ISSN 1853-709X

Fascículo 33

Cursos y seminarios de matemática

Serie A

Susana E. Trione

Transformadas de Laplace de funciones retardadas – Invariantes Lorentz

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2011

Cursos y Seminarios de Matemática – Serie A

Fascículo 33

ISSN 1853-709X (Versión Electrónica)
ISSN 0524-9643 (Versión Impresa)

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

CIUDAD UNIVERSITARIA (NUÑEZ) PABELLON 1
C. P. 1428 - BUENOS AIRES - REP. ARGENTINA

CURSOS Y SEMINARIOS DE MATEMATICA

Fascículo 33

TRANSFORMADAS DE LAPLACE DE FUNCIONES RETARDADAS - INVARIANTES LORENTZ

por

Susana E.Trione

1985

TRANFORMADAS DE LAPLACE

DE

FUNCIONES RETARDADAS,

INVARIANTES LORENTZ

por

Susana Elena Trione

Prólogo.

Este trabajo reproduce un curso dictado en el Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires durante el segundo cuatrimestre de 1981 para estudiantes y graduados de las carreras de Computación, Física y Matemática. Trata, principalmente, de la transformación de Laplace de funciones retardadas, invariantes Lorentz. Estas notas abundan en fórmulas complicadas cuya obtención es, a menudo, dificultosa, por esto creo conveniente exponer con algún detalle su contenido.

CAPITULO I.

Sea $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$, $r^r = x_1^2 + \dots + x_n^2$, $\rho^2 = y_1^2 + \dots + y_n^2$;

$dx = dx_1 \ldots dx_n$ y $dy = dy_1 \ldots dy_n$.

La transformada de Fourier de una función $f(x)$ es, por definición, $\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,y>} f(x)\,dx$.

Diremos que una función es radial o invariante por rotaciones si $f(x) = g(r^2)$.

Este capítulo está dedicado a la obtención de una clásica fórmula debida a Bochner (cf. [1], p. 186), la cual dice que si $f(x)$ es radial e integrable en $\mathbb{R}^n$, entonces su transformada de Fourier puede expresarse mediante una integral unidimensional, a saber,

$$\hat{f}(y) = \varphi(\rho^2) = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\rho^{\frac{n-2}{2}}} \int_0^\infty g(t^2)\, t^{\frac{n}{2}}\, J_{\frac{n-2}{2}}(\rho t)\,dt,$$

(cf. fórmula (I,3;1)),

donde $J_\nu(z)$ es la función de Bessel (cf. (I,3;2)).

Para su demostración de usa el hecho de que la transformada de Fourier de una función invariante por rotaciones también lo es (cf. Teorema 1, fórmula (I,2;4)).

El capítulo finaliza con la demostración de un par de fórmulas recíprocas que permiten establecer la relación existente entre la fórmula de Bochner y la transformación de Hankel.

CAPITULO II.

El principal objetivo de este capítulo es extender al caso complejo el clásico teorema de Bochner (cf. (I,3;26)) de modo de poder evaluar, por medio de una integral simple, no sólo integrales de Fourier sino, más generalmente, integrales de Laplace n-dimensionales de funciones radiales.

En el parágrafo 2 se evaluarán de manera directa y elemental algunas integrales interesantes que se usarán en la demostración del Teorema 3.

Esta versión compleja de la fórmula de Bochner (inédita) es debida a Alberto González Domínguez.

CAPITULO III.

Sea $\phi(t)$ $(t \in \mathbb{R}^n)$ una función retardada, invariante Lorentz que satisface además a la condición a) (III.1.). Llamaremos $\mathcal{R}$ a la familia de tales funciones. Sea $f(z)$ la transformada de Laplace de $\phi(t) \in \mathcal{R}$. Probaremos (Teorema 4) que $f(z)$ puede expresarse por medio de una transformada K (fórmula (III,2;1)). En el parágrafo 3 demostraremos que vale una fórmula idéntica para funciones avanzadas, invariantes Lorentz (fórmula (III,3;1)).

CAPITULO IV.

En este capítulo haremos dos importantes aplicaciones de la fórmula (III,2;25) que expresa la transformada de Laplace n-dimensional de funciones retardadas mediante una integral unidimensional. Ellas son la evaluación de las transformadas de Laplace de los núcleos $R_a(u)$ y $W_a(u,m)$ de M. Riesz (cf. (IV,1;1) y (IV,2;1)).

En los capítulos siguientes estudiaremos las propiedades de estas funciones pertenecientes a la familia $\mathcal{R}$ y ahí observaremos el porqué de su importancia.

CAPITULO V.

En este capítulo probaremos propiedades interesantes del núcleo $R_\alpha(u)$, a saber $R_0 = \delta$; la fórmula de composición $R_\alpha * R_\beta(u)$; $\Box R_{\alpha+2}(u) = R_\alpha(u)$ donde $\Box$ es el operador ultrahiperbólico n-dimensional; $\Box^k R_{2k}(u) = \delta$ y $R_{-2k}(u) = \Box^k \delta$, $k = 1,2,\ldots$. Estas fórmulas fueron obtenidas por Marcel Riesz (sin usar la teoría de distribuciones) y por Laurent Schwartz. Acá se demuestran muy fácilmente usando el teorema sobre la transformación de Laplace (cf. fórmula (VI,1;11)).

CAPITULO VI.

Probaremos en esta sección propieades del núcleo de Marcel Riesz $W_\alpha(u,m)$. Ellas son $W_0(u,m) = \delta(x)$; $W_\alpha(u,m) * W_\beta(u,m)$ (fórmulas indicadas, sin demostración, en [12], p. 89); $(\Box + m^2) W_{\alpha+2}(u,m) = W_\alpha(u,m)$ donde $(\Box + m^2)$ es el operador de Klein-Gordon n-dimensional; y $(\Box + m^2)^k W_{2k}(u,m) = \delta$, $k = 1,2,\ldots$; $W_{-2k}(u,m) = (\Box + m^2)^k$, que expresa que W_{2k} es la única solución elemental del operador de Klein-Gordon iterado que se anula para $t_0 \leq 0$ y $W_\alpha(u, m = 0) = R_\alpha(u)$. Finaliza esta sección con la expresión de $W_\alpha(u,m)$ como combinación lineal, infinita, de la

$R_a(u)$ de diferentes órdenes y la justificación del método simbólico de Marcel Riesz.

CAPITULO VII.

Daremos acá una fórmula explícita de la solución elemental de la ecuación de las ondas retardadas, es decir, con soporte en el semiespacio $t_0 \geqslant 0$. Finaliza este capítulo con algunas interesantes conclusiones resumidas en el hecho fundamental de que las soluciones elementales de las ecuaciones hiperbólicas son, en general, *distribuciones*.

CAPITULO VIII.

Obtenemos una fórmula de representación de la solución elemental simétrica del operador de Klein-Gordon, iterado k-veces: $\bar{\Delta}(x,m,n,k)$ (fórmula (VIII,1;15)).

Probaremos que, con ciertas condiciones, las siguientes fórmulas son válidas (cf. Teorema 9):

$$h(s) = \int_0^\infty \bar{\Delta}(s,t)f(t)dt$$

y

$$f(t) = \pi^{n-2}\, 2^{2k+n-2}\{(k-1)!\}^2\int_0^\infty \bar{\Delta}(t,s)h(s)ds.$$

En el caso particular $n = 4$, $k = 1$, (importante en la teoría cuántica de campos) el par de fórmulas recíprocas ((VIII,2;10),(VIII,2;15)) fueron obtenidas por Källen ([17]).

Agradezco a la señorita Claudia Clemares su esmerado trabajo de composición y dactilografía.

Susana Elena Trione
Universidad de Buenos Aires
y
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas.

Buenos Aires, Argentina.
Abril, 1984.

INDICE.

CAPITULO VIII

Solución elemental simétrica del operador n-dimensional de Klein-Gordon iterado k-veces

CAPITULO I

Fórmula clásica de Bochner

I.1. Definiciones.

Sean $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ puntos del espacio euclídeo n-dimensional $\mathbb{R}^n$, $< x, y > = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$; $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$, $\rho^2 = y_1^2 + \ldots + y_n^2$ y $dx = dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$, $dy = dy_1\, dy_2 \ldots dy_n$. Con $S_n(R)$ indicamos el área de la esfera de radio R en el espacio n-dimensional, de fórmula

$$S_n(R) = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} R^{n-1} . \qquad (I,1;1)$$

Sea λ una rotación en torno del origen del espacio n-dimensional $\mathbb{R}^n$; λ es una transformación lineal, homogénea, que conserva las distancias.

El cuadrado escalar $< x, x >$ es, por definición, *invariante por rotaciones:*

$$< x, x > = < \lambda x, \lambda x > \qquad (I,1;2)$$

Por otra parte, puede escribirse

$$< x, y > = \frac{1}{4} [< x+y, x+y > - < x-y, x-y >] \qquad (I,1;3)$$

y de (I,1;2) resulta que el producto escalar es invariante por rotaciones:

$$\langle x,y\rangle = \langle \lambda x,\lambda y\rangle . \qquad (I,1;4)$$

La *transformada de Fourier* de f(x) es, por definición,

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,y\rangle} f(x)\,dx. \qquad (I,1;5)$$

I.2. Funciones invariantes por rotaciones

Sea

$$f(x) = g(r^2). \qquad (I,2;1)$$

A una función que satisface a la ecuación (I,2;1) la llamaremos *función radial*, o *invariante por rotaciones*.

Equivalentemente, $f(x)$ es invariante por rotaciones si

$$f(\lambda x) = f(x). \qquad (I,2;2)$$

Teorema 1

Hipótesis: a) $f(x)$ es integrable en $\mathbb{R}^n$, es decir, $f(x) \in L(\mathbb{R}^n)$;

b) $f(\lambda x) = f(x)$.

<u>Tesis:</u>

$$\hat{f}(y) = \varphi(\rho^2). \qquad (I,2;3)$$

Es decir, si $f(x)$ es invariante por rotaciones, también $\hat{f}(y)$ es invariante por rotaciones.

<u>Demostración del Teorema 1.</u>

Teniendo en cuenta (I,1;5) es

$$\hat{f}(\lambda y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,\lambda y>} f(x)\,dx. \qquad (I,2;4)$$

En virtud de (I,1;3),

$$<x,\lambda y> = <\lambda^{-1}x,\lambda^{-1} y> = <\lambda^{-1}x,y>. \qquad (I,2;5)$$

De (I,2;4) y (I,2;5), obtenemos

$$\hat{f}(\lambda y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<\lambda^{-1}x,y>} f(x)\,dx. \qquad (I,2;6)$$

Haciendo el cambio de variable

$$\lambda^{-1}x = u$$

$$x = \lambda u \qquad (I,2;7)$$

$$dx = |\det\lambda|\, du = du \ ,$$

ya que, por ser λ una rotación, $\det\lambda = \pm 1$.

De (I,2;6) y (I,2;7), resulta (usando la hipótesis (I,2;2))

$$\hat{f}(\lambda y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<u,y>} f(\lambda u)\, du =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<u,y>} f(u)\, du = \hat{f}(y), \qquad \text{(I,2;8)}$$

y el teorema queda demostrado.

I.3. La fórmula clásica de Bochner.

En este parágrafo demostraremos un clásico teorema debido a Bochner ([1], p. 186).

Teorema 2 (Bochner)

Hipótesis: a) $f(x) \in L(\mathbb{R}^n)$,

b) $f(x) = g(r^2)$,

c) $f(x) = f(-x)$, if $n = 1$.

Tesis:

$$\boxed{\hat{f}(y) = \varphi(\rho^2) = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\rho^{\frac{n-2}{2}}} \int_0^\infty g(t^2)\, t^{\frac{n}{2}}\, J_{\frac{n-2}{2}}(\rho t)\, dt,} \qquad \text{(I,3;1)}$$

donde $J_\nu(z)$ es la función de Bessel definida por la fórmula

$$J_\nu(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (\frac{z}{2})^{\nu+2p}}{p!\,\Gamma(p+\nu+1)} . \qquad (I,3;2)$$

La fórmula (I,3;1) es la *clásica fórmula de Bochner.*

Demostración de Teorema 2.

Pongamos en la transformada de Fourier de $f(x)$

$$y = (\rho, 0, \ldots, 0), \qquad (I,3;3)$$

resulta

$$\hat{f}(y) = \varphi(\rho^2) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,y>} f(x)\,dx =$$

$$= \int_{R^n} e^{-ix_1\rho} f(x)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_1\rho}\,dx_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x)\,dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_1\rho}\,dx_1 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(r^2)\,dx_2 \ldots dx_n .$$

$$(I,3;4)$$

Escribamos

$$r^2 = x_1^2 + r_1^2, \qquad (I,3;5)$$

$$r_1^2 = \sum_{\nu=2}^{n} x_\nu^2 . \qquad (I,3;6)$$

Vamos a calcular la integral interior que figura en la última igualdad de (I,3;4), que llamaremos I, a saber,

$$I = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(r^2)\,dx_2 \ldots dx_n = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(x_1^2 + r_1^2)\,dx_2 \ldots dx_n .$$

(I,3;7)

Utilizando fórmulas clásicas (cf. [2], p. 39), obtenemos

239 238

$$I = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(x_1^2 + r_1^2)\,dr_1\, dS_{n-1}(r_1) =$$

$$= \int_0^\infty g(x_1^2 + r_1^2)\,dr_1 \int_{S(r_1)} dS_{n-1}(r_1) =$$

$$= \int_0^\infty g(x_1^2 + r_1^2)\,dr_1\, S_{n-1}(r_1) . \qquad (I,3;8)$$

De (I,1;1) y (I,3;8) resulta

$$I = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_0^\infty g(x_1^2 + r_1^2)\, r_1^{n-2}\, dr_1 . \qquad (I,3;9)$$

Escribiremos de otra manera la fórmula (I,3;9), de manera que en ella aparezca r en vez de r_1. Tenemos en virtud de la fórmula (I,3;5)

$$d(r^2) = 2r_1\, dr_1 \, ,$$

o sea,

$$dr_1 = \frac{1}{2}\, \frac{d(r^2)}{r_1} = \frac{1}{2}\, \frac{d(r^2)}{(r^2-x_1^2)^{1/2}} \, . \qquad (I,3;10)$$

Por sustitución de (I,3;10) en (I,3;9) llegamos a la fórmula

$$\int_0^\infty g(r^2)\, r_1^{n-2} dr_1 = \frac{1}{2} \int_{r^2=x_1^2}^\infty g(r^2) \left[(r^2-x_1^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{n-2} \frac{d(r^2)}{(r^2-x_1^2)^{1/2}} \, ,$$

o sea,

$$\int_0^\infty g(r^2)\, r_1^{n-2} dr_1 = \frac{1}{2} \int_{r^2=x_1^2}^\infty g(r^2) \left[r^2-x_1^2\right]^{\frac{n-2}{2}-\frac{1}{2}} d(r^2) \, ,$$

es decir, en virtud de (I,3;9)

$$I = \frac{2\, \pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\, \frac{1}{2} \int_{r^2=x_1^2}^\infty g(r^2)\, (r^2-x_1^2)^{\frac{n-3}{2}} d(r^2) \, . \qquad (I,3;11)$$

Por sustitución de (I,3;11) en (I,3;4), obtenemos

$$\hat{f}(y) = \varphi(\rho^2) =$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_1\rho} dx_1 \int_{r^2=x_1^2}^{\infty} g(r^2)(r^2-x_1^2)^{\frac{n-3}{2}} d(r^2). \tag{I,3;12}$$

Hagamos un cambio de letras en (I,3;12) poniendo $r = t$, resulta

$$\hat{f}(y) = \varphi(\rho^2) =$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix_1\rho} dx_1 \int_{t^2=x_1^2}^{\infty} g(t^2)(t^2-x_1^2)^{\frac{n-3}{2}} d(t^2). \tag{I,3;13}$$

Pongamos en (I,3;13) $x_1 = r$, resulta

$$\hat{f}(y) = \varphi(\rho^2) =$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ir\rho} dr \int_{t^2=r^2}^{\infty} g(t^2)(t^2-r^2)^{\frac{n-3}{2}} d(t^2). \tag{I,3;14}$$

Invirtiendo el orden de integración en (I,3;14) podemos escribir

$$\hat{f}(y) = \varphi(\rho^2) =$$

$\frac{n-1}{2}-1$

?

$$= \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_0^{\infty} g(t^2)\, d(t^2) \int_{r=-t}^{r=+t} e^{-ir\rho}\, (t^2-r^2)^{\frac{n-1}{2}\,\frac{1}{2}} dr. \qquad (I,3;15)$$

Ahora vamos a tranformar la integral anterior que aparece en (I,3;15), que llamaremos J, a saber:

$$J = \int_{r=-t}^{r=+t} e^{-ir\rho}\, (t^2-r^2)^{\frac{n-1}{2}-1} dr\,, \qquad (I,3;16)$$

equivalentemente,

$$J = \int_{r=-t}^{r=+t} e^{-ir\rho}\, [t^2 (1-(\tfrac{r}{t})^2)]^{\frac{n-1}{2}-1} dr. \qquad (I,3;17)$$

Hagamos el cambio de variable

$$\frac{r}{t} = u, \quad r = tu, \quad dr = dtu. \qquad (I,3;18)$$

Obtenemos de (I,3;17) y (I,3;18)

$$J = t^{n-2} \int_{-1}^{1} e^{-i\rho tu} (1-u^2)^{\frac{n-3}{2}} du$$

$$= 2t^{n-2} \int_0^1 \cos(\rho tu)\, (1-u^2)^{\frac{n-3}{2}} du. \qquad (I,3;19)$$

Por sustitución de (I,3;19) en (I,3;15), obtenemos

$$\hat{f}(y) = \varphi(\rho^2) =$$

$$= \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_0^\infty g(t^2)\, 2t^{n-2} d(t^2) \int_0^1 \cos(\rho tu)(1-u^2)^{\frac{n-3}{2}} du,$$

o sea,

$$\hat{f}(y) = \varphi(\rho^2) =$$

$$= \frac{2\,\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_0^\infty g(t^2)\, 2t^{n-1} dt \int_0^1 \cos(\rho tu)(1-u^2)^{\frac{n-3}{2}} du. \qquad (I,3;20)$$

Recordemos ahora la fórmula clásica (cf. [2], p.378, fórmula (IX,1;72))

$$J_p(z) = \frac{2(\frac{z}{2})^p}{\Gamma(p+\frac{1}{2})\sqrt{\pi}} \int_0^1 (1-u^2)^{p-\frac{1}{2}} \cos(zu)\, du. \qquad (I,3;21)$$

Poniendo en esta última fórmula $z = \rho t$, obtenemos

$$J_p(\rho t) = \frac{2(\frac{\rho t}{2})^p}{\Gamma(p+\frac{1}{2})\sqrt{\pi}} \int_0^1 (1-u^2)^{p-\frac{1}{2}} \cos(\rho tu)\, du. \qquad (I,3;22)$$

Consideremos de nuevo la integral interior que aparece en la fórmula (I,3;20) (con su coeficiente), a saber:

$$\frac{4\,\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\,t^{n-2}\int_0^1 (1-u^2)^{\frac{n-2}{2}-\frac{1}{2}}\cos(\rho tu)\,du =$$

$$= \frac{2\,\pi^{\frac{n-1}{2}}\,t^{n-2}\,\pi^{\frac{1}{2}}\,2\,(\frac{\rho t}{2})^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(\frac{n-2}{2}+\frac{1}{2})\;\pi^{\frac{1}{2}}\;(\frac{\rho t}{2})^{\frac{n-2}{2}}}\int_0^1 (1-u^2)^{\frac{n-2}{2}-\frac{1}{2}}\cos(\rho tu)\,du =$$

$$= \frac{2\,(\frac{\rho t}{2})^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(\frac{n-2}{2}+\frac{1}{2})\sqrt{\pi}}\int_0^1 (1-u^2)^{\frac{n-2}{2}-\frac{1}{2}}\,\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}\,t^{n-2}\,\pi^{\frac{1}{2}}}{(\frac{\rho t}{2})^{\frac{n-2}{2}}}\cos(\rho tu)\,du. \tag{I,3;23}$$

Poniendo ahora en la fórmula (I,3;21)

$$p = \frac{n-2}{2}, \tag{I,3;24}$$

obtenemos

$$J_{\frac{n-2}{2}}(\rho t) = \frac{2\,(\frac{\rho t}{2})^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma(\frac{n-2}{2}+\frac{1}{2})\sqrt{\pi}}\int_0^1 (1-u^2)^{\frac{n-2}{2}-\frac{1}{2}}\cos(\rho tu)\,du. \tag{I,3;25}$$

Sustituyendo (I,3;25) en (I,3;20), resulta

$$\hat{f}(y) = \varphi(\rho^2) = \frac{2^{\frac{n}{2}}\pi^{\frac{n}{2}}}{\rho^{\frac{n-2}{2}}} \int_0^\infty g(t^2)\, t^{\frac{n-2}{2}+1}\, J_{\frac{n-2}{2}}(\rho t)\,dt,$$

o sea, en definitiva,

$$\hat{f}(y) = \varphi(\rho^2) = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\rho^{\frac{n-2}{2}}} \int_0^\infty g(t^2)\, t^{\frac{n}{2}}\, J_{\frac{n-2}{2}}(\rho t)\,dt, \qquad (I,3;26)$$

que es la *fórmula de Bochner* que queríamos demostrar.

□

I.4. Equivalencia de la fórmula de Bochner con la transformación de Hankel.

Sea $f(x)$ una función integrable en $\mathbb{R}^n$, es decir,

$$f(x) \in L(\mathbb{R}^n), \qquad (I,4;1)$$

e invariante por rotaciones. Admitamos que, además, se cumplen las hipótesis adicionales

$$f(x) \in C^{\circ}(\mathbb{R}^n), \qquad (I,4;2)$$

$$\hat{f}(y) = \psi(y) = \varphi(\rho^2) \in L(\mathbb{R}^n).$$

En tal caso vale la fórmula recíproca de Fourier:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\, e^{i<x,y>} dy. \qquad (I,4;3)$$

Teniendo presente la tesis (I,2;3) del teorema 1 y la hipótesis (I,4;2), la integral (I,4;3) puede evaluarse también por la fórmula de Bochner. Resulta así

$$f(x) = g(r^2) = \frac{1}{(2\pi)^n} \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{r^{\frac{n-2}{2}}} \int_0^\infty \varphi(t^2) t^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(rt)\, dt. \qquad (I,4;4)$$

Es decir, tenemos el par de fórmulas recíprocas

$$\varphi(\rho^2) = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\rho^{\frac{n-2}{2}}} \int_0^\infty g(t^2) t^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(\rho t)\, dt, \qquad (I,4;5)$$

$$g(r^2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{r^{\frac{n-2}{2}}} \int_0^\infty \varphi(t^2) t^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(rt)\, dt.$$

Observemos que si $f(x)$ es continua, $g(r^2)$ y por lo tanto $g(t^2)$ es continua. Además supongamos $f(x) \in L(\mathbb{R}^n)$. Obtenemos, por el ya usado pasaje a coordenadas polares,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |g(r^2)|\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |g(r^2)|\, dr dS_n(r) =$$

$$= \int_0^\infty |g(r^2)|\,dr \int_{S_n(r)} dS_n(r) = \Omega \int_{\mathbb{R}^n} |g(r^2)|\, r^{n-1} dr < \infty, \qquad (I,4;6)$$

donde Ω es el área de la esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$, o sea,

$$\Omega = S_n(1) = \frac{2\,\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \,. \qquad (I,4;7)$$

Es decir que (I,4;2) afirma que

$$\int_0^\infty |\varphi(t^2)|\, t^{n-1} dt < \infty. \qquad (I,4;8)$$

Resumiendo, (I,4;6) y (I,4;8) son equivalentes a las condiciones (I,4;1) y (I,4;2).

