t) \in D$ y sop $(\psi.e_k) \subset V_k$ .

Pero cada conjunto $V_k$ es alguno de los $U_a$ a partir de los cuales se construyó el cubrimiento de $R$ . $(k \,/\, \psi(t)e_k(t) \neq 0)$

Entonces, por hipótesis, $<f,\psi.e_k> = 0$ .

$$<f,\psi> = \sum_k <f,\psi\, e_k> = 0 \ ,$$

como queríamos demostrar.

Estamos ahora en condiciones de probar nuestra aserción del comienzo del apéndice.

Sean $\varphi, \psi \in D$ , $\varphi(t) = \psi(t)$ en un entorno del soporte de una distribución $f$ . Entonces el soporte de $\varphi(t) - \psi(t)$ está contenido en el conjunto nulo de $f$ . Recordemos que la definición de distribución nula era una definición local: $f$ es nula en un entorno $U$ si $<f,\varphi> = 0$ $\forall \varphi \in D$ con sop $\varphi \subset U$ .

El conjunto nulo fue definido como la unión de esos abiertos, y el Teorema A.4 nos permite afirmar que si $f$ se anula en cada uno, se anula también en la unión de todos ellos, de manera que

$$<f,\varphi-\psi> = 0,$$

es decir,

$$\langle f,\varphi \rangle = \langle f,\psi \rangle$$

para $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ iguales en un entorno del soporte de $f$ (pero no necesariamente fuera de él).

## 7. Propiedades de la Convolución de Distribuciones.

a) Es lineal.

b) Derivación; demostraremos que

$$\frac{d}{dt}(f * g) = f * \frac{dg}{dt} = \frac{df}{dt} * g \ .$$

En efecto,

$$\left\langle \frac{d}{dt}(f * g), \varphi \right\rangle = \left\langle f * g, -\frac{d\varphi}{dt} \right\rangle =$$

$$= \langle f(t), \langle g(\tau), -\varphi'(t+\tau)\rangle\rangle =$$

$$= \langle f(t), \langle g'(\tau), \varphi(t+\tau)\rangle\rangle =$$

$$= \langle f * g', \varphi \rangle \ .$$

c) Regularización.

Si $f \in D'$ y $\varphi \in D$,

entonces $h \triangleq f * \varphi$ es una función $C^\infty$ dada por

$$h(t) = \langle f(\tau), \varphi(t-\tau)\rangle \ , \qquad (7.1)$$

y sus derivadas por la expresión

$$h^{(k)}(t) = \left\langle f(\tau), \varphi^{(k)}(t-\tau) \right\rangle . \tag{7.2}$$

La demostración de la parte a) del Lema 6.1 nos muestra que si es válida la expresión (7.1) también lo es la (7.2).

Demostremos entonces (7.1). Tomemos $\theta \in D$ ;

$$\langle h,\theta\rangle = \langle f * \varphi,\theta\rangle = \langle f(\tau),\langle\varphi(t),\theta(t+\tau)\rangle\rangle =$$

($\varphi$ y $\theta$ son funciones)

$$= \langle f(\tau),\langle\varphi(t-\tau),\theta(t)\rangle\rangle =$$

$$= \langle f(\tau),\langle\theta(t),\varphi(t-\tau)\rangle\rangle =$$

$$= \langle f(\tau) \otimes \theta(t), \varphi(t-\tau)\rangle =$$

(conmutatividad de $\otimes$ : ver Teorema 7.3)

$$= \langle\theta(t), \langle f(\tau),\varphi(t-\tau)\rangle\rangle =$$

(son dos funciones)

$$= \langle\langle f(\tau),\varphi(t-\tau)\rangle,\theta(t)\rangle .$$

En consecuencia

$$h(t) = \langle f(\tau),\varphi(t-\tau)\rangle ,$$

como queríamos.

Observemos que, si $f \in L^1_{loc}$ , la expresión anterior es la definición de convolución de funciones.

Debido a la importancia que tienen en la convolución las distribuciones de soporte acotado, introduciremos la siguiente definición:

<u>Definición 7.1</u>

$f \in \mathcal{E}'$ si $f \in D'$ y tiene soporte acotado.

Además indicaremos con $D'_D$ y $D'_I$ a las distribuciones de $D'$ con soporte acotado por la derecha y la izquierda respectivamente. $\{f_n\} \xrightarrow{\mathcal{E}'} f$ si es convergente en $D'$ y todas las $f_n$ tienen soporte contenido en un intervalo finito $I$ .

Como corolario de la regularización vista, tenemos el siguiente enunciado:

$c_1$) Si $f \in \mathcal{E}'$ y $\varphi \in C^\infty$,

entonces $(f * \varphi)(t) = \langle f(\tau), \varphi(t-\tau)\rangle \in D$ , puesto que es $C^\infty$ y para $|t|$ grande, los soportes de $f$ y $\varphi(t-\tau)$ no se cortan.

d) Continuidad.

Si $\{f_n\} \xrightarrow{D'} f$ , y $g \in \mathcal{E}'$

$$\Rightarrow \quad f_n * g \xrightarrow{D'} f * g \, .$$

Tomemos $\varphi \in D$ ; por definición,

$$<f_n * g , \varphi> = <f_n(t), <g(\tau), \varphi(t+\tau)>> ,$$

y llamando

$$\psi(t) = <g(\tau), \varphi(t+\tau)> ,$$

resulta

$$<f_n * g , \varphi> = <f_n(t), \psi(t)> ,$$

y como sabemos, $\psi(t) \in D$ por las razones expuestas en $C_1$).

Entonces, por la definición de convergencia en $D'$ ,

$$<f_n * g , \varphi> = <f_n , \psi> \to <f , <g(\tau), \varphi(t+\tau)>> = <f * g , \varphi> ,$$

es decir

$$f_n * g \to f * g .$$

El mismo resultado puede obtenerse bajo las hipótesis,

$$\{f_n\} \xrightarrow{\&'} f \qquad y \qquad g \in D' .$$

La diferencia en este caso es que la función $\psi(t) \in C^\infty$, pero no necesariamente tiene soporte acotado. Pero, como sabemos, puede reemplazarse por una función $\theta(t) \in D$, que verifica $\psi(t) = \theta(t)$ en un entorno del conjunto donde todas las $f_n$ tienen su soporte. Lo mismo si $\{f_n\} \xrightarrow{D'_I} f$ y $g \in D'_I$.

e) Traslación.

$$\text{Si} \quad h(t) = f(t) * g(t) \Rightarrow h(t-a) = f(t-a) * g(t) =$$
$$= f(t) * g(t-a) \;;$$

en efecto,

$$\langle h(t-a),\varphi(t)\rangle = \langle h(t),\varphi(t+a)\rangle =$$
$$= \langle f(t),\langle g(\tau),\varphi(t+a+\tau)\rangle\rangle =$$
$$= \langle f(t),\langle g(\tau-a),\varphi(t+\tau)\rangle\rangle =$$
$$= \langle f(t) \otimes g(t-a),\varphi(t+\tau)\rangle =$$
$$= \langle f(t) * g(t-a),\varphi(t)\rangle \;.$$

En particular, $f(t-a) = f(t) * \delta(t-a)$ porque (7.3)
$f(t-a) = f(t-a) * \delta(t)$.

f) Conmutatividad.

Es una consecuencia de la conmutatividad del producto tensorial, y para demostrar esta, necesitamos el siguiente

Lema 7.2

Las funciones de la forma

$$\varphi(t,\tau) = \sum_{k} \psi_k(t)\theta_k(\tau) \ , \tag{7.4}$$

donde $\psi_k(t) \in D$ , $\theta_k(\tau) \in D$ , y la suma es de finitos términos, forman un conjunto denso en $D_{t,\tau}$.

Dem.:

Supongamos que sop $\varphi(t,\tau) \subset [-a,a] \times [-a,a]$ .

Entonces, de acuerdo con una extensión de Borel al teorema de Weierstrass [9], podemos encontrar una sucesión de polinomios $\{p_m(t,\tau)\}$ que converjan uniformemente a $\varphi(t,\tau)$ en $[-2a,2a] \times [-2a,2a]$ , y sus derivadas parciales a las de $\varphi(t,\tau)$ de la misma forma.

Ahora, si $\rho(t) \in D$ es tal que

$$\rho(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leqslant a \\ 0 & \text{si } |t| \geqslant 2a \ , \end{cases}$$

resulta que

$$p_m(t,\tau)\ \rho(t)\ \rho(\tau) \in D_{t,\tau}$$

y es de la forma (7.4).

Además

$$\{p_m(t,\tau)\rho(t)\rho(\tau)\} \xrightarrow{D_{t,\tau}} \varphi(t,\tau)\rho(t)\rho(\tau) = \varphi(t,\tau)\ .$$

Teorema 7.3

$$f(t) \otimes g(\tau) = g(\tau) \otimes f(t)\ .$$

Dem.:

Establecido el Lema 7.2 y dada la continuidad de las distribuciones, basta probar la conmutatividad sobre las funciones de la forma $\Sigma\psi_k(t)\theta_k(\tau)$ :

$$\langle f(t) \otimes g(\tau), \sum_k \psi_k(t)\varphi_k(\tau)\rangle = \sum_k \langle f(t), \langle g(\tau), \psi_k(t)\theta_k(\tau)\rangle\rangle =$$

$$= \sum_k \langle f(t), \psi_k(t)\rangle\langle g(\tau), \theta_k(\tau)\rangle =$$

$$= \langle g(\tau) \otimes f(t), \sum_k \psi_k(t)\varphi_k(\tau)\rangle\ .$$

Corolario 7.4

$\varphi(t,\tau) \in D_{t,\tau}$ , $g(\tau) \in D'_\tau$ , entonces

$$\int_a^b \langle g(\tau),\varphi(t,\tau)\rangle\, dt = \langle g(\tau), \int_a^b \varphi(t,\tau)\, dt\rangle .$$

<u>Dem.:</u>

$$\chi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in [a,b] \\ 0 & \end{cases} .$$

Consideremos el producto tensorial

$$\langle \chi(t) \otimes g(\tau),\ \varphi(t,\tau)\rangle = \langle \chi(t), \langle g(\tau),\varphi(t,\tau)\rangle\rangle =$$

$$= \int_a^b \langle g(\tau),\varphi(t,\tau)\rangle\, dt .$$

Si ahora calculamos

$$\langle g(\tau) \otimes \chi(t),\varphi(t,\tau)\rangle = \langle g(\tau), \langle \chi(t),\varphi(t,\tau)\rangle\rangle =$$

$$= \langle g(\tau),\ \int_a^b \varphi(t,\tau)\, dt\rangle .$$

La igualdad buscada surge del Teorema 7.3.

g) Asociatividad.

En general la convolución no es asociativa, como muestra el siguiente ejemplo.

Si llamamos $h(t) = 1$ si $t \geq 0$ , $= 0$ si $t < 0$ , y $g(t) \equiv 1$ , $g * (\delta' * h) = g *(\delta * h') = g * \delta = g = 1$ ;

pero,

$$(g * \delta')* h = g' * h = 0 * h = 0 .$$

Puede demostrarse (cf.[10]) que la convolución es asociativa bajo alguna de las siguientes condiciones:

i) los soportes de todas las distribuciones son acotados, excepto a lo sumo, uno de ellos.

ii) todos los soportes están acotados por la izquierda o por la derecha.

h) Soporte de la convolución.

Teorema 7.4

$f$ y $g$ son distribuciones tales que la convolución de ambas tiene sentido (cf. § 6); entonces

$$\mathrm{sop}(f * g) \subset \mathrm{sop}\, f + \mathrm{sop}\, g .$$

Dem.:

Definamos $\Omega = C[\mathrm{sop}\, f + \mathrm{sop}\, g]$ , que es un conjunto abierto. Mostraremos que si $\varphi(t) \in D$ , con $\mathrm{sop}\, \varphi(t) \subset \Omega$ , resulta que

$$<f * g , \varphi> = <f(t) \otimes g(\tau), \varphi(t+\tau)> = 0 .$$

Como $\text{sop}\,\varphi(t) \subset \Omega$ , $\text{sop}\,\varphi(t+\tau) \subset \{(t,\tau)/t + \tau \in \Omega\} =$

$$= \{(t,\tau)/t + \tau \notin \text{sop}\, f + \text{sop}\, g\} ,$$

y si $t + \tau \notin \text{sop}\, f + \text{sop}\, g$ , entonces $(t,\tau) \notin \text{sop}\, f \times \text{sop}\, g$ .

En consecuencia,

$$\text{sop}\,\varphi(t+\tau) \cap (\text{sop}\, f \times \text{sop}\, g) = \phi ,$$

y de allí

$$\langle f(t) \otimes g(\tau) , \varphi(t+\tau)\rangle = 0 .$$

## 8. Aproximación de distribuciones.

**Teorema 8.1**

D es denso en D'.

**Dem.**

Tomemos una sucesión de intervalos cerrados

$$K_j \subset K_{j+1} \quad , \quad \bigcup_j K_j = R ,$$

y funciones $a_j(t) \in D$ tales que

$$a_j(t) = 1 \quad \text{si} \quad t \in K_j$$

(ver el teorema 5.3).

Si $f \in D'$ , definimos

$$f_n = (a_n(t) . f) * \psi_n(t) ,$$

donde $\psi_n(t) = \psi(nt)$ y

$$\psi(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\frac{1}{(1-t^2)}}}{\int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{(1-t^2)}}} & \text{si } |t| < 1 \\ 0 & \text{si } |t| \geq 1 . \end{cases}$$

Observemos que

$$\alpha_n(t).f \in D' \ .$$

ya que $\alpha_n \in C^\infty$ y $f \in D'$ (ver § 6); es más, $\alpha_n.f \in \mathcal{E}'$ , puesto que $\alpha_n(t)$ tiene soporte acotado. Entonces

$$f_n = (\alpha_n.f) * \psi_n \in D \ ,$$

por lo visto en § 7. $C_1$)

Entonces definen distribuciones $f_n \in D'$; así, para toda $\varphi \in D$ tenemos

$$<f_n,\varphi> = <((\alpha_n f)*\psi_n)(t),\varphi(t)> =$$

$$= <(\alpha_n f)(t),<\psi_n(\tau),\varphi(t+\tau)>> =$$

$$= <f(t),\ \alpha_n(t) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(\tau)\varphi(t+\tau)d\tau> =$$

$$= <f(t),\alpha_n(t) \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(-\tau)\varphi(t-\tau)d\tau> \ .$$

Ya que $\psi_n(\tau) = \psi_n(-\tau)$ , resulta

$$<f_n,\varphi> = <f(t),\alpha_n(t).(\psi_n * \varphi)(t)> \qquad (8.1)$$

Como hemos visto en la demostración del teorema 5.2,

$$(\psi_n * \varphi)(t) \xrightarrow[n\to\infty]{\bullet} \varphi(t) \quad ,$$

y como las mismas hipótesis son satisfechas por las derivadas,

$$\frac{d}{dt}(\psi_n * \varphi) = \psi_n(t) * \varphi'(t) \xrightarrow[n\to\infty]{\bullet} \varphi'(t) \quad ,$$

y lo mismo con las derivadas de orden mayor; por otra parte las funciones $\psi_n * \varphi$ tienen su soporte contenido en un compacto $K$, para todo $n$, ya que sop $\psi_n \subset [-1,1]$ para todo $n$. En resumen, $\{\psi_n * \varphi\} \subset D$, y

$$\{\psi_n * \varphi\} \xrightarrow[n\to\infty]{D} \varphi \quad .$$

Pero en (8.1) aparecen estas funciones multiplicadas por $a_n(t)$ ; tomando $n$ suficientemente grande como para que $K_n \supset K$, no hay problema en agregar el factor $a_n$. Entonces,

$$a_n(t)\,[\psi_n * \varphi](t) \xrightarrow[n\to\infty]{D} \varphi(t) \quad ,$$

y de allí,

$$\langle f(t),\, a_n(t)\,[\psi_n * \varphi](t)\rangle \longrightarrow \langle f(t), \varphi(t)\rangle \; ;$$

volviendo a (8.1),

$$\langle f_n, \varphi\rangle \longrightarrow \langle f, \varphi\rangle \quad \forall \varphi \in D \; ,$$

como queríamos.

