ISSN 1853-709X

Fascículo 21

Cursos y seminarios de matemática

Serie A

Philippe Tondeur

Categorías y funtores

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2011

Cursos y Seminarios de Matemática – Serie A

Fascículo 21

ISSN 1853-709X (Versión Electrónica)
ISSN 0524-9643 (Versión Impresa)

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

FASCICULO **21** cursos y seminarios de matemática

Philippe Tondeur

CATEGORIAS Y FUNCTORES

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES – DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

1965

PREFACIO

Estas notas dan una introducción a las nociones de categorías, funtores y transformaciones naturales, usadas por primera vez, por S. Eilemberg y S. Mac Lane en [2]. Las notas han sido escritas para un breve curso en la Universidad de Buenos Aires.

Las principales fuentes son los artículos [4] y [5] de A. Grothendieck, la tesis de S. Fakir [3] y lecciones de A. Dold.

Confío en que esta presentación habrá de contribuir a una mayor difusión de estas nociones, que son de fundamental importancia. Finalmente quisiera agradecer a L. Recht por su amable colaboración durante la redacción de estas notas.

PHILIPPE TONDEUR

Buenos Aires, junio de 1964.

CAPITULO 1 :

CATEGORIAS

1.1. Definición y ejemplos de categorías.

DEFINICION 1.1.1.: Una categoría $\mathcal{K}$ consiste de:

(i) una clase de objetos $A, B, C, \ldots$;

(ii) para cada par (A,B) de objetos se da un conjunto $[A,B]$ cuyos elementos se llaman morfismos de A en B o morfismos con dominio A y rango B (escribimos la relación $\alpha \in [A,B]$ en la forma $\alpha : A \dashrightarrow B$ o $A \overset{\alpha}{\dashrightarrow} B$). Estos conjuntos son distintos dos a dos, es decir: $(A,B) \neq (A',B')$ implica $[A,B] \cap [A',B'] = \emptyset$;

(iii) para cada terna (A,B,C) de objetos se da una aplicación

$$[A,B] \times [B,C] \dashrightarrow [A,C]$$
$$(\alpha, \beta) \rightsquigarrow \beta\alpha$$

llamada composición de morfismos ;

(iv) para cada objeto A se da un elemento $1_A \in [A,A]$, llamado el morfismo identidad del objeto A .

Estos datos se hallan sujetos a los siguientes dos axiomas:

(1) si $\alpha \in [A,B]$, $\beta \in [B,C]$, $\gamma \in [C,D]$, entonces $\gamma(\beta.\alpha) = (\gamma\beta)\alpha$;

(2) si $\alpha \in [A,B]$, entonces $\alpha 1_A = \alpha$, $1_B \alpha = \alpha$.

Observación: El morfismo 1_A , cuya existencia está garantizada por el dato (iv), está determinado en forma única gracias al axioma (2) . En efecto, si $1'_A$ es un segundo morfismo con las mismas propiedades entonces $1_A = 1_A 1'_A = 1'_A$.

Ejemplo 1.1.2.: Una clase de clases $A, B, C, \ldots$, con morfismos

$$[A,B] = \begin{cases} \emptyset & \text{si } A \neq B \\ \{1_A\} & \text{si } A = B \end{cases}$$

y composición obvia de morfismos.

Ejemplo 1.1.3.: Un conjunto de clases $A, B, C, \ldots$, ordenado por inclusión, con morfismos

$$[A,B] = \begin{cases} \emptyset & \text{si } A \not\subset B \\ i_{AB} & \text{si } A \subset B\,;\ i_{AB} : A \dashrightarrow B \text{ es la inyección} \end{cases}$$

y la composición usual de aplicaciones: $i_{BC}\, i_{AB} = i_{AC}$.

Ejemplo 1.1.4.: Más generalmente, un conjunto parcialmente ordenado (S, con elementos $A, B, C, \ldots$, y morfismos

$$[A,B] = \begin{cases} \emptyset & \text{si } A \neq B \\ \text{un elemento notado } i_{AB} & \text{si } A \leq B \end{cases}$$

Un caso especial de esta situación es un conjunto de proposiciones ordenado por implicaciones.

Más importantes son los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1.1.5.: La categoría Ens cuyos objetos son los conjuntos y que tiene por morfismos las aplicaciones entre conjuntos, con la composición usual. Por supuesto aquí aparece el inconveniente del empleo de la palabra todos. Por esta razón hablamos de una clase de objetos y no de un conjunto de objetos en la definición de categoría. Estas dificultades se pueden obviar limitando a priori el rango de objetos a considerar (ver p. ej. Samer, Math. 80(1962), 163-176). No discutiremos aquí estas cuestiones.

Ejemplo 1.1.6.: Si tomamos los mismos objetos que en **Ens**, pero como conjunto de morfismos $[A, B]$ al conjunto de relaciones de A en B, esto es, el conjunto de partes de $A \times B$, con la composición habitual de relaciones, obtenemos una nueva categoría.

En los ejemplos que anteceden y en los que siguen en los que los conjuntos $[A, B]$ no sean disjuntos, como se requiere en la definición, se utiliza algún artificio para obtenerlos disjuntos.

Ejemplo 1.1.7.: La categoría $\mathcal{G}$ de los grupos tiene como objetos a los grupos y como morfismos a los homomorfismos de grupos con la composición usual de homomorfismos. Si solo consideramos grupos abelianos obtenemos la categoría $\mathcal{AG}$ de los grupos abelianos.

Ejemplo 1.1.8.: Sea Λ un anillo. La categoría ${}_{\Lambda}\mathcal{M}$ de los Λ-módulos izquierdos tiene por objetos los Λ-módulos izquierdos y las aplicaciones Λ-lineales como morfismos, con la composición usual de aplicaciones.

Análogamente se definen: La categoría de los anillos, la de las Λ-álgebras, etc.

Ejemplo 1.1.9.: La categoría $\mathcal{T}$ de los espacios topológicos, que tiene por objetos a los espacios topológicos y por morfismos las aplicaciones continuas de espacios topológicos, con la composición habitual.

Análogamente la categoría $\mathcal{M}$ de las variedades diferenciables, tiene como objetos a las variedades diferenciables y como morfismos las aplicaciones diferenciables (composición habitual). Similarmente se definen las categorías: de las variedades complejas, de las variedades algebraicas, etc.

Ejemplo 1.1.10.: Sea X un espacio topológico. La categoría $\mathcal{O}(X)$ de los abiertos de X es un caso especial del ejemplo 1.1.2. .

Ejemplo 1.1.11.: Sea X un espacio topológico. Tomamos como objetos nuevamente a los abiertos de X y como morfismos las aplicaciones continuas de un abierto en otro con la composición usual.

Ejemplo 1.1.12.: Sea K un cuerpo (conmutativo). Consideremos a las extensiones de K como objetos y como morfismos los homomorfismos de cuerpo de una extensión en otra que dejan estable a K (composición usual).

Ejemplo 1.1.13.: Un grupo G se puede considerar una categoría que consiste de un solo objeto, G, siendo los morfismos los elementos de G y la composición de morfismos el producto de G.

Una categoría $\mathcal{R}$ arbitraria da origen a una nueva categoría $\mathcal{R}^2$ de la siguiente manera: los objetos son los morfismos de $\mathcal{R}$, $\alpha : A_1 \dashrightarrow A_2$, $\beta : B_1 \dashrightarrow B_2$, ... Los morfismos se definen como los pares de morfismos $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, $\gamma_i : A_i \dashrightarrow B_i$ $(i = 1, 2)$ de $\mathcal{R}$ tales que sea conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma_1"'] & A_2 \arrow[d, "\gamma_2"] \\
B_1 \arrow[r] & B_2
\end{tikzcd}$$

La ley de composición es:

$$\delta \circ \gamma = (\delta_1 \circ \gamma_1 , \delta_2 \circ \gamma_2), \text{ donde } \gamma = (\gamma_1, \gamma_2), \ \delta = (\delta_1, \delta_2)$$

y $\gamma_i : A_i \dashrightarrow B_i$, $\delta_i : B_i \dashrightarrow C_i$. La categoría $\mathcal{R}^2$ se llama la categoría de <u>los pares de $\mathcal{R}$</u>.

Más generalmente, $\mathcal{R}^{\mathbb{Z}}$ es la siguiente categoría,

Objetos: sucesiones de morfismos de $\mathcal{R}$

$$\begin{array}{cccccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\alpha_3} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_0 & \xrightarrow{\alpha_0} & A_{-1} & \xrightarrow{\alpha_{-1}} & \cdots \\
\cdots & \xrightarrow{\beta_3} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_0 & \xrightarrow{\beta_0} & B_{-1} & \xrightarrow{\beta_{-1}} & \cdots \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}$$

morfismos: sucesiones $\gamma = (\ldots, \gamma_2, \gamma_1, \gamma_o, \gamma_{-1}, \ldots, \ldots)$ tales que $\gamma_i : A_i \dashrightarrow B_i$, $i \in \mathbb{Z}$, que hacen conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\alpha_3} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_o & \xrightarrow{\alpha_o} & A_{-1} & \xrightarrow{\alpha_{-1}} & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_2} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_1} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_o} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_{-1}} & & \\
\cdots & \xrightarrow{\beta_3} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_o & \xrightarrow{\beta_o} & B_{-1} & \xrightarrow{\beta_{-1}} & \cdots
\end{array}$$

la composición se hace "coordenada a coordenada".

Sean $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$ categorías. La <u>categoría producto</u> $\mathcal{R} \times \mathcal{R}'$ se define de la siguiente manera,

<u>Objeto:</u> los pares (A, A') donde A es un objeto de $\mathcal{R}$ y A' un objeto de $\mathcal{R}'$;

morfismos: se define $[(A, A'), (B, B')] = [A, B] \times [A', B']$. La ley de composición es

$(\beta, \beta') \circ (\alpha, \alpha') = (\beta\alpha, \beta'\alpha')$, para $(\alpha, \alpha') \in [(A, A'), (B, B')]$, $(\beta, \beta') \in [(B, B'), (C, C')]$.

El par $(1_A, 1_B)$ es la identidad del par (A, B).

Sea $\mathcal{R}$ una categoría. La <u>categoría opuesta</u> $\mathcal{R}^o$ se define de la siguiente manera: Los objetos son los de $\mathcal{R}$. Los morfismos de A en B en $\mathcal{R}^o$ se definen como los morfismos de B en A en $\mathcal{R}$; en símbolos, $[A, B]_{\mathcal{R}^o} = [B, A]_{\mathcal{R}}$. Si un morfismo $\alpha \in [A, B]_{\mathcal{R}}$ escribiremos para el morfismo α, interpretado como elemento de $[B, A]_{\mathcal{R}^o}$, el símbolo α^o. La composición de morfismos se define entonces por $\alpha^o \circ_{\mathcal{R}^o} \beta^o = (\beta \circ_{\mathcal{R}} \alpha)^o$ para $\alpha^o \in [B, A]_{\mathcal{R}^o}$, $\beta^o \in [C, B]_{\mathcal{R}^o}$.

Sea $\mathcal{R}$ una categoría. Una <u>subcategoría</u> $\mathcal{S}$ de $\mathcal{R}$ es una categoría cuya clase de objetos es una subclase de los objetos de $\mathcal{R}$. Se supone además que los conjuntos de morfismos de $\mathcal{S}$ satisfacen $[A, B]_{\mathcal{S}} \subset [A, B]_{\mathcal{R}}$, $1_A \in [A, A]_{\mathcal{S}}$, para A, B en $\mathcal{S}$, y la ley de composición $[A, B]_{\mathcal{R}} \times [B, C]_{\mathcal{R}} \dashrightarrow$

$\dashrightarrow [A,C]_{\mathcal{R}}$ (de $\mathcal{R}$).

La subcategoría Υ de $\mathcal{R}$ se llama una subcategoría plena si $[A,B]_{\Upsilon} = [A,B]_{\mathcal{R}}$ para todo par (A,B) de objetos de Υ .

La subcategoría Υ de $\mathcal{R}$ se llama saturada si, cada vez que X sea un objeto de Υ e Y sea equivalente a X en $\mathcal{R}$, entonces Y es un objeto de Υ.

Sea Υ una subcategoría plena de $\mathcal{R}$. Llamaremos saturada de Υ en $\mathcal{R}$, a la subcategoría de $\mathcal{R}$ que consiste de:

Objetos: los objetos de $\mathcal{R}$ equivalentes en $\mathcal{R}$ a algún objeto de Υ ;

morfismos: si X , Y están en la saturada de Υ en $\mathcal{R}$, los morfismos en esta última categoría de X a Y forman el conjunto $[X,Y]_{\mathcal{R}}$ con la composición inducida por la de $\mathcal{R}$.

1.2. Otra definición de categoría.

Sea $\mathcal{R}$ una categoría en el sentido de la definición 1.1.1. . Desde el punto de vista algebraico es más sistemático considerar la clase de todos los morfismos de $\mathcal{R}$ que llamaremos $M\mathcal{R}$. Entonces $M\mathcal{R}$ es la suma disjunta de todos los conjuntos $[A,B]$ donde (A,B) recorre todos los pares de objetos de $\mathcal{R}$. Notemos con $O\mathcal{R}$ la clase de todos los objetos de $\mathcal{R}$. Entonces la categoría $\mathcal{R}$ determina:

(i) dos clases $O\mathcal{R}$ y $M\mathcal{R}$ cuyos elementos son respectivamente los objetos y los morfismos de $\mathcal{R}$;

(ii) dos aplicaciones s y t de $M\mathcal{R}$ a $O\mathcal{R}$ que asignan a cada morfismo $\alpha : A \dashrightarrow B$, los objetos A y B respectivamente (llamados objeto de partida y objeto de llegada, respectivamente);

(iii) una ley de composición interna en $M\mathcal{R}$ parcialmente definida, es decir, una aplicación de una subclase $A \subset M\mathcal{R} \times M\mathcal{R}$ en $M\mathcal{R}$, llamada composición de morfismos y notada $(\alpha, \beta) \dashrightarrow \beta\alpha$; $\beta\alpha$ está definido si el par (α, β) está en A.

Estos datos están sujetos a las siguientes condiciones:

(1) si $\alpha, \beta \in M\mathcal{R}$, $\beta\alpha$ está definido si y sólo si $t\alpha = s\beta$;

(2) si $\alpha, \beta, \gamma \in M\mathcal{R}$, y si uno de los morfismos $\gamma(\beta\alpha)$, $(\gamma\beta)\alpha$ está definido, también lo está el otro y son iguales;

(3) para todo $A \in O\mathcal{R}$ existe un morfismo 1_A tal que $s1_A = t1_A = A$ y $\alpha 1_A = \alpha$, $1_A\alpha = \alpha$, para todo α t $M\mathcal{R}$ tal que los primeros miembros estén definidos.

Supongamos recíprocamente que tenemos los datos (i), (ii), (iii), que satisfacen las condiciones (1), (2), (3). Entonces se obtiene una categoría en el sentido de la definición 1.1.1. de la siguiente manera: Para cualquier par (A, B) de objetos se pone $[A, B] = s^{-1}(A) \cap t^{-1}(B)$. La restricción de la ley de composición interna de $M\mathcal{R}$ define una aplicación $[A, B] \times [B, C] \dashrightarrow [A, C]$. Es trivial verificar que se satisfacen todos los axiomas de categorías.

Observación: La clase de los morfismos identidad de una categoría está en correspondencia biunívoca natural con la clase de los objetos. Esto permite eliminar la noción de objeto en la definición de categoría, reemplazándola por la noción de identidad respecto a la ley de composición en la clase de los morfismos.

Si $\mathcal{R}$ es una categoría y $m : A \dashrightarrow M\mathcal{R}$, $A \subset M\mathcal{R} \times M\mathcal{R}$, es la correspondiente composición en $M\mathcal{R}$, la categoría opuesta $\mathcal{R}^{o}$ está definida por la ley de composición opuesta en $M\mathcal{R}$.