Podemos pues enunciar el

Teorema 3

Hipótesis:

Sea

$$g(t^2) \quad \text{continua en } [0,\infty), \qquad (I,4;9)$$

$$\int_0^\infty |g(t^2)|\, t^{n-1} dt < \infty, \qquad (I,4;10)$$

$$\int_0^\infty |\varphi(\rho^2)|\, \rho^{n-1} d\rho < \infty. \qquad (I,4;11)$$

Vale el siguiente par de fórmulas recíprocas

$$\varphi(\rho^2) = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\rho^{\frac{n-2}{2}}} \int_0^\infty g(t^2)\, t^{\frac{n}{2}}\, J_{\frac{n-2}{2}}(\rho t)\, dt,$$

$$g(r^2) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{1}{r^{\frac{n-2}{2}}} \int_0^\infty \varphi(t^2)\, t^{\frac{n}{2}}\, J_{\frac{n-2}{2}}(rt)\, dt. \qquad (I,4;12)$$

Las fórmulas (I,4;12) son un caso particular de las famosas fórmulas de Hankel. Hay tablas extensas de la transformación de Hankel que definiremos en seguida (cf. entre otras, [3] y [4]). Su utilidad es enorme, pues nos permite calcular explícitamente integrales de Fourier múltiples de funciones radiales que aparecen continuamente en las fórmulas de integración de ecuaciones elípticas e hiperbólicas con coeficientes constantes.

Vamos a aclarar la conexión de las fórmulas (I,4;12) con la fórmula general de Hankel. Para ello observemos que, si adoptamos la forma más simétrica de escribir las fórmulas de Fourier

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-i<x,y>}\, dx\ ,$$

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y)\, e^{i<x,y>}\, dy \ , \tag{I,4;13}$$

entonces desaparecen los factores $(2\pi)^{\frac{n}{2}}$, $\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$ de las fórmulas (I,4;12) que se escriben, más simplemente:

$$\begin{aligned} \varphi(\rho^2) &= \frac{1}{\rho^{\frac{n-2}{2}}} \int_0^\infty \mathfrak{f}(t^2)\, t^{\frac{n}{2}}\, J_{\frac{n-2}{2}}(t\rho)\, dt, \\ \mathfrak{f}(t^2) &= \frac{1}{t^{\frac{n-2}{2}}} \int_0^\infty \varphi(\rho^2)\, \rho^{\frac{n}{2}}\, J_{\frac{n-2}{2}}(t\rho)\, d\rho. \end{aligned} \tag{I,4;14}$$

Vamos a escribir estas fórmulas en forma equivalente, poniendo

$$\begin{aligned} \varphi(\rho^2)\, \rho^{\frac{n-2}{2}} &= \int_0^\infty f(t^2)\, t^{\frac{n}{2}}\, J_{\frac{n-2}{2}}(t\rho)\, dt, \\ f(t^2)\, t^{\frac{n-2}{2}} &= \int_0^\infty \varphi(\rho^2)\, \rho^{\frac{n}{2}}\, J_{\frac{n-2}{2}}(t\rho)\, d\rho, \end{aligned} \tag{I,4;15}$$

o también,

$$\varphi(\rho^2)\, \rho^{\frac{n-2}{2}} = \int_0^\infty f(t^2)\, t^{\frac{n}{2}}\, \frac{\sqrt{t\rho}}{\sqrt{t\rho}}\, J_{\frac{n-2}{2}}(t\rho)\, dt \ ,$$

$$f(t^2)\,t^{\frac{n-2}{2}} = \int_0^{\infty} \varphi(\rho^2)\,\rho^{\frac{n}{2}}\,\frac{\sqrt{t\rho}}{\sqrt{t\rho}}\,J_{\frac{n-2}{2}}(t\rho)\,d\rho. \qquad (I,4;16)$$

Equivalentemente,

$$\varphi(\rho^2)\,\rho^{\frac{n-2}{2}+\frac{1}{2}} = \int_0^{\infty} f(t^2)\,t^{\frac{n-1}{2}}\,\sqrt{t\rho}\;J_{\frac{n-2}{2}}(t\rho)\,dt,$$

$$(I,4;17)$$

$$f(t^2)\,t^{\frac{n-2}{2}+\frac{1}{2}} = \int_0^{\infty} \varphi(\rho^2)\,\rho^{\frac{n-1}{2}}\,\sqrt{t\rho}\;J_{\frac{n-2}{2}}(t\rho)\,d\rho.$$

Si aquí escribimos

$$f(t^2)\,t^{\frac{n-1}{2}} = h(t),$$

$$\varphi(\rho^2)\,\rho^{\frac{n-1}{2}} = \lambda(\rho),$$

obtenemos

$$\lambda(\rho) = \int_0^{\infty} h(t)\,\sqrt{t\rho}\;J_{\frac{n-2}{2}}(t\rho)\,dt,$$

$$(I,4;18)$$

$$h(t) = \int_0^{\infty} \lambda(\rho)\sqrt{t\rho}\;J_{\frac{n-2}{2}}(t\rho)\,d\rho.$$

Las fórmulas (I,4;18) muestran claramente la conexión de las fórmulas (I,4;12) con la transformación de Hankel general. En efecto, estas fórmulas generales de Hankel se escriben (cf. entre otros,[3],p.3,[4], p.1,[5] vol.II, capítulo VIII, [6], (4.4), p. 456)

$$\mathcal{H}_{\nu}(f) = g(y,\nu) = \int_0^{\infty} f(x) J_{\nu}(xy)\sqrt{xy}\, dx,$$

$$\mathcal{H}_{\nu}(g) = f(x;\nu) = \int_0^{\infty} g(y) J_{\nu}(xy)\sqrt{xy}\, dy. \qquad (I,4;19)$$

Estas fórmulas demuestran que lo que nosotros hemos demostrado (fórmulas (I,4;12)) es un caso particular de las fórmulas de Hankel, a saber, el caso particular referente a $\nu = \frac{n-2}{2}$.

Vamos a escribir las fórmulas (I,4;14) en una forma equivalente con el objeto de generalizar a distribuciones.

Hagamos el cambio de variable:

$$r^2 = t, \quad r = t^{\frac{1}{2}}, \quad dr = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt$$

y pongamos $\rho^2 = s$ por razones de simetría.

Tenemos entonces:

$$\varphi(s) = \frac{1}{s^{\frac{n-2}{4}}} \int_0^{\infty} f(t) t^{\frac{n}{4}} \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{ts})\, dt$$

o, equivalentemente,

$$\varphi(s) = \frac{1}{s^{\frac{n-2}{4}}} \int_0^{\infty} f(t) t^{\frac{n-2}{4}} J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{ts})\, dt$$

que también puede escribirse, multiplicando por $(\sqrt{t})^{\frac{n-2}{2}}$ y dividiendo por $(\sqrt{t})^{\frac{n-2}{2}}$,

$$\varphi(s) = \frac{1}{2}\int_0^\infty f(t)\, t^{\frac{n-2}{2}} \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{ts})}{(\sqrt{ts})^{\frac{n-2}{2}}}\, dt. \qquad (I,4;20)$$

La fórmula recíproca es

$$f(t) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \varphi(s)\, s^{\frac{n-2}{2}} \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{ts})}{(\sqrt{ts})^{\frac{n-2}{2}}}\, ds. \qquad (I,4;21)$$

Tenemos, pues, la siguiente versión equivalente de la fórmula de Bochner:

$$\varphi(s) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,y\rangle} f(r^2)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty f(t)\, t^{\frac{n-2}{2}} \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(\sqrt{ts})}{(\sqrt{ts})^{\frac{n-2}{2}}}\, dt. \qquad (I,4;22)$$

Esta es la versión de la fórmula de Bochner que utilizaremos más a menudo en teoría de distribuciones.

CAPITULO II

Versión compleja de la fórmula de Bochner

Nos proponemos extender al caso complejo el clásico teorema de Bochner (cf. [2], p. 186) de modo de poder calcular, por medio de una integral simple, no sólo integrales de Fourier, sino, más generalmente, integrales de Laplace n-dimensionales de funciones radiades.

Este teorema nos es esencial para nuestra generalización, para distribuciones cualesquiera, de la transformación de Hankel.

Esta versión compleja de la fórmula de Bochner (inédita) es debida a Alberto González Domínguez.

Para demostrar nuestro problema necesitamos evaluar explícitamente algunas integrales extendidas a la esfera unitaria de $\mathbb{R}^n$. A la evaluación de estas integrales está dedicado el primer parágrafo.

II.1. Evaluaciones de integrales extendidas a la esfera unitaria de $\mathbb{R}^n$.

Comenzaremos por calcular la siguiente integral:

$$M(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n) = \int_\Omega (\xi_1^2)^{\mu_1}(\xi_2^2)^{\mu_2} \ldots (\xi_n^2)^{\mu_n} d\Omega. \tag{II,1;1}$$

En esta fórmula Ω designa la esfera unitaria del espacio n-dimensional

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 = 1.$$

Los exponentes μ_j, $j = 1,2,\dots,n$ son enteros no negativos. Pondremos

$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n = k. \qquad \text{(II,1;2)}$$

Para calcularla empecemos por considerar la siguiente integral (los números $m_1,m_2,\dots,m_n$ son reales):

$$I_\nu(m_1,m_2,\dots,m_n) = \int_\Omega [m_1\xi_1+m_2\xi_2+ \dots +m_n\xi_n]^\nu \, d\Omega \; , \qquad \text{(II,1;3)}$$

con ν entero no negativo. Se comprueba inmediatamente, por razones de simetría, que esta integral es nula si ν es impar:

$$I_{2k+1}(m_1,m_2,\dots,m_n) = 0, \qquad \text{(II,1;4)}$$

con $k = 0,1,\dots$.

Limitémonos pues a considerar la integral

$$I_{2k}(m_1,m_2,\dots,m_n) = \int_\Omega [m_1\xi_1 + \dots + m_n\xi_n]^{2k} \, d\Omega \; , \qquad \text{(II,1;5)}$$

$k = 1, 2, \ldots$.

Tenemos

$$\int_\Omega [m_1 \xi_1 + \ldots + m_n \xi_n]^{2k} \, d\Omega =$$

$$= \sum_{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 2k} \frac{(2k)!}{\lambda_1! \ldots \lambda_n!} \, .$$

$$. \, m_1^{\lambda_1} \ldots m_n^{\lambda_n} \int_\Omega \xi_1^{\lambda_1} \ldots \xi_n^{\lambda_n} \, d\Omega \, . \qquad \text{(II,1;6)}$$

De esta fórmula se deduce, por razones de simetría nuevamente, que basta que uno de los números λ_j sea impar, para que la integral del segundo miembro de (II,1;6) se anule. Nos queda por lo tanto

$$I_{2k}(m_1, m_2, \ldots, m_n) =$$

$$= \sum_{\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n = k} \frac{(2k)!}{(2\mu_1)! \ldots (2\mu_n)!} \, .$$

$$. \, (m_1^2)^{\mu_1} \ldots (m_n^2)^{\mu_n} \int_\Omega (\xi_1^2)^{\mu_1} \ldots (\xi_n^2)^{\mu_n} \, d\Omega \, . \qquad \text{(II,1;7)}$$

Vamos a comenzar por calcular la integral interior de

(II,1;7). Pongamos, con $\mu_1 + \ldots + \mu_n = k$,

$$M(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n) = \int_\Omega (\xi_1^2)^{\mu_1} \ldots (\xi_n^2)^{\mu_n} \, d\Omega \,. \qquad (II,1;8)$$

En [7]., volumen III, pág. 405, ejercicio n°16, encontramos la siguiente fórmula (Fichtenholz utiliza una notación distinta pero equivalente)

$$\int_\Omega f(m_1\xi_1 + {}_2\xi_2 + \ldots + m_n\xi_n)\, d\Omega = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{1})} \int_{-1}^{1} f(Mu)\,(1-u^2)^{\frac{n-3}{2}} \, du \qquad (II,1;9)$$

donde

$$M = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + \ldots + m_n^2} \,. \qquad (II,1;10)$$

Pongamos, en particular,

$$f(m_1\xi_1 + \ldots + m_n\xi_n) = (m_1\xi_1 + \ldots + m_n\xi_n)^{2k} \,. \qquad (II,1;11)$$

Sustituyendo en (II,1;9) obtenemos

$$\int_\Omega (m_1\xi_1 + \ldots + m_n\xi_n)^{2k} d\Omega = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_{-1}^{1} (Mu)^{2k} (1-u^2)^{\frac{n-3}{2}} du =$$

$$= \frac{4\pi^{\frac{n-1}{2}} M^{2k}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_0^1 u^{2k}(1-u^2)^{\frac{n-3}{2}} du. \qquad \text{(II,1;12)}$$

Por otra parte, con el cambio de variable $u^2 = s$, $u = s^{\frac{1}{2}}$, $du = \frac{1}{2} s^{-\frac{1}{2}} ds$, obtenemos

$$\int_0^1 u^{2k}(1-u^2)^{\frac{n-3}{2}} du = \frac{1}{2} \int_0^1 s^k (1-s)^{\frac{n-3}{2}} s^{-\frac{1}{2}} ds =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 s^{k-\frac{1}{2}+1-1} (1-s)^{\frac{n-3}{2}+1-1} ds =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 s^{(k+\frac{1}{2})-1} (1-s)^{\frac{n-1}{2}} ds =$$

$$= \frac{1}{2} B(k+\frac{1}{2}, \frac{n-1}{2}) =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(k+\frac{n}{2})}. \qquad \text{(II,1;13)}$$

Con $B(\alpha,\beta)$ indicamos la función beta (cf. [5], vol. I, p. 9) y $\Gamma(z)$ es la función gamma dada por la fórmula

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{z-1}\, dt, \quad \text{si} \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Sustituyendo (II,1;13) en (II,1;12) obtenemos

$$\int_{\Omega} (m_1\xi_1+\ldots+m_n\xi_n)^{2k} d\Omega = M^{2k} \frac{4\ \pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \frac{1}{2} \frac{\Gamma(k+\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(k+\frac{n}{2})} =$$

$$= M^{2k} \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}\ \Gamma(k+\frac{1}{2})}{\Gamma(1+k+\ \frac{n-2}{2})} . \qquad \text{(II,1;14)}$$

Es decir,

$$\int_{\Omega} (m_1\xi_1+\ldots+m_n\xi_n)^{2k} d\Omega = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}\ \Gamma(k+\frac{1}{2})}{\Gamma(1+k+\ \frac{n-1}{2})} \cdot (m_1^2+\ldots+m_n^2)^k ;$$

$$\text{(II,1;15)}$$

o sea, teniendo en cuenta que

$$(m_1^2+\ldots+m_n^2)^k = \sum_{\mu_1+\ldots+\mu_n=k} \frac{k!}{\mu_1!\ldots\mu_n!} (m_1^2)^{\mu_1} \ldots (m_n^2)^{\mu_2} ,$$

$$\text{(II,1;16)}$$

resulta

$$\int_{\Omega} (m_1\xi_1+\ldots+m_n\xi_n)^{2k} d\Omega = \sum_{\mu_1+\ldots+\mu_n=k} \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}\ \Gamma(k+\frac{1}{2})}{\Gamma(1+k+\ \frac{n-2}{2})} \cdot$$

$$\cdot \frac{k!}{\mu_1!\ldots\mu_n!} (m_1^2)^{\mu_1} \ldots (m_n^2)^{\mu_n} =$$

$$= \frac{2\,\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(1+k+\frac{n-2}{2})}\;\Gamma(k+\tfrac{1}{2})\,(m_1^2+\ldots+m_n^2)^k. \qquad \text{(II,1;17)}$$

15

De (II,1;7) y (II,1;17) obtenemos, por igualación de coeficientes

$$\frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma(k+\frac{1}{2})}{\Gamma(1+k+\frac{n-2}{2})}\;\frac{k!}{\mu_1!\ldots\mu_n!} = \frac{(2k)!}{(2\mu_1)!\ldots(2\mu_n)!}\;.$$

$$\cdot \int_\Omega (\xi_1^2)^{\mu_1}\ldots(\xi_n^2)^{\mu_n}\,d\Omega\,,$$

o sea, en definitiva,

$$\int_\Omega (\xi_1^2)^{\mu_1}\ldots(\xi_2^2)^{\mu_2}\ldots(\xi_n^2)^{\mu_n}\,d\Omega = M(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n) =$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma(k+\frac{1}{2})\,k!\;(2\mu_1)!\ldots(2\mu_n)!}{\Gamma(1+k+\frac{n-2}{2})\;\mu_1!\ldots\mu_n!\,(2k)!}\;. \qquad \text{(II,1;18)}$$

con

$$\mu_1 + \ldots + \mu_n = k. \qquad \text{(II,1;19)}$$

Hemos pues calculado explícitamente la integral (II,1;1), según nos proponíamos. También se puede calcular la integral (II,1;1) usando la fórmula (4), p. 76, de [8].

Calcularemos ahora la integral siguiente

$$I_\nu(z) = \int_\Omega [< z,\xi >]^\nu \, d\Omega . \qquad \text{(II,1;20)}$$

En esta fórmula $z \in \mathbb{C}^n = \mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\ldots\times\mathbb{C}$, o sea, $z = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ con $z_j = \sigma_j + i\tau_j$, $j = 1,2,\ldots,n$; con σ_j, τ_j reales.

La novedad consiste en que ahora intervienen en (II,1;20) parámetros *complejos*; y nos proponemos calcular la integral (II,1;20) directamente, es decir, sin apelar a consideraciones de prolongación analítica.

Por iguales razones de simetría que en (II,1;3), se comprueba que la integral (II,1;20) es nula si ν es impar

$$I_{2k+1}(z) = 0, \qquad k = 0,1,\ldots; \qquad \text{(II,1;21)}$$

y por las razones mismas que las allí mencionadas, se llega inmediatamente a la fórmula

$$I_{2k}(z) = \sum_{\mu_1+\ldots+\mu_n=k} \frac{(2k)!\,(z_1^2)^{\mu_1}\ldots(z_n^2)^{\mu_n}}{(2\mu_1)!\ldots(2\mu_n)!} \cdot$$

$$\cdot \int_\Omega (\xi_1^2)^{\mu_1}\ldots(\xi_n^2)^{\mu_n}\, d\Omega . \qquad \text{(II,1;22)}$$

Pero a la integral anterior acabamos de calcularla (fórmula (II,1;18)).

Obtenemos pues, sustituyendo (II,1;18) en (II,1;22)

$$I_{2k}(z_1,z_2,\dots,z_n) = \sum_{\mu_1+\dots+\mu_n=k} \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma(k+\frac{1}{2})\;k!}{\Gamma(1+k+\frac{n-2}{2})\,\mu_1!\dots\mu_n!}$$

$$\cdot\ (z_1^2)^{\mu_1}\cdots(z_n^2)^{\mu_n} =$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma(k+\frac{1}{2})}{\Gamma(1+k+\frac{n-2}{2})} \sum_{\mu_1+\dots+\mu_n=k} \frac{k!}{\mu_1!\dots\mu_n!}$$

$$= (z_1^2)^{\mu_1}\cdots(z_n^2)^{\mu_n} =$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma(k+\frac{1}{2})}{\Gamma(1+k+\frac{n-2}{2})}\,(z_1^2+\dots+z_n^2)^k. \tag{II,1;23}$$

En definitiva obtenemos, de (II,1;21) y (II,1;23),

$$
I_\nu(z) = \begin{cases} \dfrac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}\,\Gamma(k+\frac{1}{2})}{\Gamma(1+k+\frac{n-2}{2})}\,(z_1^2+\ldots+z_n^2)^k & \text{si } \nu = 2k, \\ 0 & \text{si } \nu = 2k+1,\ k = 0,1,\ldots \end{cases} \tag{II,1;24}
$$

Observemos que la fórmula (II,1;16) sigue valiendo si los parámetros reales m_j que en ella figuran se sustituyen por parámetros *complejos* z_j. Esto podía haberse inferido directamente, observando que el segundo miembro de (II,1;16) es función *analítica* de las variables m_j. Como ejercicio hemos consignado una demostración directa, más larga pero a la vez más elemental.

II.2. Extensión compleja del Teorema de Bochner.

Ahora estamos en condiciones para demostrar la versión compleja de la fórmula de Bochner. Se trata de expresar por una integral simple la siguiente *integral de Laplace n-dimensional*

$$
L(F) = f(z) = f(z_1,z_2,\ldots,z_n) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,z\rangle} F(r^2)\,dx, \tag{II,2;1}
$$

donde hemos puesto

$$\langle x,z\rangle = z_1 z_1 + \dots + x_n z_n \qquad \text{(II,1;2)}$$

y admitimos que $F(r^2)$ sea una función perteneciente a $D_{\mathbb{R}^n}$ (espacio de las funciones complejas sobre $\mathbb{R}^n$, indefinidamente derivables y con soporte acotado). El principal resultado de este capítulo es el siguiente

<u>Teorema 3</u> (A. González Domínguez)

<u>Hipótesis</u>. Sea $F(r^2) \in D_{\mathbb{R}^n}$. Consideremos la integral de Laplace n-dimensional de F:

$$L(F) = f(z) = f(z_1, z_2, \dots, z_n) = \int_0^{\infty} e^{-i\langle x,z\rangle} F(r^2)\,dx.$$

(II,2;3)

<u>Tesis</u>. Se verifica entonces

$$\boxed{\begin{aligned} L(F) &= \varphi\,(z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_n^2) = \\ &= \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\left(\sqrt{z_1^2+z_2^2+\dots+z_n^2}\right)^{\frac{n-2}{2}}} \int_0^{\infty} F(t^2)\, t^{\frac{n}{2}}\, J_{\frac{n-2}{2}}\left(t\sqrt{z_1^2+z_2^2+\dots+z_n^2}\right) dt \end{aligned}}$$

(II,2;4)

Observemos que cuando z es real, es decir $\tau_j = 0$,

$j = 1,2,\ldots,n$; la fórmula (II,2;4) se convierte en el clásico teorema de Bochner (fórmula (I,3;26)).