Corolario 8.2

$\mathcal{E}'$ es denso en $D'$, ya que $D \subset \mathcal{E}' \subset D'$.

## 9. Descripción temporal de sistemas lineales.

Representaremos a los sistemas lineales mediante operadores lineales cuyo dominio es el espacio de distribuciones de soporte acotado $\mathcal{E}'$ ; las razones para esta elección son: 1) la $\delta$ de Dirac pertenece a $\mathcal{E}'$ , y 2) la operación de convolución está bien definida.

Para la caracterización que daremos es necesaria la siguiente definición.

**Definición 9.1**

Un sistema $T$ es continuo en un dominio $D_T$ , si para cada sucesión $\{f_n\} \subset D_T$ que converge a cero en la topología de $D_T$ , la sucesión $\{T f_n\} \xrightarrow{D'} 0$ .

Estamos ahora en condiciones de demostrar el teorema que da la descripción en el tiempo de un sistema lineal, invariante, y continuo ([ 8 ]) .

**Teorema 9.2**

Sea $T$ un sistema lineal, invariante y continuo en $\mathcal{E}'$

$$T : \mathcal{E}' \to D' .$$

Entonces

$$T[f] = T[\delta] * f \,, \qquad \forall f \in \mathcal{E}' \,.$$

<u>Dem.</u>:

1. Supongamos primero que la excitación $f \in D$ ; después pasaremos al caso $f \in \mathcal{E}'$ , que es el del teorema. Sin perder generalidad, podemos suponer que sop $f \subset [0,1]$ .

Definamos la siguiente excitación:

$$r_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} f \frac{n}{N} \quad \delta \; t - \frac{n}{N} \quad ; \qquad (9.1)$$

es decir, partimos el intervalo $[0,1]$ en $N$ partes y usamos la excitación distribucional dada por (9.1).

Como $T$ está definido en $\mathcal{E}'$ , y además es lineal e invariante, resulta que

$$g_N(t) \triangleq T\,[\, r_N(t)] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} f \frac{n}{N} \quad T \; \delta \; t - \frac{n}{N} \quad ,$$

Llamemos a

$h(t) \triangleq T\,[\delta(t)]$ , <u>respuesta impulsiva</u> del sistema.

Por las propiedades de la convolución que ya hemos demostrado,

$$g_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} f \frac{n}{N} \quad h \; t - \frac{n}{N} \quad = \quad (\text{por}(7.3))$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} f \frac{n}{N} \quad h(t) * \delta \; t - \frac{n}{N} \quad =$$

$$= h(t) * \left[\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} f\left(\frac{n}{N}\right)\delta\left(t-\frac{n}{N}\right)\right] .$$

En el corchete tenemos nuevamente la expresión (9.1), de manera que la respuesta correspondiente a la excitación aplicada $r_N(t)$ es:

$$g_N(t) = h(t) * r_N(t) . \qquad (9.2)$$

Hasta aquí tenemos demostrado el teorema para entradas que son $\delta$ multiplicadas por los valores de la función $f$ en los puntos en que se aplican.

Esto nos servirá para demostrar la parte 1. En efecto, si $\varphi(t) \in D$ , tenemos

$$<r_N(t),\varphi(t)> = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} f\left(\frac{n}{N}\right) <\delta\left(t-\frac{n}{N}\right),\varphi(t)> =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} f\left(\frac{n}{N}\right)\varphi\left(\frac{n}{N}\right) .$$

Ambas son funciones de $D$ , de manera que cuando $N\to\infty$ , la expresión anterior tiende a

$$\int_0^1 f(t)\varphi(t)\, dt .$$

Como $f \in D$ , queda definida la distribución regular

$$\langle f(t), \varphi(t) \rangle \quad .$$

Así resulta

$$\langle r_N(t), \varphi(t) \rangle \xrightarrow[N\to\infty]{} \langle f(t), \varphi(t) \rangle \quad ,$$

es decir,

$$r_N(t) \xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{S}'} f(t) \quad . \tag{9.3}$$

Como se ha supuesto que el sistema $T$ es continuo en $\mathcal{S}'$ , resulta

$$T[r_N(t)] \xrightarrow[N\to\infty]{} T[f] \; .$$

Ahora,

$$T[r_N(t)] = g_N(t) = h(t) * r_N(t) \quad , \text{ por } (9.2).$$

Pero hemos visto en el § 7,d) que la convolución es continua, de manera que, por (9.3)

$$h(t) * r_N(t) \xrightarrow[N\to\infty]{} h(t) * f(t) \quad .$$

Entonces

$$T[r_N] = h(t) * r_N(t) \begin{cases} \xrightarrow[N\to\infty]{} T[f] \\ \\ \xrightarrow[N\to\infty]{} h(t) * f(t) \end{cases} ,$$

y en consecuencia,

$$T[f] = h(t) * f(t) \qquad\qquad \forall f \in D \ .$$

Esto demuestra el teorema para excitaciones $f \in D$ .

2. Para finalizar, tomemos $f \in \mathcal{E}'$ .

Tomemos una sucesión $\{\beta_n(t)\} \subset D$ tal que

$$\beta_n \xrightarrow{\mathcal{E}'} \delta \ .$$

Por la continuidad probada en § 7,d),

$$f * \beta_n \xrightarrow{\mathcal{E}'} f * \delta = f \ . \qquad (9.4)$$

($f * \beta_n$ tienen su soporte dentro de una región fija, por el teorema 7.4) .

Pero observemos que $f * \beta_n \in D$ por § 7,$c_1$), y para $D$ ya demostramos el resultado en la parte 1:

$$T[f * \beta_n] = h(t) * [f * \beta_n] \ .$$

Pero como $T$ es continuo,

$$T[f * \beta_n] \longrightarrow T[f] \quad \text{por (9.4)} ,$$

y dado que, por la continuidad de la convolución

$$h(t) * [f * \beta_n] \longrightarrow h(t) * f(t) ,$$

resulta

$$T[f] = h(t) * f(t) \qquad \forall f \in \mathcal{E}' ,$$

como queríamos probar.

El teorema anterior nos da una respuesta a la cuestión planteada en el § 1, sobre la caracterización de los sistemas lineales. Podemos generalizar el resultado si introducimos otra característica de los sistemas, que definimos a continuación.

<u>Definición 9.3</u>

Un sistema lineal $T$ es <u>causal</u> si

$$u_1(t) = u_2(t) \quad \forall t < t_0 \Rightarrow T[u_1] = T[u_2] \quad \forall t < t_0 .$$

Observemos que esto significa que si la excitación es nula hasta el instante $t_0$, la respuesta también; es decir, no hay anticipación.

Daremos a continuación una caracterización de la causalidad en términos de la respuesta impulsiva.

Teorema 9.4

Un sistema lineal, invariante y continuo en $\mathcal{D}'$ es causal, si y sólo si la respuesta impulsiva $h(t)$ es nula para $t < 0$.

Dem.:

($\Rightarrow$) Si el sistema es causal, como

$$\delta(t) = 0 \quad \text{en } (-\infty, 0) \quad (\text{sop } \delta = \{0\}),$$

resulta

$$T[\delta(t)] = T[0] \quad \text{en} \quad (-\infty, 0).$$

Pero por la linealidad, $T[0] = 0$, de manera que

$$T[\delta(t)] = 0 \quad \text{en} \quad (-\infty, 0),$$

es decir, $h(t) = 0$ si $t < 0$.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que $h(t) = 0$ si $t < 0$. Debemos demostrar que si $f_1(t) = f_2(t)$ en $t < t_0$, resulta que $g_1(t) = g_2(t)$ en $t < t_0$, donde $g_i = T[f_i]$. Por el Teorema 9.2, $g_1 - g_2 = h * (f_1 - f_2)$.

Tomemos $\varphi(t)$ con sop $\varphi \subset (-\infty, t_0)$:

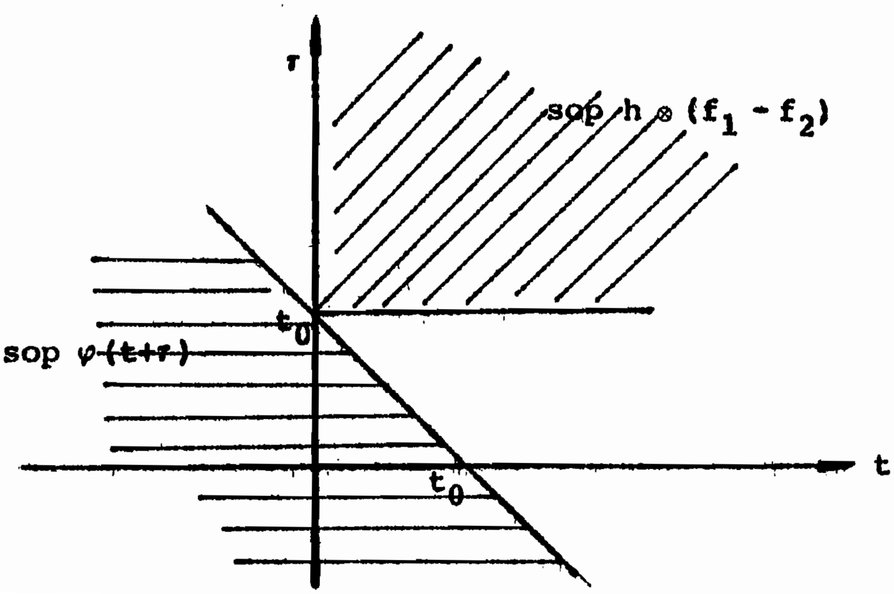
$$<(g_1 - g_2)(t), \varphi(t)> = <[h * (f_1 - f_2)](t), \varphi(t)> =$$

$$= <h(t) \otimes (f_1 - f_2)(\tau), \varphi(t+\tau)> \quad . \qquad (9,5)$$

Como sabemos (Teorema 6.1),

$$\text{sop } h(t) \otimes (f_1 - f_2)(\tau) = \text{sop } h(t) \times \text{sop}(f_1 - f_2)(\tau)$$

$$[0,\infty) \times [t_0,\infty) \ .$$



El sop $\varphi(t+\tau)$ esta en la zona rayada horizontalmente, ya que sop $\varphi \subset (-\infty,t_0)$ , de manera que la región está limitada por la recta $t+\tau = t_0$ .

Como no se cortan, resulta que (9.5) es igual a cero.

Es decir,

$$<g_1 - g_2 , \varphi> = 0 \quad \forall\varphi \text{ con sop } \varphi \subset (-\infty,t_0),$$

o sea,

$$g_1 = g_2 \quad \text{en} \quad (-\infty,t_0) ,$$

como queríamos.

La definición de causalidad permite ampliar el resultado del teorema 9.2 a las distribuciones de soporte acotado por la izquierda.

<u>Teorema 9.6</u>

La respuesta de un sistema lineal, contínuo, invariante y causal, está dada por

$$g = h * f \qquad \forall f \in D'_{t_0} .$$

donde $D'_{t_0}$ indica las distribuciones de $D'$ que son nulas para $t < t_0$ , y $h$ la respuesta impulsiva del sistema. Además, la respuesta también está en $D'_{t_0}$ .

Dem.:

Definamos una función $\alpha_b(t) \in C^\infty$ que sea igual a 1 si $t < b$ y cero si $t > b + \epsilon$ , donde $b \in R$ es arbitrario y $\epsilon > 0$ .

Podemos poner

$$f = \alpha_b(t) f + (1 - \alpha_b(t)) f .$$

Como $f \in D'_{t_0}$ , $\alpha_b(t) f \in \mathcal{E}'$ para $b > t_0$ ,
y $\alpha_b(t) f = f$ para $t < b$ .

Entonces, por la causalidad de $T$ ,

$$g = T[f] = T[\alpha_b(t) f] ,$$

para todo $t < b$ , y por el teorema 9.2

$$T[\alpha_b(t) f] = h * \alpha_b(t) f .$$

Pero $b$ puede tomarse arbitrariamente grande y

$$a_b(t)\,f \xrightarrow[b\to\infty]{D'_{t_0}} f\,,$$

ya que

$$<a_b(t)f,\varphi(t)> = <f,\varphi(t)>$$

para $\varphi(t) \in D$ con sop $\varphi(t) \subset [t_0,b]$ .

Pero h(t) tiene soporte acotado por la izquierda, ya que la restricción del operador al espacio $\mathcal{E}'$ es contínua en $\mathcal{E}'$, y entonces podemos aplicar el teorema 9.4. Usando la continuidad de la convolución (cf. § 7,d), resulta

$$g = h * f$$

como queríamos.

Finalmente, $g \in D'_{t_0}$ por la causalidad.

Los resultados obtenidos en esta sección nos dan la representación temporal de sistemas en un contexto completamente general, respondiendo así a la cuestión planteada en § 1.

## 10. Relación entre las descripciones temporal y frecuencial.

Si volvemos al campo de las funciones, podemos ver fácilmente la relación entre la respuesta en frecuencia y la respuesta impulsiva.

Supongamos que el sistema L está descripto por la convolución

$$L[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)\ x(t-u)\ du \ ,$$

donde suponemos que $h(u) = L[\delta(t)]$ es una función. El operador L así definido es lineal e invariante.

Si seguimos los pasos indicados en el § 3 para encontrar la respuesta en frecuencia, excitamos al sistema con exponenciales $\exp(i\omega t)$ , y resulta:

$$L[e^{i\omega t}] = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)\ e^{i\omega(t-u)}\ du =$$

$$= e^{i\omega t} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(u)\ e^{-i\omega u}\ du \right] =$$

$$= e^{i\omega t} \ . \ B(\omega) \quad ,$$

Resulta entonces que la respuesta en frecuencia es la transformada de Fourier $\hat{h}$ de la respuesta impulsiva.

Pero el campo donde el tratamiento debe hacerse es el distri bucional; esto hace que debamos ocuparnos de la transformación de Fourier de distribuciones.

Como en tantas ocasiones anteriores, buscamos la definición distribucional apoyándonos en el caso regular, es decir, en funciones.

Una expresión interesante para esto es la igualdad de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x)\varphi(x)\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{\varphi}(x)\ dx \ ,$$

ya que es del tipo que usamos para distribuciones, y sugiere la siguiente definición de transformada de Fourier $\hat{f}$ de una distribución $f$ :

$$<\hat{f},\varphi> = <f,\hat{\varphi}> \quad .$$

Pero aparecen en esta expresión las funciones $\varphi$ y $\hat{\varphi}$ , y surge entonces la pregunta: ¿qué espacio de funciones tomamos para la definición? Debe ser tal que $\varphi$ y $\hat{\varphi}$ pertenezcan al mismo.

De eso nos ocuparemos en el siguiente párrafo.