Una subcategoría es una subclase de $M\mathcal{R}$ que es cerrada bajo composición de morfismos y tal que si $\alpha : A \dashrightarrow B$ está en la subclase, también están los morfismos $1_{s\alpha}$ y $1_{t\alpha}$.

1.3. Morfismos particulares.

Sea $\mathcal{R}$ una categoría.

DEFINICION 1.3.1.: Un morfismo $\alpha : A \dashrightarrow B$ es un monomorfismo si para todo objeto X de $\mathcal{R}$ y todo par (γ, δ) de morfismos de X en A, la igualdad $\alpha\gamma = \alpha\delta$ implica $\gamma = \delta$.

Esto significa que para todo objeto X de $\mathcal{R}$ la aplicación $[X, A] \dashrightarrow [X, B]$, definida por la composición con α, es inyectiva.

DEFINICION 1.3.2.: Un morfismo $\alpha : A \dashrightarrow B$ es un epimorfismo si α^{o} es un monomorfismo en la categoría opuesta $\mathcal{R}^{o}$.

Esto significa que la aplicación $[B, X] \dashrightarrow [A, X]$, definida por composición con α, es inyectiva.

Ejemplo 1.3.3.: En la categoría Ens de los conjuntos, una aplicación es un monomorfismo (un epimorfismo) si y sólo si es inyectiva (es suryectiva).

Ejemplo 1.3.4.: En la categoría $\mathcal{G}$ de los grupos, un morfismo es monomorfismo si y sólo si es una aplicación inyectiva. El enunciado análogo para epimorfismos es cierto, pero su demostración no es inmediata.

Ejemplo 1.3.5.: En la categoría $\mathcal{T}$ de los espacios topológicos, una aplicación contínua en un espacio de Hausdorff B es epimórfica si y sólo si tiene imagen densa en B.

PROPOSICION 1.3.6.: (i) Si $\beta\alpha$ es un monomorfismo, entonces α es un monomorfismo;

(ii) Si β, α son monomorfismos, $\beta\alpha$ es un monomorfismo.

Demostración: (i) Sean γ, δ morfismos tales que $\alpha\gamma = \alpha\delta$. Entonces $\beta\alpha\gamma = \beta\alpha\delta$, y entonces $\gamma = \delta$.

(ii) Sean γ, δ morfismos tales que $\beta\alpha\delta = \beta\alpha\gamma$. Entonces $\alpha\delta = \alpha\gamma$, y por consiguiente $\delta = \gamma$.

Aplicando esto a la categoría opuesta obtenemos:

PROPOSICION 1.3.7.: (i) Si $\beta\alpha$ es un epimorfismo, entonces β es un epimorfismo;

(ii) Si β, α son epimorfismos, $\beta\alpha$ es un epimorfismo.

Esta forma de obtener una proposición a partir de otra pasando a la categoría opuesta es un procedimiento usual y, en general, no explicitaremos su empleo.

DEFINICION 1.3.8.: Un morfismo $\alpha : A \dashrightarrow B$ se llama <u>inversible a izquierda</u> si existe $\beta : B \dashrightarrow A$ tal que $\beta\alpha = 1_A$. El morfismo β se llama una <u>retracción</u> de α.

Ejemplo 1.3.9.: Si la inyección $\alpha : A \hookrightarrow B$ de un subespacio A de B en B, en la categoría de los espacios topológicos, es inversible a izquierda, entonces A se llama un retracto de B.

Ejemplo 1.3.10.: En la categoría de los espacios vectoriales topológicos (con morfismos las aplicaciones lineales continuas con la composición habitual), la inyección $\alpha : A \hookrightarrow B$ de un subespacio es inversible a izquierda si y sólo si A es un sumando directo de B.

DEFINICION 1.3.11.: Un morfismo $: A$ ----- B es <u>inversible a derecha</u> si existe $\beta : B \dashrightarrow A$ tal que $\alpha\beta = 1_B$. El morfismo β se llama entonces una <u>sección</u> de α.

PROPOSICION 1.3.12.: (i) Un morfismo inversible a izquierda es un monomorfismo;

(ii) Un morfismo inversible a derecha es un epimorfismo.

Demostración: Es suficiente con demostrar (i). Sea $\alpha : A \dashrightarrow B$ inversible a izquierda y $\beta : B \dashrightarrow A$ una inversa a izquierda de α, y sean γ δ morfismos tales que $\alpha\gamma = \alpha\delta$. Entonces $\beta\alpha\gamma = \beta\alpha\delta$ implica $\gamma = \delta$ y entonces α es un monomorfismo.

DEFINICION 1.3.13.: Un morfismo $\alpha : A \dashrightarrow B$ se llama inversible si existe $\beta : B \dashrightarrow A$ tal que $\beta\alpha = 1_A$ y $\alpha\beta = 1_B$. El morfismo α se llama también una equivalencia o un isomorfismo. Los objetos A y B se llaman en este caso equivalentes o isomorfos y se pone: $A \cong B$.

PROPOSICION 1.3.14.: El morfismo $\alpha : A \dashrightarrow B$ es una equivalencia si y sólo si α es inversible a izquierda y a derecha.

Demostración: Sea β una inversa a izquierda de α y γ una inversa a derecha. Entonces $\gamma = (\beta\alpha)\gamma = \beta(\alpha\gamma) = \beta$, y α es inversible. La recíproca es cierta por definición.

La demostración muestra también que un morfismo inversible $\alpha : A \dashrightarrow B$ tiene una inversa única que notaremos α^{-1}. La condición $\alpha\beta = 1_B$, $\beta\alpha = 1_A$ muestra que $\beta = \alpha^{-1}$ también es inversible, con inversa α.

DEFINICION 1.3.15.: Una categoría $\mathcal{K}$ con cero morfismos es una categoría tal que para todo par (A, B) de objetos, $A, B \neq \emptyset$ y existe un elemento $O_{AB} \in [A, B]$, que satisface

$$(*) \qquad \begin{aligned} \beta\, O_{AB} &= O_{AC} \qquad \text{para todo } \beta : B \dashrightarrow C\,; \\ O_{AB}\,\gamma &= O_{DB} \qquad \text{para todo } \gamma : D \dashrightarrow A\,. \end{aligned}$$

Los cero morfismos, si existen, son únicos (un cero morfismo es un morfismo O_{AB} que verifica (*)). En efecto, si $\tilde{O}$ es otro sistema de cero morfismos, entonces $O_{AC} = \tilde{O}_{BC}\, O_{AB} = \tilde{O}_{AC}$.

Ejemplo 1.3.16.: Consideremos la categoría γ cuyos objetos son los conjuntos con un punto distinguido, siendo los morfismos, funciones que aplican puntos distinguidos en puntos distinguidos. Las aplicaciones constantes que aplican un conjunto en el punto distinguido del otro forman un sistema de cero morfismos en γ .

Si $\mathcal{K}$ es una categoría con cero morfismos, también lo es $\mathcal{K}^{o}$

PROPOSICION 1.3.17.: Sea $\mathcal{K}$ una categoría con cero morfismos. Si α es un monomorfismo y $\alpha\beta = 0$, entonces $\beta = 0$.

Demostración: La igualdad $\alpha\beta = \alpha 0$ implica $\beta = 0$ dado que α es un monomorfismo.

<u>Subobjetos y objetos cociente</u>.

Sea A un objeto de $\mathcal{K}$. Consideremos la clase $\mathfrak{A}$ de todos los monomorfismos que tienen a A como objeto de llegada.

DEFINICION 1.13.18.: Sean $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$. Si existe un morfismo μ tal que $\alpha\mu = \beta$, pondremos $\beta < \alpha$. Es decir si el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\alpha"] & & A \\ & Y \arrow[ul, "\mu"] \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

LEMA 1.3.19.: La relación $<$ es reflexiva y transitiva sobre la clase $\mathfrak{A}$

Demostración: Como $\alpha 1_A = \alpha$ la relación es reflexiva. Para probar la transitividad, supongamos $\gamma < \beta$ y $\beta < \alpha$ o sea, supongamos que existen ν y μ tales que $\beta\nu = \gamma$ y $\alpha\mu = \beta$. Entonces $\alpha\mu\nu = \beta\nu = \gamma$

y $\gamma < \alpha$.

Ahora definimos una relación de equivalencia $\sim$ en $\mathcal{O}\!\mathcal{L}$ de la siguiente manera

$$\alpha \sim \beta \quad \text{si y solo si} \quad \alpha < \beta \quad \text{y} \quad \beta < \alpha .$$

Eligiendo un representante en cada clase del cociente $\mathcal{O}\!\mathcal{L} / \sim$ se obtiene una clase γ .

DEFINICION 1.3.20.: La clase γ es la clase de los subobjetos de A .

Observación: Dos monomorfismos equivalentes en el sentido de la definición anterior difieren en una equivalencia de $\mathcal{R}$. En efecto : Si $\alpha < \beta$ y $\beta < \alpha$, o sea si existen ν y μ tales que $\alpha\mu = \beta$ y $\beta\nu = \alpha$, entonces $\alpha\mu\nu = \beta\nu = \alpha$ y $\mu\nu = 1_X$ pues α es un monomorfismo. Análogamente $\nu\mu = 1_Y$ y se deduce que μ, ν son equivalentes.

Para definir un subobjeto de A se debe elegir un monomorfismo.

DEFINICION 1.3.21.: La clase de los <u>objetos cociente</u> de A es la clase de los subobjetos de A en la categoría opuesta.

* * *

CAPITULO 2 :

FUNTORES Y TRANSFORMACIONES NATURALES

2.1. Definición y ejemplos de funtores.

Sean $\mathcal{K}$ y $\mathcal{K}'$ categorías.

DEFINICION 2.1.1.: Un funtor covariante $F : \mathcal{K} \dashrightarrow \mathcal{K}'$, de $\mathcal{K}$ en $\mathcal{K}'$, consiste de la asignación de

(i) un objeto FA de $\mathcal{K}'$ para cada objeto A de $\mathcal{K}$,

(ii) un morfismo $F(\alpha) : FA \dashrightarrow FB$ de $\mathcal{K}'$ para cada morfismo α de A en B de $\mathcal{K}$;

Estas asignaciones deben cumplir las siguientes condiciones

(1) $F(1_A) = 1_{FA}$

(2) $F(\beta\alpha) = F(\beta)\,F(\alpha)$.

DEFINICION 2.1.2.: Un funtor contravariante $F : \mathcal{K} \dashrightarrow \mathcal{K}'$ es un funtor covariante de $\mathcal{K}^o$ en $\mathcal{K}'$ o bien de $\mathcal{K}$ en $\mathcal{K}'^o$. Explícitamente, esto significa que la condición (2) se debe cambiar por .(2') $F(\beta\alpha) = F(\alpha)\,F(\beta)$.

Si consideramos la definición de categoría de 1.2., un funtor covariante es un homomorfismo respecto a las leyes de composición de $M\mathcal{K}$ y $M\mathcal{K}'$

Ejemplo 2.1.3,: Sea $\mathcal{K}$ una categoría y $\mathcal{K}^o$ la categoría opuesta. Hay un funtor contravariante $\Delta : \mathcal{K} \dashrightarrow \mathcal{K}^o$, definido por $\Delta A = A$ y $\Delta(\alpha) = \alpha^o$ para todo objeto A de $\mathcal{K}$ y todo morfismo α de $\mathcal{K}$ (ver 1.1.). Análogamente se puede definir un funtor contravariante $\mathcal{K}^o \dashrightarrow \mathcal{K}$.

Ejemplo 2.1.4.: Sea $\mathcal{R}$ la categoría $\mathcal{G}$, $\mathcal{T}$, o cualquier categoría cuyos objetos tienen un conjunto subyacente y cuyos morfismos sean aplicaciones de estos conjuntos. Hay un funtor $V : \mathcal{R} \dashrightarrow \text{Ens}$, covariante, que consiste en "olvidar" la estructura de los objetos de $\mathcal{R}$ y en considerar los morfismos de objetos de $\mathcal{R}$, simplemente como aplicaciones de los conjuntos subyacentes. Notemos que V no define a $\mathcal{R}$ como una subcategoría de Ens en el sentido de la definición dada en 1.1. .

Ejemplo 2.1.5.: El grupo libre FM sobre un conjunto M se define como un grupo FM dotado de una aplicación $\pi : M \dashrightarrow FM$ y queda definido, a menos de un isomorfismo canónico, por la propiedad que la correspondencia

$$[FM, G]_{\mathcal{G}} \dashrightarrow [M, VG]_{\text{Ens}} \qquad \varphi \rightsquigarrow \varphi \circ \pi$$

es biyectiva para todo grupo G. Aquí $[FM, G]_{\mathcal{G}}$ indica el conjunto de todos los homomorfismos de grupo $FM \dashrightarrow G$, y $[M, VG]_{\text{Ens}}$ el conjunto de todas las aplicaciones (conjuntistas) de M en el conjunto VG. Por esta propiedad, es claro que la correspondencia $M \dashrightarrow FM$, se puede extender a un funtor covariante $\text{Ens} \dashrightarrow \mathcal{G}$.

Ejemplo 2.1.6.: Si se asigna a cada grupo G <u>su anillo de grupo</u> R(G) respecto a $\mathbb{Z}$, se obtiene una correspondencia que se puede extender a un funtor $R : \mathcal{G} \dashrightarrow \mathcal{R}$ en la categoría de los anillos con identidad, que es covariante.

Ejemplo 2.1.7.: Sea G un grupo, K(G) su subgrupo conmutador, $H(G) = G/K(G)$. Las correspondencias $G \dashrightarrow K(G)$, $G \dashrightarrow H(G)$ se pueden extender a funtores $\mathcal{G} \dashrightarrow \mathcal{G}$, $\mathcal{G} \dashrightarrow \mathcal{A}\mathcal{G}$, ambos covariantes, respectivamente.

Ejemplo 2.1.8.: Sean G y G', grupos considerados como categorías se·

gún el ejemplo 1.1.13. . Un homomorfismo $\rho : G \dashrightarrow G'$ se puede considerar como un funtor covariante.

Ejemplo 2.1.9.: Sea $\mathcal{C}$ una categoría y A un objeto de $\mathcal{C}$. Definiremos un funtor covariante $h_A : \mathcal{C} \dashrightarrow \text{Ens}$ de la siguiente manera

$$h_A(X) = [A,X] \quad \text{para todo objeto } X \in \mathcal{C} ;$$
$$h_A(\varphi)(\alpha) = \varphi \circ \alpha \quad \text{para todo } \varphi ; X \dashrightarrow X', \ \alpha : A \dashrightarrow X$$

El último renglón define una aplicación $h_A(\varphi) : [A,X] \dashrightarrow [A,X']$ para un morfismo $\varphi : X \dashrightarrow X'$.

Se puede definir en forma análoga un funtor contravariante $h^A : \mathcal{C} \dashrightarrow \text{Ens}$ de la siguiente manera

$$h^A = [X,A] \quad \text{para todo objeto } X \in \mathcal{C} ;$$

$$h^A(\varphi)(\alpha) = \alpha \circ \varphi \quad \text{para todo } \varphi : X \dashrightarrow X', \ \alpha : X' \dashrightarrow A .$$

La última línea define una aplicación $h^A(\varphi) : [X',A] \dashrightarrow [X,A]$ para un morfismo $\varphi : X \dashrightarrow X'$.

Ejemplo 2.1.10.: El funtor constante $F : \mathcal{C} \dashrightarrow \mathcal{C}'$ con valor A' (A' es un objeto de $\mathcal{C}'$) se define de la siguiente manera

$$FX = A' \qquad \text{para todo objeto } X \text{ de } \mathcal{C} ;$$
$$F(\varphi) = 1_{A'} \qquad \text{para todo morfismo } \varphi \text{ de } \mathcal{C} .$$

Notación: el funtor definido en el ejemplo 2.1.10 se notará $\tilde{A'}$.