Demostración del Teorema 3.

Al elemento de volumen $dx = dx_1 dx_2 \ldots dx_n$ lo expresamos explícitamente

$$dx = dr\, dS_n(r) = r^{n-1} dr\, d\Omega, \tag{II,2;5}$$

donde Ω es el área de la esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$,

$$\Omega = S_n(1) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} .$$

Introduciendo coordenadas polares:

$$x_\nu = |x|\, \xi_\nu , \tag{II,2;6}$$

$$\nu = 1,2,\ldots,n, \tag{II,2;7}$$

con

$$\sum_{\nu=1}^{n} \xi_\nu^2 = 1 . \tag{II,2;8}$$

Con las coordenadas nuevas, la integral (II,2;3) se escribe

$$L(F) = \int_0^{\infty} F(r^2)\, r^{n-1} dr \int_{\Omega} e^{-ir\langle \xi , z\rangle} d\Omega . \qquad (II,2;9)$$

Vamos ahora a calcular la integral

$$J(r,z) = \int_{\Omega} e^{-ir\langle \xi , z\rangle} d\Omega . \qquad (II,2;10)$$

Tenemos

$$e^{-ir\langle \xi , z \rangle} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-i)^{\nu} r^{\nu}}{\nu !} [\langle \xi , z\rangle]^{\nu} .$$

Por lo tanto obtenemos, ya que la integración término a término es obviamente lícita,

$$J(r,z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-i)^{\nu} r^{\nu} \frac{1}{\nu !} \int_{\Omega} [\langle \xi , z\rangle]^{\nu} d\Omega . \qquad (II,2;11)$$

Sustituyendo la (II,1;24) en esta fórmula obtenemos

$$J(r,z) = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}\ \Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n-2}{2}+\nu+1)} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} r^{2\nu} \frac{1}{(2\nu)!} \left\{ \sqrt{z_1^2+z_2^2+\ldots+z_n^2} \right\}^{2\nu} ,$$

(II,2;12)

y sustituyendo (II,2;12) en (II,2;9) llegamos finalmente a la fórmula

$$L(F) = f(z) = \varphi(z_1^2+z_2^2+\ldots+z_n^2) =$$

$$= 2\pi^{\frac{n-1}{2}} \int_0^\infty F(r^2)\, r^{n-1} \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu r^{2\nu} \frac{1}{(2\nu)!} \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{n-2}{2}+\nu+1)} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left\{ \sqrt{z_1^2+z_2^2+\ldots+z_n^2} \right\}^{2\nu} \right\} dr. \qquad \text{(II,2;13)}$$

Hemos pues logrado nuestro propósito de expresar la integral de Laplace n-dimensional (II,2;1) por una integral simple. Además, la (II,2;13) muestra el hecho importante de que la integral de Laplace n-dimensional de una función radial, es función de la suma de cuadrados de las variables, o sea, función de $\left\{ z_1^2+z_2^2+\ldots+z_n^2 \right\}$.

Vamos a transformar la fórmula (II,2;13) a fin de obtener la tesis de nuestro teorema.

Se comprueba sin dificultad, si se multiplica y divide por el factor

$$\frac{(r\sqrt{z_1^2+\ldots+z_n^2})^{\frac{n-2}{2}}}{2^{\frac{n-2}{2}+2\nu}}$$

el término general de la serie que figura en el segundo miembro de (II,2;13), que esta fórmula puede escribirse en la forma equivalente:

$$L(F) = f(z) = \varphi(z_1^2 + \ldots + z_n^2) =$$

$$= \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\pi}\,(\sqrt{z_1^2+\dots+z_n^2})^{\frac{n-2}{2}}} \int_0^\infty F(r^2)\, r^{\frac{n}{2}} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{2^{2\nu}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{(2\nu)!\,\Gamma(\frac{n-2}{2}+\nu+1)} \left(\frac{r\sqrt{z_1^2+\dots+z_n^2}}{2} \right)^{\frac{n-2}{2}+2\nu} \right\} dr. \qquad \text{(II,2;14)}$$

Por otra parte es inmediato comprobar que vale la fórmula

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \, \frac{2^{2\nu}}{(2\nu)!} \, \Gamma(\nu+\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{\nu!} \,. \qquad \text{(II,2;15)}$$

Si sustituimos (II,2;15) en (II,2;14) obtenemos en definitiva la fórmula equivalente a la (II,3;13),

$$L(F) = f(z) = \varphi(z_1^2+\dots+z_n^2) =$$

$$= \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{(\sqrt{z_1^2+\dots+z_n^2})^{\frac{n-2}{2}}} \int_0^\infty F(r^2)\, r^{\frac{n}{2}}\, J_{\frac{n-2}{2}}(r\sqrt{z_1^2+\dots+z_n^2})\, dr, \qquad \text{(II,2;16)}$$

que es la *versión compleja de la fórmula de Bochner* que deseábamos probar.

CAPITULO III

Transformadas de Laplace de funciones retardadas

En este capítulo probamos (Teorema 4) una fórmula (análoga a la fórmula de Bochner) para transformadas de Laplace (cf. (III,1;1)) de funciones de la distancia lorentziana, cuyo soporte está contenido en la clausura del dominio $t_0 > 0,\ t_0^2 - t_1^2 - \dots - t_{n-1}^2 > 0$. Este es nuestro principal resultado (fórmula (III,2;1)) del cual deduciremos importantes y conocidos resultados (con fórmulas simples) y también otros nuevos.

Esta sección aparece publicada en [9].

Comenzaremos con algunas definiciones.

III.1. Definiciones

Sea $t = (t_0, t_1, \dots, t_{n-1})$ un punto de $\mathbb{R}^n$. Escribiremos $t_0^2 - t_1^2 - \dots - t_{n-1}^2 = u$. Con Γ_+ designamos el interior del cono del futuro: $\Gamma_+ = \left\{ t \in \mathbb{R}^n \ / \ t_0 > 0,\ \ u > 0 \right\}$; y con $\bar{\Gamma}_+$ designamos su clausura. Similarmente, Γ_- designa el dominio $\Gamma_- = \left\{ t \in \mathbb{R}^n \ / \ t_0 < 0,\ \ u > 0 \right\}$, y $\bar{\Gamma}_-$ designa su clausura. Ponemos $z = (z_0, z_1, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, donde $z_\nu = x_\nu + iy_\nu$, $\nu = 0, 1, \dots, n-1$; $\langle t, z \rangle = t_0 z_0 + t_1 z_1 + \dots + t_{n-1} z_{n-1}$; y $dt = dt_0 dt_1 \dots dt_{n-1}$.

El tubo T_- está definido por $T_- = \left\{ z \in \mathbb{C}^n / y \in V_- \right\}$, donde $V_- = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \ / \ y_0 < 0,\ y_0^2 - y_1^2 - \dots - y_{n-1}^2 > 0 \right\}$. Similarmente ponemos $T_+ = \left\{ z \in \mathbb{C}^n / \ y \in V_+ \right\}$, donde

$$V_+ = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \ / \ y_0 > 0, \quad y_0^2 - y_1^2 - \dots - y_{n-1}^2 > 0 \right\}.$$

La transformada de Laplace de $\Phi(t)$ es, por definición,

$$f(z) = L(\Phi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<t,z>} \Phi(t)\,dt. \qquad \text{(III;1;1)}$$

Sea $F(\lambda)$ una función de la variable escalar λ, y sea $\phi(t)$ una función que verifica a las siguientes condiciones:

a) $\phi(t) = F(u)$;

b) $\text{sop}\ \phi(t) \subset \bar{\Gamma}_+$;

c) $e^{<t,y>}\phi(t) \in L(\mathbb{R}^n)$ si $y \in V_-$.

funciones retardadas

Llamaremos R a la familia de funciones $\phi(t)$ que satisface a las condiciones a), b) y c). Similarmente llamaremos A a la familia de funciones que satisface a las condiciones

a') $\phi(t) = F(u)$;

b') $\text{sop}\ \phi(t) \subset \bar{\Gamma}_-$;

c') $e^{<t,y>}\phi(t) \in L(\mathbb{R}^n)$ si $y \in V_+$.

funciones avanzadas

III.2. Transformada de Laplace de funciones pertenecientes a R.

Estableceremos ahora un teorema (análogo al teorema de Bochner) para transformadas de Laplace de funciones que satisfacen a las condiciones a), b) y c). Dice así

Teorema 4

Hipótesis i) $\phi(t) \in \mathcal{R}$,

ii) $z \in T_-$.

Tesis

$$f(z) = L(\phi) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-2}{2}}}{(z_1^2+\dots+z_{n-1}^2-z_0^2)^{\frac{n-2}{4}}} .$$

$$\cdot \int_0^\infty F(\lambda)\lambda^{\frac{n-2}{4}} K_{\frac{n-2}{2}} \left\{ [\lambda(z_1^2+\dots+z_{n-1}^2-z_0^2)]^{1/2} \right\} d\lambda \, , \tag{III,2;1}$$

donde $K_\nu(z)$ designa la función modificada de Bessel de tercera especie dada por la fórmula (cf. [5], vol. II, p. 5, fórmula 13 y p. 9, fórmula 37)

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2}\pi(\operatorname{sen}\nu\pi)^{-1}[I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)] \, , \tag{III,2;2}$$

$\nu \neq$ entero,

$$I_{\nu}(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(\frac{z}{2})^{\nu+2p}}{p!\,\Gamma(p+\nu+1)}, \qquad \text{(III,2;3)}$$

y por pasaje al límite si $\nu \to n$, n entero positivo.

<u>Demostración del Teorema 4</u>

Introducimos en cambio de variables

$$\begin{aligned} u_0 &= t_0^2 - t_1^2 - t_2^2 - \cdots - t_{n-1}^2, \\ u_1 &= t_1, \\ &\vdots \\ u_{n-1} &= t_{n-1}. \end{aligned} \qquad \text{(III,2;4)}$$

Calculemos el correspondiente jacobiano.

Tenemos

$$\frac{\partial(u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})}{\partial(t_0, t_1, \ldots, t_{n-1})} = \begin{vmatrix} 2t_0 & -2t_1 & \ldots & -2t_{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 \ldots & 0 \;\; 1 \end{vmatrix} = 2t_0. \qquad \text{(III,2;5)}$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial(t_0,t_1,\ldots,t_{n-1})}{\partial(u_0,u_1,\ldots,u_{n-1})} = \frac{1}{2t_0}. \qquad (III,2;6)$$

Además (notemos que $t_0 > 0$ por hipótesis):

$$t_0 = (u_0 + u_1^2 + \ldots + u_{n-1}^2)^{1/2}. \qquad (III,2;7)$$

Con este cambio de variable $f(z)$ se convierte en

$$f(z) = \int_0^\infty \varphi(u_0)\,du_0 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i(u_1z_1+\ldots+u_{n-1}z_{n-1})}. \qquad (III,2;8)$$

$$\cdot\frac{e^{-i[z_0(u_0+u_1^2+\ldots+u_{n-1}^2)^{1/2}]}}{2(u_0+u_1^2+\ldots+u_{n-1}^2)^{1/2}}\,du_1du_2\ldots du_{n-1}. \qquad (III,2;8)$$

Pongamos

$$\frac{e^{-iz_0(u_0+u_1^2+\ldots+u_{n-1}^2)^{1/2}}}{2(u_0+u_1^2+\ldots+u_{n-1})^{1/2}} = g_{u_0,z_0}(u_1,u_2,\ldots,u_{n-1}). \qquad (III,2;9)$$

Con esta notación la integral anterior del lado derecho de

(III,2;8) se escribe

$$I_{z_0,u_0}(z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i(u_1 z_1+\ldots+u_{n-1}z_{n-1})} g_{u_0,z_0}(u_1,\ldots,u_{n-1}) \cdot$$

$$\cdot\, du_1 du_2 \ldots du_{n-1}. \qquad \text{(III,2;10)}$$

fourier?

El segundo miembro de (III,2;10) es la integral de Laplace de una función radial, y puede por lo tanto expresarse por la fórmula compleja de Bochner (cf. (II,2;16)), obtenemos así:

$$I_{z_0,u_0}(z_1,z_2,\ldots,z_{n-1}) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{(z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2)^{\frac{n-3}{4}}} \cdot$$

$$\cdot \int_0^{\infty} \frac{e^{-iz_0(u_0+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}}}{2(u_0+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \lambda^{\frac{n-1}{2}} J_{\frac{n-3}{2}}[\lambda\,(z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2)^{1/2}]\, d\lambda. \qquad \text{(III,2;11)}$$

Consideremos la integral que aparece en el segundo miembro de (III,2;11):

$$A_{u_0,z_0}\left(\sqrt{z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2}\right) =$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-iz_0(u_0+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}}}{2(u_0+\lambda^2)^{1/2}} \lambda^{\frac{n-1}{2}} J_{\frac{n-3}{2}}[\lambda(z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2)^{1/2}]\, d\lambda . \qquad \text{(III,2;12)}$$

Para calcularla consideremos la siguiente integral auxiliar:

$$A_{u_0,z_0}(y) = \int_0^\infty \frac{e^{-iz_0(u_0+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}}}{2(u_0+\lambda^2)^{1/2}} \lambda^{\frac{n-1}{2}} J_{\frac{n-3}{2}}(\lambda y)\, d\lambda. \quad \text{(III,2;13)}$$

Esta integral puede escribirse equivalentemente

$$A_{u_0,z_0}(y) = \frac{1}{y^{1/2}} \int_0^\infty \frac{e^{-iz_0(u_0+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}}}{2(u_0+\lambda^2)^{1/2}} \lambda^{\frac{n-2}{2}} (\lambda y)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{n-3}{2}}(\lambda y)\, d\lambda.$$

(III,2;14)

Escribamos la integral del segundo miembro de (III,2;14):

$$B_{u_0,z_0}(y) = \int_0^\infty \frac{e^{-iz_0(u_0+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}}}{2(u_0+\lambda^2)^{1/2}} \lambda^{\frac{n-2}{2}} (\lambda y)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{n-3}{2}}(\lambda y)\, d\lambda.$$

(III,2;15)

Vamos a evaluar la integral (III,2;15). Teniendo en cuenta la fórmula (22), pág. 31 de [3] que dice,

$$\int_0^\infty x^{\nu+\frac{1}{2}} (\beta^2+x^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-a(\beta^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\right\} (xy)^{\frac{1}{2}} J_\nu(xy)\,dx =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \beta^{\nu+\frac{1}{2}} y^{\nu+\frac{1}{2}} (a^2+y^2)^{-\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}} K_{\nu+\frac{1}{2}} [\beta(a^2+y^2)^{\frac{1}{2}}] ,$$

(III,2;16)

válida para $\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re} \beta > 0$, $\operatorname{Re} \nu > -1$. (III,2;17).

Pongamos en esta fórmula

$$x = \lambda , \quad a = iz_0, \quad \beta^2 = u_0, \quad \text{o sea} \quad \beta = u_0^{\frac{1}{2}} ;$$

$$\nu = \frac{n-3}{2}, \quad \text{o sea,} \quad \nu+\frac{1}{2} = \frac{n-2}{2} , \quad -\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4} = -\frac{n}{4}+\frac{1}{2} ,$$

obtenemos así

$$\int_0^\infty \lambda^{\frac{n-2}{2}} (u_0+\lambda^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-iz_0(u_0+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}\right\} (\lambda y)^{\frac{1}{2}} J_{\frac{n-3}{2}}(\lambda y)\,d\lambda =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} u_0^{\frac{1}{2}\left(\frac{n-2}{2}\right)} y^{\frac{n-2}{2}} (y^2-z_0^2)^{-\frac{n}{4}+\frac{1}{2}} K_{\frac{n-2}{2}} \left\{u_0^{\frac{1}{2}}(y^2-z_0^2)^{\frac{1}{2}}\right\} ,$$

(III,2;18)

válida para

$$\mathrm{Re}(iz_0) = \mathrm{Re}\left\{i(x_0+iy_0)\right\} = -y_0 > 0, \text{ o sea,}$$

$$y_0 < 0, \tag{III,2;19}$$

$$u_0 > 0, \tag{III,2;20}$$

y $\frac{n-3}{2} > -1$, o sea,

$$n > 1. \tag{III,2;21}$$

De (III,2;15) y (III,2;18), resulta

$$B_{u_0,z_0}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} u_0^{\frac{n-2}{4}} y^{\frac{n-2}{2}} (y^2-z_0^2)^{-\frac{n}{4}+\frac{1}{2}} K_{\frac{n-2}{2}}\left\{u_0^{\frac{1}{2}}(y^2-z_0^2)^{\frac{1}{2}}\right\}. \tag{III,2;22}$$

y por lo tanto

$$A_{u_0,z_0}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} u_0^{\frac{n-2}{4}} y^{\frac{n-3}{2}} (y^2-z_0^2)^{-\frac{n}{4}+\frac{1}{2}} K_{\frac{n-2}{2}}\left\{u_0^{\frac{1}{2}}(y^2-z_0^2)^{\frac{1}{2}}\right\}. \tag{III,2;23}$$

Por lo tanto, de (III,2;10) y (III,2;23), poniendo $y = (z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2)^{1/2}$, obtenemos

$$I_{z_0,u_0}(z_1,\ldots,z_n) = (2\pi)^{\frac{n-2}{2}} u_0^{\frac{n-2}{4}} \cdot \frac{1}{(z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2-z_0^2)^{\frac{n-2}{4}}} \cdot$$

$$\cdot\, K_{\frac{n-2}{2}}\left\{ u_0^{\frac{1}{2}}(z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2-z_0^2)^{\frac{1}{2}} \right\} . \qquad \text{(III,2;24)}$$

En definitiva, de (III,2;8) y (III,2;24), resulta

$$f(z) = (2\pi)^{\frac{n-2}{2}} \int_0^\infty \varphi(u_0)\, u_0^{\frac{n-2}{4}} \frac{K_{\frac{n-2}{2}}\left\{ u_0^{\frac{1}{2}}(z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2-z_0^2)^{\frac{1}{2}} \right\} du_0}{(z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2-z_0^2)^{\frac{n-2}{4}}},$$

válida si se verifican las condiciones (III,2;19), (III,2; 20) y (III,2;21) que son, justamente, las hipótesis del teorema.

La fórmula (III,2;25) es la tesis del Teorema 4 que queríamos demostrar.

Una forma equivalente de (III,2;25) se obtiene multiplicando y dividiendo el integrando por $u_0^{\frac{n-2}{4}}$, con lo que obtenemos

$$f(z)=(2\pi)^{\frac{n-2}{2}} \int_0^\infty \varphi(u_0)\, u_0^{\frac{n-2}{2}} \frac{K_{\frac{n-2}{2}}\left\{ u_0^{\frac{1}{2}}(z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2-z_0^2)^{\frac{1}{2}} \right\}}{\left\{ u_0^{\frac{1}{2}}(z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2-z_0^2)^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{n-2}{2}}}\, du_0 .$$

(III,2;26)

III.3. Transformadas de Laplace de funciones pertenecientes a $\mathcal{A}$.

Observemos que las fórmulas (III,2;25) y (III,2;26) que hemos obtenido para las transformadas de Laplace de funciones de la familia $\mathcal{R}$ son también válidas para funciones de la clase $\mathcal{A}$. En efecto, vale el siguiente

Teorema 5

Hipótesis i') $\varphi(t) \in \mathcal{R}$,

ii') $z \in T_+$.

Tesis

$$\boxed{f(z) = L(\phi) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-2}{2}}}{(z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2-z_0^2)^{\frac{n-2}{4}}} \cdot \int_0^\infty F(\lambda)\,\lambda^{\frac{n-2}{2}}\, K_{\frac{n-2}{2}}\left\{[\lambda(z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2-z_0^2)]^{\frac{1}{2}}\right\} d\lambda .} \qquad \text{(III,3;1)}$$

Demostración del Teorema 5

Procediendo exactamente de la misma manera que en el

Teorema 4, comprobamos que

$$\frac{\partial(t_0,t_1,\ldots,t_{n-1})}{\partial(u_0,u_1,\ldots,u_{n-1})} = \frac{1}{2t_0} < 0 \ , \qquad \text{(III,3;2)}$$

por hipótesis.

Además

$$t_0 = -(u_0+u_1^2+\ldots+u_{n-1}^2)^{1/2} \ . \qquad \text{(III,3;3)}$$

La fórmula análoga a la (III,2;8) será en el presente caso (el jacobiano es $\left|\frac{1}{2t_0}\right|$):

$$f(z) = \int_0^\infty \varphi(u_0)\,du_0 \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i(u_1z_1+\ldots+u_{n-1}z_{n-1})} \ .$$

$$\cdot \frac{e^{iz_0(u_0+u_1^2+\ldots+u_{n-1}^2)}}{2(u_0+u_1^2+\ldots+u_{n-1}^2)^{1/2}} \cdot du_1du_2\ldots du_{n-1} \cdot \qquad \text{(III,3;4)}$$

El único cambio con respecto a la fórmula (III,2;8) es el signo positivo del exponente de la exponencial. Las fórmulas correspondientes al cálculo de nuestra integral, correlativas de las fórmulas anteriores, a partir de la

(III,2;8) inclusive, se obtendrán cambiadas de signo en (III,3;4). Esto vale en particular para la correlativa de la fórmula (III,2;18), que valdrá ahora para $y_0 > 0$. Nuestra fórmula definitiva, correlativa de la (III,2;25), será idéntica a la (III,2;25) con la diferencia que deberá ser, en el presente caso $y_0 > 0$.

CAPITULO IV

Aplicaciones de la fórmula de la transformada de Laplace de funciones retardadas.

Aplicaremos la fórmula (III,2;25) para evaluar algunas importantes transformadas de Laplace. Observemos además que dicha fórmula es un complemento eficacísimo para la evaluación de transformadas de Fourier vía el método de Schwartz (cf. [10], p. 264 y [11]).

IV.1. El núcleo $R_a(u)$ de Marcel Riesz

Consideremos la siguiente familia de funciones pertenecientes a $\mathcal{R}$ introducidas por Marcel Riesz (cf. [12], p. 31):

$$R_a(u) = \begin{cases} \dfrac{u^{\frac{a-n}{2}}}{H_n(a)} & \text{si} \quad t \in \Gamma_+ , \\ \\ 0 & \text{si} \quad t \notin \Gamma_+ . \end{cases} \qquad \text{(IV,1;1)}$$

Acá hemos puesto

$$H_n(a) = \pi^{\frac{n-2}{2}} \, 2^{a-1} \, \Gamma(\tfrac{a}{2}) \Gamma(\tfrac{a-n+2}{2}), \qquad \text{(IV,1;2)}$$

n es la dimensión del espacio y a un parámetro complejo.