## 11. La transformación de Fourier de funciones de decrecimiento rápido.

Vimos en el § 4, - donde usamos la transformación de Fourier en $L^1$ - , que la función transformada pertenece al espacio $C_\downarrow$ . Con sen t/t , tenemos un ejemplo de función perteneciente a $C_\downarrow$ pero que no está en $L^1$ .

Para solucionar el problema planteado en el parágrafo anterior, impondremos condiciones suficientemente fuertes sobre la función f(t) para lograr que $f$ y $\hat{f}$ pertenezcan a la misma familia de funciones.

Definición 11.1

Una función f(t) es de decrecimiento rápido, pondremos $f(t) \in S$ , si i $f(t) \in C^\infty$ y $|t^m f^{(k)}(t)| \leq C_{m,k}$ $(k,m \in N)$ . La primera es una restricción local, mientras la segunda es una restricción global, de comportamiento en el infinito. Así, las funciones de $S$ son "infinitamente buenas" tanto local como globalmente. Un ejemplo: $e^{-t^2}$ .

Lema 11.2

La segunda condición de la definición anterior es equivalente a

$$\lim_{|t|\to\infty} |t^m f^{(k)}(t)| = 0 \quad ,$$

es decir, la función y todas sus derivadas tienden a cero más rá pido que cualquier potencia de $1/|t|$ .

Dem.:

($\Rightarrow$) Supongamos que, para algún $m,k$ , el límite no es cero:

$$\lim_{|t|\to\infty} |t^m f^{(k)}(t)| = p > 0 \quad ,$$

de manera que, para $|t|$ suficientemente grande $|t^m f^{(k)}(t)| > a > 0$ . Multiplicando por $|t|$ ,

$$|t^{m+1} f^{(k)}(t)| > |t| \; a > 0 \; .$$

Por hipótesis, $|t^{m+1} f^{(k)}(t)| \leq C_{m+1,k}$ , de manera que $|t| \; a < C_{m+1,k}$ . Este absurdo proviene de suponer que el límite no es nulo.

($\Leftarrow$) Si el límite es cero, dado $\epsilon > 0$ , existe $M$ tal que

$$|t^m f^{(k)}(t)| < \epsilon \quad \text{si } |t| > M \; .$$

En el intervalo $[-M,M]$ la función $t^m f^{(k)}(t)$ es acotada porque es continua; entonces es acotada para todo $t$ , y la cota depende sólo de $m$ y $k$ .

<u>Lema 11.3</u>

Si $f \in \mathcal{S}$ , entonces $t^m f^{(k)}(t) \in L^1$.

<u>Dem.:</u>

$$|t^m f^{(k)}(t)| = \frac{|t|^m}{1+|t|^{m+2}} (1+|t|^{m+2}) |f^{(k)}(t)| =$$

$$= \frac{|t|^m}{1+|t|^{m+2}} [|f^{(k)}(t)| + |t|^{m+2} |f^{(k)}(t)|] \leq$$

$$\leq \frac{|t|^m}{1+|t|^{m+2}} [C_{0,k} + C_{m+2,k}] <$$

$$< \frac{1}{|t|^2} [C_{0,k} + C_{m+2,k}] ,$$

y como $1/t^2$ es integrable, queda demostrado.

<u>Corolario 11.4</u>

$\mathcal{S} \subset L^1$ , que surge poniendo $m=k=0$ en el lema anterior.

El teorema siguiente nos muestra que las restricciones impuestas producen el efecto buscado.

<u>Teorema 11.5</u>

La transformación de Fourier $F$ aplica linealmente $\mathcal{S}$ en sí mismo.

Dem.:

Si $f \in \mathcal{S}$, para todo $n$, $t^n f(t) \in L^1$ (Lema 11.3); entonces (cf. Apéndice, Corol. A-11.2)

$$F[(-it)^n f(t)] = \frac{d^n \hat{f}(\omega)}{d\omega^n} \quad . \tag{11.1}$$

Surge de aquí que $\hat{f} \in C^{\infty}$.

Para probar la acotación que falta, llamemos $F(t) = (-it)^n f(t)$, con lo que (11.1) resulta

$$\frac{d^n \hat{f}(\omega)}{d\omega^n} = \hat{F}(\omega) \quad .$$

Por la fórmula de Leibnitz,

$$F^{(k)}(t) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} [(-it)^n]^{(j)} f^{(k-j)}(t) \quad ,$$

de manera que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F^{(k)}(t)| \, dt \leq \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \int_{-\infty}^{\infty} |(t^n)^{(j)} f^{(k-j)}(t)| \, dt =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} n(n-1)\ldots(n-j+1) \int_{-\infty}^{\infty} |t^{n-j}| \, |f^{(k-j)}(t)| \, dt \quad .$$

Como por el Lema 11.3 las funciones del integrando son integrables, obtenemos: $F^{(k)}(t) \in L^1$.

Pero entonces (cf. Apéndice, Corol.A-11.4)

$$|\omega|^k\,|\hat{F}(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |F^{(k)}(t)|\,dt \quad ,$$

es decir, usando la definición de $F$ .

$$|\omega|^k\,|\hat{F}(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |(-it)^n\, f(t)|^{(k)}\,dt = C_{n,k} \quad ,$$

lo que termina la demostración.

## APENDICE

### Teorema A-11.1

$f \in L^1$ ; si $g(t) = -it\, f(t) \in L^1$ , entonces $\hat{f}(\omega)$ es derivable y $\hat{f}'(\omega) = \hat{g}(\omega)$ .

**Dem.:**

Debemos estudiar el cociente

$$\frac{\hat{f}(\omega) - \hat{f}(\eta)}{\omega - \eta} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, \frac{e^{-i\omega t} - e^{-i\eta t}}{\omega - \eta} \, dt \quad .$$

Observamos que el integrando está acotado por la función integrable $\left| f(t) \frac{2}{\omega - \eta} \right|$ , y que, cuando $\omega \to \eta$ , tiende a

$$f(t) \left. \frac{d}{d\omega} (e^{-i\omega t}) \right|_{\omega=\eta} = f(t) \, [-it \, e^{-i\eta t}] \; .$$

Usando el teorema de la convergencia mayorada,

$$\frac{d \, \hat{f}(\omega)}{d\omega} = F[-it \; f(t)] \; .$$

### Corolario A-11.2

Si $t^n f(t) \in L^1$ , entonces existe la derivada n-sima de $\hat{f}(\omega)$ y

$$\frac{d\ \hat{f}(\omega)}{d\omega^n} = F[(-it)^n\ f(t)]\ .$$

Teorema A-11.3

Si $f(t), f'(t) \in L^1$ , entonces

$$F[f'(t)] = i\omega\ \hat{f}(\omega)\quad ,$$

y
$$|\omega\ \hat{f}(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|\ dt\ .$$

Dem.:

$$F[f'(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\ e^{-i\omega t}\ dt\quad .$$

Integrando por partes,

$$F[f'(t)] = f(t)\ e^{-it\omega}\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ i\omega\ e^{-i\omega t}\ dt =$$

$$= i\omega\ \hat{f}(\omega)\ ,$$

puesto que $f(t) \to 0$ si $|t| \to \infty$ , dado que es integrable.

Corolario A-11.4

Si existe derivada n-sima y es integrable,

$$F[f^{(n)}(t)] = (i\omega)^n \hat{f}(\omega) ,$$

y
$$|\omega^n \hat{f}(\omega)| < \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(n)}(t)| dt .$$

## 12. Transformación de Fourier de Distribuciones Temperadas

Dada la definición de funciones de decrecimiento rápido y de la transformación de Fourier de ellas, podemos formalizar la definición esbozada en el § 10. Para ello definiremos distribuciones sobre el espacio $S$, para lo que se necesita introducir una topología sobre él.

**Definición 12.1**

$\{\varphi_n(t)\}$ converge a $\varphi(t)$ en $S$ sii para $m,k$ enteros no negativos,

$$|t^m \varphi_n^{(k)}(t)| \xrightarrow[n\to\infty]{\cdot} 0 .$$

Llamaremos a $f$ distribución temperada, y escribiremos $f \in S'$, si es una funcional lineal y continua definida en $S$.

Es fácil ver que $S'$ es un subespacio de $D'$, ya que $D \subset S$, y la convergencia en $D$ implica la convergencia en $S$. Además, es un subespacio propio, como muestra el siguiente ejemplo:

$$g(t) = \sum_{n\geq 0} e^{n^2}\,\delta(t-n) ,$$

entonces, para $\varphi(t) \in D$ ,

$$\langle g,\varphi\rangle = \sum_n e^{n^2} \, . \, \varphi(n) \, ,$$

donde la suma tiene una cantidad finita de términos, ya que $\varphi \in D$ ; es decir, $g \in D'$ .

Sin embargo, $g \notin S'$ , porque para $\varphi(t) = \exp(-t^2) \in S$ , $\langle g,\varphi\rangle = \Sigma\, e^{n^2} e^{-n^2}$ , que no converge.

Si $f(t)$ y $\varphi(t)$ pertenecen a $S$ , el producto también, por lo que es integrable (ver Corol.11.4), de manera que la expresión

$$\langle f,\varphi\rangle = \int f(t)\varphi(t) \, dt$$

define una distribución temperada regular. Así $S \subset S'$ .

Resulta que

$$D \subset S \subset S' \subset D' \, ,$$

y la convergencia en un espacio implica la convergencia en los de la derecha.

Recordando el corolario 8.2, todos son densos en $D'$ .

Estamos ahora en condiciones de dar la siguiente

Definición 12.2

Si $f \in S'$ , la transformada de Fourier $\hat{f}$ es

$$<\hat{f},\varphi> = <f,\hat{\varphi}> \quad , \quad \forall\varphi \in S \; ,$$

donde el segundo miembro está bien definido ya que $\hat{\varphi} \in S$ (Teor. 11.5) ,por lo que la igualdad anterior determina una funcional sobre $S$ . Probaremos que:

Teorema 12.3

Si $f \in S'$ , entonces $\hat{f} \in S'$ .

Dem.:

Es una funcional lineal sobre $S$ , ya que

$$<\hat{f},\alpha\,\varphi_1 + \beta\,\varphi_2> = <f,\alpha\,\hat{\varphi}_1 + \beta\,\hat{\varphi}_2> =$$

$$= \alpha<f,\hat{\varphi}_1> + \beta<f,\hat{\varphi}_2> =$$

$$= \alpha<\hat{f},\varphi_1> + \beta<\hat{f},\varphi_2> .$$

Es continuo: si $\{\varphi_n(t)\} \xrightarrow{S} 0$ , como

$$<\hat{f},\varphi_n> = <f,\hat{\varphi}_n> \quad ,$$

debemos ver que $\{\hat{\varphi}_n(\omega)\} \xrightarrow{S} 0$ .

Para $m,k$ enteros no negativos,

$$(i\omega)^m\,\hat{\varphi}_n^{(k)} = F\left[\frac{d^m}{dt^m}\,(-it)^k\,\varphi_n(t)\right] =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\,\frac{d^m}{dt^m}\left[(-it)^k\,\varphi_n(t)\right]\,dt =$$

$$= (-i)^k \sum_{s=0}^{m} \binom{m}{s} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \frac{d^s t^k}{dt^s} \cdot \frac{d^{m-s}\varphi_n(t)}{dt^{m-s}} \, dt \, .$$

Pero, las derivadas de $t^k$ son $k!/(k-s)!\ t^{k-s}$ y se anulan para $m > k$ . Si multiplicamos y dividimos por $t^2 + 1$ ,

$$|\omega^m \hat{\varphi}_n^{(k)}(\omega)| \leq \sum_{s=0}^{\min(k,m)} \binom{m}{s} \frac{k!}{(k-s)!} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|(t^2+1)t^{k-s} \varphi_n^{(m-s)}(t)|}{t^2+1} dt \, .$$

Por la convergencia en $S$ de la sucesión $\{\varphi_n(t)\}$ ,

$$|(t^2+1)t^{k-s} \varphi_n^{(m-s)}(t)| \leq C_{ksmn} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \, ,$$

y además $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi$ ,

de manera que

$$|\omega^m \hat{\varphi}_n^{(k)}(\omega)| \leq \pi \sum_{s} \binom{m}{s} \frac{k!}{(k-s)!} C_{ksmn} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \, . \qquad (12.1)$$

<u>Teorema 12.4</u>

La transformación de Fourier $F : S \to S$ es continua.

<u>Dem.</u>:

Ya hemos visto (Teor. 11.5) que $F$ transforma linealmente $S$ en sí mismo. Además, (12.1) muestra que para cada par $m,k$ fijo, $\omega^m \hat{\varphi}_n^{(k)}(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ , es decir, $\hat{\varphi}_n(\omega) \xrightarrow{S} 0$ .

La expresión

$$<Ff,\varphi> = <f,F\varphi> ,$$

sirve también para definir la transformación inversa $F^{-1}$. Si ponemos $Ff = g$ y $F\varphi = \psi$, resulta

$$<g,F^{-1}\psi> = <F^{-1}g,\psi> ,$$

con $g \in S'$ y $\psi \in S$. Así resulta que la aplicación $F : S' \to S'$ es lineal y biyectiva.

Propiedades

1. $F[(-it)^k f(t)] = (Ff)^{(k)}$.

   Demostrémoslo para $k = 1$:

$$<\hat{f}'(\omega),\varphi(\omega)> = <\hat{f}(\omega),-\varphi'(\omega)> =$$

$$= <f(t),-F\varphi'(\omega)> =$$

$$= <f(t),-\int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(\omega)e^{-i\omega t}\, d\omega> =$$

(integrando por /partes) $$= <-f(t),it \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega)e^{-i\omega t}\, d\omega>=$$

$$= \langle -it\ f(t),\ F[\varphi(\omega)]\rangle =$$

$$= \langle F[-it\ f(t)],\varphi(\omega)\rangle .$$

2. $F[f^{(k)}(t)] = (i\omega)^k\, F[f]$ .

3. $F[f(t-\tau)] = e^{-i\omega\tau}\, F[f]$ .

4. $F[f(t)e^{-i\omega t}] = \hat{f}(\omega+\tau)$ .

5. $F[f(at)] = \frac{1}{a}\ \hat{f}(\frac{\omega}{a})$ .

6. La transformación de Fourier es continua en $S'$ :

Si $\{f_n\} \xrightarrow{S'} f$ , lo que implica -aunque aquí no lo demostramos- que $f \in S'$ , resulta

$$\langle \hat{f}_n,\varphi\rangle = \langle f_n,\hat{\varphi}\rangle \to \langle f,\hat{\varphi}\rangle = \langle \hat{f},\varphi\rangle .$$

Mostraremos a continuación la expresión de la transformada de una distribución de soporte acotado.

Teorema 12.5

Si $f \in S'$ y tiene soporte acotado, entonces $F[f]$ es una distribución regular determinada por la función $\langle f(t),e^{-i\omega t}\rangle \in C^{\infty}$, que debe ser interpretada como $<f(t),\lambda(t)e^{-i\omega t}>$ , donde $\lambda(t) \in D$ y es igual a uno en un entorno del soporte de $f$ (cf. Apéndice § 6).

Dem.:

Si $\varphi(t) \in S$ ,

$$<\hat{f}(\omega),\varphi(\omega)> = <f(t), \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega)e^{-i\omega t}\, d\omega>=$$

$$= <f(t), \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega)\lambda(t)e^{-i\omega t}\, d\omega>=$$

(Corolario 7.4) $$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega)\ <f(t),\lambda(t)e^{-i\omega t}>\, d\omega =$$

$$= <<f(t),\lambda(t)e^{-i\omega t}>, \varphi(\omega)> .$$

Para finalizar, como hemos visto en la parte a) de la demostración del Teorema 6.1, la función $<f(t),\lambda(t)e^{-i\omega t}> \in C^{\infty}$.