Ejemplo 2.1.11.: Sea X un espacio topológico. Consideremos la categoría $\mathcal{O}(X)$ de los abiertos de X definida en el ejemplo 1.1.10 y sea $\mathcal{C}$ una categoría arbitraria. Un funtor covariante $\mathcal{O}(X) \dashrightarrow \mathcal{C}^o$ se llama un prehaz sobre

X con valores en $\mathcal{R}$.

Ejemplo 2.1.12.: La teoría de la cohomología singular con coeficientes en un anillo conmutativo Λ es un funtor contravariante $H^*(.,\Lambda):\mathcal{T} \dashrightarrow {}_{\Lambda}\mathfrak{A}$ de la categoría de los espacios topológicos en la de las Λ-álgebras.

Un bifuntor de $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ en $\mathcal{R}'$ es un funtor covariante $\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2 \dashrightarrow \mathcal{R}'$. Un bifuntor covariante en $\mathcal{R}_1$ y contravariante en $\mathcal{R}_2$ es un funtor covariante $\mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2^o \dashrightarrow \mathcal{R}'$. Se definen en forma análoga multifuntores.

Ejemplo 2.1.13.: Sea $\mathcal{R}$ una categoría. Existe un bifuntor natural covariante $[.,.]:\mathcal{R}^o \times \mathcal{R} \dashrightarrow \mathrm{Ens}$ definido por

$$[.,.](X,X') = [X,X'] \qquad \text{para todo para } (X,X') \in \mathcal{R}^o \times \mathcal{R}$$

$$[\alpha,\alpha'](\varphi) = \alpha' \circ \varphi \circ \alpha \qquad \text{para todo morfismo } (\alpha,\alpha'):$$

$(X_1,X_1') \dashrightarrow (X_2,X_2')$ en $\mathcal{R}^o \times \mathcal{R}$ y todo $\varphi : X_1 \dashrightarrow X_1'$;

Queda pues definida una aplicación $[\alpha,\alpha']:[X_1,X_1'] \dashrightarrow [X_2,X_2']$.

Se puede definir una categoría de la siguiente manera

Objetos: Categorías

Morfismos: Funtores de una categoría en otra.

Esta categoría se notará $\{\mathrm{Cat}\}$. La composición de morfismos en $\{\mathrm{Cat}\}$ se define de la siguiente manera: si $F_1 : \mathcal{R}_1 \dashrightarrow \mathcal{R}_2$, $F_2 : \mathcal{R}_2 \dashrightarrow \mathcal{R}_3$ son dos morfismos de $\{\mathrm{Cat}\}$, el morfismo F_2F_1 actúa sobre objetos y morfismos de $\mathcal{R}_1$ como la aplicación sucesiva de las correspondencias que definen F_1 y F_2 (en este orden). Por supuesto F_2F_1 es un funtor de $\mathcal{R}_1$ en $\mathcal{R}_3$. Si $\mathcal{R}$ es un objeto de $\{\mathrm{Cat}\}$, el morfismo $1_{\mathcal{R}}$ es el funtor que actúa como la identidad sobre la clase de los objetos de $\mathcal{R}$ y también como la identidad sobre la clase de los morfismos de $\mathcal{R}$. Consideraremos a $\{\mathrm{Cat}\}$ como una categoría a pesar de las dificultades de orden lógico que esto entraña.

2.2. <u>Algunas propiedades de funtores</u>.

DEFINICION 2.2.1.: Un funtor $F : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}'$ es <u>fiel</u> si para todo par (X,Y) de objetos de $\mathcal{R}$ la aplicación $[X,Y] \longrightarrow [FX,FY]$ definida por F es inyectiva. Diremos que F es <u>completamente fiel</u> si dicha aplicación es biyectiva.

DEFINICION 2.2.2.: Un funtor $F : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}'$ se llamará <u>genéricamente suryectivo</u> si para todo objeto X' de $\mathcal{R}'$ existe un objeto X de $\mathcal{R}$ tal que FX es equivalente a X'.

Ejemplo 2.2.3.: Sea K un cuerpo conmutativo, y ${}_K\mathcal{M}$ la categoría de los K-módulos unitarios (K-espacios vectoriales). El funtor $h^K : {}_K\mathcal{M} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ del ejemplo 2.1.9. se puede factorear a través de ${}_K\mathcal{M}$, poniendo $D : {}_K\mathcal{M} \longrightarrow {}_K\mathcal{M}$ como el funtor contravariante que asigna a cada K-espacio vectorial su dual, y a cada aplicación K-lineal la aplicación transpuesta de los duales. Entonces D es un funtor fiel. El funtor D es completamente fiel en la categoría de los K-espacios vectoriales de dimensión finita.

Ejemplo 2.2.4.: El funtor $L : \mathcal{L}\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{L}\mathcal{A}$ que asigna a todo grupo de Lie real su álgebra de Lie, es genéricamente suryectivo por el teorema de Ado-Cartan

PROPOSICION 2.2.5.: Sea $F : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}'$ un funtor covariante.

(i) Si $\alpha : A \longrightarrow B$ es inversible a izquierda, entonces $F(\alpha) : FA \longrightarrow FB$ es inversible a izquierda.

(ii) Si $\alpha : A \longrightarrow B$ es tal que $F(\alpha) : FA \longrightarrow FB$ es inversible a izquierda, y si F es completamente fiel, entonces α es inversible a izquierda.

Demostración: (i) Sea $\beta : B \dashrightarrow A$ una inversa izquierda de α ; o sea, $\beta\alpha = 1_A$. Entonces $F(\beta) \circ F(\alpha) = F(\beta\alpha) = F(1_A) = 1_{FA}$. Luego $F(\beta)$ es una inversa izquierda de $F(\alpha)$.

(ii) Sea $\nu : FB \dashrightarrow FA$ tal que $\nu \circ F(\alpha) = 1_{FA}$. Como F es completamente fiel existe $\beta : B \dashrightarrow A$ tal que $F(\beta) = \nu$. Se tiene entonces $F(\beta)\, F(\alpha) = \nu\, F(\alpha) = 1_{FA}$. y en vista de la unicidad, $\beta\alpha = 1_A$.

No explicitaremos la proposición análoga para morfismos inversibles a derecha. En vista de la proposición 1.3.14., se obtiene

COROLARIO 2.2.6.: Sea $F : \mathcal{R} \dashrightarrow \mathcal{R}'$ un funtor,

(i) Si α es una equivalencia, $F(\alpha)$ es una equivalencia;

(ii) Si F es completamente fiel, y $F(\alpha)$ es una equivalencia, entonces α es una equivalencia.

Sea $\mathcal{R}$ una categoría y γ una subcategoría. La inyección natural $I : \gamma \dashrightarrow \mathcal{R}$ es un funtor fiel. Si γ es una subcategoría plena, dicha inyección es un funtor completamiente fiel. Notemos que un funtor completamente fiel $F : \mathcal{R} \dashrightarrow \mathcal{R}'$ no es necesariamente inyectivo sobre la clase de los objetos.

La imagen de un funtor completamente fiel $F : \mathcal{R} \dashrightarrow \mathcal{R}'$ es una subcategoría plena de $\mathcal{R}'$.

La imagen de un funtor $F : \mathcal{R} \dashrightarrow \mathcal{R}'$ en $\mathcal{R}'$ no es necesariamente una subcategoría de $\mathcal{R}'$. En efecto, si $\gamma_1 : A \dashrightarrow A_1$, $\gamma_2 : A_2 \dashrightarrow B$, y A_1 es equivalente a A_2, puede ocurrir que $FA_1 = FA_2 = X'$, de modo que $F(\gamma_1) : FA \dashrightarrow FA_1$, $F(\gamma_2) : FA_2 \dashrightarrow FB$, sin que necesariamente $F(\gamma_2)\, F(\gamma_1)$ sea imagen de ningún morfismo $A \dashrightarrow B$.

2.3. Definición y ejemplos de transformaciones naturales.

Sean $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ categorías y F , G funtores covariantes de $\mathcal{R}$ en $\mathcal{R}'$.

DEFINICION 2.3.1.: Una transformación natural $\Phi : F \dashrightarrow G$, es el dato de un morfismo $\Phi_X : FX \dashrightarrow GX$ para cada X de $\mathcal{R}$ tal que el siguiente diagrama conmute para todo $\varphi : X \dashrightarrow Y$

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "\Phi_X"] \arrow[d, "F(\varphi)"'] & GX \arrow[d, "G(\varphi)"] \\ FY \arrow[r, "\Phi_Y"] & GY \end{tikzcd}$$

Ejemplo 2.3.2.: Consideremos los funtores H , $K : \mathcal{G} \dashrightarrow \mathcal{G}$, del ejemplo 2.1.7., y sea G un grupo. La sucesión de homomorfismos

$$KG \hookrightarrow G \longrightarrow HG = G/KG$$

define una sucesión de transformaciones naturales

$$K \longrightarrow Id \longrightarrow H$$

debido a que estas aplicaciones son compatibles con homomorfismos de grupos.

Ejemplo 2.3.3.: Sea K un cuerpo conmutativo, ${}_K\mathcal{M}$ la categoría de los K-espacios vectoriales y $D : {}_K\mathcal{M} \dashrightarrow {}_K\mathcal{M}$, el funtor definido en el ejemplo 2.2.3. . El funtor $D^2 : {}_K\mathcal{M} \dashrightarrow {}_K\mathcal{M}$ asigna a cada K-espacio vectorial su bidual. La evaluación $\mathcal{E}_X(x)(x') = \langle x, x' \rangle$ para $x \in X$, $x' \in X'$ define una transformación natural $\mathcal{E} : Id \dashrightarrow D^2$. Observemos de paso que el funtor D^2 no es genéricamente suryectivo $D^2 : {}_K\mathcal{M} \dashrightarrow {}_K\mathcal{M}$.

Ejemplo 2.3.4.: El producto tensorial de grupos abelinaos define los funtores $F , G : \mathcal{AG} \times \mathcal{AG} \dashrightarrow \mathcal{AG}$, de la siguiente manera:

$$F(A_1, A_2) = A_1 \otimes A_2 \quad y \quad G(A_1, A_2) = A_2 \otimes A_1 .$$

La existencia de un isomorfismo canónico $A_1 \otimes A_2 \cong A_2 \otimes A_1$, compatible con morfismos significa precisamente que existe una transformación natural $F \dashrightarrow G$ (que es además inversible; ver más abajo).

Ejemplo 2.3.5.: Dado un espacio topológico X consideremos las correspondencias

$$FX = \mathcal{C}(X) = \{ \text{subconjuntos cerrados de } X \}$$
$$GX = \mathcal{O}(X) = \{ \text{subconjuntos abiertos de } X \}$$

Estas correspondencias pueden extenderse a funtores $F, G : \mathcal{T} \dashrightarrow \mathrm{Ens}$ (ver ejemplo 2.1.11.). Hay una transformación natural $C : F \dashrightarrow G$ definida por: $C_X : FX \dashrightarrow GX$ es la función que transforma un elemento de FX en su complemento respecto a X. Esta transformación natural es inversible.

Ejemplo 2.3.6.: Sea $H((\cdot), \Lambda)) : \mathcal{T} \dashrightarrow \mathcal{C}$, el funtor del ejemplo 2.1.13. . Una transformación natural $\Phi : H(\cdot, \Lambda) \dashrightarrow H(\cdot, \Lambda)$ se llama una operación cohomológica.

Ejemplo 2.3.7.: Sean $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ categorías y $\tilde{A}'_1$, $\tilde{A}'_2 : \mathcal{R} \dashrightarrow \mathcal{R}'$, los funtores constantes definidos por los objetos A'_1, A'_2 de $\mathcal{R}'$ (ver ejemplo 2.1.8.). Un morfismo $\varphi : A'_1 \dashrightarrow A'_2$ define una transformación natural $\tilde{\varphi} : \tilde{A}'_1 \dashrightarrow \tilde{A}'_2$ por $\tilde{\varphi}_X = \varphi$, para todo objeto X de $\mathcal{R}$.

Las transformaciones naturales se componen en forma natural. Esto sugiere definir una nueva categoría $\mathcal{R}'^{\mathcal{R}}$, de los funtores covariantes de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$, siendo los morfismos, las transformaciones naturales con su composición natural. En realidad, estrictamente, esto sólo define una categoría si la clase de los objetos de $\mathcal{R}$ es un conjunto.

DEFINICION 2.3.8.: Una categoría $\mathcal{R}$ es <u>pequeña</u> si la clase de los objetos de $\mathcal{R}$ es un conjunto.

Para una categoría arbitraria $\mathcal{R}'$, $\mathcal{R}'^{\mathcal{R}}$ es entonces una categoría, pues si $F, G: \mathcal{R} \dashrightarrow \mathcal{R}'$, la clase $[F, G]$ de transformaciones naturales satisface $[F, G] \subset \prod_{X \in \mathcal{R}} [FX, GX]$ y es entonces un conjunto. En los sucesivo siempre consideraremos a $\mathcal{R}'^{\mathcal{R}}$ como una categoría, sin mencionar las restricciones necesarias sobre $\mathcal{R}$.

DEFINICION 2.3.9.: Sean F, G funtores de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$. Una <u>equivalencia natural</u> $\Phi: F \dashrightarrow G$ es una equivalencia en la categoría $\mathcal{R}'^{\mathcal{R}}$, esto es, una transformación natural $\Phi: F \dashrightarrow G$ tal que existe una transformación natural $\Psi: G \dashrightarrow F$ que verifica

$$(\Psi \Phi)_X = 1_{FX}, \quad (\Phi \Psi)_X = 1_{GX} \quad \text{para todo } X \text{ de } \mathcal{R}.$$

Los funtores F, G se llama naturalmente equivalentes o bien naturalmente isomorfos y se escribe $F \cong G$.

Son ejemplos de equivalencias naturales las transformaciones naturales de los ejemplos 2.3.4. y 2.3.5. .

PROPOSICION 2.3.10.: Sea $\Phi: F \dashrightarrow G$ una transformación natural, donde F, G son funtores de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$. Entonces Φ es una equivalencia natural si y sólo si $\Phi_X: FX \dashrightarrow GX$ es una equivalencia en $\mathcal{R}'$ para todo objeto X de $\mathcal{R}$.

Demostración: Si Φ es una equivalencia natural y Ψ es la inversa (que es obviamente única), para todo X de $\mathcal{R}$ se tiene $\Psi_X \Phi_X = 1_{FX}$ y $\Phi_X \Psi_X = 1_{GX}$, lo que muestra que Φ_X es una equivalencia. Recíprocamente sea $\Phi: F \dashrightarrow G$ tal que para todo objeto X de $\mathcal{R}$, $\Phi_X^{-1}: GX \dashrightarrow FX$ está definido. La familia $\Psi = (\Phi_X^{-1})_{X \in \mathcal{R}}$ define una transformación natural $\Psi: F \dashrightarrow G$, que es inversa de Φ.

Nótese que las transformaciones naturales monomórficas no se pueden caracterizar de esta manera.

PROPOSICION 2.3.11.: Sean $F, G : \mathcal{K} \dashrightarrow \mathcal{K}'$ funtores y $\Phi : F \dashrightarrow G$ una equivalencia natural. Si F es fiel (completamente fiel, genéricamente suryectivo), entonces también lo es G.

Demostración: Sea F fiel. Para cualquier morfismo $\alpha : X \dashrightarrow Y$ se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "\Phi_X"] \arrow[d, "F(\alpha)"'] & GX \arrow[d, "G(\alpha)"] \\ FY \arrow[r, "\Phi_Y"] & GY \end{tikzcd}$$

y entonces $F(\alpha) = \Phi_Y^{-1} \circ G(\alpha) \circ \Phi_X$. Entonces si $\alpha_1, \alpha_2 : X \dashrightarrow Y$ y $G(\alpha_1) = G(\alpha_2)$, se tiene $F(\alpha_1) = F(\alpha_2)$ y esto entraña $\alpha_1 = \alpha_2$.