Queremos calcular la transformada de Laplace de $R_a(u)$.

Sustituyendo (IV,1;1) en (III,2;25) obtenemos

$$L[R_a(u)] = (2\pi)^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{H_n(a)} \cdot \frac{1}{(z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2-z_0^2)^{\frac{n-2}{2}}} \cdot$$

$$\cdot \int_0^\infty t^{\frac{a-n}{2}+\frac{n-2}{4}} K_{\frac{n-2}{2}} \left\{ t^{\frac{1}{2}} (z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2-z_0^2)^{\frac{1}{2}} \right\} dt;$$

(IV,1;3)

o sea poniendo, por definición,

$$\rho = (z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2-z_0^2)^{1/2} , \qquad \text{(IV,1;4)}$$

$$L[R_a(u)] = (2\pi)^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{H_n(a)} \frac{1}{\rho^{\frac{n-2}{2}}} \int_0^\infty t^{\frac{2a-n-2}{4}} K_{\frac{n-2}{2}}(\rho t^{\frac{1}{2}})\, dt,$$

(IV,1;5)

en la cual es

$$\operatorname{Im} z_0 = y_0 < 0. \qquad \text{(IV,1;6)}$$

Hagamos en la integral (IV,1;5) el cambio de variable

$$t^{\frac{1}{2}} = s, \quad t = s^2, \quad dt = 2sds ,$$

obtenemos así, llamando I a la integral que figura en el segundo miembro de (IV,1;5):

$$I = 2\int_0^\infty s^{\frac{2a-n-2}{2}+1} K_{\frac{n-2}{2}}(\rho s)\,ds = 2\int_0^\infty s^{\frac{2a-n}{2}} K_{\frac{n-2}{2}}(\rho s)\,ds, \tag{IV,1;7}$$

o sea, multiplicando y dividiendo por $(\rho s)^{\frac{1}{2}}$ (para expresar la integral en la notación de Erdelyi).

$$I = \frac{2}{\rho^{1/2}}\int_0^\infty s^{\frac{2a-n-1}{2}} (\rho s)^{\frac{1}{2}} K_{\frac{n-2}{2}}(\rho s)\,ds. \tag{IV,1;8}$$

Esta integral está tabulada en [3] , p. 127, fórmula 1. De acuerdo con esta fórmula la integral (IV,1;8) vale:

$$I = \rho^{\frac{n-2}{2}-a}\, 2^{a-\frac{n}{2}}\, \Gamma(\tfrac{a}{2})\Gamma(\tfrac{a-n+2}{2}); \tag{IV,1;9}$$

válida para

$$\operatorname{Re} a > n-2 . \tag{IV,1;10}$$

Sustituyendo (IV,1;9) en (IV,1;5) obtenemos:

$$L[R_a(u)] = \frac{(2\pi)^{\frac{n-2}{2}}}{H_n(a)\rho^{\frac{n-2}{2}}}\, \rho^{\frac{n-2}{2}-a}\, 2^{a-\frac{n}{2}}\Gamma(\tfrac{a}{2})\Gamma(\tfrac{a-n+2}{2}),$$

o sea, en definitiva,

$$L[R_\alpha(u)] = \rho^{-\alpha} = (z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2-z_0^2)^{-\frac{\alpha}{2}}, \qquad \text{(IV,1;11)}$$

válida si

$$\operatorname{Re} \alpha > n-2, \qquad \text{(IV,1;12)}$$

$$\operatorname{Im} z_0 = y_0 < 0. \qquad \text{(IV,1;13)}$$

Consecuencia importante de esta fórmula es que, en virtud de la condición (IV,1;13), ρ no se anula y por lo tanto el segundo miembro y consiguientemente el primero, son, *funciones enteras de* α, por lo tanto, también es R_α *función entera de* α.

Este resultado es importante, pues nos permite concluir, en virtud del principio de la prolongación analítica, que la *fórmula (IV,1;11) vale para todo* α.

Una fórmula equivalente a (IV,1;11) aparece en [10], p. 264, fórmula (VII,3;37).

IV.2. El núcleo $W_\alpha(u,m)$ de Marcel Riesz.

Sea ahora la siguiente familia de funciones pertenecientes a $\mathcal{R}$ entroducidas por Marcel Riesz en [12], p. 89:

$$W_\alpha(u,m) = \begin{cases} \dfrac{(m^{-2}u)^{\frac{\alpha-n}{4}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{\frac{\alpha+n-2}{2}}\, \Gamma(\frac{\alpha}{2})} J_{\frac{\alpha-n}{2}}(m^2 u)^{\frac{1}{2}} & \text{si} \quad t \in \Gamma_+, \\ 0 & \text{si} \quad t \notin \Gamma_+ . \end{cases}$$

(IV,2;1)

Acá α es un parámetro complejo, m un número real no negativo y n la dimensión del espacio. $W_\alpha(u,m)$ que es una función ordinaria si $\operatorname{Re}\alpha$ es $\geqslant n$, es una función distribucional entera de α.

De la fórmula (III,2;25) obtenemos inmediatamente, para $\operatorname{Re}\alpha \geqslant n$

$$L[W_\alpha(u,m)] = \frac{(2\pi)^{\frac{n-2}{2}}\, m^{\frac{n-\alpha}{2}}}{(z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2-z_0^2)^{\frac{n-2}{4}}\, \pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{\frac{\alpha+n-2}{2}}\, \Gamma(\frac{\alpha}{2})} \cdot$$

$$\cdot \int_0^\infty t^{\frac{\alpha-n}{4}+\frac{n-2}{4}} J_{\frac{\alpha-n}{2}}[(m^2 t)^{\frac{1}{2}}]\, K_{\frac{n-2}{2}}\left\{t^{\frac{1}{2}}(z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2-z_0^2)^{\frac{1}{2}}\right\} dt.$$

(IV,2;2)

Consideremos la integral que figura en el segundo miembro de (IV,2;2), que llamaremos $I(z)$:

$$I(z) = \int_0^{\infty} t^{\frac{a-n}{4}+\frac{n-2}{4}} J_{\frac{a-n}{4}}[(m^2t)^{\frac{1}{2}}] K_{\frac{n-2}{2}}[(\rho^2 t)^{1/2}]\,dt, \qquad (IV,2;3)$$

donde hemos puesto, como antes,

$$\rho^2 = z_1^2+z_2^2+\ldots+z_{n-1}^2-z_0^2 \,. \qquad (IV,2;4)$$

Vamos a calcular esta integral, utilizaremos para ello la fórmula (16), p. 137 de [3], a saber,

$$\int_0^{\infty} x^{\mu+a+\frac{1}{2}} J_{\mu}(ax) K_{\nu}(xy)(xy)^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$= 2^{\mu+\nu}\, a^{\mu}\, y^{\nu+\frac{1}{2}}\, \Gamma(\mu+\nu+1)(y^2+a^2)^{-\mu-\nu-1} \;; \qquad (IV,2;5)$$

esta fórmula es válida para

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}\,\mu > |\mathrm{Re}\,\nu| -1 \,, \\ &\mathrm{Re}\, y > |I_m a| . \end{aligned} \qquad (IV,2;6)$$

Hagamos en la integral (IV,2;3) el cambio de variable $t = x^2$, obtenemos

$$I(z) = 2\int_0^{\infty} x^{\frac{a-n}{2}+\frac{n-2}{2}+1} J_{\frac{a-n}{2}}(mx)\, K_{\frac{n-2}{2}}(\rho x)\, dx. \qquad (IV,2;7)$$

Si multiplicamos y dividimos el integrando de (IV,2;7) por $(x\rho)^{\frac{1}{2}}$, obtenemos la expresión equivalente:

$$I(z) = \frac{2}{\rho^{1/2}} \int_0^{\infty} x^{\frac{a-n}{2}+\frac{n-2}{2}-\frac{1}{2}} J_{\frac{a-n}{2}}(mx)\,(x\rho)^{\frac{1}{2}} K_{\frac{n-2}{2}}(\rho x)\, dx. \qquad (IV,2;8)$$

La integral que figura en el segundo miembro de (IV,2;8) puede evaluarse explícitamente por medio de la fórmula (IV,2;5) poniendo en ella:

$$\frac{a-n}{2} = \mu\ , \quad \frac{n-2}{2} = \nu\ , \quad a = m, \quad y = \rho\ , \qquad (IV,2;9)$$

obtenemos así de (IV,2;8)

$$I(z) = 2^{\frac{a}{2}}\, m^{\frac{a-n}{2}}\, \rho^{\frac{n-2}{2}}\, \Gamma(\tfrac{a}{2})\,(\rho^2+m^2)^{-\frac{a}{2}}\ . \qquad (IV,2;10)$$

De acuerdo con (IV,2;6) y (IV,2;9) esta fórmula es válida para

$$\operatorname{Re}\, a > 2n-4 , \qquad (IV,2;11)$$

y

$$\operatorname{Re}(z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2-z_0^2)^{\frac{1}{2}} > 0. \qquad (IV,2;12)$$

Si sustituimos finalmente (IV,2;10) en (IV,2;2), obtenemos

$$L[W_a(u,m)] = (\rho^2+m^2)^{-\frac{a}{2}} , \qquad (IV,2;13)$$

válidas con las condiciones (IV,2;11) y (IV,2;12).

La condición $\operatorname{Re}\rho > 0$ vale efectivamente como consecuencia de la hipótesis ii) del Teorema 4. Por lo tanto, la expresión ρ^2+m^2 es *distinta de cero para* $m \geqslant 0$:

$$\rho^2+m^2 \neq 0 \quad \text{para} \quad m \geqslant 0. \qquad (IV,2;14)$$

En consecuencia, el segundo miembro de (IV,2;13) es función entera de a , por lo tanto, en virtual del principio de prolongación analítica de la fórmula (IV,2;13), que hemos deducido bajo las hipótesis (IV,2;11), resulta válida *para todo* a. Además, del hecho de que el segundo miembro de (IV,2;13) es función entera de a , se deduce que la función distribucional $W_a(u,m)$ es también una distribución *entera* de a.

CAPITULO V

Propiedades del núcleo $R_\alpha(u)$.

V.I. $R_0(u) = \delta(x)$.

El caso particular de la fórmula (IV,1;11) cuando $\alpha = 0$, es

$$L[R_0(u)] = 1 ; \qquad (V,1;1)$$

y en virtud del teorema de unicidad para transformadas de Laplace deducimos de (V,1;1)

$$R_0(u) = \delta . \qquad (V,1;2)$$

Hemos obtenido así, de modo fácil y riguroso, un resultado fundamental de Marcel Riesz.

V.2. Fórmula de composición

Probaremos que vale la siguiente fórmula de composición

$$R_\alpha(u) * R_\beta(u) = R_{\alpha+\beta}(u) . \qquad (V,2;1)$$

Esta fórmula válida para todo α y β complejos es también debida a Marcel Riesz, que la demuestra de manera directa (cf. [12], p. 33). Nosotros daremos de esta fórmula una demostración distinta, basada en la fórmula (IV,1;11).

Observemos primero que como todas las $R_a(u)$ tienen su soporte en el cono del futuro Γ_+, la convolución $R_a(u) * R_\beta(u)$ existe para todo a y β (cf. [10], p. 154 y también [2], p. 124).

El teorema del intercambio de la convolución con el producto vale para nuestras integrales de Laplace (cf.[10], p. 271). Obtenemos, por lo tanto,

$$L[R_a(u)]\,L[R_\beta(u)] = L[R_a * R_\beta(u)] \quad . \qquad (V,2;2)$$

De (IV,1;11) y (V,2;2), obtenemos

$$L[R_a(u)]\,L[R_\beta(u)] = \rho^{-\left(\frac{a+\beta}{2}\right)} = L[R_{a+\beta}(u)] \,. \qquad (V,2;3)$$

De (V,2;2) y (V,2;3) obtenemos, finalmente, en virtud del teorema de identidad para integrales de Laplace,

$$R_a(u) * R_\beta(u) = R_{a+\beta}(u), \qquad (V,2;4)$$

que es la fórmula (V,2;1) que queda así demostrada.

V.3. $\Box R_{a+2}(u) = R_a(u)$, donde $\Box$ es el operador ultrahiperbólico n-dimensional.

Pondremos, por definición,

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial t_{n-1}^2}, \qquad (V,3;1)$$

$\Box$ es el operador ultrahiperbólico n-dimensional.

Nos proponemos demostrar la siguiente propiedad inte- sante de las $R_a(u)$:

$$\Box\, R_{a+2}(u) = R_a(u). \qquad (V,3;2)$$

Esta propiedad de las $R_a(u)$ desempeña papel fundamental en la aplicación de las funciones (o distribuciones) $R_a(u)$ a la solución del problema de valores iniciales para la ecuación de las ondas según el método de Marcel Riesz.

Comenzaremos por calcular el lorentziano de $u^{\left(\frac{a+2-n}{2}\right)}$.

Para $\operatorname{Re} a$ suficientemente grande esta función pertenece a C^2. Las derivaciones que siguen son completamente elementales. Consignamos los cálculos para comodidad del lector.

Tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t_0}\left[u^{\left(\frac{a+2-n}{2}\right)}\right] = \frac{\partial}{\partial t_0}\,(t_0^2-t_2^2-\dots-t_{n-1}^2)^{\left(\frac{a+2-n}{2}\right)} =$$

$$= \left(\frac{a+2-n}{2}\right)(t_0^2-t_1^2-\ldots-t_{n-1}^2)^{\left(\frac{a+2-n}{2}\right)-1} 2t_0 =$$

$$= (a+2-n)\ u^{\left(\frac{a+2-n}{2}\right)-1} t_0 =$$

$$= (a+2-n)\ u^{\left(\frac{a+2-n-2}{2}\right)} t_0 \ ,$$

o sea, en definitiva,

$$\frac{\partial}{\partial t_0}\left[u^{\left(\frac{a+2-n}{2}\right)}\right] = (a+2-n)\, u^{\frac{a-n}{2}} t_0 \ . \qquad (V,3;3)$$

De esta fórmula obtenemos, derivando otra vez ambos miembros con respecto a t_0

$$\frac{\partial^2}{\partial t_0^2}\left[u^{\left(\frac{a+2-n}{2}\right)}\right] = (a+2-n)\ \frac{\partial}{\partial t_0}\left[u^{\frac{a-n}{2}} t_0\right] =$$

$$= (a+2-n)\left[u^{\frac{a-n}{2}} + t_0\ \frac{\partial}{\partial t_0}\ u^{\frac{a-n}{2}}\right] . \qquad (V,3;4)$$

Por otra parte,

$$\frac{\partial}{\partial t_0}\left[u^{\frac{a-n}{2}}\right] = \frac{\partial}{\partial t_0}\ \left[(t_0^2-t_1^2-\ldots-t_{n-1}^2)^{\frac{a-n}{2}}\right] =$$

$$= \frac{(a-n)}{2}\,(t_0^2-t_1^2-\ldots-t_{n-1}^2)^{\frac{a-n}{2}-1}\;2t_0 =$$

$$= \frac{(a-n)}{2}\,u^{\frac{(a-n)}{2}-1}\;2t_0 = (a-n)\,u^{\frac{a-n-2}{2}}\;t_0 .$$

En definitiva,

$$\frac{\partial}{\partial t_0}\left[u^{\frac{(a-n)}{2}}\right] = (a-n)\,u^{\frac{(a-n-2)}{2}}\;t_0 \; . \qquad (V,3;5)$$

Por sustitución de (V,3;5) en (V,3;4), resulta

$$\frac{\partial^2}{\partial t_0^2}\left[u^{\frac{(a-n-2)}{2}}\right] = (a+2-n)\left[u^{\frac{(a-n)}{2}} + (a-n)\,u^{\frac{(a-n-2)}{2}}\;t_0^2\right] . \qquad (V,3;6)$$

Calculemos ahora la derivada segunda de $u^{\frac{(a+2-n)}{2}}$ con respecto a t_ν , $\nu = 1,2,\ldots,n-1$.

Tenemos, trivialmente,

$$\frac{\partial}{\partial t_\nu}\left[u^{\frac{(a-n-2)}{2}}\right] = -(a+2-n)\,u^{\frac{(a-n)}{2}}\;t_\nu \; , \qquad (V,3;7)$$

$\nu = 1,2,\ldots,n-1.$

Derivando una vez más con respecto a x_ν ($\nu = 1,2,$

$\ldots, n-1)$, obtenemos

$$\frac{\partial^2}{\partial t_\nu^2}\left[u^{\frac{(a+2-n)}{2}}\right] = -(a+2-n)\ \frac{\partial}{\partial t_\nu}\left[u^{\frac{(a-n)}{2}}\ t_\nu\right] =$$

$$= -(a+2-n)\left[u^{\frac{(a-n)}{2}} + t_\nu\ \frac{\partial}{\partial t_\nu}\ u^{\frac{a-n}{2}}\right] . \qquad (V,3;8)$$

Procediendo como anteriormente (fórmula (V,3;5))

$$\frac{\partial}{\partial t_\nu}\left[u^{\frac{(a-n)}{2}}\right] = -(a-n)^{\frac{(a-n-2)}{2}}\ t_\nu . \qquad (V,3;9)$$

Por sustitución de (V,3;9) en (V,3;8) obtenemos, para $\nu = 1,2,\ldots,n-1$,

$$\frac{\partial^2}{\partial t_\nu^2}\left[u^{\frac{(a+2-n)}{2}}\right] = -(a+2-n)\left[u^{\frac{(a-n)}{2}} - (a-n)\,u^{\frac{(a-n-2)}{2}}\ t_\nu^2\right] . \qquad (V,3;10)$$

De esta fórmula obtenemos ahora

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}\ \frac{\partial^2}{\partial t_\nu^2}\left[u^{\frac{(a+2-n)}{2}}\right] = -(a+2-n) .$$

$$\cdot \left[\sum_{\nu=1}^{n-1} u^{\frac{(a-n)}{2}} - (a-n) u^{\frac{(a-n-2)}{2}} \sum_{\nu=1}^{n-1} t_\nu^2 \right] =$$

$$= -(a+2-n)(n-1) u^{\frac{(a-n)}{2}} + (a+2-n)(a-n) u^{\frac{(a-n-2)}{2}} \cdot$$

$$\cdot \sum_{\nu=1}^{n-1} t_\nu^2 \,. \tag{V,3;11}$$

De (V,3;11) y (V,3;6) obtenemos finalmente

$$\square \left[u^{\frac{(a+2-n)}{2}} \right] =$$

$$= (a+2-n) u^{\frac{(a-2)}{2}} + (a+2-n)(a-n) u^{\frac{(a-n-2)}{2}} t_0^2 -$$

$$- \left\{ -(a+2-n)(n-1) u^{\frac{(a-n)}{2}} + (a+2-n)(a-n) \,\cdot \right.$$

$$\left. \cdot\, u^{\frac{(a-n-2)}{2}} \sum_{\nu=1}^{n-1} t_\nu^2 \right\} =$$

$$= (a+2-n) u^{\frac{(a-n)}{2}} + (a+2-n)(a-n) u^{\frac{(a-n-2)}{2}} t_0^2 +$$

$$+ (a+2-n)(n-1) u^{\frac{(a-n)}{2}} - (a+2-n)(a-n) \cdot u^{\frac{(a-n-2)}{2}} \sum_{\nu=1}^{n-1} t_\nu^2 =$$

$$= (a+2-n)\ u^{\frac{a-n}{2}} \left[1 + (n-1) \right] +$$

$$+ \ (a+2-n)\,(a-n)\,u^{\frac{(a-n-2)}{2}}\,u =$$

$$= (a+n-2)\ n\ u^{\frac{(a-n)}{2}} + (a+2-n)\,(a-n)\,u^{\frac{(a-n)}{2}} =$$

$$= (a+2-n)\,u^{\frac{(a-n)}{2}}\,(n+a-n) = a\,(a+2-n)\,u^{\frac{(a-n)}{2}} .$$

Nuestra fórmula final es, por lo tanto,

$$\Box \left[u^{\frac{(a+2-n)}{2}} \right] = a\,(a+2-n)\,u^{\frac{(a-n)}{2}} . \qquad (V,3;12)$$

Demostraremos ahora la fórmula

$$H_n(a+2) = a\,(a+2-n)\,H_n(a) . \qquad (V,3;13)$$

Tenemos, de acuerdo con (IV,1;2),

$$H_n(a+2) = \pi^{\frac{(n-2)}{2}}\,2^{a+2-1}\,\Gamma(\tfrac{a+2}{2})\,\Gamma(\tfrac{a+4-n}{2}) . \qquad (V,3;14)$$

Por otra parte,

$$\Gamma(\tfrac{a}{2}+1) = (\tfrac{a}{2})\Gamma(\tfrac{a}{2}), \qquad (V,3;15)$$

$$\Gamma\left(\frac{a+2-n}{2}+1\right) = \frac{(a+2-n)}{2}\, \Gamma\left(\frac{a+2-n}{2}\right) . \qquad (V,3;16)$$

Por sustitución de (V,3;15) y (V,3;16) en (V,3;14) obtenemos

$$H_n(a+2) = \pi^{\frac{(n-2)}{2}}\, 2^{a-1}\, 2^2 \left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a}{2}\right) \left(\frac{a+2-n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a+2-n}{2}\right) =$$

$$= \pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{a-1}\, \Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{a+2-n}{2}\right) .$$

$$\cdot \left[4\left(\frac{a}{2}\right) \left(\frac{a+2-n}{2}\right)\right] =$$

$$= a(a+2-n)H_n(a) . \qquad (V,3;17)$$

Es decir, hemos llegado a la fórmula

$$H_n(a+2) = a(a+2-n)\, H_n(a) , \qquad (V,3;18)$$

que queríamos demostrar.

De las fórmulas (V,3;12) y (V,3;18) deducimos inmediatamente,

$$\square R_{a+2}(u) = \frac{\square\left[u^{\frac{(a+2-n)}{2}}\right]}{H_n(a+2)} = \frac{a(a+2-n)\, u^{\frac{(a-n)}{2}}}{H_n(a+2)} =$$

$$= \frac{a(a+2-n)\,u^{\frac{(a-n)}{2}}}{a(a+2-n)\;H_n(a)} = R_a(u)\,. \qquad (V,3;19)$$

En definitiva, hemos obtenido la fórmula

$$\Box R_{a+2}(u) = R_a(u)\,. \qquad (V,3;20)$$

Hemos obtenido la fórmula (V,3;20) con la hipótesis de que la parte real de a es suficientemente grande, específicamente, para que (V,3;20) valga, de acuerdo con la manera como la hemos deducido, deberá ser

$$\mathrm{Re}(a+2-n) \geqslant 2,$$

o sea,

$$\mathrm{Re}(a-n) \geqslant 0. \qquad (V,3;21)$$

Haremos ahora la observación esencial de que, según demostramos en IV.1, $R_a(u)$ es función (distribucional) *entera* de a ; por lo tanto, en virtud del principio de la prolongación analítica, la fórmula vale para todo a . Este hecho es de importancia fundamental para la integración de la ecuación de las ondas.