Observemos que si la distribución es regular, la expresión del teorema resulta ser la transformada de Fourier de funciones.

Ejemplos:

$$F[\delta(t)] = 1$$

$$F[\delta(t-\tau)] = e^{-i\omega\tau}$$

$$F[\delta^{(k)}(t)] = (i\omega)^k$$

$$F[\delta^{(k)}(t-\tau)] = (i\omega)^k e^{-i\omega\tau} .$$

Demostremos la última igualdad, de la que son casos particulares las anteriores.

$$<F[\delta^{(k)}(t-\tau)],\varphi(\omega)> = <\delta^{(k)}(t-\tau),\hat{\varphi}(t)> =$$

$$= (-1)^k<\delta(t),\hat{\varphi}^{(k)}(t+\tau)> =$$

$$= (-1)^k \hat{\varphi}^{(k)}(\omega) =$$

$$= (-1)^k \frac{d^k}{dy^k} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) e^{-i\omega y}\, dy \Big|_{y=\tau} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega)^k e^{-i\omega k} \varphi(\omega)\, d\omega =$$

$$= <(i\omega)^k e^{-i\omega k},\varphi(\omega)> .$$

Nos interesa,como habíamos mostrado en el § 10, la relación entre transformación de Fourier y convolución, ambas en el sentido distribucional. Podemos, a esta altura de la exposición, demostrar el siguiente

Teorema 12.6

$f$ , $g \in \mathcal{S}'$ , ambas con soporte acotado, entonces,

$$\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$$

Dem.:

Existe la convolución puesto que ambas tienen soporte acotado (basta que una lo tenga (cf. § 6)).

En virtud del Teorema 7.5, sop$(f * g)$ es un conjunto acotado, de manera que, por el teorema 12.5,

$$\widehat{f * g} = \langle (f * g)(t), \lambda(t) e^{-i\omega t} \rangle =$$

$$= \langle f(t) \otimes g(\tau), \lambda(t+\tau) e^{-i\omega(t+\tau)} \rangle \quad .$$

Si tomamos en lugar de la función $\lambda$ , el producto $\psi(t) . \psi(\tau)$ , con $\psi \in D$ y $\psi(t) . \psi(\tau) = 1$ en un entorno de sop $f(t) \otimes g(\tau)$ , (Apéndice § 6), podemos factorizar la expresión anterior, que resulta igual a

$$\langle f(t), \psi(t) e^{-i\omega t} \rangle \langle g(\tau), \psi(\tau) e^{-i\omega \tau} \rangle \ ;$$

por el teorema 12.4 , esto último es igual a

$$\hat{f}(\omega) . \hat{g}(\omega) \quad ,$$

como queríamos ver.

Pero los sistemas lineales, invariantes, causales y continuos están caracterizados por la convolución y la respuesta impulsiva, que no necesariamente tiene soporte acotado. Es por eso que necesitamos un resultado más general que el que obtuvimos; un resultado del mismo tipo, pero con sólo una distribución de soporte acotado, la excitación del sistema, sin imponer tal hipótesis sobre el soporte de la otra, que es la respuesta impulsiva.

## 13. Funciones cuya transformada de Fourier pertenece a D.

Para obtener el resultado buscado sobre transformación de Fourier y convolución, necesitamos caracterizar las funciones con la propiedad enunciada en el título.

Teorema 13.1

$$\hat{\varphi}(\omega) \in D \ , \ \text{sop} \ \hat{\varphi} \subset [-a,a]$$

si y sólo si

$\varphi(t)$ puede extenderse a una función entera sobre el plano complejo $z = t + iy$ que satisfaga la desigualdad

$$|z^k \varphi(z)| \leqslant C_k \ e^{a|y|} \ . \tag{13.1}$$

Dem.:

($\Rightarrow$)

$$\varphi(t) = F^{-1}[\hat{\varphi}(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \hat{\varphi}(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega \ ,$$

que, extendida al plano complejo,

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \hat{\varphi}(\omega) e^{i\omega z} \, dz \ , \tag{13.2}$$

es una función analítica ([2], pág.99) .

Veamos que cumple la acotación (13.1).

Integrando (13.2) por partes,

$$2\pi.\varphi(z) = \hat{\varphi}(\omega)\ \frac{e^{i\omega z}}{iz}\Big|_{-a}^{a} - \frac{1}{iz}\int_{-a}^{a}\hat{\varphi}'(\omega)\ e^{i\omega z}\, d\omega\ ,$$

o sea,

$$-iz\ \varphi(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\hat{\varphi}'(\omega)\ e^{i\omega z}\, d\omega\ .$$

Haciéndolo $k$ veces,

$$|z^k\ \varphi(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}|\hat{\varphi}^{(k)}(\omega)|\,|e^{iz\omega}|d\omega \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\ e^{a|y|}\int_{-a}^{a}|\hat{\varphi}^{(k)}(\omega)|\,d\omega\ .$$

( $\Leftarrow$ )

Tenemos
$$\hat{\varphi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\ e^{-i\omega t}\, dt\ , \tag{13.3}$$

y como $\varphi(t)$ tiene una extensión analítica $\varphi(z)$ , veremos que

$$\hat{\varphi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t+iy)\ e^{-i\omega(t+iy)}\, dt \tag{13.4}$$

para cualquier $y$ ; en efecto, como $\varphi(z)$ verifica la acotación (13.1) ,

$$|\varphi(t+iy)| \leqslant \frac{C_2\ e^{|a|\,y}}{|t^2+y^2|} \xrightarrow[|t|\to\infty]{} 0$$

para cada $y$ que fijemos.

De esta manera, la integral (13.3) sobre el eje $t$, y la integral (13.4) sobre la recta paralela al eje $t$, $t + iy$ (con cualquier $y$ fijo), son iguales, ya que, cerrando la trayectoria por el infinito, la función es cero.

Volviendo a (13.4),

$$\hat{\varphi}(\omega) = e^{y\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t + iy)\, e^{-i\omega t}\, dt \; . \qquad (13.5)$$

La expresión (13.4) puede derivarse bajo el signo integral (para su justificación ver el Apéndice):

$$\hat{\varphi}'(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t+iy)(-i(t+iy))e^{-i\omega(t+iy)}\, dt =$$

$$= e^{y\omega} \int_{-\infty}^{\infty} -i(t+iy)\varphi(t+iy)e^{-i\omega(t+iy)}\, dt \quad ,$$

y llamando $z = t + iy$,

$$\hat{\varphi}'(\omega) = e^{y\omega} \int_{-\infty}^{\infty} (-iz)\varphi(z)e^{-i\omega t}\, dt \quad . \qquad (13.6)$$

Vemos con esto que $\hat{\varphi}(\omega) \in C^{\infty}$, ya que el razonamiento anterior puede repetirse.

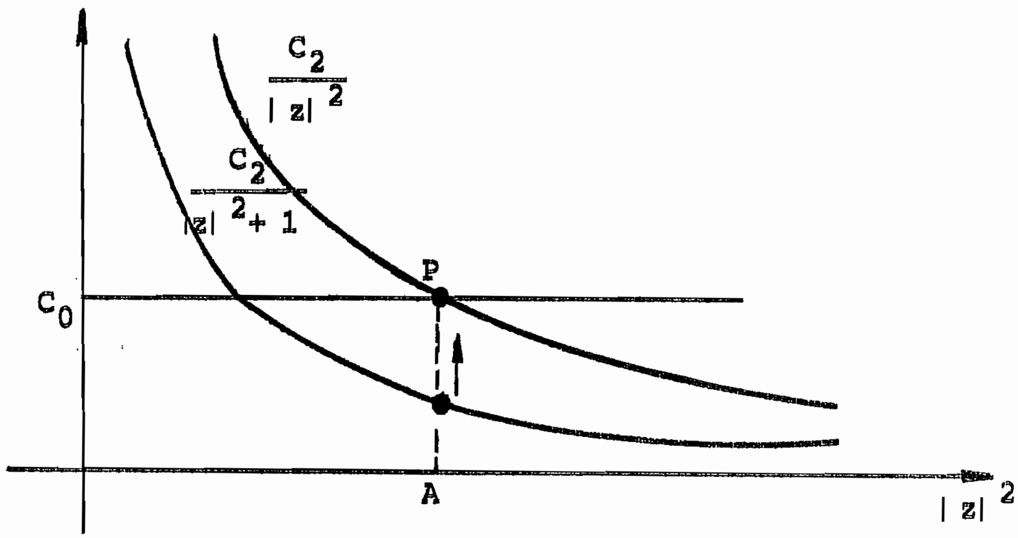
Falta demostrar que sop $\hat{\varphi} \subset [-a,a]$ . Tenemos como hipótesis la desigualdad (13.1), que escrita para $k = 0$ y $k = 2$, resulta

$$|\varphi(z)| \leqslant C_0\, e^{a|y|} \quad , \qquad |z^2\varphi(z)| \leqslant C_2\, e^{a|y|} \quad ;$$

de manera que

$$|\varphi(z)| \leqslant e^{a|y|} . \min \quad C_0, \frac{C_2}{z^2} \quad . \tag{13.7}$$

Para demostrar lo que queremos, acotaremos la integral (13.5), por lo que necesitamos que en la expresión anterior aparezca dividiendo el término $1 + |z|^2$ .




Tomemos la curva desplazada, es decir, $C_2/1 + |z|^2$, y modifiquemos la constante para que pase por el punto P : tomamos $C = C_2\ (1 + \frac{1}{A})$ , con lo que se verifica que

$$\frac{C}{1 + A^2} = \frac{C_2(A^2 + 1)}{A\ (1 + A^2)} = \frac{C_2}{A} \quad .$$

Además, si $|z|^2 \geqslant A$ , resulta $\dfrac{C}{1+|z|^2} \geqslant \dfrac{C_2}{|z|^2}$ .

Si $|z|^2 < A$ , es claro que $\dfrac{C}{1+|z|^2} > C_0$ ,

ya que la curva pasa por el punto P en $|z|^2 = A$ .

Si llevamos estas conclusiones a (13.7), resulta

$$|\varphi(z)| \leqslant e^{a|y|} \cdot \min \left[ C_0, \frac{C_2}{|z|^2} \right] \leqslant C \frac{e^{a|y|}}{1+|z|^2} .$$

Ahora podemos acotar la expresión (13.5):

$$|\hat{\varphi}(\omega)| \leqslant e^{y\omega} \int_{-\infty}^{\infty} C \frac{e^{a|y|}}{1+|z|^2}\, dt$$

$$\leqslant e^{y\omega+a|y|} C \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt =$$

$$= C\pi\, e^{y\omega+a|y|} .$$

Esto es válido para todo $y = \operatorname{Im} z$ , y en particular, para

$$y = u\,\frac{|\omega|}{\omega} \quad , \quad \text{con} \quad u < 0 .$$

En este caso, $y\omega = u|\omega|$ , y además, $a|y| = a|u| = -au$ ; obtenemos así, que en la región $|\omega| > a$ ,

$$|\hat{\varphi}(\omega)| \leqslant C\pi\, e^{u(|\omega|-a)} \xrightarrow[u \to -\infty]{} 0 ,$$

por lo que $\hat{\varphi}(\omega) = 0$ si $|\omega| > a$ .

Definición 13.2

Llamaremos Z al espacio de funciones cuya transformada de Fourier pertenece a D , o en forma equivalente, a las funciones que pueden entenderse en forma analítica a todo el plano complejo, y verifican

$$|z^k \varphi(z)| \leqslant C_k \, e^{a|y|} \qquad ,$$

donde a es tal que sop $\varphi(t) \subset [-a,a]$ , $z = t + iy$ .

Es fácil ver que Z es un espacio vectorial. Se puede definir la transformación inversa de Fourier, que lleva $D \rightarrow Z$ .
La F es una biyección entre Z y D .

También ès continua,como veremos a continuación.

Definición 13.3

$\{\varphi_n(z)\} \xrightarrow{Z} \varphi(z)$ sii cada $\varphi_n(z) \in Z$ , $|z^k \varphi_n(z)| \leqslant C_k .$
$. e^{a|\operatorname{Im} z|}$ , y $\{\varphi_n(z)\} \xrightarrow{\cdot} \varphi(z)$ en cada región acotada de C .

El límite $\varphi(z) \in Z$ , ya que satisface la desigualdad, y la convergencia uniforme asegura su analiticidad ([2],pág.95).

Teorema 13.4

$$\{\hat{\varphi}_n(\omega)\} \xrightarrow{D} \hat{\varphi}(\omega) \quad \text{si y sólo si} \quad \{\varphi_n(t)\} \xrightarrow{Z} \varphi(t) \ .$$

**Dem.:**

($\Rightarrow$) Para todo $n$, sop $\hat{\varphi}_n(\omega) \subset [-a,a]$.

$$|z^k \varphi_n(z)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \hat{\varphi}_n^{(k)}(\omega)\, e^{iz\omega}\, d\omega \right| \leqslant$$

$$(y = \operatorname{Im} z) \qquad \leqslant \frac{e^{a|y|}}{2\pi} \int_{-a}^{a} |\hat{\varphi}_n^{(k)}(\omega)|\, d\omega \leqslant$$

$$\leqslant \frac{e^{a|y|}}{2\pi}\, 2a \sup_{[-a,a]} |\hat{\varphi}_n^{(k)}(\omega)| \ . \tag{13.8}$$

Como la convergencia es en $D$, hay convergencia uniforme de las $\hat{\varphi}_n^{(k)}$, por lo que el supremo está acotado por una constante que depende sólo de $k$; entonces,

$$|z^k \varphi_n(z)| \leqslant \frac{a}{\pi}\, C_k\, e^{a|y|} \quad ,$$

que es la acotación que impone la Definición 13.3.

Para terminar, por (13.8)

$$|\varphi_n(z) - \varphi(z)| \leqslant \frac{a}{\pi}\, e^{a|y|} \sup |\hat{\varphi}_n(\omega) - \hat{\varphi}(\omega)| \quad ,$$

donde el primer factor está acotado sobre cada conjunto acotado de $C$, y el segundo tiende a cero cuando $n \to \infty$. En consecuencia, $\{\varphi_n(z)\} \dot{\to} \varphi(z)$ en cada región acotada.

( $\Leftarrow$ )

Supongamos ahora que $\{\varphi_n(z)\} \xrightarrow{Z} \varphi(z)$ .

Entonces se verifica, por definición, la acotación

$$|z^k \varphi_n(z)| \leqslant C_k \, e^{a|\mathrm{Im} z|} \qquad \forall n ,$$

de manera que todas las $\varphi_n$ tienen su soporte en $[-a,a]$, como lo muestra el Teorema 13.1.