Sea F completamente fiel, y $\gamma : GX \dashrightarrow GY$. Entonces $\Phi_Y^{-1} \circ \gamma \circ \Phi_X : FX \dashrightarrow FY$ y existe entonces $\alpha : X \dashrightarrow Y$ con $F(\alpha) = \Phi_Y^{-1} \circ \gamma \circ \Phi_X$. Ahora bien $G(\alpha)\Phi_X = \Phi_Y F(\alpha) = \gamma \circ \Phi_X$, lo que implica $G(\alpha) = \gamma$.

Sea F genéricamente suryectivo y A' un objeto de $\mathcal{K}'$. Existe X en $\mathcal{K}$ tal que $FX = A'$. Componiendo esta equivalencia con $\Phi_X : FX \dashrightarrow GX$ se comprueba que también G es genéricamente suryectivo.

Sea $F : \mathcal{K} \dashrightarrow \mathcal{K}'$ un funtor y $\mathcal{L}$ una categoría. Por composición, F induce funtores $F_* : \mathcal{K}^{\mathcal{L}} \dashrightarrow \mathcal{K}'^{\mathcal{L}}$ y $F^* : \mathcal{L}^{\mathcal{K}'} \dashrightarrow \mathcal{L}^{\mathcal{K}}$.

Daremos ahora algunos ejemplos de categorías de funtores:

Ejemplo 2.3.12.: Sea X un espacio topológico, $\mathcal{O}(X)$ la categoría de sus abiertos y $\mathcal{K}$ una categoría. La categoría $\mathcal{K}^{\circ\,\mathcal{O}(X)}$ es la categoría de los prehaces sobre X con valores en $\mathcal{K}$ (ejemplo 2.1.12.).

Ejemplo 2.3.13.: Sea G un grupo interpretado como una categoría (ejemplo 1.1.13.). Sea $\mathcal{R}$ una categoría arbitraria. La categoría de funtores $\mathcal{R}^G$ es la categoría de los G-objetos de $\mathcal{R}$, esto es, de los objetos de $\mathcal{R}$, equipados con una operación de G, con morfismos, los morfismos de $\mathcal{R}$ que respetan las correspondientes G-operaciones, esto es, morfismos equivariantes.

Ejemplo 2.3.14.: Sean $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ categorías. La categoría $\mathcal{R}'$ se puede considerar como una subcategoría de funtores de la categoría $\mathcal{R}'^{\mathcal{R}}$, asignando a cada objeto A' de $\mathcal{R}'$ el funtor constante $\tilde{A}': \mathcal{R} \dashrightarrow \mathcal{R}'$ (ver ejemplos 2.1.10. y 2.3.7.).

Queremos definir ahora la noción de diagrama.

DEFINICION 2.3.15.: Un <u>tipo T de diagramas</u> es una clase de objetos (vértices) $t, t', \ldots$ y una asignación de un conjunto $\Phi(t,t')$ para cada par (t,t') de objetos tal que: $(t_1,t_1') \neq (t_2,t_2')$ implica $\Phi(t_1,t_1') \cap \Phi(t_2,t_2') = \varphi$. Los elementos de $\Phi(t,t')$ se llaman morfismos o flechas de t a t'.

Las categorías son justamente tipos particulares de diagramas.

Sea $\mathcal{R}$ una categoría y T un tipo de diagramas.

DEFINICION 2.3.16.: Un diagrama F en $\mathcal{R}$ de tipo T, notado $F: T \dashrightarrow \mathcal{R}$, consiste de la asignación de

(i) Un objeto Ft de $\mathcal{R}$ para cada t de T;

(ii) Un morfismo $F\alpha: Ft \dashrightarrow Ft'$ de $\mathcal{R}$ para cada $\alpha \in \Phi(t,t')$.

Si T es una categoría, un funtor $F: T \dashrightarrow \mathcal{R}$ es un diagrama en $\mathcal{R}$. Se definen morfismos de diagramas como se definen las transformaciones naturales. Se puede también definir la categoría $\mathcal{R}^T$ de los diagramas de tipo T en $\mathcal{R}$.

2.4. Equivalencia de categorías.

Sean $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ categorías.

DEFINICION 2.4.1.: Una equivalencia de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ es un funtor $F:\mathcal{R}$ --> --> $\mathcal{R}'$, que es completamente fiel y genéricamente suryectivo.

No debe confundirse esta noción con la de funtor inversible que, de acuerdo con la terminología anterior, es una equivalencia en la categoría $\{\mathrm{Cat}\}$.

Ejemplo 2.4.2.: Sea $\mathcal{LG}$ la categoría de los grupos de Lie, con morfismos los homomorfismos locales , $\mathcal{LA}$ la categoría de las R-álgebras de Lie y $L:\mathcal{LG} \dashrightarrow \mathcal{LA}$, el funtor "álgebra de Lie". Entonces L es una equivalencia de $\mathcal{LG}$ a $\mathcal{LA}$.

Sean $F, G : \mathcal{R} \dashrightarrow \mathcal{R}'$. Por la proposición 2.3.11. una equivalencia natural $\Phi : F \dashrightarrow G$ transforma una equivalencia F de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ en una equivalencia G de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$.

PROPOSICION 2.4.3.: Sea $F:\mathcal{R} \dashrightarrow \mathcal{R}'$ un funtor covariante. Entonces F es una equivalencia de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ si y sólo si existen un funtor G de $\mathcal{R}'$ en $\mathcal{R}$ y euuivalencias $\Phi : 1_{\mathcal{R}} \dashrightarrow G \circ F$, $\varphi : 1_{\mathcal{R}'} \dashrightarrow F \circ G$.

Demostración: (a) Supongamos que existen $G:\mathcal{R}' \dashrightarrow \mathcal{R}$ y las equivalencias naturales $\Phi : 1_{\mathcal{R}} \dashrightarrow G\circ F$, $\Psi : 1_{\mathcal{R}'} \dashrightarrow F \circ G$. Es inmediato que F y G son fieles y genéricamente suryectivos. Falta mostrar que F es completamente fiel. Sea $\psi : FX \dashrightarrow FY$ un morfismo de $\mathcal{R}'$ dados los objetos X, Y de $\mathcal{R}$. Entonces $G(\psi) : GFX \dashrightarrow GFY$. Ahora, GF es completamente fiel pues es naturalmente equivalente a $1_{\mathcal{R}}$ (PROPOSICION 2.3.11.). Luego existe un único φ : $X \dashrightarrow Y$ tal que $GF(\varphi) = G(\psi)$. Pero G es fiel y entonces $F(\varphi) = \psi$.

(b) Supongamos recíprocamente que $F:\mathcal{R} \dashrightarrow \mathcal{R}'$ es completamente fiel y genéricamente suryectivo. Se tiene que $F\mathcal{R}$ es una subcategoría plena de $\mathcal{R}'$ (ver sección 2.2.). Para todo objeto X' de $F\mathcal{R}$ elegimos un objeto G_2X' en $\mathcal{R}$ tal que $F(G_2X') \cong X'$ (este objeto está determinado por X' salvo una equivalencia). Sea $\tilde{\mathcal{R}}$ la subcategoría plena de $\mathcal{R}$, cuyos objetos son los G_2X' elegidos para cada X' en $\mathcal{R}'$. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "\mathcal{F}"] & \mathcal{R}' \\
\tilde{\mathcal{R}} \arrow[u, hook, "G_1"] \arrow[r, "F_2"] & F\mathcal{R} \arrow[u, hook, "F_3"']
\end{tikzcd}$$

donde G_1 y F_3 son los funtores naturales de inyección de una subcategoría y F_2, $\mathcal{F}$, los funtores definidos por F restringiendo el dominio y/o el rango de F. Construiremos ahora los funtores $G_2 : F\mathcal{R} \dashrightarrow \tilde{\mathcal{R}}$, $G_3 : \mathcal{R}' \dashrightarrow F\mathcal{R}$, de modo que se aproximen lo más posible a inversas de F_2, F_3, respectivamente. (1) Definición de G_2: para un objeto X' de $F\mathcal{R}$ ponemos G_2X' = el objeto G_2X' elegido anteriormente. Para un morfismo $\alpha' : X' \dashrightarrow Y'$, definimos $G_2(\alpha') : G_2X' \dashrightarrow G_2Y'$ como el único morfismo (ya que F es completamente fiel) tal que $F(G_2(\alpha')) = \alpha'$. Entonces es claro que $F_2G_2 = 1_{F\mathcal{R}}$, $G_2F_2 = 1_{\tilde{\mathcal{R}}}$. Si se pone $F_1 = G_2\mathcal{F}$, se tiene $F_1G_1 = 1_{\tilde{\mathcal{R}}}$ y $F = F_3F_2F_1$. Más aún, existe una equivalencia natural $\phi : 1_{\mathcal{R}} \dashrightarrow G_1F_1$, definida como sigue: Para un objeto X de $\mathcal{R}$, $\phi_X : X \dashrightarrow G_1F_1X = F_1X$, es la equivalencia que corresponde a 1_{FX} bajo la biyección $[X, F_1X] \dashrightarrow [FX, FX]$. (2) Definición de $G_3 : \mathcal{R}' \dashrightarrow F\mathcal{R}$: sea X' un objeto de $\mathcal{R}'$; elijamos G_3X' en $F\mathcal{R}$ y $\psi_{X'} : X' \dashrightarrow G_3X'$, tales que para X' en $F\mathcal{R}$, $F_3G_3X' = X'$ y $\psi_{X'} = 1_{X'}$; y si X' no está en $F\mathcal{R}$ se elige en $F\mathcal{R}$ un objeto G_3X' equivalente a X' y una equivalencia $\psi_{X'} : X' \dashrightarrow G_3X'$ (recordar que F es una equivalencia de $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$). Sea $\alpha' : X' \dashrightarrow Y'$ en $\mathcal{R}'$. Definimos $G_3(\alpha') = \psi_{Y'}\alpha\psi_{X'}^{-1}$

$$\begin{tikzcd} G_3X' \arrow[d, "G_3(\alpha')"'] & X' \arrow[l, "\Psi_{X'}"'] \arrow[d, "\alpha'"] \\ G_3Y' & Y' \arrow[l, "\Psi_{Y'}"'] \end{tikzcd}$$

Entonces por construcción, $G_3F_3 = 1_{F\mathcal{K}}$ y $\Psi : 1_{\mathcal{K}'} \dashrightarrow F_3G_3$, es una equivalencia natural. (3) Definimos $G = G_1G_2G_3 : \mathcal{K}' \dashrightarrow \mathcal{K}$. Entonces $GF = G_1F_1$ y $\Phi : 1_{\mathcal{K}} \dashrightarrow GF$ es la equivalencia natural. Más aún $FG = F_3G_3$ y $\Psi : 1_{\mathcal{K}'} \dashrightarrow FG$ es la otra equivalencia natural.

Observación: Se tiene, por construcción $FGF = F$ y $GFG = G$. Más aún, si se notan $F^*: \mathcal{K}^{\mathcal{K}'} \dashrightarrow \mathcal{K}^{\mathcal{K}}$ y $F_*: \mathcal{K}^{\mathcal{L}} \dashrightarrow \mathcal{L}^{\mathcal{L}}$, los funtores inducidos por F en las correspondientes categorías de funtores, entonces

$$F^*\Psi = F_*\Phi = 1_F$$

$$G^*\Phi = G_*\Psi = 1_G$$

por construcción. Además

$$(G^*\Phi)_{X'} = \Phi_{GX'} = 1_{GX'}, \text{ por construcción de } \Phi,$$

$$\text{y } (G_*\Psi)_{X'} = G(\Psi_{X'}) = G(1_{X'}) = 1_{GX'}.$$

COMPLEMENTO 2.4.4.: Sea $F : \mathcal{K} \dashrightarrow \mathcal{K}'$ un funtor. Un funtor $G : \mathcal{K}' \dashrightarrow \mathcal{K}$ está caracterizado, salvo una equivalencia natural, por la propiedad: Existen equivalencias naturales $\Phi : 1_{\mathcal{K}} \dashrightarrow GF$ y $\Psi : 1_{\mathcal{K}'} \dashrightarrow FG$.

Demostración: Supongamos que G_1 y G_2 son dos funtores que satisfacen la propiedad enunciada. Probaremos que G_1 y G_2 son naturalmente equivalentes. Observemos previamente que si se componen dos funtores naturalmente equivalentes con cualquier funtor, se obtienen funtores naturalmente equivalentes. Entonces $G_1 = G_1 1_{\mathcal{K}} \cong G_1(FG_2) = (G_1F)G_2 = 1_{\mathcal{K}} G_2 = G_2$. Esto concluye 2.4.4. .

LEMA 2.4.5.: Sea $F: \mathcal{R} \dashrightarrow \mathcal{R}'$ una equivalencia y $G: \mathcal{R}' \dashrightarrow \mathcal{R}''$, un funtor. Si $GoF: \mathcal{R} \dashrightarrow \mathcal{R}''$ es fiel (completamente fiel, genéricamente suryectivo), entonces también lo es G.

Demostración: (a) Supongamos que GoF es fiel. Sean X_1', X_2' objetos de $\mathcal{R}'$ y $\psi_i : X_1' \dashrightarrow X_2'$ $(i = 1, 2)$ morfismos en $\mathcal{R}'$ tales que $G(\psi_1) = G(\psi_2)$. Entonces existen objetos X_1, X_2 en $\mathcal{R}$, equivalencias $\eta_i : X_i' \dashrightarrow FX_i$ $(i = 1, 2)$ y morfismos $\Theta_i : X_1 \dashrightarrow X_2$ $(i = 1, 2)$, tales que $F(\Theta_i) = \eta_2 \psi_i \eta_1^{-1}$

$$
X_1 \xrightarrow{\Theta_i} X_2 \qquad
\begin{array}{ccc}
X_1' & \xrightarrow{\eta_1} & FX_1 \\
\downarrow{\scriptstyle \psi_i} & & \downarrow{\scriptstyle F(\Theta_i)} \\
X_2' & \xrightarrow{\eta_2} & FX_2
\end{array} \qquad (i = 1, 2)
$$

Tenemos $G(F(\Theta_i)) = G(\eta_2) o G(\psi_i) o G(\eta_1^{-1})$ y entonces $\Theta_1 = \Theta_2$. En consecuencia $\psi_1 = \psi_2$, lo que prueba que G es fiel.

(b) Supongamos que GoF es completamente fiel. Sean X_1', X_2' objetos de $\mathcal{R}'$; X_1, X_2 objetos de $\mathcal{R}$ con equivalencias $\eta_i : X_i' \dashrightarrow FX_i$ $(i = 1, 2)$ y $\chi : GX_1' \dashrightarrow GX_2'$, un morfismo. Existe un único $\varphi : X_1 \dashrightarrow X_2$ que hace conmutativo el diagrama

$$
\begin{array}{ccc}
GX_1' & \xrightarrow{G(\eta_1)} & GFX_1 \\
{\scriptstyle \chi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (GF)(\varphi)} \\
GX_2' & \xrightarrow{G(\eta_2)} & GFX_2
\end{array}
$$

Definamos $\psi : X_1' \dashrightarrow X_2'$ por $\psi = \eta_2^{-1} F(\varphi) \eta_1$. Entonces $G(\psi) = \chi$ y G es completamente fiel.

(c) Supongamos que GoF es genéricamente suryectivo y sea X'' un objeto de $\mathcal{R}''$. Existe X en $\mathcal{R}$ tal que $G(FX) \cong X''$. Esto prueba que G es genéricamente suryectivo.

Llamemos equivalentes a dos categorías $\mathcal{R}$ y $\mathcal{R}'$, si existe una equivalencia $F: \mathcal{R} \dashrightarrow \mathcal{R}'$. En vista de lo que precede esta es una relación de equivalencia en la cl se de las categorías. Como se ha observado anteriormente esta noción es menos restrictiva que la noción de isomorfismo en $\{Cat\}$.

La caracterización de equivalencias dada en la proposición 2.4.3. muestra que la equivalencia de categorías se puede considerar como una equivalencia en la siguiente categoría:

Objetos: las categorías ;

Morfismos: las clases de funtores naturalmente equivalentes.