V.4. $\square^k \left\{ R_{2k}(u) \right\} = \delta$.

Pongamos en la fórmula (V,3;20), $a = 0$ (sabemos que dicha fórmula vale para todo a), obtenemos así

$$\square\left\{R_2(u)\right\} = R_0(u) . \qquad (V,4;1)$$

De (V,1;2) y (V,4;1), deducimos

$$\square\left\{R_2(u)\right\} = \delta(x) . \qquad (V,4;2)$$

Esta fórmula nos dice que la función (distribucional) $R_2(u)$ es solución elemental del operador ultrahiperbólico n-dimensional: *$R_2(u)$ es la única solución elemental del operador ultrahiperbólico n-dimensional que se anula para $t_0 \leqslant 0$.*

Más generalmente, si aplicamos el operador $\square$ en ambos miembros de (V,3;20) obtenemos

$$\square\left\{[R_{a+2}(u)]\right\} = \square R_a(u) = R_{a-2}(u) ,$$

es decir,

$$\square^2\left\{R_{a+2}(u)\right\} = R_{a-2}(u) ,$$

o, equivalentemente,

$$\square^2 \left\{ R_a(u) \right\} = R_{a-4}(u) = R_{a-2.2}(u),$$

y en general,

$$\square^2 \left\{ R_a(u) \right\} = R_{a-2k}(u). \qquad (V,4;3)$$

Poniendo en esta fórmula $a = 2k$, resulta

$$\square^k \left\{ R_{2k}(u) \right\} = R_0(u) = \delta(x), \qquad (V,4;4)$$

o sea:

$$\square^k \left\{ R_{2k}(u) \right\} = \delta(x), \qquad (V,4;5)$$

es decir:

$R_{2k}(u)$ es la única solución elemental del operador ultra-hiperbólico n-dimensional iterado k-veces que se anula para $t_0 \leqslant 0$.

La fórmula (V,4;5) es debida a Marcel Riesz.

V.5. $\underline{R_{-2k}(u) = \square^k \delta(x)}$.

La fórmula (V,4;4) puede escribirse

$$R_{2k}(u) * \square^k \delta = \delta. \qquad (V,5;1)$$

Convolucionando ambos miembros de (V,5;1) con $R_{-2k}(u)$

obtenemos:

$$R_{-2k}(u) * \left\{ R_{2k}(u) * \square^k \delta \right\} =$$

$$= R_{-2k}(u) * \delta = R_{-2k} , \qquad (V,5;2)$$

o sea,

$$\left\{ R_{-2k}(u) * R_{2k}(u) \right\} * \square^k \delta = \delta * \square^k \delta =$$

$$= \square^k \delta = R_{-2k}(u) . \qquad (V,5;3)$$

Hemos obtenido pues la fórmula

$$R_{-2k}(u) = \square^k \delta(x) , \qquad (V,5;4)$$

que vale para todo k entero $\geqslant 0$. Esta fórmula es la correlativa (hiperbólica n-dimensional), de la fórmula unidimensional,

$$\left\{ \frac{x_+^{a-1}}{\Gamma(a)} \right\}_{a=-n} = \delta^{(n)}(x) . \qquad (V,5;5)$$

Observemos que el pasaje de (V,5;2) a (V,5;3) es lícito, pues la distribución $\square^k \delta$ tiene soporte compacto y todas las $R_a(u)$ son convolucionadas entre sí y el produc to de convolución es commutativo y asociativo. Este hecho se debe a que todas las $R_a(u)$ tienen su soporte en el cono de ondas del futuro Γ_+ (cf. [10], p. 177).

La fórmula (V,5;4) es debida a Schwartz (cf. [10], p. 50, fórmula (II,3;32)).

CAPITULO VI

Propiedades del núcleo $W_{\alpha}(u,m)$.

VI.1. $W_0(u,m) = \delta(x)$.

Poniendo $\alpha = 0$ en la fórmula (IV,2;13) resulta

$$L[\, W_0(u,m) \,] = 1. \qquad (VI,1;1)$$

En virtud del teorema de identidad para integrales de Laplace, obtenemos

$$W_0(u,m) = \delta(x). \qquad (VI,1;2)$$

Esta fórmula está indicada sin demostración en [12] , p.89.

VI.2. La fórmula de composición: $W_{\alpha}(u,m) * W_{\beta}(u,m)$.

Empecemos por observar que, de acuerdo con un resultado conocido (cf. [10], p. 177), la convolución $W_{\alpha}(u,m) * W_{\beta}(u,m)$ es siempre posible. El teorema de intercambio entre la convolución y el producto es válido para integrales de Laplace de distribuciones $W_{\alpha}(u,m)$ de diversos índices (cf. [10] , p. 271). Observemos por lo tanto, de acuerdo con (IV,2;13),

$$L[W_{\alpha}(u,m) * W_{\beta}(u,m)] = L[W_{\alpha}(u,m)].\, L[W_{\beta}(u,m)]$$

$$= (\rho^2 + m^2)^{-\frac{\alpha}{2}} \cdot (\rho^2 + m^2)^{-\frac{\beta}{2}} =$$

$$= (\rho^2 + m^2)^{-\frac{\alpha+\beta}{2}} =$$

$$= L\,[W_{\alpha+\beta}(u,m)] \,. \qquad \text{(VI,2;1)}$$

o sea,

$$L\,[W_\alpha(u,m) * W_\beta(u,m)] = L\,[W_{\alpha+\beta}(u,m)] \,. \qquad \text{(VI,2;2)}$$

En virtud del teorema de identidad para integrales de Laplace, obtenemos de (VI,2;2)

$$W_\alpha(u,m) * W_\beta(u,m) = W_{\alpha+\beta}(u,m), \qquad \text{(VI,2;3)}$$

y esta fórmula es válida para todo α y β .

La fórmula (VI,2;3) está indicada, sin demostración, en [12], p. 89.

VI.3. <u>$\left\{\Box + m^2\right\} W_{\alpha+2}(u,m) = W_\alpha(u,m)$ donde $\left\{\Box + m^2\right\}$ es el operador de Klein-Gordon n-dimensional</u>.

La constante que aparece en la fórmula definitoria de

$W_a(u,m)$ (cf. (IV,2;1)) es

$$K_n(a) = \pi^{\frac{n-2}{2}} \, 2^{\frac{(a+n-2)}{2}} \, \Gamma(\tfrac{a}{2}) . \tag{VI,3;1}$$

Se obtiene immediatamente,

$$K_n(a+2) = \pi^{\frac{n-2}{2}} \, 2^{\frac{a+n-2}{2}} \, 2\Gamma(\tfrac{a}{2}) = aK_n(a) . \tag{VI,3;2}$$

Introducimos ahora la notación

$$G_a(u,m) = \left\{ \frac{u^{\frac{1}{2}}}{m} \right\}^{\frac{(a-n)}{2}} J_{\frac{(a-n)}{2}} \left[(m^2 u)^{\frac{1}{2}} \right] . \tag{VI,3;3}$$

Probaremos la siguiente fórmula:

$$K [G_{a+2}(u,m)] = aG_a(u,m) , \tag{VI,3;4}$$

válida para todo a ,

donde

$$K = \square + m^2 \tag{VI,3;5}$$

es el operador de Klein-Gordon n-dimensional definido por la fórmula

$$K = \square + m^2 = \frac{\partial^2}{\partial t_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial t_{n-1}^2} + m^2 . \qquad (VI,3;6)$$

La fórmula (VI,3;4) puede escribirse equivalentemente

$$G_a(u,m) = m^{n-a} (mu^{\frac{1}{2}})^{\frac{(a-n)}{2}} J_{\frac{a-n}{2}} [(m^2u)^{\frac{1}{2}}] \quad ; \qquad (VI,3;7)$$

de ésta obtenemos

$$G_{a+2}(u,m) = m^{n-a-2} (mu^{\frac{1}{2}})^{\frac{(a+2-n)}{2}} J_{\frac{a+2-n}{2}} [(m^2u)^{\frac{1}{2}}] \quad . \qquad (VI,3;8)$$

Admitiremos que $G_{a+2}(u,m) \in C^2$ (es decir, es dos veces continuamente diferenciable). Derivando $G_{a+2}(u,m)$ con respecto a t_0 obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t_0} G_{a+2}(u,m) = m^{n-a-2} \frac{\partial}{\partial t_0} \left\{ (mu^{\frac{1}{2}})^{\frac{(a+2-n)}{2}} \right. .$$

$$\left. \cdot J_{\frac{a+2-n}{2}} (m^2u^{\frac{1}{2}}) \right\} =$$

$$= m^{n-a-2} \frac{\partial}{\partial (mu^{\frac{1}{2}})} \left\{ (mu^{\frac{1}{2}})^{\frac{(a+2-n)}{2}} J_{\frac{(a+2-n)}{2}} (m^2 u)^{\frac{1}{2}} \right\} \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial (mu^{\frac{1}{2}})}{\partial t_0} . \qquad \text{(VI,3;9)}$$

Por otra parte,

$$\frac{\partial (mu^{\frac{1}{2}})}{\partial t_0} = mu^{-\frac{1}{2}} t_0 . \qquad \text{(VI,3;10)}$$

Recordemos la fórmula (cf. [6], p. 45)

$$\frac{d}{dz} \left\{ z^{\nu} J_{\nu}(z) \right\} = z^{\nu} J_{\nu-1}(z) , \qquad \text{(VI,3;11)}$$

válida para todo ν.

Poniendo en ella

$$\nu = \frac{(a+2-n)}{2} , \quad z = mu^{\frac{1}{2}} , \qquad \text{(VI,3;12)}$$

obtenemos inmediatamente de (VI,3;9) y (VI,3;10)

$$\frac{\partial}{\partial t_0} G_{a+2}(u,m) = \left\{ m^{n-a-2} (mu^{\frac{1}{2}})^{\frac{(a+2-n)}{2}} \right. .$$

$$J_{\frac{(a+2-n)}{2}-1}(m^2u)^{\frac{1}{2}}\Bigg\} . \, m t_0 . u^{-\frac{1}{2}} , \qquad \text{(VI,3;13)}$$

o sea, después de cálculos triviales,

$$\frac{\partial G_{a+2}(u,m)}{\partial t_0} = \left\{ \frac{u^{\frac{1}{2}}}{m} \right\}^{\frac{(a-n)}{2}} J_{\frac{a-n}{2}}[(mu^{\frac{1}{2}})] . \, t_0 .$$

(VI,3;14)

y esta fórmula puede escribirse, equivalentemente,

$$\frac{\partial G_{a+2}(u,m)}{\partial t_0} = t_0 \; G_a(u,m) . \qquad \text{(VI,3;15)}$$

De la (VI,3;15) obtenemos, derivando ambos miembros una vez más con respecto a t_0,

$$\frac{\partial^2}{\partial t_0^2} G_{a+2}(u,m) = G_a(u,m) + t_0 \left\{ \frac{\partial}{\partial t_0} G_a(u,m) \right\} ,$$

(VI,3;16)

o sea, teniendo en cuenta que de acuerdo con (VI,3;5) vale la fórmula (suponiendo que la parte real de a es suficientemente grande):

$$\frac{\partial}{\partial t_0} G_a(u,m) = t_0 \; G_{a-2}(u,m), \qquad \text{(VI,3;17)}$$

entonces

$$\frac{\partial^2}{\partial t_0^2} G_{a+2}(u,m) = G_a(u,m) + t_0^2 \; G_{a-2}(u,m). \qquad \text{(VI,3;18)}$$

Por otra parte, también es inmediato probar que

$$\frac{\partial}{\partial t_\nu} (mu^{\frac{1}{2}}) = -mu^{-\frac{1}{2}} \; t_\nu \;, \quad \nu = 1,2,\ldots,n-1. \qquad \text{(VI,3;19)}$$

Análogamente a la demostración de (VI,3;15) y (VI,3;18) llegamos a las fórmulas, para $\nu = 1,2,\ldots,n-1$;

$$\frac{\partial}{\partial t_\nu} G_{a+2}(u,m) = -t_\nu \; G_a(u,m) \;; \qquad \text{(VI,3;20)}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} G_{a+2}(u,m) = - \left\{ G_a(u,m) + t_\nu \frac{\partial G_a(u,m)}{\partial t_\nu} \right\} =$$

$$= - \left[G_a(u,m) + t_\nu \left\{ -t_\nu \; G_{a-2}(u,m) \right\} \right] =$$

$$= - G_a(u,m) + t_\nu^2 \; G_{a-2}(u,m), \qquad \text{(VI,3;21)}$$

es decir, que vale la fórmula (para Re a suficientemente grande)

$$\frac{\partial^2 G_{a+2}(u,m)}{\partial t_\nu^2} = -G_a(u,m) + t_\nu^2\ G_{a-2}(u,m), \qquad (VI,3;22)$$

$\nu = 1,2,\ldots,n-1,$

de donde deducimos

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\partial^2 G_{a+2}(u,m)}{\partial t_\nu^2} = -\sum_{\nu=1}^{n-1} G_a(u,m) + G_{a-2}(u,m) \cdot \sum_{\nu=1}^{n-1} t_\nu^2 =$$

$$= -(n-1)\ G_a(u,m) + G_{a-2}(u,m) \cdot \sum_{\nu=1}^{n-1} t_\nu^2 . \qquad (VI,3;23)$$

De (VI,3;18) y (VI,3;23) obtenemos inmediatamente

$$\Box G_{a+2}(u,m) = \frac{\partial^2}{\partial t_0^2} G_{a+2}(u,m) - \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial t_\nu^2} G_{a+2}(u,m) =$$

$$= G_a(u,m) + t_0^2\ G_{a-2}(u,m) - [-(n-1)G_a(u,m) + G_{a-2}(u,m) \sum_{\nu=1}^{n-1} t_\nu^2] =$$

$$= (1+n-1)\,G_a(u,m) + u\,G_{a-2}(u,m)\,. \qquad \text{(VI,3;24)}$$

De esta fórmula resulta

$$\begin{aligned}\left\{\square + m^2\right\} G_{a+2}(u,m) &= n\,G_a(u,m) + u\,G_{a-2}(u,m) + \\ &+ m^2\,G_{a+2}(u,m) = \\ &= n\,G_a(u,m) + u\,G_{a-2}(u,m) + \\ &+ m^2\,G_{a+2}(u,m) + a\,G_a(u,m) - \\ &- a\,G_a(u,m) = \\ &= a\,G_a(u,m) + [\,(n-a)\,G_a(u,m) + \\ &+ u\,G_{a-2}(u,m) + m^2\,G_{a+2}(u,m)]\,.\end{aligned} \qquad \text{(VI,3;25)}$$

Vamos a mostrar ahora que el segundo sumando (entre corchetes) del segundo miembro de (VI,3;25) es idénticamente nulo. Es decir, probaremos que vale la identidad (para a de parte real suficientemente grande en primer lugar, y luego para todo a, por prolongación analítica)

$$u\, G_{a-2}(u,m) + m^2\, G_{a+2}(u,m) = (a-n)\, G_a(u,m). \qquad (VI,3;26)$$

La (VI,3;26) es consecuencia inmediata de la fórmula de recurrencia (cf. [6], p. 45)

$$J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = \frac{2^{\nu}}{z} J_\nu(z), \qquad (VI,3;27)$$

válida para todo ν. En efecto, poniendo en esta fórmula

$$\nu = \frac{a-n}{2}, \qquad z = mu^{\frac{1}{2}}, \qquad (VI,3;28)$$

obtenemos

$$J_{\frac{a-n}{2}-1}(mu^{\frac{1}{2}}) + J_{\frac{a-n}{2}+1}(mu^{\frac{1}{2}}) = \frac{a-n}{mu^{\frac{1}{2}}} J_{\frac{a-n}{2}}(mu^{\frac{1}{2}}), \qquad (VI,3;29)$$

o también

$$(mu^{\frac{1}{2}}) J_{\frac{(a-n-2)}{2}}(mu^{\frac{1}{2}}) + (mu^{\frac{1}{2}}) J_{\frac{(a-n+2)}{2}}(mu^{\frac{1}{2}}) =$$

$$= (a-n) J_{\frac{(a-n)}{2}}(mu^{\frac{1}{2}}). \qquad (VI,3;30)$$

Multiplicando ambos miembros de esta identidad por $(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{m})^{\frac{(a-n)}{2}}$ obtenemos

$$(mu^{\frac{1}{2}})\,(\frac{m}{u^{1/2}})^{-\frac{(a-n)}{2}}\,J_{\frac{(a-n-2)}{2}}(mu^{\frac{1}{2}}) \;+$$

$$+\;(mu^{\frac{1}{2}})\,(\frac{m}{u^{1/2}})^{-\frac{(a-n)}{2}}\,J_{\frac{(a+2-n)}{2}}(mu^{\frac{1}{2}}) \;=$$

$$= (a-n)\;(\frac{m}{u^{1/2}})^{-\frac{(a-n)}{2}}\,J_{\frac{(a-n)}{2}}(mu^{\frac{1}{2}})\;, \qquad (VI,3;31)$$

equivalentemente,

$$u\;G_{a-2}(u,m) + m^2\;G_{a+2}(u,m) = (a-n)\,G_a(u,m)\,, \quad (VI,3;32)$$

que coincide con la (VI,3;26). Esta fórmula vale, en virtud del principio de la prolongación analítica para todo a.

De (VI,3;25) y (VI,3;32) obtenemos entonces (y la fórmula vale para todo a)

$$\left\{ \Box + m^2 \right\} G_{a+2}(u,m) = a\, G_a(u,m) . \tag{VI,3;32}$$

De (VI,3;2) y (VI,3;32) (recordando (IV,2;1)), resulta

$$\left\{ \Box + m^2 \right\} W_{a+2}(u,m) = \frac{\left\{ \Box + m^2 \right\} G_{a+2}(u,m)}{K_n(a+2)} = \frac{a G_a(u,m)}{a K_n(a)} =$$

$$= \frac{G_a(u,m)}{K_n(a)} = W_a(u,m) , \tag{VI,3;33}$$

válida para todo a .

La validez de la fórmula

$$\left\{ \Box + m^2 \right\} W_{a+2}(u,m) = W_a(u,m) \tag{VI,3;34}$$

para *todo* a (y no solamente para aquellos a de parte real suficientemente grande) es consecuencia inmediata del principio de la prolongación analítica, válido también para funciones distribucionales analíticas.

VI.4. $\left\{ \Box + m^2 \right\}^k W_{2k}(u,m) = \delta$, $k = 1,2,\ldots$.

Poniendo en la fórmula (VI,3;34) $a = 0$, resulta

$$\left\{ \Box + m^2 \right\} W_2(u,m) = W_0(u,m) . \tag{VI,4;1}$$

De (VI,1;2) y (VI,4;1) deducimos

$$\left\{ \Box + m^2 \right\} W_2(u,m) = \delta \quad . \tag{VI,4;2}$$

Esta fórmula afirma que la función (distribucional) $W_2(u,m)$ *es la única solución elemental del operador de Klein-Gordon que se anula para* $t_0 \leqslant 0$.

Más generalmente, si aplicamos el operador de Klein-Gordon a ambos miembros de (VI,3;34) obtenemos

$$\left\{ \Box + m^2 \right\} \left\{ \Box + m^2 \right\} W_{a+2}(u,m) = \left\{ \Box + m^2 \right\} W_a(u,m)$$

$$= W_{a-2}(u,m) ,$$

es decir,

$$\left\{ \Box + m^2 \right\}^2 W_{a+2}(u,m) = W_{a-2}(u,m) ,$$

equivalentemente,

$$\left\{ \Box + m^2 \right\}^2 W_a(u,m) = W_{a-4}(u,m) = W_{a-2.2}(u,m)$$

y, en general,

$$\left\{ \Box + m^2 \right\}^k W_a(u,m) = W_{a-2k}(u,m) . \tag{VI,4;2}$$

Poniendo es esta fórmula $a = 2k$, resulta

$$\left\{\Box + m^2\right\}^2 W_{2k}(u,m) = W_0(u,m) = \delta(x), \qquad (VI,4;3)$$

o sea

$$\left\{\Box + m^2\right\}^k W_{2k}(u,m) = \delta(x), \qquad (VI,4;4)$$

es decir, *$W_{2k}(u,m)$ es la única solución elemental del operador de Klein-Gordon iterado que se anula para $t_0 \leqslant 0$.*

VI.5. $W_{-2k}(u,m) = \left\{\Box + m^2\right\}^k \delta$.

Poniendo en (VI,3;34) $a = 0$ obtenemos, teniendo en cuenta la fórmula (VI,1;2),

$$\left\{\Box + m^2\right\} W_2(u,m) = W_0(u,m) = \delta \ . \qquad (VI,5;1)$$

Aplicando otra vez a (VI,5;1) el operador de Klein-Gordon obtenemos

$$\left\{\Box + m^2\right\}^2 W_2(u,m) = \left\{\Box + m^2\right\} W_0(u,m) = \left\{\Box + m^2\right\} \delta,$$

o sea

$$\left\{\Box + m^2\right\}^2 W_2(u,m) = W_{-2}(u,m) = \left\{\Box + m^2\right\} \delta \ .$$

De la fórmula anterior:

$$W_{-2}(u,m) = \left\{\Box + m^2\right\} \delta , \qquad (VI,5;2)$$

aplicando nuevamente a ambos lados de (VI,5;2) el operador de Klein-Gordon, resulta

$$W_{-2-2}(u,m) = \left\{\Box + m^2\right\}^2 \delta ,$$

o sea,

$$W_{-2.2}(u,m) = \left\{\Box + m^2\right\}^2 \delta ,$$

y, en general,

$$W_{-2k}(u,m) = \left\{\Box + m^2\right\}^k \delta , \qquad (VI,5;3)$$

siendo esta propiedad cierta para todo k entero ≥ 0.