Para probar que $\{\hat{\varphi}_n(\omega)\} \xrightarrow{D} \hat{\varphi}(\omega)$ , debemos verificar que $\{\hat{\varphi}_n^{(k)}(\omega)\} \xrightarrow{\circ} \hat{\varphi}^{(k)}(\omega)$ :

$$|\hat{\varphi}_n^{(k)}(\omega) - \hat{\varphi}^{(k)}(\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} (-it)^k \, [\varphi_n(t) - \varphi(t)] \, e^{-i\omega t} \, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{(t^k + t^{k+2})(\varphi_n(t) - \varphi(t))}{1 + t^2} \right| dt \leqslant$$

$$\leqslant \pi \sup_t |(t^k + t^{k+2})(\varphi_n(t) - \varphi(t))| ;$$

observemos que, dada la convergencia en $Z$ , $|t^k \varphi_n(t)| \leqslant C_k$, y $|t^{k+2} \varphi_n(t)| \leqslant C_{k+2}$, $t \in R$ (lo mismo para $\varphi$ ), por lo que existe el supremo. Además, fijando cualquier conjunto acotado $\{\varphi_n(t)\} \xrightarrow[n \to \infty]{\circ} \varphi(t)$ , de manera que lo anterior tiende a cero cuando $n \to \infty$ .

Para terminar, estudiemos las relaciones que existen entre el espacio $Z$ y los otros espacios de funciones que utilizamos previamente: D y $\mathcal{S}$.

Las funciones del espacio D son nulas fuera de un conjunto compacto; para pertenecer a Z, deben admitir una continuación analítica a todo el plano. Pero una función entera que se anula en un intervalo no puede ser más que la función nula [11]. Así, $Z \cap D = \{0\}$.

Si tomamos la variable de las funciones de Z como real, $Z \subset \mathcal{S}$: $\varphi(t) \in Z \Rightarrow \hat{\varphi}(\omega) \in D$, y también $\omega^k \hat{\varphi}(\omega) \in D$; luego, $\varphi^{(k)}(t) = F^{-1}[\omega^k \hat{\varphi}(\omega)] \in Z$. Entonces, $|t^m \varphi^{(k)}(t)| \leq C_{mk}$ (aquí la parte imaginaria es nula), es decir, $\varphi(t) \in \mathcal{S}$.

Con los mismos recursos se puede demostrar que la convergencia en Z implica la convergencia en $\mathcal{S}$. Además, Z es denso en $\mathcal{S}$: si $\varphi(t) \in \mathcal{S}$, resulta que $\hat{\varphi}(\omega) \in \mathcal{S}$ (Teorema 11.5). Dado que D es denso en $\mathcal{S}$ (Teorema 8.1), existe una sucesión $\{\hat{\varphi}_n(\omega)\} \subset D$ tal que $\{\hat{\varphi}_n(\omega)\} \xrightarrow{\mathcal{S}} \hat{\varphi}(\omega)$. Pero entonces, $F^{-1}[\hat{\varphi}_n(\omega)] = \varphi_n(t) \in Z$ (Teorema 13.1), y por la continuidad de $F^{-1}$ en $\mathcal{S}$ (Teorema 12.4), resulta

$$\{\varphi_n(t)\} \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi(t) .$$

## APENDICE

Después de las acotaciones que hicimos, podemos volver a la expresión de la derivada $\hat{\varphi}'(\omega)$ dada por (13.6). Usamos el resultado clásico, que puede consultarse en [2], pág.59, para lo que hay que demostrar la convergencia uniforme de (13.6).

Si llamamos $\psi(z) = z\,\varphi(z)$ , lo que cambia en las acotaciones usadas en el Teorema 13.1 son las constantes:

$$|\psi(z)| \leq C_1\, e^{a|y|} \quad , \qquad |z^2\, \psi(z)| \leq C_2\, e^{a|y|} .$$

El resto sigue igual, de manera que llegamos a

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} -i\, z\varphi(z)\; e^{-i\omega t}\, dt \right| \leq e^{y\omega + a|y|} C \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{1 + t^2} \quad ,$$

que converge independientemente de $\omega$ .

## 14. Transformación de Fourier de distribuciones.

Extenderemos la definición de transformación de Fourier que dimos en el § 12 sobre $S'$ , al espacio $D'$ . Para ello usaremos el espacio $Z'$ de distribuciones definidas sobre $Z$ . Es claro que $S' \subset Z'$ , ya que $Z \subset S$ , y la convergencia en $Z$ implica la convergencia en $S$ (cf.§ 13).

La definición de transformación de Fourier,

$$\langle \hat{f},\varphi \rangle = \langle f,\hat{\varphi} \rangle \quad , \tag{14.1}$$

fue dada para $f \in S'$ (cf.§ 12). Si $f \in D'$ , sabemos que para que $\hat{\varphi} \in D$ , $\varphi$ debe pertenecer a $Z$ . Entonces, la expresión (14.1) define -para $f \in \varphi'$-, una funcional $\hat{f} \in Z$ . Tal funcional es lineal y continua; esto último es consecuencia del Teor. 13.4, ya que si $\{\varphi_n\} \xrightarrow{Z} 0$, $\{\hat{\varphi}_n\} \xrightarrow{D} 0$ , y entonces $\langle f,\hat{\varphi}_n \rangle \to 0$ implica $\langle \hat{f},\varphi_n \rangle \to 0$ . De la misma manera se puede definir $F^{-1}$, y ambas son continuas: si $\{f_n\} \xrightarrow{D'} f$ , $\forall \varphi \in Z$ resulta $\langle \hat{f}_n,\varphi \rangle =$ $= \langle f_n,\hat{\varphi} \rangle \to \langle f,\hat{\varphi} \rangle = \langle \hat{f},\varphi \rangle$ .

## 15. Transformación de Fourier y convolución.

Podemos dar ahora la extensión del teorema 12.6 que necesitamos para el estudio de los sistemas lineales, tal como lo planteamos en el final del § 12.

Precisaremos algunos resultados previos.

Llamaremos $D_{[a,b]}$ al conjunto de funciones del espacio $D$ tales que $\operatorname{sop}\varphi \subset [a,b]$, y, naturalmente, la convergencia en $D_{[a,b]}$ es la de $D$, con todos los soportes de las funciones de la sucesión contenidos en $[a,b]$. Veamos ahora otra manera de describir esta convergencia.

Como $\varphi^{(k)}(a) = 0 \quad \forall k$,

$$\varphi^{(k)}(t) = \int_a^t \varphi^{(k+1)}(x)\, dx ,$$

y

$$|\varphi^{(k)}(t)| \leqslant (b-a) \cdot \sup_t |\varphi^{(k+1)}(t)| . \tag{15.1}$$

Las seminormas $\gamma_k(\varphi) \triangleq (b-a)^k \sup_t |\varphi^{(k+1)}(t)|$, caracterizan la convergencia en $D_{[a,b]}$, ya que se ve fácilmente que

$$\{\varphi_n(t)\} \xrightarrow{D_{[a,b]}} 0 \quad \text{sii} \quad \gamma_k(\varphi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{para cada } k .$$

Además, observemos que, usando (15.1),

$$\gamma_0(\varphi) = \sup|\varphi(t)|$$

$$\gamma_1(\varphi) = (b-a)\ \sup|\varphi'(t)| \leq (b-a)(b-a)\ \sup|\varphi''(t)| = \gamma_2(\varphi)$$

$$\gamma_2(\varphi) = (b-a)^2\ \sup|\varphi''(t)| \leq \gamma_3(\varphi) \quad , \quad \text{etc.} \; ,$$

o sea, $0 \leq \gamma_0(\varphi) \leq \gamma_1(\varphi) \leq \gamma_2(\varphi) \quad \ldots\ldots\ldots$

Teorema 15.1

Si $f \in D'$ , entonces, existen un entero no negativo $n$ y $C > 0$ tales que, para toda $\varphi \in D_{[a,b]}$ ,

$$|\langle f,\varphi\rangle| \leq C \;.\; \sup_t |\varphi^{(n)}(t)| \;.$$

Dem.:

Por el absurdo, supongamos que, para el intervalo $[a,b]$ , cualesquiera sean las constantes $C$ y $n$ , alguna función $\varphi \in D_{[a,b]}$ no verifica la desigualdad. Entonces, para cada $n$ podemos tomar $C = n(b-a)^n$ y afirmar que habrá alguna función $\varphi_n$ que cumpla lo siguiente:

$$|\langle f,\varphi_n\rangle| > n(b-a)^n\ \sup|\varphi^{(n)}(t)| = n \;.\; \gamma_n(\varphi_n) \;. \tag{15.2}$$

La función $\quad \theta_n(t) \stackrel{\Delta}{=} \dfrac{1}{n.\gamma_n(\varphi_n)} \;.\; \varphi_n(t)$

pertenece a $D_{[a,b]}$ .

Ahora,

$$\gamma_n(\theta_n) = (b-a)^n \sup|\theta_n^{(n)}(t)| =$$

$$= (b-a)^n \sup \left| \frac{1}{n\,\gamma_n(\varphi_n)} \varphi_n^{(n)}(t) \right| =$$

$$= (b-a)^n \frac{1}{n\,\gamma_n(\varphi_n)} \sup|\varphi_n^{(n)}(t)| =$$

$$= (b-a)^n \frac{1}{n(b-a)^n \sup|\varphi_n^{(n)}(t)|} \sup|\varphi_n^{(n)}(t)| =$$

$$= \frac{1}{n} \quad .$$

Entonces, $\gamma_n(\theta_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ , y, por la monotonía de las semi-normas que ya vimos, $\gamma_k(\theta_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ para cada $k$ . Pero esto significa que $\{\theta_n(t)\} \xrightarrow[n\to\infty]{D[a,b]} 0$ , y en consecuencia $\langle f,\theta_n\rangle \to 0$ .

Por otra parte, usando (15.2),

$$\langle f,\theta_n\rangle = \frac{1}{n\,\gamma_n(\varphi_n)} \langle f,\varphi_n\rangle > 1 \ ,$$

absurdo que termina la demostración.

<u>Definición 15.2</u>

Las funciones enteras $\psi(z)$ que verifican la desigualdad

$$|\psi(z)| \leqslant C\, e^{b|\mathrm{Im} z|}(1 + |z|^m) \quad ,$$

con $C, b \in R$ y $m$ entero, son multiplicadores en $Z$ , ya que si $\varphi \in Z$ , resulta $\psi.\varphi \in Z$ .

Definición 15.3

Si $f \in Z'$ y $\varphi$ es una función multiplicadora en $Z$ ,

$$<\psi.f,\varphi> \overset{\Delta}{=} <f,\psi.\varphi> \quad , \quad \forall\varphi \in Z \; .$$

Teorema 15.4

Si $f \in \mathcal{E}'$ , entonces, su transformada de Fourier $\hat{f}$ es una distribución regular que proviene de una función multiplicadora en $Z$ .

Dem.:

Como vimos en el Teorema 12.5,

$$\hat{f}(z) = <f(t), \lambda(t)\, e^{-izt}> \quad ,$$

donde $\lambda(t) \in D$ y vale uno en un entorno del soporte de $f$ (observemos que en ese teorema no se hace uso de que la distribución sea temperada).

Para verificar que es una función entera, analicemos el cociente

$$\frac{\hat{f}(z+\Delta z)-\hat{f}(z)}{\Delta z} = \langle f(t), \varphi_{\Delta z}(t)\rangle \quad ,$$

donde

$$\varphi_{\Delta z}(t) = \lambda(t)\ e^{-izt}\ \frac{e^{-i\Delta z . t}-1}{\Delta z} \xrightarrow[\Delta z \to 0]{D} -it\lambda(t)\ e^{-izt}$$

por la continuidad de $f$, el cociente tiende a la derivada de $\hat{f}$. Lo mismo para las de orden mayor.

Veamos que verifica la acotación de la Def.15.2:

$$|\hat{f}(z)| = |\langle f(t), \lambda(t)\ e^{-izt}\rangle| \leqslant \qquad \text{(teorema 15.1)}$$

$$\leqslant C.\sup_t \left|\frac{d^n}{dt^n}\ \lambda(t)\ e^{-izt}\right| \leqslant$$

$$\leqslant C.\sup_t \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ |\lambda^{(n-k)}(t)|\,|z|^k\ |e^{-izt}| \quad ;$$

tomemos $b$ de tal manera que $\operatorname{sop} \lambda(t) \subset [-b,b]$, de manera que

$$|e^{-izt}| = |e^{-i(\sigma+iy)t}| = e^{yt} \leqslant e^{y|b|} .$$

Entonces,

$$|\hat{f}(z)| \leqslant C.e^{b|y|}\ .\ \sup_t \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\ |\lambda^{(n-k)}(t)|\,|z|^k \quad ,$$

que nos da el resultado buscado.

Podemos demostrar ahora el resultado fundamental de este pará grafo.

Teorema 15.5

Si $f \in \mathcal{E}'$, $g \in D'$, entonces, $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$ .

Dem.:

Si $\varphi \in Z$, $\langle \widehat{f * g}, \varphi \rangle = \langle f * g, \hat{\varphi} \rangle =$

$$= \langle g(\tau), \langle f(t), \hat{\varphi}(t+\tau) \rangle\rangle =$$

$$= \langle g(\tau), \langle f(-t), \hat{\varphi}(\tau - t) \rangle\rangle \quad .$$

Si llamamos $\bar{f}(t) = f(-t)$, resulta que, por la propiedad de regularización de la convolución vista en el § 7 C, dado que $f \in D'$ y $\hat{\varphi} \in D$,

$$\langle \bar{f}(t), \hat{\varphi}(\tau - t) \rangle = (\bar{f} * \hat{\varphi})(\tau) \quad .$$

Entonces

$$\langle \widehat{f * g}, \varphi \rangle = \langle g(\tau), (\bar{f} * \hat{\varphi})(\tau) \rangle =$$

$$= \langle F^{-1} F g , \bar{f} * \hat{\varphi} \rangle =$$

$$= \langle F g , F^{-1}(\bar{f} * \hat{\varphi}) \rangle . \tag{15.3}$$

Tenemos $\bar{f} \in \mathcal{E}'$ y $\hat{\varphi} \in D \subset \mathcal{E}'$ , por lo tanto (teorema 12.6),

$$F^{-1}(\bar{f} * \hat{\varphi}) = 2\pi F^{-1}(\bar{f}) \; F[\hat{\varphi}] =$$

$$= 2\pi F^{-1}(\bar{f}) . \varphi . \tag{15.4}$$

Veamos como expresar $F^{-1}[\bar{f}]$ :

$$\langle F^{-1}(\bar{f}(\omega)), \varphi(t) \rangle = \langle \bar{f}(\omega), F^{-1}(\varphi(t)) \rangle =$$

$$= \langle \bar{f}(\omega), \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \; e^{i\omega t} \, dt \rangle =$$

$$= \langle f(-\omega), \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \; e^{i\omega t} \, dt \rangle =$$

$$= \langle f(\omega), \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \; e^{-i\omega t} \, dt \rangle =$$

$$= \langle f(\omega), \frac{1}{2\pi} F(\varphi) \rangle =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \langle F(f), \varphi \rangle .$$

En resumen, $F^{-1}(\bar{f}) = \dfrac{1}{2\pi} F(f)$ .

Reemplazando en (15.4),

$$F^{-1}(\bar{f} * \hat{\varphi}) = \hat{f} \,.\, \varphi$$

Observemos que, dado que $f \in \mathcal{E}'$, el Teorema 15.4 asegura que $\hat{f}$ es una función multiplicadora en $Z$, por lo que el producto anterior tiene sentido $(\hat{f} \,.\, \varphi \in Z)$.