Sea F un funtor completamente fiel $F : \mathcal{R} \dashrightarrow \mathcal{R}'$. La imagen $F\mathcal{R}$ es entonces una categoría equivalente a $\mathcal{R}$ por la misma definición de equivalencia. Consideremos la saturación γ de $F\mathcal{R}$ en $\mathcal{R}'$ (ver sección 1.1.). Esta categoría γ es aún equivalente a $\mathcal{R}$ y $F : \mathcal{R} \dashrightarrow \gamma$ es genéricamente suryectivo. Se observa que γ casi nunca es "isomorfa" a $\mathcal{R}$ en la naturaleza.

2.5. Funtores adjuntos.

Sean $F : \mathcal{R} \dashrightarrow \mathcal{L}$ y $G : \mathcal{L} \dashrightarrow \mathcal{R}$ funtores covariantes. Consideremos los bifuntores canónicos $[\ ,\ ]_{\mathcal{R}} : \mathcal{R}^o \times \mathcal{R} \dashrightarrow Ens$, $[\ ,\ ]_{\mathcal{L}} : \mathcal{L}^o \times \mathcal{L} \dashrightarrow Ens$ (ver sección 2.1.), y los funtores producto $F \times 1_{\mathcal{L}} : \mathcal{R}^o \times \mathcal{L} \dashrightarrow \mathcal{L}^o \times \mathcal{L}$, $1_{\mathcal{R}^o} \times G : \mathcal{R}^o \times \mathcal{L} \dashrightarrow \mathcal{R}^o \times \mathcal{R}$. Aquí se considera al funtor $F : \mathcal{R} \dashrightarrow \mathcal{L}$ como un funtor $\mathcal{R}^o \dashrightarrow \mathcal{L}^o$ en forma obvia. Entonces los dos funtores

$$[\ ,\ ]_{\mathcal{L}} \circ (F \times 1_{\mathcal{L}}) \quad y \quad [\ ,\ ]_{\mathcal{R}} \circ (1_{\mathcal{R}^o} \times G)$$

son funtores $\mathcal{R}^o \times \mathcal{L} \dashrightarrow Ens$.

DEFINICION 2.5.1.: El funtor F es <u>adjunto a izquierda</u> del funtor G y G es <u>adjunto a derecha</u> de F , si existe una equivalencia natural

$$\eta : [\ ,\ ]_{\mathcal{L}} \circ (F \times 1_{\mathcal{L}}) \dashrightarrow [\ ,\ ]_{\mathcal{R}} \circ (1_{\mathcal{R}^{o}} \times G)$$

La equivalencia η se llama una adjunción de F en G.

Ejemplo 2.5.2.: Sean Ω, Λ anillos conmutativos con identidad y $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$ las categorías de los Ω, Λ -módulos unitarios respectivamente. Sea M un Ω, Λ -bimódulo (los operadores de Ω conmutan con los de Λ) fijo. Definamos

$$F(K) = M \otimes_{\Omega} K \qquad\qquad G(L) = \mathrm{Hom}_{\Lambda}(M, L)\ .$$

Entonces los funtores $F : \mathcal{R} \dashrightarrow \mathcal{L}$ y $G : \mathcal{L} \dashrightarrow \mathcal{R}$ definidos en forma obvia a partir de las correspondencias indicadas son adjuntos en vista de los isomorfismos naturales

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda}(M \otimes_{\Omega} K\ ,\ L) \dashrightarrow \mathrm{Hom}_{\Omega}(K\ ,\ \mathrm{Hom}_{\Lambda}(M, L))$$

Ejemplo 2.5.3.: Sea $F : \mathrm{Ens} \dashrightarrow \mathcal{G}$ el funtor del ejemplo 2.1.5. que asocia con cada conjunto X el grupo libre FX sobre este conjunto, y sea $V : \mathcal{G} \dashrightarrow \mathrm{Ens}$ el funtor "olvido".

Por la definición de FX para cada conjunto X la aplicación

$$\eta_{X,Y} : [FX, Y]_{\mathcal{G}} \dashrightarrow [X, VY]_{\mathrm{Ens}}$$
$$\alpha \dashrightarrow \alpha \circ \pi$$

(aquí π es la inyección canónica $\pi : X \dashrightarrow FX$), es biyectiva para todo grupo Y. La composición $\alpha \circ \pi$ es la restricción de α a X, $\eta_{X,Y}(\alpha) = \alpha/X$. Más aún, para $\varphi : X' \dashrightarrow X$ en Ens, $\psi : Y \dashrightarrow Y'$ en $\mathcal{G}$, esto es, para $(\varphi^{o}, \psi) : (X, Y) \dashrightarrow (X', Y')$ en $\mathrm{Ens}^{o} \times \mathcal{G}$, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} [FX, Y] & \xrightarrow{\eta_{X,Y}} & [X, VY] \\ \Big\downarrow (F(\varphi), \psi) & & \Big\downarrow (\varphi, V(\psi)) \\ [FX', Y'] & \xrightarrow{\eta_{X',Y'}} & [X', VY'] \end{array}$$

puesto que

$$(\eta_{X',Y'} \circ (F(\varphi), \psi))(\alpha) = (\psi \circ \alpha \circ F(\varphi))/X'$$

$$((\varphi, V(\psi)) \circ \eta_{X,Y})(\alpha) = V(\psi) \circ (\alpha/X) \circ \varphi$$

para $\alpha : FX \dashrightarrow Y$, y estas son dos expresiones para una misma aplicación $X' \dashrightarrow VY'$, pues conmuta el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, dash, "\alpha"] & Y \arrow[r, "\psi"] & Y' \\ X \arrow[u, hook] & FX' \arrow[ul, "F(\varphi)"'] & \\ & X' \arrow[u, hook] \arrow[ul, "\varphi"] & \end{tikzcd}$$

PROPOSICION 2.5.4.: Sea $F : \mathcal{R} \dashrightarrow \mathcal{L}$ y sean G_i $(i = 1, 2)$ funtores $G_i : \mathcal{L} \dashrightarrow \mathcal{R}$. Si G_1 es adjunto a derecha de F y G_2 es naturalmente equivalente a G_1 , entonces G_2 es adjunto a derecha de F .

Demostración: Sean

$\eta : [\ ,\ ]_{\mathcal{L}} \circ (F \times 1_{\mathcal{L}}) \dashrightarrow [\ ,\ ]_{\mathcal{R}} \circ (1_{\mathcal{R}^o} \times G_1)$; $\phi : G_1 \dashrightarrow G_2$; equivalencias naturales (que existen por hipótesis). Definiremos una transformación natural

$\zeta : [\ ,\ ]_{\mathcal{R}} \circ (1_{\mathcal{R}^o} \times G_1) \dashrightarrow [\ ,\ ]_{\mathcal{R}} \circ (1_{\mathcal{R}^o} \times G_2)$, poniendo

$\zeta_{X,Y} : [X, G_1 Y] \dashrightarrow [X, G_2 Y]$, para un objeto (X, Y) de $\mathcal{R}^o \times \mathcal{L}$ en la forma $\zeta_{X,Y}(\alpha) = \phi_Y \circ \alpha$ para $\alpha : X \dashrightarrow G_1 Y$.

Como ϕ es una equivalencia natural, es claro que ζ es también una equivalencia natural. Entonces

$$\zeta \circ \eta : [\,,\,]_{\mathcal{L}} \circ (F x 1_{\mathcal{L}}) \dashrightarrow [\,,\,]_{\mathcal{R}} \circ (1_{\mathcal{R}^o} x G_2) \text{ es una equivalencia natural,}$$

lo que prueba que G_2 es adjunto a derecha de F.

PROPOSICION 2.5.5.: Sea $F : \mathcal{R} \dashrightarrow \mathcal{L}$ una equivalencia. Entonces F posee un adjunto a derecha e izquierda $G : \mathcal{L} \dashrightarrow \mathcal{R}$ y éste es el funtor, definido a menos de una equivalencia natural, por la propiedad $GF \simeq 1$, $FG \simeq 1$ (ver proposiciones 2.4.3. y 2.4.4.).

Demostración: Es suficiente mostrar que G es adjunto a derecha de F. En efecto, como G es una equivalencia y F juega el papel de G cuando se toma a G como equivalencia inicial, resulta F adjunto a derecha de G y entonces, G adjunto a izquierda de F.

Sea $\phi : 1_{\mathcal{R}} \dashrightarrow GF$ una equivalencia natural. Construiremos una transformación natural

$\eta : [\,,\,]_{\mathcal{L}} \circ (F x 1_{\mathcal{L}}) \dashrightarrow [\,,\,]_{\mathcal{R}} \circ (1_{\mathcal{R}^o} x G)$. Para un objeto (X, Y) de $\mathcal{R}^o x \mathcal{L}$, definimos $\eta_{X,Y} : [FX, Y]_{\mathcal{L}} \dashrightarrow [X, GY]_{\mathcal{R}}$ por $\eta_{X,Y}(\alpha) = G(\alpha) \circ \phi_X$, con $\alpha : FX \dashrightarrow Y$, $\phi_X : X \dashrightarrow (GF)(X)$. Tenemos que mostrar que para un morfismo $(\varphi^o, \psi) : (X, Y) \dashrightarrow (X', Y')$ de $\mathcal{R}^o x \mathcal{L}$ el diagrama siguiente es conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
[FX, Y] & \xrightarrow{\eta_{X,Y}} & [X, GY] \\
\downarrow{\scriptstyle (F(\varphi), \psi)} & & \downarrow{\scriptstyle (\varphi, G(\psi))} \\
[FX', Y'] & \xrightarrow{\eta_{X',Y'}} & [X', GY']
\end{array}$$

Sea $\alpha \in [FX, Y]$. Entonces

$$(\varphi, G(\psi))(\eta_{X,Y}(\alpha)) = G(\psi) \circ G(\alpha) \circ \phi_X \circ \varphi \quad , \text{ y}$$

$$\eta_{X',Y'}((F(\varphi), \psi)(\alpha)) = G(\psi \circ \alpha \circ F_{(\alpha)}) \circ \phi_{X'} = G(\psi) \circ G(\alpha) \circ GF(\varphi) \circ \phi_{X'} .$$

Pero $\phi_X \circ \varphi = GF(\varphi) \circ \phi_{X'}$, pues $\phi : 1_{\mathcal{R}} \dashrightarrow GF$ es una transformación natural. En consecuencia, η es una transformación natural.

Para ver que η es una equivalencia natural sólo falta ver que $\eta_{X,Y}$ es un isomorfismo para todo objeto (X, Y) de $\mathcal{R}^o \times \mathcal{L}$ (esto es, que es biyectiva). Se tiene que $\eta_{X,Y}$ es inyectiva, pues si $\alpha_i : FX \dashrightarrow Y$ $(i = 1, 2,)$ con $G(\alpha_1) \circ \phi_X = G(\alpha_2) \circ \phi_X$, se tiene $G(\alpha_1) = G(\alpha_2)$, puesto que ϕ_X es un i somorfismo y sigue entonces $\alpha_1 = \alpha_2$, ya que G es fiel (corolario 2. 4. 6.).

Para ver la suryectividad de $\eta_{X,Y}$, sea $\theta : X \dashrightarrow GY$. Entonces $F(\theta) : FX$ ----- FGY. El diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi_X} & (GF)(X) \\ \theta \downarrow & & \downarrow (GF)(\theta) \\ GY & \xrightarrow{\phi_{GY}} & (GF)(GY) \end{array}$$

permite deducir $\theta = \phi_{GY}^{-1} \circ (GF)(\theta) \circ \phi_X$, dado que conmuta. Buscamos $\alpha : FX \dashrightarrow Y$ tal que $\theta = G(\alpha) \circ \phi_X$. Suponemos ahora que $\psi : 1_{\mathcal{L}} \dashrightarrow FG$ es una equivalencia natural, y más aún, que G, ϕ, ψ se han construído como en la demostración de la proposición 2. 4. 3. . Por la observación hecha al final de dicha demostración se tiene

$$G^* \phi = G_* \psi \quad (= 1_G) ,$$

esto es, para un objeto $Y \in \mathcal{L}$, $\phi_{GY} = G(\psi_Y)$. Pero como G es completamen te fiel ψ_Y es inversible por la proposición 2. 2. 5. y $\phi_{GY}^{-1} = G(\psi_Y^{-1})$. Entonces

$$\theta = G(\psi_Y^{-1}) \circ G(F(\theta))\, \phi_X = G(\psi_Y^{-1} \circ F(\theta)) \circ \phi_X \,.$$

Esto completa la demostración.

Observación: Hemos supuesto en la segunda parte de la demostración que G tiene las propiedades especiales del funtor construído en la demostración de la proposición 2.4.3. . Pero la proposición 2.5.5. es independiente de esta elección de G, por la proposición 2.5.4. .

PROPOSICION 2.5.6.: Sean $F: \mathcal{R} \dashrightarrow \mathcal{L}$, $G: \mathcal{L} \dashrightarrow \mathcal{R}$, funtores. Sea $\mathcal{O}$ una categoría arbitraria y $F_*: \mathcal{R}^{\mathcal{O}} \dashrightarrow \mathcal{L}^{\mathcal{O}}$, $G_*: \mathcal{L}^{\mathcal{O}} \dashrightarrow \mathcal{R}^{\mathcal{O}}$ los funtores naturalmente inducidos. Si F es adjunto a izquierda de G, entonces F_* es adjunto a izquierda de G_*.

Demostración: Sea $\eta : [F.,.]_{\mathcal{L}} \dashrightarrow [.,G.]_{\mathcal{R}}$ una equivalencia natural. Definiremos una equivalencia natural

$$\eta_* : [F_*.,.]_{\mathcal{L}^{\mathcal{O}}} \dashrightarrow [.,G_*.]_{\mathcal{R}^{\mathcal{O}}} \,.$$

Sean $K: \mathcal{O} \dashrightarrow \mathcal{R}$ y $L: \mathcal{O} \dashrightarrow \mathcal{L}$, funtores. Debemos definir

$$\eta_{*K,L} : [FK, L]_{\mathcal{L}^{\mathcal{O}}} \dashrightarrow [K, GL]_{\mathcal{R}^{\mathcal{O}}} \,,$$

esto es, una transformación natural $\eta_{*K,L}(\theta) : K \dashrightarrow GL$, para una transformación natural $\theta : FK \dashrightarrow L$. Sea A un objeto de $\mathcal{O}$. Entonces definimos

$(\eta_{*K,L}(\theta))_A : KA \dashrightarrow (GL)A$, por $(\eta_{*K,L}(\theta))_A = \eta_{KA,LA}(\theta_A)$.

Entonces $\eta_{*K,L}(\theta) : K \dashrightarrow GL$ es una transformación natural, por la naturalidad de η. Además $\eta_{*K,L}$ es biyectiva, pues $\eta_{KA,LA}$ es biyectiva para todo objeto (X,Y) de $\mathcal{R} \times \mathcal{L}$. Todo lo que resta probar es la naturalidad de η_*.

XY

Omitimos esta sencilla demostración.

Observación: En la definición de un par de funtores adjuntos $F : \mathcal{K} \dashrightarrow \mathcal{L}$, $G : \mathcal{L} \dashrightarrow \mathcal{K}$, hemos considerado una equivalencia natural $\eta : [F.,.]_{\mathcal{L}} \dashrightarrow [.,G.]_{\mathcal{K}}$. Esta se puede también considerar como una equivalencia natural $[.,F.]_{\mathcal{L}^o} \dashrightarrow [G.,.]_{\mathcal{K}^o}$. Esto significa que interpretando todo en las categorías opuestas, G se convierte en adjunto a izquierda de F. Esto indica el camino formal a seguir para obtener resultados sobre el adjunto a izquierda de un funtor a partir de resultados sobre el adjunto a derecha de un funtor.