VI.6. $W_{a}(u,\ m = 0) = R_{a}(u)$

Para comprobar nuestra aserción recordemos que la función de Bessel $J_{\frac{a-n}{2}}\left[(m^2u)^{1/2}\right]$ está definida por la serie

$$J_{\frac{a-n}{2}}\left\{(m^2u)^{\frac{1}{2}}\right\} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}\left\{\frac{(m^2u)^{\frac{1}{2}}}{2}\right\}^{\frac{(a-n)}{2}+2\nu}}{\nu!\ \Gamma(\frac{a-n}{2}+\nu+1)} =$$

$$= \left\{\frac{(m^2u)^{\frac{1}{2}}}{2}\right\}^{\frac{(a-n)}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu}\left\{\frac{(m^2u)^{\frac{1}{2}}}{2}\right\}^{2\nu}}{\nu!\ \Gamma(\frac{a-n}{2}+\nu+1)} =$$

$$= \frac{(mu^{\frac{1}{2}})^{\frac{(a-n)}{2}}}{2^{(\frac{a-n}{2})}} \frac{1}{\Gamma(\frac{a-n}{2}+1)} + \frac{(mu^{\frac{1}{2}})^{\frac{(a-n)}{2}}}{2^{\frac{a-n}{2}}} \; .$$

$$\cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \left\{ \frac{(mu^{\frac{1}{2}})}{2} \right\}^{2\nu} \frac{1}{\nu !\, \Gamma(\frac{a-n}{2}+\nu+1)} \; . \qquad (VI,6;1)$$

Por sustitución de (VI,6;1) en la fórmula definitoria de $W_a(u,m)$ (cf. (IV,2;1) obtenemos

$$W_a(u,m) = \frac{u^{\frac{(a-n)}{2}}}{m^{\frac{(a-n)}{2}} \pi^{\frac{(n-2)}{2}} 2^{\frac{(a+n-2)}{2}} \Gamma(\frac{a}{2})} \; .$$

$$\cdot \frac{m^{\frac{(a-n)}{2}} u^{\frac{(a-n)}{4}}}{2^{\frac{(a-n)}{2}} \Gamma(\frac{a-n}{2}+1)} +$$

$$+ \frac{u^{\frac{(a-n)}{2}} m^{\frac{(a-n)}{2}} u^{\frac{(a-n)}{2}}}{m^{\frac{(a-n)}{2}} 2^{\frac{(a-n)}{2}} \pi^{\frac{(n-2)}{2}} 2^{\frac{(a+n-2)}{2}} \Gamma(\frac{a}{2})} \; .$$

$$\cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu} \left\{ (\frac{mu^{\frac{1}{2}}}{2}) \right\}^{2\nu} \frac{1}{\nu !\, \Gamma(\frac{a-n}{2}+\nu+1)} \; ,$$

o sea,

$$W_a(u,m) = \frac{u^{\left(\frac{a-n}{2}\right)}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{\frac{(a+n-2)}{2}}\, \Gamma(\frac{a}{2})\, 2^{\frac{(a-n)}{2}}\, \Gamma(\frac{a-n+2}{2})} +$$

$$+ \frac{u^{\frac{(a-n)}{2}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{\frac{(a+n-2)}{2}}\, \Gamma(\frac{a}{2})\, a^{\frac{(a-n)}{2}}} \cdot$$

$$\cdot \sum_{\nu=1} \frac{(-1)^{\nu} \left\{ \frac{mu^{\frac{1}{2}}}{2} \right\}^{2\nu}}{\nu!\ \Gamma(\frac{a-n}{2} + \nu + 1)} \cdot \qquad \text{(VI,6;12)}$$

Para $m = 0$ el segundo sumando del segundo miembro se anula, y obtenemos en consecuencia

$$W_a(u,m{=}0) = \frac{u^{\frac{(a-n)}{2}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{a-1}\, \Gamma(\frac{a}{2})\, \Gamma(\frac{a-n+2}{2})} =$$

$$= \frac{u^{\frac{(a-n)}{2}}}{H_n(a)} = R_a(u), \qquad \text{(VI,6;13)}$$

según queríamos demostrar.

VI.7. Expresión de $W_a(u,m)$ como combinación lineal de las

$R_a(u)$ de diferentes órdenes.

No es evidente cómo aparece la complicada expresión de $W_a(u,m)$ (cf. (IV,2;1)). Nuestro objetivo en este parágrafo es mostrar cómo, partiendo de $R_a(u)$, se llega naturalmente a la expresión de $W_a(u,m)$. Seguiremos para ello el método "simbólico" de Marcel Riesz, que luego justificaremos completamente apelando a la teoría de distribuciones (cf.[10], p. 179).

Pongamos, simbólicamente,

$$\left\{\Box + m^2\right\}^{-\frac{a}{2}} = \left\{\Box(1 + m^2\,\Box^{-1})\right\}^{-\frac{a}{2}} =$$

$$= \Box^{-\frac{a}{2}}\,(1 + m^2\,\Box^{-1})^{-\frac{a}{2}}. \qquad \text{(VI,7;1)}$$

Desarrollemos ahora en serie binómica el segundo factor del segundo miembro:

$$\left\{1 + m^2\,\Box^{-1}\right\}^{-\frac{a}{2}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-\frac{a}{2}}{\nu} (m^2\,\Box^{-1})^{\nu},$$

o sea

$$\left\{1 + m^2\,\Box^{-1}\right\}^{-\frac{a}{2}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-\frac{a}{2}}{\nu} m^{2\nu}\,\Box^{-\nu}. \qquad \text{(VI,7;2)}$$

Por otra parte, poniendo $-2k = a$ en (VI,5;3),

$$W_a(u,m) = \left\{ \Box + m^2 \right\}^{-\frac{a}{2}} \delta. \qquad (VI,7;3)$$

De (VI,7;1), (VI,7;2) y (VI,7;3), tenemos

$$W_a(u,m) = \left\{ \Box^{-\frac{a}{2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-\frac{a}{2}}{\nu} m^{2\nu} \Box^{-\nu} \right\} \delta =$$

$$= \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-\frac{a}{2}}{\nu} m^{2\nu} \Box^{-\frac{a}{2}-\nu} \right\} \delta . \qquad (VI,7;4)$$

Teniendo presente (V,5;4), obtenemos finalmente,

$$W_a(u,m) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-\frac{a}{2}}{\nu} m^{2\nu} R_{a+2\nu}(u). \qquad (VI,7;5)$$

Vemos, pues, que $W_a(u,m)$ se expresa como combinación lineal, infinita, de las $R_a(u)$ de diferentes órdenes. Poniendo en vez de $R_a(u)$ su expresión (cf. (VI,1;1)), obtenemos en definitiva,

$$W_a(u,m) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-\frac{a}{2}}{\nu} m^{2\nu} \frac{u^{\frac{a+2\nu-n}{2}}}{H_n(a+2\nu)} . \qquad (VI,7;6)$$

Hemos obtenido pues, la expresión explícita de $W_a(u,m)$.

Vamos a transformar la fórmula (VI,7;6). Recordemos para ello, una vez más, el clásico desarrollo de $J_\lambda(z)$.

Tenemos, como es sabido,

$$J_{\lambda}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda+2\nu} \frac{1}{\nu!\,\Gamma(\lambda+\nu+1)} . \qquad \text{(VI,7;7)}$$

De esta fórmula deducimos inmediatamente

$$J_{\frac{a-n}{2}}(mu^{\frac{1}{2}}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} m^{2\nu}\, m^{\frac{a-n}{2}}\, u^{\frac{a-n}{4}}\, u^{\nu}}{\nu!\ \Gamma(\frac{a-n}{2}+\nu+1)} =$$

$$= \frac{m^{\frac{(a-n)}{2}}}{2^{\frac{(a-n)}{2}}}\, u^{-\frac{(a-n)}{4}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} m^{2\nu}\, u^{\frac{(a-n+2\nu)}{2}}}{2^{2\nu}\ \nu!\ \Gamma(\frac{a-n}{2}+\nu+1)} .$$

(VI,7;8)

Por otra parte tenemos, por definición,

$$H_n(a+2\nu) = \pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{a+2\nu-1}\, \Gamma\left(\frac{a+2\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{a+2\nu+2-n}{2}\right),$$

o sea

$$\Gamma\left(\frac{a-n}{2}+\nu+1\right) = \Gamma\left(\frac{a-n+2\nu+2}{2}\right) = \frac{H_n(a+2\nu)}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{a+2\nu-1}\, \Gamma(\frac{a+2\nu}{2})} .$$

(VI,7;9)

Reemplazando (VI,7;9) en (VI,7;8) obtenemos:

$$J_{\frac{(a-n)}{2}}(mu^{\frac{1}{2}}) = \frac{m^{(\frac{a-n}{2})}}{2^{\frac{(a-n)}{2}}} u^{-\frac{(a-n)}{4}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} m^{2\nu}}{2^{2\nu}} \cdot$$

$$\cdot \frac{u^{\frac{(a-n+2\nu)}{2}} \pi^{\frac{(n-2)}{2}} 2^{a+2\nu-1} \Gamma(\frac{a+2\nu}{2})}{\nu! \quad H_n(a+2\nu)} =$$

$$= m^{\frac{(a-n)}{2}} \pi^{\frac{(n-2)}{2}} 2^{\frac{(a+n-2)}{2}} u^{-\frac{(a-n)}{4}} \cdot$$

$$\cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} m^{2\nu} u^{\frac{(a-n+2\nu)}{2}} \Gamma(\frac{a+2\nu}{2})}{\nu! \quad H_n(a+2\nu)} . \qquad (VI,7;10)$$

Por otra parte, vale la fórmula

$$\Gamma(\frac{a}{2}+\nu) = \frac{a}{2} (\frac{a}{2}+1) \ldots (\frac{a}{2}+\nu-1)\Gamma(\frac{a}{2}),$$

o sea,

$$(-1)^{\nu} \frac{1}{\nu!} \Gamma(\frac{a}{2}+\nu) = \frac{(-1)^{\nu} \frac{a}{2}(\frac{a}{2}+1) \ldots (\frac{a}{2}+\nu-1)}{\nu!} \Gamma(\frac{a}{2}) =$$

$$= \frac{(-\frac{a}{2})(-\frac{a}{2}-1) \ldots [-(\frac{a}{2}+\nu-1)]}{\nu!} \Gamma(\frac{a}{2})$$

$$= \frac{(-\frac{a}{2})(-\frac{a}{2}-1)\ \ldots\ [-\frac{a}{2}-(\nu-1)]\ \Gamma(\frac{a}{2})}{\nu!} =$$

por definición:

$$= \binom{-\frac{a}{2}}{\nu}\Gamma(\frac{a}{2}). \qquad (VI,7;11)$$

De (VI,7;11) se obtiene

$$\Gamma(\frac{a}{2}+\nu) = (-1)^{\nu}\ \nu!\binom{-\frac{a}{2}}{\nu}\ \Gamma(\frac{a}{2}) . \qquad (VI,7;12)$$

Sustituyendo (VI,7;12) en (VI,7;10), después de evidentes cancelaciones resulta

$$J_{\frac{(a-n)}{2}}(mu^{\frac{1}{2}}) = m^{\frac{(a-n)}{2}}\ \pi^{\frac{(n-2)}{2}}\ 2^{\frac{(a+n-2)}{2}}\ \Gamma(\frac{a}{2}) .$$

$$.\ u^{-\frac{(a-n)}{4}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-\frac{a}{2}}{\nu} m^{2\nu} \frac{u^{\frac{(a-n+2\nu)}{2}}}{H_n(a+2\nu)} .$$

(VI,7;13)

Reemplazando (VI,7;13) en (VI,7;6) resulta finalmente la expresión

$$W_{\alpha}(u,m) = \frac{(m^{-1}u^{2})^{\frac{1}{2}\frac{(\alpha-n)}{2}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{\frac{(\alpha+n-2)}{2}}\, \Gamma(\frac{\alpha}{2})}\; J_{\frac{(\alpha-n)}{2}}(mu^{2})^{\frac{1}{2}}. \quad (VI,7;14)$$

VI.8. Justificación del método simbólico de Marcel Riesz.

Vamos a introducir el operador diferencial

$$\left\{ \square - \lambda \right\} \qquad (VI,8;1)$$

que, para $\lambda = 0$, se reduce al operador ultrahiperbólico n-dimensional. En esta fórmula, λ es un número complejo.

Consideremos las distribuciones

$$\left\{ \square - \lambda\ \delta \right\}^{*(-\alpha)} = \sum_{\nu} \frac{(-\alpha)(-\alpha-1)\ldots(-\alpha-\nu+1)}{\nu!} .$$

$$.\ (-1)^{\nu}\ \lambda^{\nu}\ \square^{*(-\alpha-\nu)} , \qquad (VI,8;2)$$

por definición, ponemos

$$\square^{*(-\alpha-\nu)} = R_{2(\alpha+\nu)}(u).$$

Hemos obtenido esta fórmula desarrollando formalmente el primer miembro de (VI,8;2) por la fórmula del binomio.

Observamos que la serie el segundo miembro converge en $D'_{\Gamma+}$ (distribuciones con soporte en Γ_+); cf.[10], pp. 177 y 179. En efecto, cualquiera que sea λ complejo, para ν suficientemente grande, $\square^{*(-a-\nu)} = R_{2(a+\nu)}(u)$ es una función continua.

Por otra parte, de acuerdo con la fórmula definitoria (IV,1;1) tenemos

$$R_{2(a+\nu)}(u) = \frac{u^{\frac{2(a+\nu)-n}{2}}}{H_n\left[2(a+\nu)\right]} = \frac{u^{\frac{2(a+\nu)-n}{2}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{2(a+\nu)-1}\, \Gamma(a+\nu)} .$$

$$.\Gamma\left(\frac{2(a+\nu)+2-n}{2}\right) . \qquad \text{(VI,8;3)}$$

Por lo tanto, el término general a_ν de la serie (VI,8;2) puede escribirse

$$a_\nu = \frac{(-1)a[(-1)(a+1)\ldots(-1)(a+\nu-1)](-1)^\nu \lambda^\nu u^{\frac{2a+2\nu-n}{2}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{\frac{2a+2\nu-1}{2}}\, \Gamma(a+\nu)\,\Gamma\left[\frac{2(a+\nu)+2-n}{2}\right]\, \nu!} =$$

$$= \frac{(-1)^\nu (-1)^\nu a(a+1)\ \ldots\ (a+\nu-1)\lambda^\nu\, u^{2a-n}\, u^{2\nu}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{2a-1}\, 2^{2\nu}\, \Gamma(a+\nu)\, \Gamma(\frac{2a+2\nu+2-n}{2})\, \nu!} =$$

$$= \frac{u^{\frac{2a-n}{2}} \, a(a+1)\ldots(a+\nu-1) \, \lambda^{\nu} u^{\nu}}{\pi^{\frac{n-2}{2}} \, 2^{2a-1} \, \Gamma(a) \, 2^{2\nu} a(a+1)\ldots(a+\nu-1)\Gamma[\frac{2(a+\nu)+2-n}{2}] \, \nu!}$$

$$= \frac{u^{\frac{2a-n}{2}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}} \, 2^{2a-1}\Gamma(a)} \; \frac{\lambda^{\nu} \quad u^{\nu}}{2^{2\nu}\Gamma(a+\nu+1-\frac{n}{2})} \; \frac{1}{\nu!} =$$

$$= \frac{u^{\frac{2a-n}{2}} \, (\lambda u)^{\nu}}{\pi^{\frac{n-2}{2}} \, 2^{2a-1} \, \Gamma(a) \, \frac{\Gamma(a+1-\frac{n}{2}+\nu)}{\Gamma(1+\nu)} \, (\nu!)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{u^{\frac{2a-n}{2}} \, (\lambda u)^{\nu}}{\pi^{\frac{n-2}{2}} \, 2^{2a-1} \, \Gamma(a) \, \nu! \, \frac{\Gamma(a+1-\frac{n}{2}+\nu)}{\Gamma(1+\nu)}} \, . \qquad \text{(VI,8;4)}$$

El factor

$$\frac{\Gamma(a-\frac{n}{2}+\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} 1 \; ; \qquad \text{(VI,8;5)}$$

de modo que la serie converge como una exponencial. Converge pues, sobre todo compacto de $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, de acuerdo con el Teorema XVI, p. 76 de [10], la serie es efectivamente convergente (en el sentido de la topología distribucional).

Con estas consideraciones, las manipulaciones formales de M. Riesz quedan perfectamente justificadas (en el sentido de las distribuciones).

Observemos finalmente que para obtener los resultados de M. Riesz hay que poner $-\lambda = m^2$.

CAPÍTULO VII

Solución elemental de la ecuación de las ondas con soporte en el semiespacio $t_0 \geqslant 0$.

VII.1. Expresión explícita de la solución retardada de la ecuación de las ondas.

Sea T una distribución con soporte contenido en el semiespacio $t_0 \geqslant 0$. Consideremos la ecuación

$$\Box S = T , \qquad (VII,1;1)$$

donde $\Box$ es el operador ultrahiperbólico n-dimensional definido por la fórmula (V,3;1).

Consideremos la convolución

$$R_2(u) * T , \qquad (VII,1;2)$$

donde $R_\alpha(u)$ está dada por (IV,1;1). Recordemos que u está definido por $u = t_0^2 - t_1^2 - \ldots - t_{n-1}^2$.

La convolución (VII,1;2) existe y es la única solución de la ecuación de las ondas cuyo soporte está contenido en el semiespacio $t_0 \geqslant 0$ (cf. (V,4;2)):

$$\Box R_2(u) = \delta(x) . \qquad (VII,1;3)$$

Nuestro objetivo es obtener la expresión explícita de de la fórmula resolutoria (VII,1;2) en el caso en que T es una función propiamente dicha, suficientemente regular.

Supongamos que

$$T = \varphi(t) \in C_0^\infty , \qquad \text{(VII,1;4)}$$

C_0^∞ es el espacio de funciones infinitamente diferenciales con soporte compacto y que además $\varphi(t)$ tiene su soporte contenido en el semiespacio $t_0 \geqslant 0$.

Consideremos la convolución

$$R_a(u) * \varphi(t) . \qquad \text{(VII,1;5)}$$

Si la parte real de a es suficientemente grande, $R_a(u)$ es una función (usual) continua y la convolución (VII,1;5) se escribe

$$R_a(u) * \varphi(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) \frac{[u(x-\xi)]^{\frac{(a-n)}{2}}}{H_n(a)} d\xi =$$

$$= \int_{C^x} \varphi(\xi) \frac{[u(x-\xi)]^{\frac{(a-n)}{2}}}{H_n(a)} d\xi . \qquad \text{(VII,1;6)}$$

En esta fórmula, con C^x designamos el volumen limitado por el cono del pasado de vértice x y la intersección de este cono con el hiperplano $\xi_0 = 0$.

La igualdad del segundo y el tercer miembro de (VII,1; 6) es consecuencia inmediata del hecho de que $\varphi(\xi) = 0$ para $\xi < 0$.

Vamos a efectuar en la integral un adecuado cambio de variable. Para ello consideremos el semihiperboloide

$$(t_0-\xi_0)^2 - (t_1-\xi_1)^2 - \ldots -(t_{n-1}-\xi_{n-1})^2 = r^2, \quad \text{(VII,1;7)}$$

de centro $t = (t_0, t_1, \ldots, t_{n-1})$, con

$$t_0-\xi_0 > 0 \quad \text{(VII,1;8)}$$

y llamaremos H_r a la porción de esta semihiperboloide que es interior al recinto.

Pongamos todavía

$$r^2 = R. \quad \text{(VII,1;9)}$$

Con estas notaciones, la integral (VII,1;6) puede escribirse

$$\int_{C^x} \varphi(\xi) \frac{[u(x-\xi)]^{\frac{(a-n)}{2}}}{H_n(a)} d\xi = \int_{C^x} \varphi(\xi) \frac{r^{n-a}}{H_n(a)} d\xi =$$

$$= \int_{C^x} \varphi(\xi) \frac{R^{\frac{a-n}{2}}}{H_n(a)} d\xi . \quad \text{(VII,1;10)}$$

Ahora expresamos el elemento de volumen n-dimensional $d\xi$ de la siguiente manera:

$$d\xi = dr\, dH_r \,. \qquad \text{(VII,1;11)}$$

Esta es la fórmula *hiperbólica* análoga a la forma *euclidiana* clásica

$$d\xi = d\rho \; dS(\rho) \,. \qquad \text{(VII,2;12)}$$

En esta fórmula, $d\rho$ es el elemento (euclideano) de longitud ρ y $dS(\rho)$ es el elemento de área (euclideano) de la esfera $S(\rho)$ de radio ρ. El espacio se descompone en esferas concéntricas de radios crecientes.

En (VII,1;11), dr es el elemento de longitud hiperbólica y dH_r es el elemento de área del hiperboloide (VII,1;7). Para una demostración de la fórmula (VII,1;11) ver [12], p. 56 (en particular, fórmula (89)).

Observemos todavía que, de acuerdo con la notación (VII,1;9) podemos escribir

$$dR = 2r dr, \qquad \text{(VII,1;13)}$$

$$d\xi = dr\, dH_r = \frac{1}{2}\, dR\, \frac{dH_r}{r} \,. \qquad \text{(VII,1;14)}$$

Introduzcamos la notación

$$I^{a}T = R_{2a}(u) * T. \qquad \text{(VII,1;15)}$$

$I^{\alpha}T$ es la integral (n-dimensional) *hiperbólica* de la distribución T (suponemos que T tiene su soporte contenido en el semiespacio $t_0 \geqslant 0$, cf. [10], p. 178). Con esta notación podemos escribir, teniendo en cuenta (VII,1;10)

$$I^{\frac{\alpha}{2}} \varphi = \int_{C^x} \varphi(\xi) \frac{R^{\frac{\alpha-n}{2}}}{H_n(\alpha)} d\xi \ . \qquad \text{(VII,1;16)}$$

De (VII,1;14) y (VII,1;16) obtenemos, equivalentemente,

$$I^{\frac{\alpha}{2}} \varphi = \frac{1}{2} \int_{C^x} \varphi(\xi) \frac{R^{\frac{\alpha-n}{2}}}{H_n(\alpha)} dR \frac{dH_r}{r} \ . \qquad \text{(VII,1;17)}$$

Esta integral extendida al volumen finito C^x, puede obviamente expresarse como una integral iterada:

$$I^{\frac{\alpha}{2}} \varphi = \frac{1}{2} \frac{1}{H_n(\alpha)} \int_0^{x_0} R^{\frac{\alpha-n}{2}} dR \int_{H_r} \varphi(\xi) \frac{dH_r}{r} \ . \qquad \text{(VII,1;18)}$$

Pongamos todavía

$$\int_{H_r} \varphi(\xi) \frac{dH_r}{r} = A(R), \qquad \text{(VII,1;19)}$$

con lo cual la (VII,1;18) se escribe

$$I^{\frac{a}{2}}\varphi = \frac{1}{2}\,\frac{1}{H_n(a)}\int_0^{x_0} R^{\frac{a-n}{2}+1-1}\,A(R)\,dR. \qquad (VII,1;20)$$

La función $A(R)$ es continua. Por lo tanto, la integral que aparece en el segundo miembro de (VII,1;20) existe si $\frac{a-n}{2}+1>0$, o sea, si

$$a > n-2,$$

o, más generalmente, si

$$\boxed{\operatorname{Re} a > n-2.} \qquad (VII,1;21)$$

Escribamos $I^{\frac{a}{2}}\varphi$ con la expresión explícita de $H_n(a)$, resulta

$$I^{\frac{a}{2}}\varphi = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\,2^{a-1}\,\Gamma(\frac{a}{2})\,\Gamma(\frac{a+2-n}{2})}\int_0^{x_0} R^{\frac{a+2-n}{2}-1}\,A(R)\,dR.$$

(VII,1;22)

Interesa (cf. (VII,1;3)) evaluar el segundo término de (VII,1;22) para $a = 2$, a pesar de que (cf. (VII,1;21)) la integral diverge si $n \geq 4$.