Llevando esto a (15.3) obtenemos:

$$\langle \widehat{f * g}, \varphi \rangle = \langle \hat{g}, \hat{f} \,.\, \varphi \rangle = \qquad \text{(def.15.3)}$$

$$= \langle \hat{f} \,.\, \hat{g} \,,\, \varphi \rangle \quad .$$

Obtenemos con esto la descripción frecuencial de sistemas lineales, como corolario del Teorema 9.2:

Teorema 15.6

Dado un sistema lineal, invariante y continuo $T : \mathcal{E}' \to D'$, las transformadas de Fourier de la entrada $f$ y la salida $g$ están relacionadas de la siguiente forma:

$$\hat{g}(\omega) = \hat{h}(\omega) \,.\, \hat{f}(\omega) \qquad (15.5)$$

para toda $f(t) \in \mathscr{E}'$ , donde $h(t) = T[\delta(t)]$ es la respuesta impulsiva del sistema.

Dem.:

Por el Teor.9.2, $g(t) = h(t) * f(t)$ , con $f(t) \in \mathscr{E}'$ y en general, $h(t) \in D'$ , aunque si agregamos la causalidad como hipótesis, $h(t) \in D'_+$ (Teorema 9.4). Usando el Teor.15.5, resulta (15.5).

Notemos que el teorema 9.6 demuestra lo mismo que el teorema 9.2 para $f \in D'_+$ , pero no podemos aplicar la transformación de Fourier en ese caso dado que la multiplicación de distribuciones puede no tener sentido.

Es por esto que intentaremos otro camino, más apropiado para la teoría de sistemas.

## 16. Excitaciones con soporte no acotado.

Todo el estudio realizado anteriormente, nos condujo a las descripciones temporal (§ 9) y frecuencial (§ 15) de los sistemas lineales, invariantes, continuos y causales. Sin embargo, con esto no basta para recuperar la interpretación de respuesta en frecuencia que dimos en el § 3.

En efecto, allí aparecía la respuesta en frecuencia del sistema como una función de la frecuencia $\omega$ , que modificaba la amplitud y la fase de cualquier excitación $\exp(i\omega t)$ aplicada. Pero esto supone excitar el sistema con funciones que no tienen soporte acotado por la izquierda, y el resultado temporal que hemos obtenido (Teorema 9.6) es válido para $D'_+$ , es decir, distribuciones con soporte acotado por la izquierda (y el resultado frecuencial (Teorema 15.6), para excitaciones de soporte acotado).

Para recuperar la interpretación de la respuesta en frecuencia podemos seguir el siguiente camino: si $f \in D'$ , y elegimos adecuadamente funciones $v_a(t)$ que se anulen para $t < a$ , tenemos $v_a \cdot f \in D'_+$ , lo que nos permite aplicar la teoría que ya construimos; si existe, en el sentido distribucional,

$$\lim_{a \to -\infty} L[v_a \cdot f]$$

en forma independiente de la elección de las $v_a(t)$ , podemos tomar tal límite como la respuesta del sistema a la excitación $f \in D'$.

Pero, como sabemos,

$$L[v_a \, . \, f] = v_a f * h$$

donde $h$ es la respuesta impulsiva del sistema $L$ ; sería deseable entonces que

$$\lim_{a \to -\infty} [\, v_a f * h] = f * h \;,$$

lo que da un resultado semejante al que teníamos, pero ahora para toda $f \in D'$ .

Un manejo conveniente de las transformaciones de Fourier y de Laplace, permitiría pasar a la función de transferencia; y así, aceptando ya como entradas distribuciones del espacio $D'$ , utilizar excitaciones $e^{i\omega t}$ para lograr la explicación fenomenológica de la respuesta en frecuencia.

Veremos en los parágrafos siguientes que el camino aquí señalado es válido, y justificaremos estos resultados.

## 17. Convolución de Distribuciones (II).

Con el objeto de demostrar lo que enunciamos en el parágrafo precedente, necesitaremos nuevos espacios de distribuciones que son importantes en relación con la convolución, y algunos resultados que incluiremos sin demostración.

Llamaremos $D_{L^p}$ al espacio de funciones $C^\infty$ cuyas derivadas pertenecen a $L^p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ , con la topología siguiente: $\{\varphi_n(t)\} \subset D_{L^p}$ converge a cero si $\{\varphi_n^{(k)}(t)\} \to 0$ en $L^p$ . En particular, llamaremos $B$ al espacio $D_{L^\infty}$ .

Sobre estos espacios definimos las distribuciones $D'_{L^p}$ $1 < p \leq \infty$ , funcionales lineales y continuas en $D_{L^{p'}}$ con $1/p + 1/p' = 1$. Indicaremos con $B'$ al espacio $D'_{L^\infty}$ , y llamaremos acotadas a tales distribuciones. $D'_{L^1}$ es el dual del subespacio de $D_{L^\infty}$ de funciones que se anulan en infinito, junto con sus derivadas.

Una distribución $f \in O'_c$ sii $(1 + t^2)^{k/2} f \in B'$ , cualquiera sea $k$ ; las llamaremos distribuciones de decrecimiento rápido, y la convergencia es definida de la siguiente forma: $\{f_n(t)\} \xrightarrow{O'_c} 0$ sii $(1 + t^2)^{k/2}\, f(t) \xrightarrow{B'} 0$ para todo $k$ .

El siguiente resultado nos da una caracterización de las distribuciones de decrecimiento rápido.

<u>Teorema 17.1</u> ([3], pág.244)

$f(t) \in O'_c$ si y sólo si $f(t) = \sum_{\text{finita}} D^j\, \psi_j(t)$ donde las $\psi_j$ son funciones cuyo producto por $(1 + t^2)^{k/2}$ es acotado para todo $k$ .

Ahora podemos enunciar los resultados sobre convolución.

Teorema 17.2 ([3], pág.247)

Si $f \in O'_C$ y $g \in \mathcal{S}'$, entonces existe $f * g \in \mathcal{S}'$, y la aplicación $O'_C \times \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ es hipocontinua.

(La forma bilineal $f * g$ es hipocontinua si cada vez que uno de sus elementos se toma en un conjunto acotado del correspondiente espacio y una sucesión tiende a cero en el sentido del otro, se verifica que el resultado tiende a cero).

Teorema 17.3 ([3], pág.203)

Si $f \in D'_{L^p}$ y $g \in D'_{L^q}$ con $1/p + 1/q \geq 1$, entonces, existe la convolución $f * g \in D'_{L^r}$ con $1/r = 1/p + 1/q - 1$, y la aplicación $(f,g) \to f * g$, de $D'_{L^p} \times D'_{L^q} \to D'_{L^r}$ es continua.

## 18. Convolución de Distribuciones (III).

En el parágrafo anterior, enunciamos los resultados de L. Schwartz [3] sobre convolución, que involucran a los espacios $\mathcal{S}'$, $O'_c$ y $D'_{L^p}$ .

Pero existe una forma más adecuada para las aplicaciones a la teoría de sistemas, que consiste en reducir la convolución al espacio $D'_+$ , como hemos insinuado en § 16 (Cf.[12]).

Definición 18.1

$\{v_a(t)\}$ es una familia de funciones $C^\infty$ que dependen del parámetro $a \in R$ , y verifican

$$v_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a-1 \\ 1 & \text{si } t > a \end{cases} .$$

Pueden obtenerse, por ejemplo, construyendo $v_o(t)$ y traslandándola.

Teorema 18.2

Si llamamos $V$ a cualquiera de los siguientes espacios: $O'_c$ , $\mathcal{S}'$ , o $D'_{L^p}$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ , resulta que

$$\{v_a\ f\} \xrightarrow[a \to -\infty]{V} f \qquad \forall f \in V .$$

Dem.:

Daremos la demostración en el caso $O'_c$ , ya que es análoga en los otros dos casos.

Decir que

$$\{v_a f\} \xrightarrow[a\to-\infty]{O'_c} f \quad ,$$

significa que (cf. § 17)

$$(1+t^2)^{k/2}(v_a f - f) \xrightarrow[a\to-\infty]{B'} 0 \ ,$$

o sea,

$$<(1+t^2)^{k/2}(v_a f - f) \quad , \quad \varphi(t)> \xrightarrow[a\to-\infty]{} 0$$

con $\varphi(t) \in D_{L^1}$ .

Pero $f \in O'_c$ , de manera que (Teorema 17.1)

$$f = \sum_{\text{finita}} D^{ji} \psi_i(t) \ ,$$

con $\psi_i(t)$ funciones continuas de decrecimiento rápido. Entonces,

$$<(1+t^2)^{k/2}(v_a(t)-1)\sum_i D^{ji}\psi_i(t) \ , \ \varphi(t)> =$$

$$= \sum_i <D^{ji}\psi_i(t) \ , \ (1+t^2)^{k/2}(v_a(t)-1)\varphi(t)> =$$

$$= \sum_i <\psi_i(t), (-1)^{ji} D^{ji}[(1+t^2)^{k/2}(v_a(t)-1)\varphi(t)]> =$$

$$= \sum_i (-1)^{ji} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_i(t)\ D^{ji}\,[(1+t^2)^{k/2}(v_a(t)-1)\varphi(t)]\ dt \quad .$$

Dado que

$$v_a(t) - 1 = \begin{matrix} 0 & \text{si } t > a \\ -1 & \text{si } t < a-1 \ , \end{matrix}$$

en los sumandos aparece

$$\int_{-\infty}^{a} \psi_i(t)\ D^{ji}\,[(1+t^2)^{k/2}\ \varphi(t)]\ dt \quad ,$$

que tiende a cero cuando $a \to -\infty$.

Teorema 18.3

Sean $f\ ,\ g \in D'$ .

Si existe $s \in \mathbb{C}$ tal que

$$e^{-st}\ f(t) \in \mathcal{S}' \quad \text{y} \quad e^{-st}\ g(t) \in O'_c$$

(o inversamente), o

$$e^{-st}\ f(t) \in D'_{L^p} \quad \text{y} \quad e^{-st}\ g(t) \in D'_{L^q}$$

$(1/p + 1/q = 1)$,

entonces,

$$\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to-\infty}} [\ v_a f * v_b g\ ] = e^{st}\,[\ e^{-st}\ f(t) * e^{-st}\ g(t)\ ] \quad ,$$

donde la convolución del lado izquierdo se entiende en $D'_+$ , y la del derecho entre $S'$ y $O'_c$ ó $D'_{L^p}$ y $D'_{L^q}$ .

Dem.:

$$<e^{-st} [v_a f * v_b g] ,\varphi> =$$

$$=<v_a f * v_b g, e^{-st}\varphi> = \qquad (\S\ 6)$$

$$=<v_a(t)f(t), <v_b(\tau)g(\tau), e^{-s(t+\tau)}\varphi(t+\tau)>> =$$

$$=<v_a(t)f(t)e^{-st}, <v_b(\tau)g(\tau)e^{-s\tau}, \varphi(t+\tau)>> =$$

$$=<v_af(t)e^{-st} * v_bg(t)e^{-st}, \varphi(t)> .$$

Resumiendo, para cualquier $s \in \mathbb{C}$ , las distribuciones $v_af$ , $v_bg \in D'_+$ verifican

$$v_af * v_bg = e^{st} [(v_af\ e^{-st}) * (v_bg\ e^{-st})] . \qquad (18.1)$$

Por hipótesis, existe $s \in C$ tal que

$$e^{-st}f \in S'(D'_{L^p}) \quad y \quad e^{-st}g \in O'_c(D'_{L^q}) .$$

Como sabemos por el teorema 18.2,

$$v_a\ e^{-st}\ f \xrightarrow[a\to-\infty]{\mathcal{S}'} e^{-st}\ f$$

y $$v_b\ e^{-st}\ g \xrightarrow[a\to-\infty]{O_c'} e^{-st}\ g\ .$$

(o con $D_L'p$ y $D_L'q$ respectivamente).

En el último caso, la convolución resulta continua (Teorema 17.3), de manera que de lo anterior se concluye que (multiplicando todo por $e^{st}$)

$$e^{st}\ [(v_a e^{-st} f) * (v_b e^{-st} g)] \xrightarrow[\substack{a\to-\infty \\ b\to-\infty}]{D_L'r} e^{st}[e^{-st} f * e^{-st} g]\ ,$$

y usando (18.1), obtenemos

$$v_a f * v_b g \xrightarrow[\substack{a\to-\infty \\ b\to-\infty}]{} e^{st}\ [(e^{-st} f) * (e^{-st} g)]$$

que es lo que queremos probar.

Sin embargo, en el primer caso (es decir con $\mathcal{S}'$ y $O_c'$) hay hipocontinuidad (Teorema 17.2). Pero lo que interesa es lo que sucede en un entorno $I$ de $-\infty$, y allí los conjuntos de distribuciones

$$\{v_a\ e^{-st}\ f\}_{a\in I}\ ,$$

y $$\{v_b\ e^{-st}\ g\}_{b\in I}$$

son acotados en $\mathcal{S}'$ y $O_c'$ respectivamente, como ahora veremos:

$$<v_a e^{-st} f, \varphi> \xrightarrow[a \to -\infty]{} <e^{-st} f, \varphi> ,$$

o sea, si $a \in I$ ,

$$|<v_a \; e^{-st} f, \varphi> - <e^{-st} \; f, \varphi>| < \epsilon,$$

y de allí

$$|<v_a \; e^{-st} f, \varphi>| \leq \epsilon + |<e^{-st} f, \varphi>| \triangleq M_\varphi \; ,$$

lo que es suficiente para afirmar que el conjunto

$$\{ v_a \; e^{-st} \; f \}_{a \in I}$$

es acotado en $\mathcal{S}'$ ([3], Teorema IX, pág.72). Lo mismo para el otro conjunto.

Pero sobre conjuntos acotados hipocontinuidad es equivalente a continuidad, y entonces queda demostrado el teorema en el caso $\mathcal{S}'$ y $O'_c$ .

El teorema anterior nos permite dar la siguiente

<u>Definición 18.4</u>

Si $f$ , $g \in D'$ , y existe $s \in \mathbb{C}$ tal que

$$e^{-st} f(t) \in \mathcal{S}' \quad \text{y} \quad e^{-st} g(t) \in O'_c$$

ó
$$e^{-st} f(t) \in D'_{L^p} \quad \text{y} \quad e^{-st} g(t) \in D'_{L^q} \quad ,$$

$(1/p + 1/q = 1)$

$$f * g = \lim_{a,b \to -\infty} [v_a f * v_b g] \quad , \tag{18.2}$$

y además el límite es

$$= e^{st} [e^{-st} f * e^{-st} g] \ . \tag{18.3}$$

La convolución del segundo miembro de (18.2) es entre $D'_+$ y $D'_+$ y la que aparece en (18.3), entre $\mathcal{S}'$ y $O'_c$ ó $D'_{L^p}$ y $D'_{L^q}$.

Nota: Lo importante, desde el punto de vista de la teoría de sistemas, es que lo anterior da una definición de convolución en $D'$ basada en la convolución en $D'_+$ ; bajo las hipótesis establecidas se asegura la existencia del límite. Además, el valor del límite está dado por la convolución (18.2), y el resultado es independiente de $s$ . La convolución así definida es conmutativa y bilineal. Una generalización de la definición anterior puede obtenerse usando la descomposición de $f \in D'$ en

$$f = f_+ + f_- \quad \text{con} \quad f_+ \in D'_+ \quad \text{y} \quad f_- \in D'_-$$

(cf.[ 13] Corolario 1.4, pág.23):

$$f * g = f_+ * g_+ + f_- * g_- + f_+ * g_- + f_- * g_+ \ .$$

En esta expresión, las dos primeras son convoluciones en $D'_+$ y $D'_-$ , y las dos últimas deben verificar las hipótesis establecidas.