* * *

CAPITULO 3 :

FUNTORES REPRESENTABLES

3.1. Lema de Yoneda.

Sean $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}'$ categorías y $F, G : \mathcal{K} \dashrightarrow \mathcal{K}'$ funtores. En algunos casos, la clase $[F,G]$ de las transformaciones naturales de F en G se puede describir en forma simple.

Consideremos primero dos objetos A, B de una categoría $\mathcal{K}$ y los funtores covariantes h_A, $h_B : \mathcal{K} \dashrightarrow \mathrm{Ens}$ definidos en el ejemplo 2.1.9. . Para cada morfismo $a : B \dashrightarrow A$ en $\mathcal{K}$ definimos una transformación natural ϕ^a : $h_A \dashrightarrow h_B$ de la siguiente manera: para un objeto X de $\mathcal{K}$ la aplicación $\phi^a_X : h_A(X) \dashrightarrow h_B(X)$ está dada por $\phi^a_X(\alpha) = \alpha \circ a = h_B(\alpha)(a)$, para $\alpha \in [A,X]$. El diagrama

$$\begin{array}{ccc} h_A(X) & \xrightarrow{\phi^a_X} & h_B(X) \\ \downarrow{\scriptstyle h_A(\gamma)} & & \downarrow{\scriptstyle h_B(\gamma)} \\ h_A(Y) & \xrightarrow{\phi^a_Y} & h_B(Y) \end{array}$$

es conmutativo para $\gamma : X \dashrightarrow Y$ en vista de las relaciones

$$(\phi^a_Y \circ h_A(\gamma))(\alpha) = (\gamma \circ \alpha) \circ a \;, \quad y \quad (h_B(\gamma) \circ \phi^a_X)(\alpha) = \gamma \circ (\alpha \circ a) \,,$$

donde $\alpha : A \dashrightarrow X$. Luego $\phi^a : h_A \dashrightarrow h_B$ es una transformación natural.

Consideremos más generalmente el funtor $h_A : \mathcal{K} \dashrightarrow \mathrm{Ens}$ definido por un objeto A de $\mathcal{K}$ y un funtor covariante arbitrario $F : \mathcal{K} \dashrightarrow \mathrm{Ens}$. Para un elemento $a \in FA$ definimos en forma análoga a lo hecho antes

$$\phi^a_X : h_A(X) \dashrightarrow FX , \quad \text{por} \quad \phi^a_X(\alpha) = F(\alpha)(a) , \quad \text{para} \quad \alpha \in [A, X] .$$

El siguiente lema es de fundamental importancia.

LEMA 3.1.1. (Yoneda): (i) $\phi^a : h_A \dashrightarrow F$ es una transformación natural; (ii) la aplicación $\phi : FA \dashrightarrow [h_A, F]$ definida por $a \dashrightarrow \phi^a$ es biyectiva.

Demostración: (i) Sea $\gamma : X \dashrightarrow Y$ un morfismo en $\mathcal{R}$.

El diagrama

$$\begin{tikzcd} h_A(X) \arrow[r, "\phi^a_X"] \arrow[d, "h_A(\gamma)"] & FX \arrow[d, "F(\gamma)"] \\ h_A(Y) \arrow[r, "\phi^a_Y"] & FY \end{tikzcd}$$

es conmutativo en vista de

$$(\phi^a_Y \circ h_A(\gamma))(\alpha) = F(\gamma \circ \alpha)(a) = F(\gamma) F(\alpha)(a) \quad y$$

$$(F(\gamma) \circ \phi^a_X)(\alpha) = F(\gamma) F(\alpha)(a) , \quad \text{para} \quad \alpha : A \dashrightarrow X .$$

Esto prueba (i).

(ii) Sea $\psi : h_A \dashrightarrow F$, y supongamos que $\psi = \phi^a$ para algún $a \in FA$. Entonces $\psi_A(1_A) = \phi^a_A(1_A) = (F(1_A))(a) = 1_{FA}(a) = a$. Esto prueba la inyectividad de ϕ. Sea ahora $\psi : h_A \dashrightarrow F$ cualquiera, y definamos $a = \psi_A(1_A)$. Entonces $\phi^a : h_A \dashrightarrow F$. Probaremos que $\phi^a = \psi$. Sea X un objeto de $\mathcal{R}$, y $\alpha : A \dashrightarrow X$; la conmutatividad del diagrama

$$\begin{array}{ccc} h_A A & \xrightarrow{\quad \Psi_A \quad} & FA \\ \Big\downarrow h_A(\alpha) & \Psi_X & \Big\downarrow F(\alpha) \\ h_A X & \xrightarrow{\qquad\quad} & FX \end{array}$$

muestra que

$\Psi_X(\alpha) = (\Psi_X \circ h_A(\alpha))(1_A) = (F(\alpha) \circ \Psi_A)(1_A) = F(\alpha)(a) = \phi^a_X(\alpha)$, o sea

que $\Psi_X = \phi^a_X$. Esto termina la demostración.

Aplicando el lema 3.1.1. al funtor $F = h_B$, donde B es un objeto de $\mathcal{R}$, se obtiene

COROLARIO 3.1.2.: La aplicación $\phi : [B, A] \dashrightarrow [h_A, h_B]$ es biyectiva.

Hemos definido para cada objeto A de $\mathcal{R}$ el funtor $h_A : \mathcal{R} \dashrightarrow$ Ens y para un morfismo $a : B \dashrightarrow A$ hemos definido la transformación natural ϕ^a: $h_A \dashrightarrow h_B$, que conviene aquí llamar h_a. Se obtiene claramente un funtor covariante $h : \mathcal{R}^o \dashrightarrow \mathrm{Ens}^{\mathcal{R}}$

PROPOSICION 3.1.3.: El funtor $h : \mathcal{R}^o \dashrightarrow \mathrm{Ens}^{\mathcal{R}}$ es completamente fiel.

Demostración: Esto es precisamente el corolario 3.1.2. .

COROLARIO 3.1.4.: $h_A \cong h_B$ si y sólo si $A \cong B$.

Demostración: Es una aplicación del corolario 2.2.6. .

Esto es muy importante y muestra que un objeto A de $\mathcal{R}$ está caracterizado salvo equivalencias por los morfismos que salen de A. Lo mismo es cierto para morfismos que tienen a A como objeto de llegada, como se deduce de las siguientes observaciones duales:

Sea $h^A : \mathcal{R} \dashrightarrow$ Ens el funtor contravariante definido por un objeto A de $\mathcal{R}$ (ejemplo 2.1.9.) y $F : \mathcal{R} \dashrightarrow$ Ens un funtor contravariante arbitrario.

Esto corresponde a la situación $F: \mathcal{R}^o \dashrightarrow Ens$, $h_A: \mathcal{R}^o \dashrightarrow Ens$. El lema 3.1.1. muestra entonces

LEMA 3.1.5.: Existe una biyección $\phi: FA \dashrightarrow [h^A, F]$.

Demostración: Se hace igual que antes.

PROPOSICION 3.1.6.: El funtor $h: \mathcal{R} \dashrightarrow Ens^{\mathcal{R}^o}$ definido por $A \dashrightarrow h^A$, $\alpha \dashrightarrow h^{\alpha}$ para $\alpha: A \dashrightarrow A'$, es completamente fiel.

Y en particular:

COROLARIO 3.1.7.: $h^A \cong h^B$ si y sólo si $A \cong B$.

3.2. <u>Representación de funtores</u>.

Sea $F: \mathcal{R} \dashrightarrow Ens$ un funtor covariante.

DEFINICION 3.2.1.: Una <u>representación de F</u> es un par (A, ψ) formado por un objeto A de $\mathcal{R}$ y una equivalencia natural

$$\psi: h_A \dashrightarrow F .$$

DEFINICION 3.2.2.: F es <u>representable</u> si existe una representación de F.

Si existe una representación (A, ψ) de F, A se llama un objeto representante de F.

PROPOSICION 3.2.3.: Sea F un funtor representable y sean A, B, objetos representantes de F. Entonces $A \cong B$.

Demostración: Por hipótesis $h_A \cong h_B$ y entonces $A \cong B$ por el corolario 3.1.4. .

Es claro que recíprocamente, si A representa a F y $B \cong A$, entonces también B representa a F. Sea $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ la subcategoría plena de $\mathrm{Ens}^{\mathcal{R}}$ definida por los funtores representable $\mathcal{R} \dashrightarrow \mathrm{Ens}$. Es la saturación de la subcategoría plena $h(\mathcal{R}^{o})$ de Ens.

PROPOSICION 3.2.4.: El funtor $h : \mathcal{R}^{o} \dashrightarrow \mathcal{R}_{\mathcal{R}}$ es una equivalencia.

Demostración: El funtor h es completamente fiel por la proposición 3.1.3. y es genéricamente suryectivo por la definición de $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$.

COROLARIO 3.2.5.: Existe un funtor $g : \mathcal{R}_{\mathcal{R}} \dashrightarrow \mathcal{R}^{o}$, definido salvo una equivalencia natural, por las condiciones $hog = 1_{\mathcal{R}_{\mathcal{R}}}$ y $goh = 1_{\mathcal{R}^{o}}$ (en particular $h_{g(F)} = F$ para F en $\mathcal{R}_{\mathcal{R}}$).

Demostración: Por la proposición 2.4.3. y el complemento 2.4.4. sigue este corolario.

Este corolario describe la dependencia del objeto representante respecto del funtor representado. El objeto representante se puede elegir en forma funtorial.

Sea ahora $F : \mathcal{R} \dashrightarrow \mathrm{Ens}$ un funtor representable, y A un objeto representante. Esto significa que hay equivalencias naturales en $[h_A, F]$. Consideremos la biyección $\phi : FA \dashrightarrow [h_A, F]$ del lema 3.1.1. .

DEFINICION 3.2.6.: Un elemento $a \in FA$ es <u>F-universal</u> si $\phi^{a} : h_A \dashrightarrow F$ es una equivalencia natural.

Un elemento $a \in FA$ es entonces F-universal si y sólo si (A, ϕ^{a}) es una representación de F.

PROPOSICION 3.2.7.: Sea $a \in FA$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) a es F-universal;

(ii) Para todo B y todo $b \in FB$ existe un único

$\zeta : A \dashrightarrow B$ tal que $F(\zeta)(a) = b$.

Demostración: (i) $\Longrightarrow$ (ii). Si $\phi^a : h_A \dashrightarrow F$ es una equivalencia natural, en particular $\phi^a_B : h_A(B) \dashrightarrow FB$ es biyectiva. Para $b \in FB$ existe entonces un único $\zeta : A \dashrightarrow B$ tal que $\phi^a_B(\zeta) = F(\zeta)(a) = b$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) . Se tiene que $\phi^a_B(\zeta) = F(\zeta)(a)$ y entonces ϕ^a_B es biyectiva para todo B . En vista de la proposición 2.3.10., ϕ^a es una equivalencia natural, esto es, a es F-universal.

COROLARIO 3.2.8.: Sean $a \in FA$, $b \in FB$, elementos F-universales. Entonces el único $\zeta : A \dashrightarrow B$ con $F(\zeta)(a) = b$ es una equivalencia.

Demostración: Sea $\zeta : A \dashrightarrow B$ con $F(\zeta)(a) = b$. Como $b \in FB$ es también F-universal, existe un único $\sigma : B \dashrightarrow A$, con $F(\sigma)(b) = a$. Entonces $F(\sigma \circ \zeta)(a) = F(\sigma) \circ F(\zeta)(a) = a$. Por unicidad esto implica $\sigma \circ \zeta = 1_A$. Análogamente, $\zeta \circ \sigma = 1_B$, y ζ resulta una equivalencia.

Este corolario precisa el sentido según el cual los objetos que representan al mismo funtor son equivalentes.

Para funtores contravariantes existen nociones similares; en efecto, si se remplaza h_A por h^A en las afirmaciones de esta sección, se obtienen afirmaciones correspondientes para funtores contravariantes, con excepción de la proposición 3.2.7. y el corolario 3.2.8., donde ahora $\zeta : B \dashrightarrow A$.

3.3. Ejemplos de funtores representables.

3.3.1.: Producto tensorial de grupos abelianos. Sean G_1 , G_2 grupos abelianos. Consideremos el funtor $F : \mathcal{O}\mathcal{G} \dashrightarrow Ens$ que asigna a cada grupo X

el conjunto $FX = Bil(G_1 x G_2, X)$ de aplicaciones biaditivas $G_1xG_2 \dashrightarrow X$, y para cada homomorfismo de grupo $\gamma : X \dashrightarrow Y$ la aplicación $F(\gamma): FX \dashrightarrow FY$ definida por composición con γ. El producto tensorial $G_1 \otimes G_2$ es un objeto representante de F. Sea $a \in F(G_1 \otimes G_2)$ un elemento F-universal, esto es, en particular $a : G_1xG_2 \dashrightarrow G_1 \otimes G_2$ es una aplicación biaditiva; entonces $\phi^a : h_{G_1 \otimes G_2} \dashrightarrow F$ es una equivalencia natural y, en particular, ϕ^a_X : $[G_1 \otimes G_2, X] \dashrightarrow Bil(G_1xG_2, X)$ es una biyección, donde $\phi^a_X(\alpha) = F(\alpha)(a) = \alpha \circ a$, para $\alpha : G_1 \otimes G_2 \dashrightarrow X$.

3.3.2.: Consideremos el funtor $P : Ens \dashrightarrow Ens$, que asigna a cada conjunto X su conjunto de partes $P(X)$ y a cada aplicación $\gamma : X \dashrightarrow Y$, la aplicación inducida $P(\gamma) = \gamma^{-1} : PY \dashrightarrow PX$. Supongamos que este funtor contravariante es representable y sea A un conjunto representante. Entonces $h^A \cong P$, y en particular, $[X, A] \cong PX$.

Ahora, el conjunto $A = \{0, 1\}$ es un conjunto con esta propiedad. Queremos encontrar un elemento P-universal a en PA, esto es, $\phi^a : h^A \dashrightarrow P$ debe ser una equivalencia natural, donde $\phi^a_X(\alpha) = P(\alpha)(a) = \alpha^{-1}(a)$ para $\alpha : X \dashrightarrow A$. O bien $\{0\}$ o bien $\{1\}$ (en PA) tienen esta propiedad. Entonces los pares $(A, \phi^{\{1\}})$ y $(A, \phi^{\{0\}})$ son representaciones del funtor $P : Ens \dashrightarrow Ens$.

3.3.3.: Consideremos el funtor $P : Ens \dashrightarrow Ens$ que asigna a cada conjunto X su conjunto de partes PX, y a cada aplicación $\gamma : X \dashrightarrow Y$ la aplicación $P(\gamma): PX \dashrightarrow PY$ inducida. Si un conjunto A representa este funtor covariante se tiene para todo conjunto X una biyección $[A, X] \dashrightarrow PX$; esto es imposible.

3.3.4. Fibrados universales. Sea G un grupo topológico y $\mathcal{T}_h$ la categoría que tiene por objetos a los espacios topológicos y por morfismos a las clases de homotopía de aplicaciones continuas. Consideremos el funtor $k_G : \mathcal{T}_h \dashrightarrow Ens$ que asigna a cada espacio topológico X el conjunto de clases de isomorfismo de fibrados G-principales sobre X, y a cada clase de homotopía $\gamma : X \dashrightarrow Y$ de aplicaciones, la aplicación $k_G(\gamma) = \gamma^* : k_G Y \dashrightarrow k_G X$ que aplica cada fibrado sobre Y en el fibrado inducido sobre X. Supongamos que k_G es representable y supongamos que B es un objeto representante; esto significa que B es un espacio topológico y que existe una biyección natural $[X,B] \dashrightarrow k_G X$.

Un elemento k_G-universal $\eta \in k_G B$ es un G-fibrado sobre B tal que la aplicación

$$\phi_X^{\eta} : [X,B] \dashrightarrow k_G X$$
$$f \dashrightarrow k_G(f)(\eta) = f^*(\eta)$$

es una biyección para cualquier espacio X. Un tal fibrado se llama un fibrado G-principal universal.