Recordemos la distribución unidimensional

$$Y_a(x) = \frac{x_+^{a-1}}{\Gamma(a)} \qquad \text{(VII,1;23)}$$

Para $a > 0$ (más generalmente, para $\operatorname{Re} a > 0$) $Y_a(x)$ es una función usual. Si $\operatorname{Re} a \leqslant 0$, $Y_a(x)$ es una distribución entera, y vale la siguiente fórmula (cf. [8], pp. 55-57, en particular, fórmula (1) de p. 57)

$$Y_a(x) = \operatorname{Pf} \frac{x_+^{a-1}}{\Gamma(a)}, \text{ si } a \text{ no es un entero negativo;} \qquad \text{(VII,1;24)}$$

$$Y_{-\ell}(x) = \delta^{(\ell)}(x), \text{ si } a = -\ell, \ \ell = 0,1,\ldots \qquad \text{(VII,1;25)}$$

La evaluación explícita de la $\operatorname{Pf} x_+^{a-1}$ se encuentra en [8], p. 48 y también en [13], p. 27 .

De acuerdo con lo que acabamos de decir, consideremos ahora la integral

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{a+2-n}{2})} \int_0^{x_0} R^{\frac{a+2-n}{2}-1} A(R)\,dR =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{a+2-n}{2})} \int_0^{x_0} t^{\frac{a+2-n}{2}-1} A(t)\,dt =$$

$$= \left\langle \frac{t_+^{\frac{a+2-n}{2}-1}}{\Gamma(\frac{a+2-n}{2})} , A(t) \right\rangle . \qquad \text{(VII,1;26)}$$

Ya hemos observado que si $n \geqslant 4$, este producto escalar (o sea, la integral que lo define) diverge para $a = 2$ (que es el valor de a que nos interesa).

Caben dos posibilidades, $n > 4$, impar, $n \geqslant 4$, par. Si $n > 4$ *es impar* , entonces el producto escalar (VII,1;26), para $a = 2$ vale

$$\frac{1}{\Gamma(\frac{4-n}{2})} \,\mathrm{Pf} \int_0^{x_0} t^{\frac{4-n}{2}-1} A(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{4-n}{2})} \left\langle \mathrm{Pf}\ t_+^{\frac{4-n}{2}-1} , A(t) \right\rangle . \qquad \text{(VII,1;27)}$$

En cambio, si $n \geqslant 4$ *es par* se verifica que

$$\left\{ \frac{a+2-n}{2} \right\}_{a=2} = \frac{4-n}{2} = 2 - \frac{n}{2} \qquad \text{(VII,1;28)}$$

es un entero no positivo. De acuerdo con (VII,1;25) tene mos en tal caso que el producto escalar (VII,1;26) vale, para $\alpha = 2$

$$\left\langle \frac{t_+^{\frac{4-n}{2}-1}}{\Gamma(\frac{4-n}{2})}, A(t) \right\rangle = \left\langle \delta^{(\frac{n-4}{2})}(t), A(t) \right\rangle =$$

$$= (-1)^{(\frac{n-4}{2})} \left\{ \frac{d^{\frac{n-4}{2}}}{dt^{\frac{n-4}{2}}} A(t) \right\}_{t=0} =$$

$$= (-1)^{\frac{n}{2}} A^{(\frac{n-4}{2})}(0). \qquad \text{(VII,1;29)}$$

Si ahora sustituímos (VII,1;27) en (VII,1;22) obtenemos el

<u>Teorema 6.</u>

Si $n > 4$ es impar, la solución retardada (es decir, que se anula para $t_0 < 0$) de la ecuación de las ondas

$$\square\, u = \varphi \qquad \text{(VII,1;30)}$$

es

$$u(t) = I^1 \varphi = R_2(u) * \varphi(t) = \frac{1}{4} \frac{1}{\pi^{\frac{n-2}{2}}} \cdot$$

$$. \ \mathrm{Pf} \int_0^{x_0} \frac{t^{\frac{4-n}{2}-1}}{\Gamma(\frac{4-n}{2})} A(t)\,dt. \qquad \text{(VII,1;31)}$$

donde la función $A(t)$ está definida por (VII,1;19).

Si en cambio $n \geqslant 4$ es par, obtenemos sustituyendo (VII,1;29) en (VII,1;22) el

Teorema 7.

Si $n \geqslant 4$ es par, la solución retardada de la ecuación de las ondas

$$\Box\, u = \varphi\,, \qquad \text{(VII,1;32)}$$

viene dada por la expresión

$$u = u(t) = I^1 \varphi = R_2(u) * \varphi(t) = \frac{1}{4} \frac{1}{\pi^{\frac{n-2}{2}}} (-1)^{\frac{n}{2}} A^{\frac{(n-4)}{2}}(0). \qquad \text{(VII,1;33)}$$

Hemos pues resuelto completamente nuestro problema para $n \geqslant 4$; en el caso $n < 4$ ($n = 1$, $n = 2$, $n = 3$) la integral que expresa la solución retardada es *convergente*.

VII.2. Conclusiones

La desigualdad (VII,1;21) constituye la dificultad esencial que frenó durante muchos años la solución del problema de la integración de la ecuación de las ondas, a saber, la integral (VII,1;22) existe *para* $Re\,a$ *suficientemente grande* y nosotros necesitamos conocer el valor de dicha integral para $a = 2$.

En el caso $n = 2$ (una dimensión espacial) la integral (VII,1;22) converge pues $2 = Re\,a > n-2 = 2-2 = 0$.

Tampoco hay dificultad en el caso $n = 3$ (dos dimensiones espaciales: ecuación del tambor o de la membrana vibrante), pues, si $n = 3$,

$$2 = Re\,a > 3-2 = 1.$$

En el caso $n = 4$, (tres dimensiones espaciales, caso esencial del espacio ordinario) resulta que

$$2 = Re\,a \not> 4 - 2 = 2$$

Por lo tanto, para $a = 2$ y $n = 4$, la integral (VII, 2;22) *diverge*.

Recién en 1905 con la introducción de la noción de *parte finita* de una integral infinita, debida a Hadamard se superó esa traba, que había durado más de 30 años.

La memoria de Marcel Riesz ([12]) simplificó esencialmente las difíciles consideraciones de Hadamard ([14]), por medio de la introducción del parámetro a y de la prolongación analítica con respecto a ese parámetro. Finalmente, en el año 1950, Laurent Schwartz ([10]) resolvió completamente el problema: $R_a(u)$ no es una función sino una *distribución*.

Podemos concluir diciendo que, en general, las soluciones elementales de las ecuaciones hiperbólicas son distribuciones.

CAPITULO VIII

Solución elemental simétrica del operador n-dimensional de Klein-Gordon iterado k-veces.

VIII.1. Representación de la solución elemental simétrica $\tilde{\Delta}(x,m,n,k)$ del operador de Klein-Gordon, iterado k-veces.

Consideraremos la función distribucional $W_+(x,a,m,n)$ definida por la fórmula (cf. (IV,2;1))

$$W_+(x,a,m,n) = \begin{cases} \dfrac{(m^{-2}s^2)^{\frac{(a-n)}{4}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{\frac{a+n-2}{2}}\, \Gamma(\frac{a}{2})} J_{\frac{a-n}{2}}(\sqrt{m^2 s^2}), & \text{si } x \in \Gamma_+, \\ 0 & \text{si } x \notin \Gamma_+, \end{cases} \qquad \text{(VIII,1;1)}$$

donde

$$s^2 = x_n^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2 \; ;$$

$$\Gamma_+ = \left\{ x \in R^n \; ; \; s^2 \geqslant 0, \; x_n \geqslant 0 \right\},$$

m un número positivo y $a \in \mathbb{C}$.

Recordemos que, de acuerdo con (VI,4;2), $W_+(x,2k,m,n)$ es la única solución elemental del operador de Klein-

-Gordon iterado k-veces, con soporte en Γ_+.

Introduzcamos ahora la función distribucional

$$W_-(x,a,m,n) = \begin{cases} \dfrac{(m^{-2}s^2)^{\frac{a-n}{4}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{\frac{a+n-2}{2}}\,\Gamma(\frac{a}{2})} J_{\frac{a-n}{2}}(\sqrt{m^2 s^2}), & \text{si } x \in \Gamma_-, \\ 0 & \text{si } x \notin \Gamma_-. \end{cases}$$

(VIII,1;2)

Esta función tiene propiedades completamente análogas a aquellas de W_+. En particular, $W_-(x,2k,m,n)$ es la única solución elemental del operador de Klein-Gordon, iterado k-veces, con soporte en Γ_-. Es decir, esta distribución permite resolver el problema de Cauchy en el semiplano $x_n \leqslant 0$, para el operador de Klein-Gordon.

Introduciremos una tercera solución elemental del operador iterado de Klein-Gordon:

$$\bar{\Delta}(x,m,n,k) = \frac{W_+(x,2k,m,n) + W_-(x,2k,m,n)}{2}. \quad \text{(VIII,1;3)}$$

Esta solución elemental es simétrica con respecto al origen. El caso particular $n = 4$, $k = 1$, aparece en la teoría cuántica de campos (cf. [15], p. 677, fórmula A.1

y [16], p. 421, tercera fórmula (A1-7)).

Queremos encontrar una expresión explícita de $\bar{\Delta}(x,m,m,k)$ en el caso particular

$$\begin{aligned} &n \geq 4 \ , \text{ par;} \\ &1 \leq k \leq \frac{n-2}{2} \ . \end{aligned} \qquad \text{(VIII,1;4)}$$

Escribamos por definición,

$$2\bar{\Delta}(x,m,n,k) = \lim_{a \to 2k} W_+(x,m,n,a) +$$

$$+ \lim_{a \to 2k} W_-(x,m,n,a). \qquad \text{(VIII,1;5)}$$

Empezaremos por evaluar el primer término del lado derecho de la ecuación (VIII,1;5).

Teniendo en cuenta (VIII,1;1) podemos escribir

$$W_+(x,m,n,a) = I_1(x,m,n,a) + I_2(x,m,n,a), \qquad \text{(VIII,1;6)}$$

donde hemos puesto, por definición,

$$I_1(x,m,n,a) = \frac{(m^{-2}s^2)^{\frac{a-n}{4}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{a+n-2}\, \Gamma(\frac{a}{2})} \cdot$$

$$\cdot \sum_{\nu=0}^{\frac{n}{2}-k-1} (-1)^{\nu} \left\{ \frac{(m^2 s^2)^{\frac{1}{2}}}{2} \right\}^{\frac{a-n}{2}+2\nu} \frac{1}{\nu!\ \Gamma(\frac{a-n}{2}+\nu+1)} ,$$

(VIII,1;7)

$$I_2(x,m,n,a) = \frac{(m^{-2}s^2)^{\frac{a-n}{4}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{a+n-2}\, \Gamma(\frac{a}{2})} \cdot$$

$$\cdot \sum_{\nu=\frac{n}{2}-k}^{\infty} (-1)^{\nu} \left\{ \frac{(m^2 s^2)^{\frac{1}{2}}}{2} \right\}^{\frac{a-n}{2}+2\nu} \frac{1}{\nu!\ \Gamma(\frac{a-n}{2}+\nu+1)} .$$

(VIII,1;8)

$I_2(s,m,n,a)$ tiene un valor finito para $a = 2k$. Con el cambio de índice $\mu = \nu - \frac{n-2k}{2}$, obtenemos

$$I_2(x,m,n,k) = \frac{(-1)^{\frac{n-2k}{2}} (m^2)^{\frac{n-2k}{2}} J_{\frac{n-2k}{2}}(\sqrt{m^2 s^2})}{\pi^{\frac{n}{2}}\, 2^{\frac{2k+n-2}{2}}\, (k-1)!\ (\sqrt{m^2 s^2})^{\frac{n-2k}{2}}} .$$

(VII,1;9)

Evaluemos ahora I_1. De (VIII,1;7) podemos escribir

$I_1(x,m,n,a)$ en la forma equivalente,

$$I_1(x,m,n,a) = \sum_{\nu=0}^{\frac{n-2k}{2}} \frac{(-1)^{\nu}\, m^{2\nu}\, (s^2)^{\frac{a-n}{2}+\nu}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{a+2\nu-1}\, \Gamma(\frac{a}{2})\nu!\, \Gamma(\frac{a-n}{2}+\nu+1)} .$$

(VIII,1;10)

Haciendo el cambio de índice $\mu = \nu - \frac{n-2k}{2}$ y tomando límites para $a \to 2k$, tenemos

$$\lim_{a\to 2k} I_1(x,m,n,a) = I_1(x,m,n,2k) =$$

$$= \frac{(m^2)^{\frac{n-2k}{2}}\, (-1)^{\frac{n-2k}{2}-1}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{n-3}\, (k-1)!} \sum_{\nu=0}^{\frac{n-2k}{2}-1} \frac{(-1)^{\mu}\, 2^{2\mu}\, m^{-2\mu}\, (s^2)^{-\mu-1}}{(\frac{n-2k}{2}-\mu-1)!\; \Gamma(-\mu)} .$$

(VIII,1;11)

Teniendo en cuenta la fórmula (cf. [8] , p. 57, fórmula (11))

$$\left.\frac{x_+^{a-1}}{\Gamma(a)}\right|_{a=-n} = \delta^{(n)}(x) ,$$

finalmente tenemos,

$$I_1(x,m,n,2k) = \frac{m^{n-2k-2}\,(-1)^{\frac{n-2k}{2}-1}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\,2^{n-3}\,(k-1)!}\,.$$

$$\cdot \sum_{\mu=0}^{\frac{n-2k}{2}-1} \frac{(-1)^{\mu}\,2^{2\mu}\,m^{-\mu}}{(\frac{n-2k}{2}-\mu-1)!}\,\delta^{(\mu)}(s^2)\,. \qquad \text{(VIII,1;12)}$$

Para la definición de $\delta^{(\mu)}(s^2)$ ver, por ejemplo, [8], p. 228.

Las ecuaciones (VIII,1;6), (VIII,1;9) y (VIII,1;12) dan en definitiva,

$$W_+(x,m,n,2k) = \frac{(m^2)^{\frac{n-2k-2}{2}}\,(-1)^{\frac{n-2k-2}{2}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\,2^{n-3}\,(k-1)!}\,.$$

$$\cdot \sum_{\mu=0}^{\frac{n-2k}{2}-1} \frac{(-1)^{\mu}\,2^{2\mu}\,m^{-2\mu}}{(\frac{n-2k}{2}-\mu-1)!}\,\delta^{(\mu)}(s^2) +$$

$$+ \frac{(-1)^{\frac{n-2k}{2}}\,(m^2)^{\frac{n-2k}{2}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\,2^{\frac{2k+n-2}{2}}\,(k-1)!}\,.\,\frac{J_{\frac{n-2k}{2}}(\sqrt{m^2s^2})}{(\sqrt{m^2s^2})^{\frac{n-2k}{2}}}\,. \qquad \text{(VIII,1;13)}$$

Procediendo con $W_-(x,m,n,a)$ exactamente como con $W_+(x,m,n,a)$, obtenemos

$$W_-(x,m,n,2k) = \frac{(m^2)^{\frac{n-2k}{2}-1}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{n-3}\,(k-1)!} \cdot$$

$$\cdot \sum_{\mu=0}^{\frac{n-2k}{2}-1} \frac{(-1)^{\mu}\, 2^{2\mu}\, m^{-2\mu}}{(\frac{n-2k}{2}-\mu-1)!}\, \delta^{(\mu)}(s^2) +$$

$$+ \frac{(-1)^{\frac{n-2k}{2}}\,(m^2)^{\frac{n-2k}{2}}\, J_{\frac{n-2k}{2}}(\sqrt{m^2 s^2})}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{\frac{2k+n-2}{2}}\,(k-1)!\,(\sqrt{m^2 s^2})^{\frac{n-2k}{2}}} \cdot \qquad \text{(VIII,1;14)}$$

De (VIII,1;13) y (VIII,1;14) obtenemos, finalmente, teniendo en cuenta (VIII,1;3) el siguiente teorema

Teorema 8.

Hipótesis

a) $n \geqslant 4$, par;

b) $1 \leqslant k \leqslant \frac{n-2}{2}$.

Tesis

La solución elemental simétrica $\bar{\Delta}(x,m,n,k)$ del operador n-dimensional de Klein-Gordon, iterado k-veces, admite la representación

$$\bar{\Delta}(x,m,n,k) = \frac{(m^2)^{\frac{n-2k-2}{2}} (-1)^{\frac{n-2k}{2}-1}}{\pi^{\frac{n-2}{2}} 2^{n-2} (k-1)!} .$$

$$\cdot \sum_{\mu=0}^{\frac{n-2k}{2}-1} \frac{(-1)^{\mu} 2^{2\mu} m^{-2\mu}}{(\frac{n-2k}{2}-\mu-1)!} \delta^{(\mu)}(s^2) +$$

$$+ \frac{(-1)^{\frac{n-2k}{2}} (m^2)^{\frac{n-2k}{2}} J_{\frac{n-2k}{2}}(\sqrt{m^2 s^2})}{\pi^{\frac{n-2}{2}} 2^{\frac{2k+n}{2}} (k-1)! (\sqrt{m^2 s^2})^{\frac{n-2k}{2}}} . \qquad (VIII,1;15)$$

VIII.2. Generalización de una fórmula de Källen.

En este parágrafo generalizaremos una fórmula debida a Källen.

Consideremos el operador definido por

$$(-1)\left\{ \Box - m^2 \right\} = \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + m^2 \quad ;(VIII,2;1)$$

que es el operador de Klein-Gordon, escrito con un signo diferente para adecuarlo a nuestras fórmulas de Källen.

La llamada solución elemental simétrica del operador (VIII,2;1) está definida por [18] , p. 412, fórmula (6a):

$$\bar{\Delta}(\sigma^2, m^2) = \frac{1}{4\pi}\,\delta(\sigma^2) + \frac{(-1)\,m^2\; J_1(\sqrt{m^2\sigma^2})}{8\pi\,\sqrt{m^2\sigma^2}}\,. \qquad \text{(VIII,2;2)}$$

En esta fórmula hemos escrito $\sigma^2 = x_4^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$, si el miembro derecho es no negativo y cero en otro caso. J_1 es la clásica función de Bessel de orden 1.

Definiremos una función de dos variables reales s,t. Poniendo en (VIII,2;2) $\sigma^2 = s$, $m^2 = t$, obtenemos la función distribucional

$$\bar{\Delta}(s,t) = \frac{1}{4\pi}\,\delta(s) + \frac{(-1)\,t\; J_1(\sqrt{st})}{8\pi\,\sqrt{st}}\,, \qquad \text{(VIII,2;3)}$$

si $s,t \geqslant 0$ e igual a cero si $s,t < 0$.

Consideraciones físicas permitieron a Källen (cf. [17]) establecer la ecuación integral

$$h(s) = \int_0^{\infty} \bar{\Delta}(s,t)\,f(t)\,dt; \qquad \text{(VIII,2;4)}$$

cuya solución (a la que Källen arriva por consideraciones heurísticas, sin imponer condiciones sobre la función desconocida $f(t)$) es

$$f(t) = 16\pi^2 \int_0^\infty \bar{\Delta}(t,s)h(s)ds. \qquad \text{(VIII,2;5)}$$

En este capítulo generalizaremos las fórmulas recíprocas (VIII,2;4) y (VIII,2;5).

Consideremos el operador n-dimensional de Klein-Gordon, iterado k-veces:

$$(-1)^k \left\{\square - m^2\right\}^k = \left\{\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2} + m^2\right\}^k . \qquad \text{(VIII,2;6)}$$

Llamaremos $\bar{\Delta}(\sigma^2,m,k)$ a la solución elemental simétrica del operador (VIII,2;6), donde σ^2 está definida por la fórmula $\sigma^2 = x_n^2 - x_1^2 - \ldots - x_{n-1}^2$, si el lado derecho es >0, y cero fuera.

Construiremos, siguiendo a Källen, la función distribucional $\bar{\Delta}(s,t,k)$ y escribimos la ecuación integral, análoga a (VIII,2;4);

$$h(s) = \int_0^\infty \bar{\Delta}(s,t,k) f(t) dt. \qquad \text{(VIII,2;7)}$$

Nuestro propósito es resolver esta ecuación, con adecuadas condiciones sobre la función desconocida $f(t)$, cuya solución coincide, cuando $n = 4$, $k = 1$ con la fórmula de Källen (VIII,2;5).

Escribamos (cf. (VIII,1;15)) la solución elemental simétrica (con respecto al origen) del operador de Klein-Gordon iterado k-veces.

$$\bar{\Delta}(x;n,k,m) = \frac{(m^2)^{\frac{n-2k-2}{2}} (-1)^{\frac{n-2k-2}{2}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{n-2}\, (k-1)!} \cdot$$

$$\cdot \sum_{\mu=0}^{\frac{n-2k}{2}-1} \frac{(-1)^{\mu}\, 2^{2\mu}\, m^{-2\mu}\, \delta^{(\mu)}(\sigma^2)}{(\frac{n-2k}{2} - \mu - 1)!} +$$

$$+ \frac{(-1)^{\frac{n-2k}{2}} (m^2)^{\frac{n-2k}{2}} \cdot J_{\frac{n-2k}{2}}(\sqrt{m^2\sigma^2})}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{\frac{2k+n}{2}}\, (k-1)!\, \left\{\sqrt{m^2\sigma^2}\right\}^{\frac{n-2k}{2}}}, \qquad \text{(VIII,2;8)}$$

donde $\sigma^2 = x_n^2 - x_1^2 - \ldots - x_{n-1}^2$ cuando el lado derecho es no negativo y cero fuera.

En lo que sigue, n será un entero par $\geqslant 4$ y k entero tal que $1 \leqslant k \leqslant \frac{n-2}{2}$.