El teorema siguiente es una generalización de la fórmula (18.3), válida para el $s \in \mathbb{C}$ que verifica las hipótesis, a cualquier $s \in \mathbb{C}$ .

Teorema 18.5

Si existe $f * g$ según la definición anterior, también existe $e^{-st} f * e^{-st} g$ $\underline{\forall s \in \mathbb{C}}$ , y además

$$e^{-st} f * e^{-st} g = (f * g) e^{-st} \qquad \underline{\forall s \in \mathbb{C}} \ .$$

Dem.:

Como existe $f * g$ de acuerdo con la definición, existe $s_1 \in \mathbb{C}$ tal que

$$f(t) e^{-s_1 t} \in \mathcal{S}' \qquad (\text{ó } D'_{L^p})$$

$$g(t) e^{-s_1 t} \in O'_c \qquad (\text{ó } D'_{L^q})$$

y además

$$f * g = e^{s_1 t}\,[\,e^{-s_1 t} f * e^{-s_1 t} g\,]\,. \tag{18.4}$$

Dado cualquier $s \in \mathbb{C}$, definimos $s_2 = s_1 - s$ ; entonces

$$f\,e^{-s_1 t} = [f\,e^{-st}]\,e^{-s_2 t} \quad \in \quad \mathcal{S}'$$

$$g\,e^{-s_1 t} = [g\,e^{-st}]\,e^{-s_2 t} \quad \in \quad O'_c\,.$$

Esto significa que $f.e^{-st}$ es tal que multiplicada por $e^{-s_2 t}$ pertenece a $\mathcal{S}'$, y lo mismo $g.e^{-st}$, ahora con $O'_c$. Entonces se verifica la Definición 18.4 y podemos volver a usar (18.4) pero con $s_2$ en lugar de $s_1$, y los corchetes de arriba en lugar de $f$ y $g$ :

$$[\,f\,e^{-st}] * [g\,e^{-st}] = e^{s_2 t}\,[\,f\,e^{-st}\,e^{-s_2 t} * g\,e^{-st}\,e^{-s_2 t}\,] =$$

$$= e^{s_2 t}\,[\,f\,e^{-s_1 t} * g\,e^{-s_1 t}] =$$

(por 18.4) $$= e^{s_2 t}\,e^{-s_1 t}\,[\,f * g\,] =$$

$$= e^{-st}\,[\,f * g\,]\,.$$

## 19. Respuesta de Sistemas a Entradas con Soporte No Acotado por la Izquierda. Respuesta en Frecuencia (II).

La definición de convolución dada en el parágrafo anterior nos permite resolver la cuestión planteada en el § 16, y recuperar la explicación fenomenológica de la respuesta en frecuencia.

Definición 19.1

La respuesta del sistema lineal causal $L$ a una excitación $e \in D'$, se define como el límite en el sentido distribucional, cuando $a \to -\infty$, de las respuestas a las entradas $v_a . e$, si es que tal límite existe independientemente de la elección de las $v_a$:

$$y = L[e] = \lim_{a \to -\infty} L[v_a . e] .$$

Teorema 19.2

Sea $L$ un sistema lineal, invariante, causal y continuo cuya respuesta impulsiva $h(t) \in D'_{L^1}$; entonces

$$L[e^{i\omega t}] = B(\omega) e^{i\omega t} ,$$

donde $B(\omega) = F[h(t)]$.

Dem.:

Como $e^{i\omega t} \in D'_{L^\infty}$

(porque $|\int e^{i\omega t}\varphi(t)dt| \leq \int |\varphi(t)|dt < \infty \quad \forall\varphi\in D_{L^1})$ ,
y $h(t) \in D'_{L^1}$ por hipótesis, se verifican las condiciones impuestas en la Def. 18.4 con $s = 0$ , de manera que

$$e^{i\omega t} * h = \lim_{a\to-\infty} [v_a(t)e^{i\omega t} * h(t)]$$

(en este caso no hace falta usar la función $v_b$ que aparece en la Def. 18.4, ya que $h \in D'_+$ porque el sistema es causal).

Pero podemos usar el Teor. 9.6, ya que $v_a e^{i\omega t} \in D_+$ :

$$v_a(t)e^{i\omega t} * h(t) = L[v_a(t)e^{i\omega t}].$$

Entonces,

$$e^{i\omega t} * h = \lim_{a\to-\infty} L[v_a(t)e^{i\omega t}] ,$$

y por la Def. 19.1

$$e^{i\omega t} * h = y = L[e^{i\omega t}] . \tag{19.1}$$

Como la convolución existe, por el Teor. 18.5, para todo $\omega$

$$e^{-i\omega t}(e^{i\omega t} * h) = e^{-i\omega t} e^{i\omega t} * e^{-i\omega t} h(t) =$$

$$= 1 * e^{-i\omega t} h(t) ,$$

o, lo que es lo mismo,

$$e^{i\omega t} * h = e^{i\omega t}[1 * e^{-i\omega t}\, h\,] .$$

Llevando esto a (19.1),

$$y(t) = e^{i\omega t}\,[\,1 * e^{i\omega t}\, h(t)\,] . \tag{19.2}$$

Por un resultado de regularización análogo al demostrado en § 7 b) (cf.[3],(VI,8;4)),

$$1 * e^{-i\omega t}\, h(t) = \langle e^{-i\omega\tau} h(\tau),\ 1(t-\tau)\rangle =$$

$$= \langle e^{-i\omega\tau} h(\tau),\ 1(\tau)\rangle =$$

$$= \langle h(\tau),\ e^{-i\omega\tau}\rangle .$$

Pero esto último es la transformada de Fourier de $h$ (por un resultado semejante a del Teor. 12.5, Cf.[3],(VII,7;9)).

Volviendo a (19.2),

$$L[e^{i\omega t}] = y(t) = F[h]e^{i\omega t} \qquad \text{q.e.d.}$$

Veremos más adelante el significado de la hipótesis $h(t) \in D'_{L^1}$ en relación con la estabilidad del sistema. (§ 22)

## 20. Transformación de Laplace y Función de Transferencia.

Podemos demostrar una relación análoga a la del Teorema 19.2 pero haciendo uso de la transformación de Laplace, lo que conduce al concepto de función de transferencia del sistema.

Comenzamos con algunos resultados y definiciones.

**Definición 20.1**

Si $f \in D'$, entonces, cada vez que $e^{-\sigma t}.\ f \in \mathcal{S}'(\sigma \in \mathbb{R})$, definimos la transformación de Laplace de $f$, $\mathcal{L}[f]$, mediante la expresión

$$\mathcal{L}[f](s) = F[e^{-\sigma t}.\ f](\omega) \qquad (s = \sigma + i\omega)$$

**Lema 20.2**

Si el conjunto $\Gamma = \{\sigma \in R / e^{-\sigma t}\ f\}$ no es vacío, entonces es un intervalo.

**Dem.:**

Sean $\sigma_1$ y $\sigma_2$ pertenecientes a $\Gamma$, y tomemos

$$\sigma = \lambda\sigma_1 + (1-\lambda)\sigma_2 \qquad \text{con} \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 .$$

Supongamos, sin perder generalidad, que $e^{-\sigma_1 t} < e^{-\sigma_2 t}$; entonces, $e^{-\sigma_1 t} < e^{-\sigma t} < e^{-\sigma_2 t}$.

Definamos la función

$$\theta(\sigma,t) = \frac{e^{-\sigma t}}{e^{-\sigma_1 t} + e^{-\sigma_2 t}} ,$$

que es de la clase $C^\infty$ en la variable $t$ y además es acotada. Las derivadas de $\theta$ respecto de $t$ son funciones que tienen una expresión del mismo tipo, y en consecuencia, también son acotadas. Entonces, $\theta(\sigma,t) \in D_{L^\infty}$,

Pero el producto de una función $\theta \in D_{L^\infty}$ multiplicada por una distribución $f \in S'$, resulta en $S'$, como veremos a continuación: si ponemos $<\theta f,\varphi> = <f,\theta\varphi>$ $\forall \varphi \in S$, $\theta.\varphi \in S$ y si $\{\varphi_n\} \xrightarrow{S} 0$, $\{\theta\varphi_n\} \xrightarrow{S} 0$, de manera que $\theta f \in S'$.

En nuestro caso

$$e^{-\sigma t} f = \theta(\sigma,t)(e^{-\sigma_1 t} + e^{-\sigma_2 t}) f =$$

$$= \theta(\sigma,t)e^{-\sigma_1 t} f + \theta(\sigma,t)e^{-\sigma_2 t} f ,$$

y el último miembro pertenece a $S'$ dado que, por hipótesis $e^{-\sigma_1 t} f \in S'$ y $e^{-\sigma_2 t} \in S'$.

Llamaremos abscisas exponenciales $\sigma_f$ y $\sigma'_f$ a los extremos del intervalo $\Gamma$ definido en el Lema anterior (pueden ser $+\infty$ ó $-\infty$).

Teorema 20.3 ([3], Corolario, pág.302)

Si $\sigma_f < \sigma < \sigma'_f$, entonces, $e^{-\sigma t}f(t) \in O'_c$.

Podemos dar ahora un resultado sobre convolución y respuesta de sistemas basado en hipótesis sobre las abscisas exponenciales de la respuesta impulsiva y la entrada.

Teorema 20.4

Si para un sistema $L$ lineal, invariante, causal y continuo, cuya respuesta impulsiva es $h(t)$, se verifica que $\sigma_h < \sigma'_{e-}$, donde $e = e_+ + e_- \in D'$, entonces, $y = L[e] = e * h$.

Dem.:

Tomemos $\sigma$ tal que $\sigma_h < \sigma < \sigma'_{e_-}$. Entonces, por el Teor. 20.3,

$$e^{-\sigma t}\, h \in O'_c \subset S' \quad y \quad e^{-\sigma t}\, e_- \in O'_c . \tag{20.1}$$

Por la definición 19.1, la respuesta del sistema es

$$y = \lim_{a\to-\infty} L[v_a . e] = \quad (\text{Teor.9.5})$$

$$= \lim_{a\to-\infty} [v_a . e * h] \quad ,$$

donde $h \in D'_+$ por la causalidad (Teor.9.4). Entonces, como también $e_+ \in D'_+$,

$$y = e_+ * h + \lim_{a\to-\infty} (v_a\, e_- * h) \;;$$

pero (20.1) muestra que $h$ y $e_-$ verifican las hipótesis del Teor. 18.3, que justifica la Def.18.4, por lo que

$$\lim_{a\to-\infty} (v_a\, e_- * h) = e_- * h \;.$$

Resulta entonces, $y = e * h$ , como queríamos.

El siguiente resultado pone al Teor.19.2 en términos de la transformación de Laplace.

<u>Teorema 20.5</u>

Si existe $H(s) = \mathcal{L}[h(t)]$ , es decir, $\sigma_h < \infty$ , entonces

$$L[e^{st}] = y = H(s)\,.\,e^{st} \qquad \text{en} \quad \mathrm{Re}\ s > \sigma_h \;.$$

<u>Dem.</u>:

a) La entrada al sistema es ahora $e^{st}$ , entonces, cualquiera sea $\sigma = \mathrm{Re}\ s$ , $e^{-\sigma t}\, e^{st} = e^{i\omega t} \in \mathcal{S}'$ . En particular, si $\mathrm{Re}\ s > \sigma_h$ podemos aplicar el Teor.20.4, y en consecuencia, $y = h * e^{st}$ . Desde aquí, como en la demostración del Teor.19.2, llegamos a

$$y = e^{st}\,[1 * e^{-st}\, h(t)] \quad , \quad \mathrm{Re}\ s > \sigma_h \;. \tag{20.2}$$

b) Definamos $g = e^{-\sigma t}.\ h$ con $\sigma \in (\sigma_h, \sigma_h')$; entonces (Teor. 20.3), $g \in O_C'$ . Además $O_C' \subset D_{L^1}'$ (cf.[3]). Como $g \in D_{L^1}'$ , podemos aplicar el Teor.19.2:

$$1 * e^{-i\omega t}\, g = F[g](\omega) =$$

$$= F[e^{-\sigma t}.h](\omega) =$$

$$(\text{Def.}20.1) \quad = \mathcal{L}[h] .$$

Por otra parte,

$$1 * e^{-i\omega t}\, g = 1 * e^{-\sigma t - i\omega t}\, h(t) =$$

$$= 1 * e^{-st}\, h(t).$$

Resumiendo,

$$\mathcal{L}[h] = 1 * e^{-st}\, h(t) ,$$

y llevando esto a (20.2),

$$y(t) = H(s)e^{st} \qquad \text{en} \quad \text{Re } s > \sigma_h \quad .$$

<u>Definición 20.6</u>

La función $H(s)$ del teorema anterior, que es la transformada de Laplace de la respuesta impulsiva, es llamada función de transferencia del sistema $L$ .

Con la función de transferencia podemos dar un resultado análogo al del Teor.15.6. Será consecuencia del teorema siguiente, que establece una relación entre transformación de Laplace y convolución.

Teorema 20.7

$f$ , $g \in D'_+$ transformables Laplace. Entonces,

$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f] \cdot \mathcal{L}[g] \qquad \text{en} \quad \operatorname{Re} s > \text{máx}\{\sigma_f, \sigma_g\} \ .$$

Dem.:

Aclaremos que en el caso de distribuciones de soporte acotado por la izquierda, el intervalo $\Gamma$ del Lema 20.2 es una semirecta ([10],8.3) y vale que $\mathcal{L}[f] = \langle e^{-ct} f, \lambda(t) e^{-(s-c)t} \rangle$ , donde $\lambda(t) \in C^\infty$ y es uno en un entorno del sop $f$ , y además el resultado es independiente de $c > \sigma_f$ . La convolución $f * g$ existe (§ 6 ), y tiene soporte acotado por la izquierda.

Veremos que, si $c > \text{máx}\,\{\sigma_f, \sigma_g\}$ ,

$$(e^{-ct} f) * (e^{-ct} g) = e^{-ct}(f * g) \quad . \tag{20.3}$$

En efecto, $\forall \varphi \in D$ ,

$$\langle (e^{-ct} f(t)) * (e^{-ct} g(t)), \varphi(t) \rangle =$$

$$= \langle e^{-ct} f(t), \langle e^{-c\tau} g(\tau), \varphi(t+\tau) \rangle \rangle =$$

$$= \langle f(t), \langle g(\tau), e^{-c(t+\tau)} \varphi(t+\tau)\rangle =$$

$$= \langle f * g, e^{-ct} \varphi(t)\rangle = \langle e^{-ct}(f * g), \varphi(t)\rangle \quad .$$

Como la convolución es una operación cerrada en $\mathcal{S}'$ ([3], Corolario,pág.304), puesto que tanto $e^{-ct} f$ como $e^{-ct} g$ pertenecen a $\mathcal{S}'$ , de la igualdad (20.3) obtenemos

$$e^{-ct}(f(t) * g(t)) \in \mathcal{S}' \ .$$

Eliminando la función $\lambda(t)$ por comodidad, resulta:

$$\mathcal{L}[f * g] = \langle e^{-ct}[f(t) * g(t)], e^{-(s-c)t}\rangle =$$

$$(20.3) \quad = \langle [e^{-ct}f(t)] * [e^{-ct}g(t)], e^{-(s-c)t}\rangle =$$

$$= \langle [e^{-ct}f(t)] \otimes [e^{-ct}g(t)], e^{-(s-c)(t+\tau)}\rangle =$$

$$= \langle [e^{-ct}f(t)] \otimes [e^{-ct}g(t)], e^{-(s-c)t} e^{-(s-c)\tau}\rangle =$$

$$= \langle e^{-ct} f, e^{-(s-c)t}\rangle \langle e^{-ct}g(t), e^{-(s-c)\tau}\rangle =$$

$$= \mathcal{L}[f].\mathcal{L}[g] \qquad \text{con} \quad C > \text{máx}\,\{\sigma_f, \sigma_g\} \ .$$

<u>Teorema 20.8</u>

La transformada de Laplace $G(s)$ de la respuesta de un sistema lineal, invariante, continuo y causal, cuya respuesta impulsiva sea transformable Laplace, puede ser representada mediante la expresión

$$G(s) = H(s) \circ F(s) \ ,$$

para toda excitación en $D'_+$ transformable Laplace, en el semiplano $\text{Re } s > \text{máx} \{\sigma_h, \sigma_f\}$ .