3.3.5. Objetos finales u objetos puntuales. Consideremos el funtor $F : \mathcal{R} \dashrightarrow Ens$ definido por $FX = \{1\}$ (un conjunto fijo de un sólo elemento para cada objeto X de $\mathcal{R}$). Considerémosle como un funtor contravariante.

DEFINICION 3.3.6.: Un <u>objeto final u objeto puntual</u> en $\mathcal{R}$ es un objeto T que representa al funtor contravariante $F : \mathcal{R} \dashrightarrow Ens$, esto es, $[X,T] = \{1\}$ para todo objeto X de $\mathcal{R}$.

En Ens, $\mathcal{A}\mathcal{G}$, $\mathcal{T}$; $\{1\}$, $\{0\}$, $\{1\}$ son objetos puntuales (respectivamente). En la categoría de los fibrados vectoriales sobre espacios topológicos, el fibrado con fibra nula sobre el espacio $\{1\}$ es un objeto puntual.

3.3.7.: Objetos iniciales u objetos copuntuales. Consideremos el mismo funtor $F : \mathcal{K} \dashrightarrow Ens$ que en 3.3.5., pero interpretado como funtor covariante.

DEFINICION 3.3.8.: Un <u>objeto inicial u objeto copuntual</u> en $\mathcal{K}$ es un objeto I que representa al funtor covariante $F : \mathcal{K} \dashrightarrow Ens$ definido por $FX = \{1\}$ para todo X de $\mathcal{K}$. Esto es $[I, X] = \{1\}$ para todo objeto X de $\mathcal{K}$.

En Ens, $\mathcal{O}\mathcal{G}$; ϕ, $\{0\}$, son objetos copuntuales respectivamente.

3.3.9.: Un <u>cero-objeto</u> en $\mathcal{K}$ es un objeto O que es inicial y final en $\mathcal{K}$.

En $\mathcal{O}\mathcal{G}$, $\{0\}$ es un cero-objeto.

Supongamos que O es un cero-objeto en $\mathcal{K}$, y sean X, Y objetos arbitrarios en $\mathcal{K}$. La composición $X \dashrightarrow 0$, $0 \dashrightarrow Y$ da un $O_{XY} \in [X, Y]$ bien determinado. La familia (O_{XY}) es claramente un sistema de cero-morfismos en el sentido de la definición 1.3.15. .

3.4. <u>Representabilidad de funtores adjuntos.</u>

Sean $F : \mathcal{K} \dashrightarrow \mathcal{L}$ y $G : \mathcal{L} \dashrightarrow \mathcal{K}$, funtores.

PROPOSICION 3.4.1.: Supongamos que F es adjunto a izquierda de G. Sea η una adjunción de F a G y K un objeto de $\mathcal{K}$. Entonces el par $(FK, \eta_{K,.})$ formado por el objeto FK de $\mathcal{L}$ y la equivalencia natural $\eta_{K,.} : [FK, .]_{\mathcal{L}} \dashrightarrow [K, G.]_{\mathcal{K}}$, es una representación del funtor $[K, G.]_{\mathcal{K}} : \mathcal{L} \dashrightarrow Ens$.

Demostración: Es claro que $\eta_{K,Y} : [FK, Y]_{\mathcal{L}} \dashrightarrow [K, GY]_{\mathcal{K}}$ define una equivalencia natural $\eta_{K,.} : h_{FK} \dashrightarrow [K, G.]_{\mathcal{K}}$, y esto demuestra la proposición.

Consideremos el elemento universal $\varepsilon_K = \eta_{K,FK}(1_{FK}) \in [K, GFK]_{\mathcal{K}}$, de finido por la equivalencia natural $\eta_{K,\cdot} : [FK, \cdot]_{\mathcal{L}} \dashrightarrow [K, G\cdot]_{\mathcal{K}}$.

Primero observemos que la aplicación $\eta_{K,L} : [FK, L]_{\mathcal{L}} \dashrightarrow [K, GL]_{\mathcal{K}}$ debe estar definida por ε_K en vista del lema 3.1.1. y, en efecto,

$$\eta_{K,L}(\alpha) = G(\alpha) \circ \varepsilon_K \quad \text{para} \quad \alpha : FK \dashrightarrow L,$$

dada la conmutatividad de

$$\begin{tikzcd}
{[FK, FK]_{\mathcal{L}}} \arrow[r, "\eta_{K,FK}"] \arrow[d, "{[FK, \alpha]}"] & {[K, GFK]_{\mathcal{K}}} \arrow[d, "{[K, G(\alpha)]}"] \\
{[FK, L]_{\mathcal{L}}} \arrow[r, "\eta_{K,L}"] & {[K, GL]_{\mathcal{K}}}
\end{tikzcd}$$

Notemos que la universalidad de ε_K es, por la proposición 3.2.7., equivalente a la siguiente afirmación:

Para todo objeto $L \in \mathcal{L}$ y todo $\beta : K \dashrightarrow GL$, existe un único τ : $FK \dashrightarrow L$ tal que $[K, G(\tau)](\varepsilon_K) = G(\tau) \circ \varepsilon_K = \beta$.

Se ve fácilmente que $\varepsilon = (\varepsilon_K)_{K \in \mathcal{K}}$ define una transformación natural $\varepsilon : 1_{\mathcal{K}} \dashrightarrow GF$. Esto motiva la

DEFINICION 3.4.2.: Sean $F : \mathcal{K} \dashrightarrow \mathcal{L}$, $G . \mathcal{L} \dashrightarrow \mathcal{K}$, funtores. Una <u>adjunción frontal</u> de F a G es una transformación natural $\varepsilon : 1_{\mathcal{K}} \dashrightarrow GF$, tal que $\varepsilon_K \in [K, GFK]_{\mathcal{K}}$ es un elemento universal para el funtor $[K, G\cdot]_{\mathcal{K}}$: $\mathcal{L} \dashrightarrow \mathrm{Ens}$.

Esto supone, por supuesto, que para cada objeto K de $\mathcal{K}$, FK es un objeto representante de $[K, G\cdot]_{\mathcal{K}} : \mathcal{L} \dashrightarrow \mathrm{Ens}$.

LEMA 3.4.3. (Kan): Sean $F : \mathcal{K} \dashrightarrow \mathcal{L}$ y $G : \mathcal{L} \dashrightarrow \mathcal{K}$, funtores.

Las fórmulas

$$\varepsilon_K = \eta_{K,FK}(1_{FK}), \quad \eta_{K,L}(\alpha) = G(\alpha) \circ \varepsilon_K$$

para $\alpha : FK \dashrightarrow L$, definen una biyección entre las adjunciones de F a G y las adjunciones frontales de F a G.

Demostración: Ya hemos mostrado que una adjunción η de F a G define una adjunción frontal ε de F a G que satisface las fórmulas de más arriba. Sea recíprocamente ε una adjunción frontal de F a G y definamos $\eta_{K,L} : [FK, L]_{\mathcal{L}} \dashrightarrow [K, GL]_{\mathcal{K}}$ por las fórmulas del enunciado. Entonces $\eta_{K,L}$ es una biyección por la universalidad de ε_K. Debemos mostrar solamente la naturalidad. Sea $\lambda : L \dashrightarrow L'$; el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
[FK, L] & \xrightarrow{\eta_{K,L}} & [K, GL] \\
\big\downarrow [FK, \lambda] & & \big\downarrow [K, G(\lambda)] \\
[FK, L'] & \xrightarrow{\eta_{K,L'}} & [K, GL']
\end{array}$$

es conmutativo en vista de las relaciones

$$(\eta_{K,L'} \circ [FK, \lambda])(\alpha) = G(\lambda \circ \alpha) \circ \varepsilon_K ,$$

$$([K, G(\lambda)] \circ \eta_{K,L})(\alpha) = G(\lambda) \circ G(\alpha) \circ \varepsilon_K$$

Ahora sea $\aleph : K' \dashrightarrow K$ y consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
[FK, L] & \xrightarrow{\eta_{K,L}} & [K, GL] \\
\big\downarrow [F(\aleph), L] & & \big\downarrow [\aleph, L] \\
[FK', L] & \xrightarrow{\eta_{K',L}} & [K', GL]
\end{array} .$$

Se tiene

$$(\eta_{K',L} \circ [F(\aleph), L])(\alpha) = G(\alpha \circ F(\aleph)) \circ \varepsilon_{K'} = G(\alpha) \circ (GF)(\aleph) \circ \varepsilon_{K'} ,$$

$$([\aleph, L] \circ \eta_{K,L})(\alpha) = G(\alpha) \circ \varepsilon_K \circ \aleph .$$

Pero, siendo $\mathcal{E}$ natural, $\mathcal{E}_K \circ \mathcal{K} = (GF)(\mathcal{K}) \circ \mathcal{E}_{K'}$, y resulta que η es natural. Luego η es una adjunción. Más aún, $\eta_{K,FK}(1_{FK}) = G(1_{FK}) \circ \mathcal{E}_K =$ $= 1_{GFK} \circ \mathcal{E}_K = \mathcal{E}_K$, de modo que $\mathcal{E}$ es la adjunción frontal asociada a η. Esto concluye la demostración.

PROPOSICION 3.4.4.: Sean $F, F' : \mathcal{R} \dashrightarrow \mathcal{L}$, $G : \mathcal{L} \dashrightarrow \mathcal{R}$ funtores. Si $\mathcal{E} : 1_{\mathcal{R}} \dashrightarrow GF$ es una adjunción frontal y $\mathcal{E}' : 1_{\mathcal{R}} \dashrightarrow GF'$ es una transformación natural, entonces hay una única transformación natural $\Theta : F \dashrightarrow F'$ tal que $\mathcal{E}' = G_* \Theta \circ \mathcal{E}$, es decir, que para cada objeto K de $\mathcal{R}$ se tiene $\mathcal{E}'_K =$ $= G(\Theta_K) \circ \mathcal{E}_K$.

Se puede reenunciar esto diciendo que una adjunción frontal $\mathcal{E} : 1_{\mathcal{R}} \dashrightarrow GF$ es un elemento universal del funtor $[1_{\mathcal{R}}, G.]_{\mathcal{R}^{\mathcal{R}}} : \mathcal{L}^{\mathcal{R}} \dashrightarrow \mathrm{Ens}$. Por el corolario 3.2.8. se obtiene entonces

COROLARIO 3.4.5.: Sean $F, F' : \mathcal{R} \dashrightarrow \mathcal{L}$, $G : \mathcal{L} \dashrightarrow \mathcal{R}$, funtores. Si $\mathcal{E} : 1_{\mathcal{R}} \dashrightarrow GF$, $\mathcal{E}' : 1_{\mathcal{R}} \dashrightarrow GF'$ son adjunciones frontales, la única transformación natural $\Theta : F \dashrightarrow F'$ que verifica $\mathcal{E}' = G_* \Theta \circ \mathcal{E}$, es una equivalencia natural.

Esto, junto con el lema 3.4.3., muestra el

COROLARIO 3.4.6.: Sean $F, F' : \mathcal{R} \dashrightarrow \mathcal{L}$, $G : \mathcal{L} \dashrightarrow \mathcal{R}$, funtores. Si F y F' son adjuntos a izquierda de G, entonces F y F' son naturalmente equivalentes.

Demostración de la proposición 3.4.4.: Sea K un objeto de $\mathcal{R}$. El morfismo $\mathcal{E}_K \in [K, GFK]_{\mathcal{R}}$ es un elemento universal de $[K, G.]_{\mathcal{R}}$ por definición de adjunción frontal. Por la proposición 3.2.7., existe entonces un único θ_K : $FK \dashrightarrow F'K$ tal que

$$\left[K, G(\theta_K)\right](\varepsilon_K) = G(\theta_K) \circ \varepsilon_K = \varepsilon'_K \quad .$$

Esto ya muestra la unicidad de $\theta = (\theta_K)_{K \in \mathcal{K}}$. Falta mostrar la naturalidad; esto es, la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
FK_1 \arrow[r, "\theta K_1"] \arrow[d, "F(\chi)"'] & F'K_1 \arrow[d, "F'(\chi)"] \\
FK_2 \arrow[r, "\theta K_2"] & F'K_2
\end{tikzcd}$$

para todo $\chi : K_1 \dashrightarrow K_2$.

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
FK_1 \arrow[rr, "F(\chi)"] \arrow[dr, "\theta_{K_1}"] & & FK_2 \arrow[dr, "\theta_{K_2}"] & \\
& F'K_1 \arrow[rr, "F'(\chi)"] & & F'K_2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
GFK_1 \arrow[rr, "(GF)(\chi)"] \arrow[dr, "G(\theta_{K_1})"] & & GFK_2 \arrow[dr, "G(\theta_{K_2})"] & \\
& GF'K_1 \arrow[rr, "(GF')(\chi)"] & & GF'K_2 \\
K_1 \arrow[uu, "\varepsilon_{K_1}"] \arrow[ur, "\varepsilon'_{K_1}"'] \arrow[rr, "\chi"] & & K_2 \arrow[uu, "\varepsilon_{K_2}"'] \arrow[ur, "\varepsilon'_{K_2}"'] &
\end{tikzcd}$$

Ahora bien, $G(\theta_{K_i}) \circ \varepsilon_{K_i} = \varepsilon'_{K_i}$ $(i = 1,2)$, y ε , ε' , son naturales. Esto muestra que

$$\varepsilon'_{K_2} \circ \chi = (GF')(\chi) \circ \varepsilon'_{K_1} = (GF')(\chi) \circ G(\theta_{K_1}) \circ \varepsilon_{K_1}$$

$$\varepsilon'_{K_2} \circ \chi = G(\theta_{K_2}) \circ \varepsilon_{K_2} \circ \chi = G(\theta_{K_2}) \circ (GF)(\chi) \circ \varepsilon_{K_1} \quad .$$

Pero FK_1 representa a $[K_1, G.]$ y $\varepsilon_{K_1} \in [K_1, GFK_1]$ es universal. Entonces la igualdad

$$(GF')(\varkappa) \circ G(O_{K_1}) \circ \varepsilon_{K_1} = G(O_{K_2}) \circ (GF)(\varkappa) \circ \varepsilon_{K_1}$$

de morfismos $K_1 \dashrightarrow GF'K_2$ implica la conmutatividad del diagrama de arriba. Esto finaliza la demostración.

PROPOSICION 3.4.7.: Sea $G : \mathcal{L} \dashrightarrow \mathcal{K}$ un funtor. Supongamos que para cada objeto K de $\mathcal{K}$ el funtor $[K, G.]_{\mathcal{K}} : \mathcal{L} \dashrightarrow Ens$ es representable, y sea $\tilde{F}K$ un objeto representante y $\varepsilon_K \in [K, G\tilde{F}K]$ un elemento universal. Entonces existe un único funtor $F : \mathcal{K} \dashrightarrow \mathcal{L}$ con $FK = \tilde{F}K$ para todo K, y $\varepsilon : 1_{\mathcal{K}} \dashrightarrow GF$ natural, donde $\varepsilon = (\varepsilon_K)_{K \in \mathcal{K}}$.
Esto significa que en estas condiciones F ya está definido por su valor sobre los objetos de $\mathcal{K}$ y es adjunto a izquierda de G.