Poniendo en (VIII,2;8) $\sigma^2 = s$ y $m^2 = t$, construiremos una función de dos variables reales s y t, a saber,

$$\bar{\Delta}(s,t) = \frac{t^{\frac{n-2k-2}{2}} (-1)^{\frac{n-2k-2}{2}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}} 2^{n-2} (k-1)!} .$$

$$\cdot \sum_{\mu=0}^{\frac{n-2k}{2}-1} \frac{(-1)^{\mu} 2^{2\mu} t^{-\mu}}{(\frac{n-2k}{2}-\mu-1)!} \delta^{(\mu)}(s) +$$

$$+ \frac{(-1)^{\frac{n-2k}{2}} t^{\frac{n-2k}{2}}}{\pi^{\frac{n-2k}{2}} 2^{\frac{2k+n}{2}} (k-1)!} \frac{J_{\frac{n-2k}{2}}(\sqrt{st})}{(\sqrt{st})^{\frac{n-2k}{2}}} . \quad (VIII,2;9)$$

Usaremos la función $\bar{\Delta}(s,t)$ para escribir la ecuación integral generalizada (análoga a la (VIII,2;4)), a saber,

$$h(s) = \int_0^{\infty} \bar{\Delta}(s,t) f(t)\, dt. \quad (VIII,2;10)$$

El principal objetivo de este parágrafo es demostrar que la siguiente proposición es válida.

Teorema 9

Hipótesis

a) $f(t)$ es diferenciable en $[0,\infty)$, (VIII,2;11)

b) $\displaystyle\int_0^\infty |f(t)|\, t^{\frac{n-2k}{2}}\, dt < \infty$; (VIII,2;12)

c) n entero par ≥ 4; (VIII,2;13)

d) k entero; $1 \leq k \leq \frac{n-2}{2}$. (VIII,2;14)

Tesis

Vale la siguiente fórmula:

$$f(t) = \pi^{n-2}\, 2^{2k+n-2} \left\{(k-1)!\right\}^2 \int_0^\infty \bar{\Delta}(s,t)\, h(s)\, ds. \qquad \text{(VIII,2;15)}$$

Demostración

De (VIII,2;9) y (VIII,2;10), concluimos

$$h(s) = \frac{(-1)^{\frac{n-2k}{2}-1}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{n-2}\, (k-1)!} \; .$$

$$\cdot \sum_{\mu=0}^{\frac{n-2k}{2}-1} \frac{(-1)^{\mu}\, 2^{2\mu}\, \delta^{(\mu)}(s)}{\left(\frac{n-2k}{2} - 1 - \mu\right)!} \int_0^\infty t^{\frac{n-2k-2}{2}-\mu} f(t)\, dt \; +$$

$$+ \frac{(-1)^{\frac{n-2k}{2}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{\frac{2k+n-2}{2}}\, (k-1)!}\, \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{f(t)\, t^{\frac{n-2k}{2}}\, J_{\frac{n-2k}{2}}(\sqrt{st})}{(\sqrt{st})^{\frac{n-2k}{2}}}\, dt. \qquad \text{(VIII,2;16)}$$

Escribamos, para simplificar,

$$C_{\mu,n,k} = \int_0^\infty f(t)\, t^{\frac{n-2k}{2} - \mu}\, dt. \qquad \text{(VIII,2;17)}$$

Con esta notación, (VIII,2;16) puede escribirse como

$$h(s) = \frac{(-1)^{\frac{n-2k}{2}-1}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{n-2}\,(k-1)!} \sum_{\mu=0}^{\frac{n-2k}{2}-1} \frac{(-1)^{\mu}\, 2^{2\mu}\, C_{\mu,n,k}\, \delta^{(\mu)}(s)}{(\frac{n-2k}{2} - 1 - \mu)!} +$$

$$+ \frac{(-1)^{\frac{n-2k}{2}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{\frac{2k+n-2}{2}}\,(k-1)!} \left(\mathcal{H}_{\frac{n-2k}{2}}\left\{f(t)\right\}\right). \qquad \text{(VIII,2;18)}$$

En esta fórmula denotamos con $\left(\mathcal{H}_{\frac{n-2k}{2}}\left\{f(t)\right\}\right)$ la transformada de Hankel de orden $\frac{n-2k}{2}$ de la función $f(t)$ (cf. (I,4;20)) .

Recordemos la fórmula (cf. [10], p. 122, fórmula (V, 3;5))

$$s^{\ell}\, \delta^{(\mu)}(s) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell > \mu, \\ (-1)^{\ell} \dfrac{\mu!}{(\mu-1)!}\, \delta^{(\mu-\ell)}(s) & \text{si } \ell \leqslant \mu . \end{cases} \qquad \text{(VIII,2;19)}$$

Multiplicando ambos miembros de (VIII,2;18) por la función (que es el núcleo de Hankel),

$$\frac{1}{2}\, s^{\frac{n-2k}{2}} \frac{J_{\frac{n-2k}{2}}(\sqrt{st})}{(\sqrt{st})^{\frac{n-2k}{2}}}$$

obtenemos, teniendo en cuenta (VIII,2;19) y la fórmula de inversión de Hankel (cf. (I,4;20)), si multiplicamos ambos miembros por constantes adecuadas,

$$f(t) = C_1(n,k)\ .$$

$$\cdot \int_0^\infty h(s) \frac{(-1)^{\frac{n-2k}{2}}\, s^{\frac{n-2k}{2}}}{\pi^{\frac{n-2k}{2}}\, 2^{\frac{2k+n}{2}}\, (k-1)!\, (\sqrt{st})^{\frac{n-2k}{2}}}\, J_{\frac{n-2k}{2}}(\sqrt{st})\, ds. \tag{VIII,2;20}$$

En esta fórmula hemos puesto

$$C_1(n,k) = \pi^{n-2}\, 2^{2k+n-2}\, [(k-1)!]^2\ . \tag{VIII,2;21}$$

Observemos ahora que si, en la fórmula (VIII,2;9), permutamos las letras s y t obtenemos

$$\bar{\Delta}(t,s) = \frac{s^{\frac{n-2k}{2}-1} \quad (-1)^{\frac{n-2k}{2}-1}}{\pi^{\frac{n-2}{2}} \quad 2^{n-2} \quad (k-1)!} \cdot$$

$$\cdot \sum_{\mu=0}^{\frac{n-2k}{2}-1} \frac{(-1)^{\mu} \quad 2^{2\mu} \quad s^{-\mu}}{(\frac{n-2k}{2}-\mu-1)!} \quad \delta^{(\mu)}(t) +$$

$$+ \frac{(-1)^{\frac{n-2k}{2}} s^{\frac{n-2k}{2}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}} \quad 2^{\frac{2k+n}{2}} (k-1)! (\sqrt{st})^{\frac{n-2k}{2}}} J_{\frac{n-2k}{2}}(\sqrt{st}).$$

(VIII,2;22)

Sumando y restando al factor que multiplica a h(s) en el integrando de (VIII,2;20) el primer término del segundo miembro de (VIII,2;22), resulta que la fórmula (VIII,2; 20) puede ser escrita como

$$f(t) = \pi^{\frac{n-2}{2}} \; 2^{2k+n-2} \left\{ (k-1)! \right\}^2 \int_0 \bar{\Delta}(t,s) h(s) ds +$$

$$+ C_2(n,k) \sum_{\mu=0}^{\frac{n-2k}{2}-1} \frac{(-1)^{\mu} \quad 2^{2\mu} \quad \delta^{(\mu)}(t)}{(\frac{n-2k}{2}-1-\mu)!} \; d_{\mu,k,n}.$$

(VIII,2;23)

En esta fórmula ponemos

$$C_2(n,k) = \pi^{\frac{n-2}{2}} 2^{2k} (-1)^{\frac{n-2k}{2} - 1} (k-1)! \qquad \text{(VIII,2;24)}$$

y

$$d_{\mu,k,n} = \int_0^\infty h(s)\, s^{\frac{n-2k-2}{2} - \mu}\, ds. \qquad \text{(VIII,2;25)}$$

Evaluaremos explícitamente la suma que aparece en el segundo miembro de (VIII,2;23). Para ello empezamos por evaluar los números $d_{\mu,k,n}$, esto es, las integrales (VIII,2;25). De acuerdo con (VIII,2;18) y (VIII,2;25) obtenemos $(0 \leqslant \nu \leqslant \frac{n-2k-2}{2})$

$$d_{\nu,k,n} = \frac{(-1)^{\frac{n-2k}{2} - 1}}{\pi^{\frac{n-2}{2}} 2^{n-2} (k-1)!} .$$

$$\cdot \sum_{\mu=0}^{\frac{n-2k}{2} - 1} \frac{(-1)^{\mu}\, 2^{2\mu} \int_0^\infty t^{\frac{n-2k-2}{2} - \mu} f(t)\, dt}{(\frac{n-2k}{2} - 1 - \mu)!} .$$

$$\cdot \int_0^\infty s^{\frac{n-2k-2}{2} - \nu}\, \delta^{(\mu)}(s)\, ds \quad +$$

$$+\frac{(-1)^{\frac{n-2k}{2}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\,2^{\frac{2k+n-2}{2}}\,(k-1)!}\int_0^\infty s^{\frac{n-2k-2}{2}-\mu}\left(\mathcal{H}_{\frac{n-2k}{2}}\left\{f(t)\right\}\right)\,ds =$$

$$= I_1(n,k,\nu) + I_2(n,k,\nu). \qquad \text{(VIII,2;26)}$$

Empezamos por evaluar I_1. Teniendo en cuenta la fórmula (VIII,2;19) probamos que todos los términos que aparecen en la suma I_1 se anulas, excepto uno que es el correspondiente a

$$\mu = \frac{n-2k-2}{2} - \nu .$$

Entonces I_1 puede escribirse

$$I_1(n,k,\nu) =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{n-2k}{2}-1}\,2^{-2k-2\nu}\left(\frac{n-2k-2}{2}-\nu\right)!}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\,(k-1)!\;\nu\,!} \,.$$

$$\cdot\int_0^\infty f(t)\,t^{\nu}\,dt, \qquad \text{(VIII,2;27)}$$

con n,k fijos y $0 \leqslant \nu \leqslant \frac{n-2k-2}{2}$.

Calculemos I_2. Tenemos

$$I_2(n,k,\nu) = C_3(n,k)\int_0^\infty s^{\frac{n-2k-2}{2}-\nu} \, ds \, .$$

$$\int_0^\infty f(t)\, t^{\frac{n-2k}{2}} \frac{J_{\frac{n-2k}{2}}(\sqrt{st})}{(\sqrt{st})^{\frac{n-2k}{2}}} \, dt \, , \qquad \text{(VIII,2;28)}$$

donde

$$C_3(n,k) = \frac{(-1)^{\frac{n-2k}{2}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}} \, 2^{\frac{2k+n}{2}} \, (k-1)!} \, . \qquad \text{(VIII,2;29)}$$

Probaremos más adelante que en la integral iterada que aparece en el segundo miembro de (VIII,2;28) es lícito el cambio de orden de integración.

Admitiendo esto por un momento, podemos escribir (VIII, 2;28) como

$$I_2(n,k,\nu) = C_3(n,k)\int_0^\infty f(t)\, t^{\frac{n-2k}{2}} \, dt \, .$$

$$\cdot \int_0 \frac{s^{\frac{n-2k-2}{2}} J_{\frac{n-2k}{2}}(\sqrt{st})}{(\sqrt{st})^{\frac{n-2k}{2}}} ds. \qquad \text{(VIII,2;30)}$$

Probaremos ahora que el cambio del orden de integración es lícito. Para ello comenzamos por llamar $I(n,\nu,k)$ a la integral que aparece en el lado derecho de (VIII,2; 28). Podemos escribir

$$I(n,\nu,k) = \lim_{a\to\infty} \left\{ \int_0^a s^{\frac{n-2k-2}{2}-\nu} ds \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \int_0^\infty \frac{f(t)\, t^{\frac{n-2k}{2}} J_{\frac{n-2k}{2}}(\sqrt{st})\, dt}{(\sqrt{st})^{\frac{n-2k}{2}}} \right\} \stackrel{\text{def}}{=\!=} \lim_{a\to\infty} I_a(n,\nu,k).$$

(VIII,2;31)

Demostraremos ahora que en la integral iterada $I_a(n,\nu,k)$ se puede cambiar el orden de integración. Es suficiente, en virtud del teorema de Fubini, probar que vale la siguiente fórmula

$$\int_0^\infty |f(t)|\, t^{\frac{n-2k}{2}} dt \int_0^a s^{\frac{n-2k-2}{2}-\nu} \left| \frac{J_{\frac{n-2k}{2}}(\sqrt{st})}{(\sqrt{st})^{\frac{n-2k}{2}}} \right| ds \quad .$$

(VIII,2;32)

Empezamos por recordar la conocida relación (cf. [6], p. 24, fórmula (11)),

$$\frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda} \overset{\text{def}}{=\!=} R_\lambda(x) = \frac{1}{2\lambda\sqrt{\pi}\;\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})} \,.$$

$$\cdot \int_0^\pi (\operatorname{sen}\theta)^{2\lambda}\, e^{-ix\cos\theta}\, d\theta \,,$$

válida para $\operatorname{Re}\lambda > -\frac{1}{2}$. De esta fórmula concluimos

$$\left| R_{\frac{n-2k}{2}}(\sqrt{st}) \right| < \frac{\int_0^\pi |\operatorname{sen}\theta|^{2n-2k}\, d\theta}{2^{\frac{n-2k}{2}}\sqrt{\pi}\;\Gamma(\frac{n-2k}{2}+1)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\frac{n-2k}{2}}\,(\frac{n-2k}{2})!} \overset{\text{def}}{=\!=} C_{n,k} \,. \qquad \text{(VIII,2;33)}$$

Como consecuencia de la fórmula (VIII,2;33) tenemos

$$\int_0^a s^{\frac{n-2k-2}{2}-\nu} \left| R_{\frac{n-2k}{2}}(\sqrt{st}) \right| ds \leqslant$$

$$\leqslant C_{n,k}\int_0^a s^{\frac{n-2k-2}{2}}\,ds = C_{n,k}\frac{a^{\frac{n-2k}{2}}}{\frac{n-2k}{2}} \overset{\text{def}}{=\!=} B_{n,k}\,. \qquad \text{(VIII,2;34)}$$

En virtud de (VIII,2;11), llegamos a

$$\int_0^a |f(t)|\,t^{\frac{n-2k}{2}}\,dt\int_0^a s^{\frac{n-2k-2}{2}-\nu}\left|R_{\frac{n-2k}{2}}(\sqrt{st})\right|ds \leqslant$$

$$\leqslant B_{n,k}\int_0^\infty |f(t)|\,t^{\frac{n-2k}{2}}\,dt < \infty. \qquad \text{(VIII,2;35)}$$

Entonces la fórmula (VIII,2;32) está probada y en consecuencia también (VIII,2;30).

Evaluemos, explícitamente, la integral interior del lado derecho de la fórmula (VIII,2;30), que llamaremos

$$L(n,k,\nu,t) \overset{\text{def}}{=\!=} \int_0^\infty s^{\frac{n-2k-2}{2}-\nu} R_{\frac{n-2k}{2}}(\sqrt{st})\,ds. \qquad \text{(VIII,2;36)}$$

Usaremos la fórmula (cf. [19], p. 196, fórmula (7,9;1))

$$\int_0^\infty R_\lambda(x)\;x^{z-1}\,dx = \frac{2^{z-\lambda-1}\Gamma(\frac{z}{2})}{\Gamma(\lambda-\frac{z}{2}+1)}\,, \qquad \text{(VIII,2;37)}$$

válida cuando z pertenece a la banda

$$0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \lambda + \frac{z}{2} . \qquad \text{(VIII,2;38)}$$

Poniendo $\lambda = \frac{n-2k}{2}$ en la fórmula anterior, obtenemos

$$\int_0^\infty R_{\frac{n-2k}{2}}(x)\, x^{z-1} dx = \frac{2^{z-\frac{n-2k}{2}-1}\, \Gamma(\frac{z}{2})}{\Gamma(\frac{n-2k}{2} - \frac{z}{2} + 1)} \quad ; \qquad \text{(VIII,2;39)}$$

y esta fórmula es válida en la banda

$$0 < \operatorname{Re} z < \frac{n-2k}{2} + \frac{z}{2} .$$

Con el cambio de variable $\sqrt{st} \to x$ en la fórmula (VIII,2;36) resulta

$$L(n,\nu,k,t) = \frac{2}{t^{\frac{n-2k}{2}-\nu}} \int_0^\infty x^{n-2k-2\nu-1} R_{\frac{n-2k}{2}}(x)\, dx.$$

(VIII,2;40)

De (VIII,3;39) y (VIII,3;30), obtenemos

$$L(n,\nu,k,t) = \frac{1}{t^{\frac{n-2k}{2}-\nu}} \; \frac{2^{\frac{n-2k}{2}-\nu}\;\Gamma(\frac{n-2k-2}{2})}{\Gamma(\nu+1)} \;; \qquad (VIII,2;41)$$

y esta fórmula es válida, teniendo en cuenta (VIII,2;40) si, para n y k fijos, ν satisface a la restricción

$$0 < n-2k-\nu < \frac{n-2k}{2} + \frac{3}{2} \, . \qquad (VIII,2;42)$$

De (VIII,2;30), (VIII,2;36) y (VIII,2;41), obtenemos

$$I_2(n,\nu,k) = \frac{(-1)^{\frac{n-2k}{2}}\; 2^{-2k}\; \Gamma(\frac{n-2k-2}{2})}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\;(k-1)!\;\Gamma(\nu+1)} \int_0^{\infty} f(t)\, t^{\nu}\, dt. \qquad (VIII,2;43)$$

Esta fórmula ha sido obtenida con la condición (VIII, 2;42). Observemos que ambos miembros de (VIII,2;43), el lado izquierdo definido por la fórmula (VIII,2;30) y el lado derecho son funciones analíticas de la variable compleja ν.

El lado izquierdo de (VIII,2;43) es válido para $0 \leqslant \nu \leqslant \frac{n-2k}{2} - 1$; y el lado derecho tiene sentido para los mismos valores de ν, como consecuencia de (VIII,2;12).

Entonces, apelando al principio de la continuación analítica, la fórmula (VIII,2;43) es válida para todo ν tal que $0 \leqslant \nu \leqslant \frac{n-2k}{2} - 1$.

Observemos que la fórmula (VIII,2;43) puede escribirse, equivalentemente,

$$I_2(n,\nu,k) = \frac{(-1)^{\frac{n-2k}{2}}\, 2^{-2k-2\nu}\, \left(\frac{n-2k-2}{2} - \nu\right)!}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\,(k-1)!\;\; \nu\,!}$$

$$\cdot \int_0^\infty f(t)\; t^{\nu}\; dt. \qquad (VIII,2;44)$$

De (VIII,2;27) y (VIII,2;44), obtenemos

$$I_1(n,k,\nu) + I_2(n,k,\nu) = 0\ , \qquad (VIII,2;45)$$

para $0 \leqslant \nu \leqslant \frac{n-2k}{2} - 1$.

De (VIII,2;26) y (VIII,2;45), concluimos que

$$d_{n,k,\nu} = 0 \qquad (VIII,2;46)$$

para $n,k,$ fijos y $0 \leqslant \nu \leqslant \frac{n-2k}{2} - 1$.

De (VIII,2;23) y (VIII,2;46), finalmente obtenemos

$$f(t) = \pi^{n-2} \; 2^{2k+n-2} \; [(k-1)!]^2 \int_0^\infty \bar{\Delta}(s,t)h(s)ds, \tag{VIII,2;47}$$

y esta fórmula coincide con la tesis del Teorema 9.

Observemos que las fórmulas recíprocas (VIII,2;10) y (VIII,2;15) son idénticas, para $n = 4$ y $k = 1$, a las fórmulas (VIII,2;4) y (VIII,2;5) debidas a Källen.

Notemos finalmente que las fórmulas de Källen tiene interesantes aplicaciones en la teoría cuántica de campos (cf. entre otros, [18]).

BIBLIOGRAFIA.

[1] S. Bochner, "Vorlesungen über Fouriersche Integrale", Leipzig, 1932.

[2] L. Schwartz,"Méthodes mathématiques pour les sciences physiques", 2° ed., Hermann, París, 1965.

[3] A. Erdelyi, editor, "Tables of Integral Transforms", Volumen II, Mc Graw-Hill, New York, 1954.

[4] F. Oberhettinger, "Tables of Bessel Transforms", Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[5] A. Erdelyi, editor, "Higher Transcendental functions", Volúmenes I y II, Mc Graw-Hill, New York, 1953.

[6] G. N. Watson, "A treatise on the theory of Bessel functions", Segunda Edición, Cambridge, University Press, 1944.

[7] G. M. Fichtenholz , "Curso de cálculo diferencial e integral" (en ruso), Moscú, 1960.

[8] I. M. Gelfand y G. E. Shilov, "Generalized Functions" Volumen I, Academic Press, New York, 1964.

[9] A. González Domínguez y S. E. Trione, "On the Laplace transforms of retarded, Lorentz-invariant functions", Trabajos de Matemática 13, IAM-CONICET, Buenos Aires, 1977 y Advances in Mathematics,Volumen 30, número 2, 51-62, Noviembre de 1978.

[10] L. Schwartz, "Théorie des distributions", París, Hermann, 1966.

[11] S. E. Trione, "On the Fourier transforms of retarded

Lorentz-invariant functions", Journal of Mathematical Analysis and Applications, New York, USA, Vol. 84, n°1, pp. 73-112, 1980.

[12] M. Riesz, "L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy", Acta Math. 81, pp. 1-223, 1949.

[13] S. E. Trione, "Sobre la integral de Riemann-Liouville". Cursos y Seminarios de Matemática, Fascículo 29. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de Buenos Aires, 215 páginas, 1981.

[14] J. Hadamard, "Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques", París , Hermann, 1932.

[15] J. Schwinger, "Quantum Electrodynamics II, Vacuum polarization and self-energy", Physical Review, Volumen 75, 651-679, 1949.

[16] J. M. Jauch y F. Rohrlich, "The theory of photons and electrons", Addison-Wesley, Cambridge, Mass, 1955.

[17] G. Källen y J. Toll, "Integral representations for the vacuum expectation value of three scalar fields", Helvetica Physica Acta, XXXIII, 753-772, 1960.

[18] "Relations de dispersion et particules élémentaires", Hermann, París, 1960.

[19] E. C. Titchmarsh, "Introduction to the theory of Fourier integrals", Oxford, Clarendon Press, 1948.

Glosario de Símbolos

ISSN 0325-6677

Buenos Aires, Argentina.

Abril de 198.