Dem.:

Por el Teor.9.6, $g(t) = h(t) * f(t) \quad \forall f \in D'_+$ ; también sabemos que $h(t) \in D'_+$ (Corolario 9.5). Entonces, aplicando el Teor. 20.7, obtenemos la conclusión buscada.

## 21. Sistemas Lineales Variantes en el Tiempo.

Hemos estudiado hasta aquí sistemas lineales que son invariantes en el tiempo, y encontrado una descripción de ellos en el dominio temporal (§ 9). Mostraremos a continuación una representación de sistemas variantes en el tiempo.

Teorema 21.1

Sea $T: D \to D'$ lineal y continuo; entonces, existe $h(t,\tau) \in D'_{t,\tau}$ tal que, para todo $f \in D$ ,

$$g(t) = T[f](t) = \langle h(t,\tau), f(\tau) \rangle .$$

Dem.:

Definamos, para $\varphi(t) \in D$ ,

$$N(f,\varphi) \triangleq \langle g(t),\varphi(t) \rangle = \langle T[f](t),\varphi(t) \rangle . \qquad (21.1)$$

Es fácil ver que $N$ es bilineal. También que es continua en ambas variables: si fijamos $f \in D$ y $\{\varphi_n\} \xrightarrow{D} 0$ , resulta $N(f,\varphi_n) = \langle T[f],\varphi_n \rangle \to 0$ , ya que $T[f] \in D'$; si fijamos ahora $\varphi \in D$ , y $\{f_n\} \xrightarrow{D} 0$ , la conclusión surge porque el sistema es continuo, es decir, $\{T[f_n]\} \xrightarrow{D'} 0$ .

Esto permite aplicar el Teorema de los Núcleos ([14],Teorema 5, pág. 18), que da una representación de las funcionales bilineales y bicontinuas definidas en $D$ :

$$N(f,\tau) = \langle\langle h(t,\tau), f(t)\varphi(\tau)\rangle\rangle =$$

$$= \langle\langle h(t,\tau), f(t)\rangle, \varphi(\tau)\rangle \quad .$$

Comparando esto último con (21.1), resulta

$$T[f](t) = \langle h(t,\tau), f(t)\rangle . \qquad \text{q.e.d.}$$

Observemos que si el sistema es invariante, resulta que $h(t,\tau)$ depende de la diferencia $t-\tau$ , y entonces

$$T[f](t) = \langle h(t-\tau), f(t)\rangle = (h * f)(t)$$

para toda $f \in D$ .

El teorema 9.2 generaliza este resultado al espacio $\mathcal{E}'$.

## 22. Estabilidad.

Hemos dicho en el final del § 19, que la hipótesis $h(t)$ . $D'_{L^1}$ que se impone en el Teorema 19.2 tiene relación con la estabilidad del sistema. Trataremos esta cuestión, comenzando con funciones para luego pasar a distribuciones.

Consideremos un sistema cuya respuesta está dada por la expresión

$$y_u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t,\tau)\, u(\tau)\, d\tau \quad , \tag{22.1}$$

donde $h(.,.)$ es una función medible, y

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\, h(t,\tau)|\, d\tau < \infty \quad \forall t \ . \tag{22.2}$$

(Observemos que es variante en el tiempo, y que no imponemos causalidad - Ver Nota en pág. 161).

Definición 22.1: El sistema descripto por (22.1) es estable si a cada entrada $u \in L^\infty$ le corresponde una salida $y \in L^\infty$ .

Teorema 22.2: Las siguientes proposiciones son equivalentes:

i) si $u \in L^\infty$ , entonces $y_u \in L^\infty$ .

ii) existe $c < \infty$ tal que $\| y_u \|_\infty \leqslant c \, \| u \|_\infty$ , para $u \in L^\infty$ .

iii)
$$K \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} |\, h(t,\tau)|\, d\tau \ < \infty \quad .$$

<u>Dem.:</u> (indicaremos con $\|\cdot\|$ la norma $L^\infty$ )

<u>iii) ⇒ ii)</u>

Dada $u \in L^\infty$ ,

$$|y_u(t)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(t,\tau)|\,|u(\tau)|\,d\tau \leq \|u\| \int_{-\infty}^{\infty} |h(t,\tau)|\,d\tau$$

$$< K \|u\| .$$

<u>ii) ⇒ i)</u>

Obvio.

<u>i) ⇒ iii)</u>

La demostración se basa en el Teorema de Banach-Steinhaus [17]: Si $X,Y$ son espacios de Banach, $\Gamma$ una colección de operadores lineales y continuos de $X \to Y$ , y supongamos que para cada $x \in X$ , $\{Lx \;/\; L \in \Gamma\}$ es un subconjunto acotado de $Y$ , entonces $\{\|L\| / \; L \in \Gamma\}$ es un subconjunto acotado de $R$ .
(La utilización del Teorema de Banach-Steinhaus en problemas de estabilidad se debe a Bellman [18]).
En nuestro caso, $X = L^\infty$ , $Y = R$ , y los operadores

$$L_t(u) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t,\tau)\; u(\tau)\; d\tau$$

que son lineales y continuos (esto por (22.2)).

Determinemos $\|L_t\|$ . Tenemos

$$| L_t(u)| \leqslant \| u \| \int_{-\infty}^{\infty} | h(t,\tau)| \, d\tau \quad ,$$

de manera que

$$\| L_t \| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |h(t,\tau)| \, d\tau \quad .$$

Pero si tomamos $u(\tau) = \mathrm{sg}\, h(t,\tau)$ , se ve que $\|u\| = 1$ , y que

$$L_t(u) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t,\tau) \; u(\tau) \; d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t,\tau)| d\tau \quad .$$

Al mostrar que existe tal $u(\tau) \in L^{\infty}$ , demostramos que

$$\|L_t\| = \int_{-\infty}^{\infty} h(t,\tau) \; d\tau \quad .$$

Nuestra hipótesis es que para cada $u \in L^{\infty}$ , el conjunto $y_u(t) = \{L_t(u) \;/\; t \in R\}$ es acotado.

Entonces, por el teorema de Banach-Steinhaus, el conjunto $\{\|L_t\| \;,\; t \in R\}$ es acotado.

Esto significa que

$$\sup_t \int_{-\infty}^{\infty} |h(t,\tau)| d\tau < \infty \qquad ,$$

lo que demuestra la implicación, y por lo tanto, el teorema.

<u>Corolario 22.3</u>: Si el sistema es invariante, $h(t,\tau) = h(t-\tau)$; en tal caso

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t,\tau)|d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t-\tau)|d\tau = \qquad (\eta = t-\tau)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |h(\eta)|d\eta < \infty \quad .$$

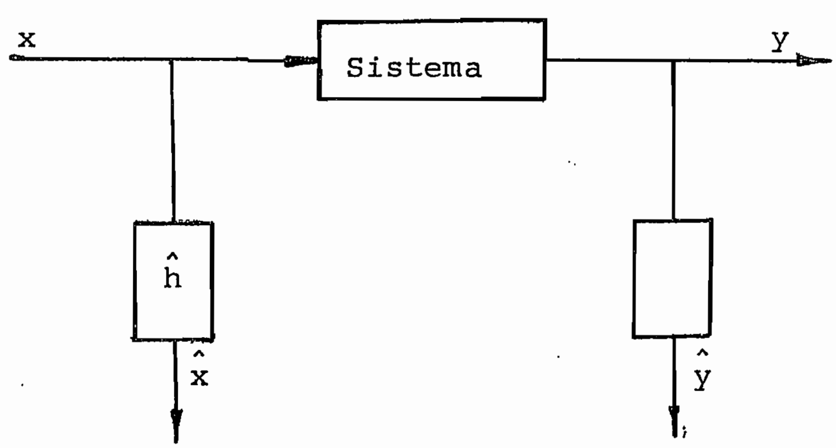
Es decir, un sistema invariante es estable $L^{\infty}$ si y sólo si su respuesta impulsiva es integrable.

Usaremos la siguiente caracterización de las distribuciones $D'_{L^1}$ y $D'_{L^{\infty}}$ (cf.[ 3] , Théoreme XXV, Chap.VI):

$$f \in D'_{L^p} \Leftrightarrow f * \varphi \in L^p \text{ para toda } \varphi \in D \ . \tag{22.3}$$

Supondremos ahora que las entradas y salidas del sistema son distribuciones, y que los instrumentos de medición que se usan las convierten en funciones; si $x$ es la entrada al sistema, diremos que la medición $\hat{x}$ de esa señal es una función que resulta como respuesta de un sistema lineal, invariante, continuo y causal, excitado por la distribución $x$ .

El esquema es el siguiente:



Tomaremos como hipótesis (cf.[15]) que la función respuesta impulsiva de los instrumentos pertenece al espacio $D$ . En consecuencia, la lectura $\hat{x}$ del instrumento será una función acotada si y sólo si $x \in D'_{L^\infty}$ , ya que $\hat{x} = \hat{h} * x$ (ver (22.1)).

La definición 22.1, que es la clásica definición de estabilidad, puede extenderse al campo distribucional.

Definición 22.4:

Un sistema es estable si cada entrada perteneciente a $D'_{L^\infty}$ produce una salida que también pertenece a $D'_{L^\infty}$ .

Observemos que la definición no involucra a los instrumentos de medición.

Teorema 22.5:

Un sistema lineal, continuo, invariante y causal es estable si y sólo si su respuesta impulsiva $h \in D'_{L^1}$ .

Dem.:

($\Leftarrow$) Tomemos una familia de funciones $C^\infty$ que verifiquen

$$\alpha_j(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [-j,j] \\ 0 & \text{si } t \notin [-(j+1),j+1] \end{cases} .$$

Si $x \in D'_{L^\infty}$ , $\alpha_j x \in \mathcal{E}'$ , de manera que tiene sentido la convolución $h * \alpha_j x$ (§ 6) .

Por otra parte, para toda $\varphi \in D_{L^1}$ ,

$$<\alpha_j x, \varphi> = <x, \alpha_j \varphi> \xrightarrow[j \to \infty]{} <x, \varphi>,$$

o sea, $\{\alpha_j x\} \xrightarrow{D'_{L^\infty}} x$ .

Por el teorema 17.3 ($h \in D'_{L^1}$), $h * \alpha_j x \to h * x$ , y además, $y = h * x \in D'_{L^\infty}$ .

(⇒)

Tomemos como entrada a la $\delta$ . Por (22.3), $\delta \in D'_{L^\infty}$. Por el teorema 9.6, la respuesta correspondiente a la excitación es $h * \delta = h$ ; como se supone la estabilidad (Definición 22.4), resulta $h \in D'_{L^\infty}$ .

Por lo establecido en (22.1), $\beta \triangleq h * \varphi \in L^\infty$ , $\forall \varphi \in D$ .

Tomemos como entradas $x \in L^\infty \subset D'_{L^\infty}$; por la hipótesis resulta que la salida $y \in D'_{L^\infty}$. Entonces, $\varphi * y \in L^\infty$ $\forall \varphi \in D$ . Luego, si $y = h * x$ , $\varphi * y = (\varphi * h) * x = \beta * x \in L^\infty$ (22.4).

Como $\beta \in L^\infty$ y $x \in L^\infty$ , resulta que $(\beta * x)(t) = \int_{-\infty}^{t} \beta(\tau) x(t-\tau) d\tau \in L^\infty$ , por (22.4).

En resumen, para toda $x \in L^\infty$ ,

$$y(t) = \int_a^t \beta(\tau) x(t-\tau) d\tau \in L^\infty$$

(el límite inferior no es $-\infty$ ya que el sop $\beta$ es acotado por la izquierda: $\beta = h * \varphi$ , $h$ tiene soporte acotado por la izquierda dado que el sistema es causal, $\varphi \in D$ , y la conclusión surge por el Teorema 7.4 ).

Pero entonces, por el Teorema 22.2, $\beta \in L^1$ , y por (22.3) resulta que $h \in D'_{L^1}$ .

Nota: (para(22.2) )

Si existiera algún $t_0$ tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t_0,\tau)| \, d\tau = \infty ,$$

basta tomar $u(\tau) = \mathrm{sg}\ h(t_0,\tau)$ para comprobar que

$$y_u(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t_0,\tau)| \, d\tau = \infty .$$

Está claro que esto no es lo deseable cuando se pretende hablar de estabilidad.

## REFERENCIAS

[1] CODDINGTON, E.A., LEVINSON, N.: Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill, 1955.

[2] TITCHMARSCH, : The theory of functions, Oxford University Press, 1939.

[3] SCHWARTZ, L.: Théorie des distributions, Hermann, 1966.

[4] GUELFAND, I.M., SHILOV, G.E.: Generalized Functions, Vol.1, Academic Press, 1964.

[5] FOURIER, J.: Oevres, Vol.II, 1888.

[6] GONZALEZ DOMINGUEZ, A.: Análisis Armónico, Fac. de Ciencias Exactas y Naturales (U.B.A.), 1969.

[7] WIDDER, D.V.: Advances Calculus. Prentice-Hall, 1947.

[8] WOHLERS, M.R.: Lumped and Distributed Passive Networks, Academic Press, 1969.

[9] BOREL, E.: Méthodes et problèmes de théorie des fonctions, 1922.

[10] ZEMANIAN, A.H.: Distribution Theory and Transform Analysis, McGraw-Hill, 1965.

[11] CARTAN, H.: Elementary Theory of Analitic functions of one or several complex variables, Hermann, 1963.

[12] CODEGONE,M., SCARAFIOTTI,A.R.: A distributional treatment of linear time-invariant system response to inputs with left-unbounded support, IEEE Trans Circuits and Systems, Vol.31, N°4, 1984.

[13] BELTRAMI,E.J., WOHLERS,M.R.: Distributions and the boundary values of Analytic Functions, Academic Press, 1966.

[14] GUELFAND,I.M., VILENKIN,N.Ya.: Generalized functions, Vol.4, Applications of harmonic analysis,Academic Press, 1964.

[15] BELTRAMI,E.J.,WOHLERS,M.R.: Distributional stability criteria, IEEE Trans.on Circuits and Systems,Vol.12,pp.118-119, 1965.

[16] CODEGONE,M., SCARAFIOTTI,A.R.: Convolution product of distributions with arbitrary support and applications to system theory, Rendiconti del Seminario Matemático, Torino, pp.91-100, 1982.

[17] RUDIN, W.: Functional Analysis, Mc Graw-Hill, 1973.

[18] BELLMAN, R.: On a application of a Banach-Steinhaus theorem to the study of the boundedness of solutions of non-linear differential and difference equations, Annals of Math., Vol.49, N°3, pp. 515-522, 1948.