Demostración: Para cada $\alpha : \tilde{F}K \dashrightarrow L$ definamos $\varepsilon_{K,L}(\alpha) = G(\alpha) \circ \varepsilon_K : K \dashrightarrow GL$. Entonces $\eta_{K,L} : [\tilde{F}K, L] \dashrightarrow [K, GL]$ es una biyección, pues $\varepsilon_K \in [K, G\tilde{F}K]$ es universal. Se tiene que $\eta_{K,.} : [\tilde{F}K, .] \dashrightarrow [K, G.]$ es una transformación natural por construcción (y entonces una equivalencia natural). Ahora, sea $\varkappa : K \dashrightarrow K'$ un morfismo en $\mathcal{K}$. Si $\varepsilon : 1_{\mathcal{K}} \dashrightarrow GF$ debe ser natural, deberá necesariamente ser conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} G\tilde{F}K \arrow[r, "(GF)(\varkappa)"] & G\tilde{F}K' \\ K \arrow[u, "\varepsilon_K"] \arrow[r, "\varkappa"] & K' \arrow[u, "\varepsilon_{K'}"'] \end{tikzcd}$$

(donde aún no hemos definido la flecha de arriba). Definimos ahora $F(\varkappa) : FK \dashrightarrow$

FK' por $\eta^{-1}_{K,\tilde{F}K'}(\varepsilon_{K'} \circ \varkappa)$. Entonces

$$G(F(\varkappa)) \circ \varepsilon_K = G(\eta^{-1}_{K,FK'}(\varepsilon_{K'} \circ \varkappa)) \circ \varepsilon_K = \varepsilon_{K'} \circ \varkappa,$$

y ε será natural, si probamos que F es un funtor. Ahora bien, G es un funtor y entonces, para $\varkappa : K \longrightarrow K'$, $\varkappa' : K' \longrightarrow K''$ se tiene

$$(*) \quad (GF)(\varkappa' \circ \varkappa) \circ \varepsilon_K = G(F\varkappa' \circ F\varkappa) \circ \varepsilon_K,$$

siendo ambos miembros iguales a $\varepsilon_{K''} \circ \varkappa' \circ \varkappa$. En efecto, para el primer miembro esto es cierto por definición, y para el segundo miembro

$$G(F\varkappa' \circ F\varkappa) \circ \varepsilon_K = G(F(\varkappa')) \circ G(F(\varkappa)) \circ \varepsilon_K = G(F(\varkappa')) \circ \varepsilon_{K'} \circ \varkappa =$$

$= \varepsilon_{K''} \circ \varkappa' \circ \varkappa$. En vista de la biyectividad de η, $(*)$ implica que $F(\varkappa' \circ \varkappa)$ $= F(\varkappa') \circ F(\varkappa)$. Análogamente $F(1) = 1$ y F es un funtor.

Observación: La existencia de un funtor F con $FK = \tilde{F}K$ como se afirma en la proposición 3.4.5. se puede también demostrar como sigue: Por hipótesis la correspondencia $K \longrightarrow [K, G.]_{\mathcal{K}}$ define un funtor $\gamma : \mathcal{K}^o \longrightarrow \mathcal{R}_{\mathcal{L}}$ de $\mathcal{K}^o$ a los funtores representables $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}$ de $Ens^{\mathcal{L}}$. Componiendo con el funtor g: $\mathcal{R}_{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathcal{L}^o$ del corolario 3.2.5. se obtiene un funtor $g \circ \gamma : \mathcal{K}^o \longrightarrow \mathcal{L}^o$, respectivamente $\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$, que tiene precisamente el efecto deseado.

Hemos supuesto en la proposición 3.4.7. que para todo objeto K de $\mathcal{K}$ el funtor $[K, G.]_{\mathcal{K}} : \mathcal{L} \longrightarrow Ens$ es representable. Sea γ' la subcategoría plena de $\mathcal{K}$ definida por estos objetos. Supongamos que la imagen de $\mathcal{L}$ por G está contenida en γ' y notemos $\overline{G} : \mathcal{L} \longrightarrow \gamma'$ al funtor inducido por G. Es claro que lo precedente muestra también que

PROPOSICION 3.4.8.: Sea $G : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{K}$ un funtor y γ' la subcategoría plena de $\mathcal{K}$ con objetos, los K tales que $[K, G.]_{\mathcal{K}}$ es representable. Supongamos que

$G(\mathcal{L}) \subset \mathcal{Y}$ y sea $\overline{G} : \mathcal{L} \dashrightarrow \mathcal{Y}$ el funtor inducido. Sea, para todo K en $\mathcal{Y}$, $\widetilde{F}K$ un objeto representante y $\varepsilon_K \in [K, G\widetilde{F}K]$ un elemento universal. Entonces existe un único funtor $F : \mathcal{Y} \dashrightarrow \mathcal{L}$ con $FK = \widetilde{F}K$ para todo K en $\mathcal{Y}$ y $\mathcal{E} : 1_{\mathcal{Y}} \dashrightarrow \overline{G}F$ natural. F resulta además adjunto a izquierda de $\overline{G}$.

Podemos reformular la última proposición en términos de adjunciones, en lugar de adjunciones frontales. Entonces:

PROPOSICION 3.4.9.: Sea $G : \mathcal{L} \dashrightarrow \mathcal{R}$ un funtor y $\mathcal{Y}$ la subcategoría plena de $\mathcal{R}$ que contiene por objetos a los K tales que $[K, G.]_{\mathcal{R}}$ es representable. Supongamos que $G(\mathcal{L}) \subset \mathcal{Y}$ y sea $\overline{G} : \mathcal{L} \dashrightarrow \mathcal{Y}$ el funtor inducido. Sea para todo K en $\mathcal{Y}$ $(FK, \eta_{K,.})$ una representación de $[K, G.]_{\mathcal{R}}$. Entonces existe un único funtor $F : \mathcal{Y} \dashrightarrow \mathcal{L}$ con $FK = \widetilde{F}K$ para todo K en $\mathcal{Y}$ y tal que $\eta_{.,.} : [F.,.]_{\mathcal{L}} \dashrightarrow [.,G.]_{\mathcal{R}}$ es una adjunción de F a $\overline{G}$.

3.5. Sistemas libres.

Sea $G : \mathcal{L} \dashrightarrow \mathcal{R}$ un funtor y K un objeto de $\mathcal{R}$.

DEFINICION 3.5.1.: Un <u>sistema libre sobre K respecto a G: $\mathcal{L} \dashrightarrow \mathcal{R}$</u>, es un par $(L, \mathcal{E})$ formado por un objeto L de $\mathcal{L}$ y un morfismo $\mathcal{E} \in [K, GL]_{\mathcal{R}}$ que es universal para el funtor $[K, G.]_{\mathcal{R}} : \mathcal{L} \dashrightarrow \mathrm{Ens}$.

Con la función de Yoneda $\phi : [K, GL]_{\mathcal{R}} \dashrightarrow [h_L, [K, G.]_{\mathcal{R}}]_{\mathrm{Ens}}$ del lema 3.1.1., esto se puede reformular diciendo que $(L, \phi^{\mathcal{E}})$ es una representación del funtor $[K, G.]_{\mathcal{K}} : \mathcal{L} \dashrightarrow \mathrm{Ens}$.

Si $(L, \phi^{\mathcal{E}})$ es un sistema libre sobre K, el objeto L que representa al funtor $[K, G.]_{\mathcal{K}}$ se llama un objeto libre sobre K con respecto a $G : \mathcal{L} \dashrightarrow \mathcal{K}$. Es claro, a partir del lema 3.1.1., que L determina $\mathcal{E}$ salvo una equivalencia de L ; esto es, cualquier $\mathcal{E}$ se puede escribir en la forma $\mathcal{E} = G(\lambda)\,\mathcal{E}_0$, para $\mathcal{E}_0 : K \dashrightarrow GL$ fijo, y $\lambda : L \dashrightarrow L'$ una equivalencia en $\mathcal{L}$.

Se tiene, en virtud de la proposición 3.2.7., la siguiente caracterización de sistemas libres (salvo equivalencia canónica en el sentido del corolario 3.2.8.):

PROPOSICION 3.5.2.: Sea $G : \mathcal{L} \dashrightarrow \mathcal{K}$ un funtor, K un objeto de $\mathcal{K}$ y $(L, \mathcal{E})$ un par formado por un objeto L de $\mathcal{L}$ y un $\mathcal{E} \in [K, GL]_{\mathcal{K}}$. Entonces $(L, \mathcal{E})$ es un sistema libre sobre K con respecto a $G : \mathcal{L} \dashrightarrow \mathcal{K}$ sí y sólo si para todo objeto L' de $\mathcal{L}$ y todo morfismo $\mathcal{E}' : K \dashrightarrow GL'$ de $\mathcal{K}$, existe un único morfismo $\tau : L \dashrightarrow L'$ de $\mathcal{L}$, que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
GL \arrow[r, "G(\tau)"] & GL' \\
K \arrow[u, "\mathcal{E}"] \arrow[ur, "\mathcal{E}'"'] &
\end{tikzcd}$$

Ejemplo 3.5.3.: Sea $\mathcal{K} = \mathrm{Ens}$, $\mathcal{L} = \mathcal{AG}$ ($\mathcal{AG}$ es la categoría de los grupos abelianos), $V : \mathcal{AG} \dashrightarrow \mathrm{Ens}$ el funtor olvido. Un sistema libre sobre un conjunto K, digamos $(L, \mathcal{E})$, con respecto a V es un par formado por un grupo abeliano L y una aplicación $\mathcal{E} : K \dashrightarrow VL$ tal que, para todo grupo abeliano L' y toda aplicación $\mathcal{E}' : K \dashrightarrow VL'$, existe un único homomorfismo $\tau : L \dashrightarrow L'$ que verifica $V(\tau) \circ \mathcal{E} = \mathcal{E}'$. El grupo L es el que usualmente se deno mina un grupo abeliano libre sobre el conjunto K.

Ejemplo 3.5.4.: En el ejemplo anterior, reemplazamos Ens por la categoría $\mathcal{R}$ de los monoides conmutativos. Entonces obtenemos, con el mismo procedimiento, la noción de grupo abeliano libre sobre un monoide conmutativo.

Si, por ejemplo, se parte el monoide EX de clases de isomorfismo de fibrados vectoriales sobre el cuerpo Λ, sobre un espacio X, se obtiene mediante esta construcción un grupo abeliano KX, que desde hace algunos años juega un papel importante en geometría.

El ejemplo 3.5.3. se puede reformular, naturalmente, para diversos tipos de estructuras algebraicas. Nos limitaremos solamente al

Ejemplo 3.5.5.: Sea $\mathcal{R} = \mathcal{L}\mathcal{A}$, la categoría de las álgebras de Lie sobre un anillo Λ; $\mathcal{L} = \mathcal{A}\mathcal{A}$, la categoría de las álgebras asociativas sobre Λ; $G : \mathcal{A}\mathcal{A} \dashrightarrow \mathcal{L}\mathcal{A}$ el funtor que asigna a cada álgebra asociativa, A, su álgebra de Lie asociada GA, con el corchete definido por $a_1, a_2 = a_1a_2 - a_2a_1$ para $a_1, a_2 \in A$. Sea K una Λ-álgebra de Lie. Un sistema libre (A, ε) sobre K con respecto a G es un par formado por una Λ-álgebra asociativa A y un homomorfismo $\varepsilon : K \dashrightarrow GA$ de álgebras de Lie, tal que para toda álgebra asociativa A' y todo homomorfismo $\varepsilon' : K \dashrightarrow GA'$ de álgebras de Lie, existe un homomorfismo $\tau : A \dashrightarrow A'$ de álgebras asociativas tal que $G(\tau) \circ \varepsilon = \varepsilon'$. El homomorfismo $G(\tau) : GA \dashrightarrow GA'$ es el homomorfismo de álgebras de Lie deducido de $\tau : A \dashrightarrow A'$. Si (A, ε) es un sistema libre sobre el álgebra de Lie K, A se llama un álgebra encapsulante de K. El álgebra encapsulante es fundamental para la teoría de representaciones de álgebras de Lie, permitiendo reducirla a la teoría de representaciones de álgebras asociativas

Ejemplo 3.5.6.: Sea $\mathcal{R}$ la categoría de las variedades complejas compactas; $\mathcal{L}$ la subcategoría de los toros compactos complejos; $G : \mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{R}$ el funtor de inclusión. Sea K una variedad compleja compacta. Un sistema libre $(L, \mathcal{E})$ sobre K con respecto a G es un par formado por un toro L y una aplicación holomorfa $\mathcal{E} : K \dashrightarrow L$, tal que para todo toro L' y toda aplicación holomorfa $\mathcal{E}' : K \dashrightarrow L'$ existe una única aplicación holomorfa $\mathcal{T} : L \dashrightarrow L'$ tal que $\mathcal{T} \circ \mathcal{E} = \mathcal{E}'$. Si $(L, \mathcal{E})$ es un sistema libre sobre K con respecto a G, el toro L se llama <u>una variedad de Albanese de K</u>.

Ejemplo 3.5.7.: Sea $\mathcal{L}$ = Ens ; $\mathcal{R}$ la categoría de las relaciones de equivalencia, que tiene como objetos a los conjuntos munidos de una relación de equivalencia y como morfismos a las aplicaciones de dichos conjuntos que son compatibles con las respectivas relaciones de equivalencia. Se puede construir un funtor $G : \mathcal{L} \dashrightarrow \mathcal{R}$ que aplica un conjunto en el mismo conjunto munido de la relación de equivalencia "identidad". Sea K un conjunto con una relación de equivalencia R. Un sistema libre $(L, \mathcal{E})$ sobre K respecto a G es un conjunto L y una aplicación $\mathcal{E} : K \dashrightarrow L$ (que es un morfismo en $\mathcal{R}$ de K en GL), tal que para todo conjunto L' y toda aplicación $\mathcal{E}' : K \dashrightarrow L'$ (que sea un morfismo en $\mathcal{R}$ de K en GL'), existe una única aplicación $\mathcal{T} : L \dashrightarrow L'$ con $\mathcal{T} \circ \mathcal{E} = \mathcal{E}'$. Un tal conjunto L es <u>un cociente del conjunto K por la relación de equivalencia R</u>, y $\mathcal{E} : K \dashrightarrow L$ es una aplicación cociente.

Ejemplo 3.5.8.: Sea G un grupo; $\mathcal{L}^G = \mathcal{R}$, la categoría de los G-objetos de una categoría $\mathcal{L}$, con objetos los G-objetos de $\mathcal{L}$ y morfismos los morfismos equivariantes. La G-operación trivial sobre cualquier objeto de $\mathcal{L}$ define un funtor $H : \mathcal{L} \dashrightarrow \mathcal{R}$. Sea K un G-objeto de $\mathcal{L}$. Un sistema libre $(L, \mathcal{E})$ sobre K con respecto a H es un objeto L de $\mathcal{L}$ y un morfismo $\mathcal{E} : K \dashrightarrow HL$, tales que para todo objeto L' de $\mathcal{L}$ y todo $\mathcal{E}' : K \dashrightarrow HL'$ existe un único $\mathcal{T} : L \dashrightarrow L'$ con $H(\mathcal{T}) \circ \mathcal{E} = \mathcal{E}'$. El objeto L es <u>un objeto de órbitas de K</u> y $\mathcal{E} : K \dashrightarrow HL$ es un "morfismo" de órbitas.

Ejemplo 3.5.9.: Sea $\mathcal{R}$ la categoría de los cuerpos conmutativos; $\mathcal{L}$ la categoría de los cuerpos conmutativos algebraicamente cerrados; G $\mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{R}$ el funtor de inclusión; K un objeto de $\mathcal{R}$; y $(L, \mathcal{E})$ un sistema libre sobre K respecto a G . Entonces L es una extensión algebraica maximal de K .

Ahora aplicaremos los resultados de la sección 3.4. a sistemas libres.

PROPOSICION 3.5.10.: Sean $F : \mathcal{R} \dashrightarrow \mathcal{L}$, $G : \mathcal{L} \dashrightarrow \mathcal{R}$ funtores adjuntos, η una adjunción de F a G , y K un objeto de $\mathcal{R}$. Definamos $\mathcal{E}_K \in [K, GFK]$ por $\mathcal{E}_K = \eta_{K,FK}(1_{FK})$. Entonces el par $(FK, \mathcal{E}_K)$ es un sistema libre sobre K con respecto a G .

Demostración: Esto proposición no es más que una reformulación de la proposición 3.4.1. .

Una nueva forma de la proposición 3.4.7. es la

PROPOSICION 3.5.11.: Sea $G : \mathcal{L} \dashrightarrow \mathcal{R}$ un funtor. Supongamos que para todo objeto K de $\mathcal{R}$ existe un sistema libre $(\tilde{F}K, \mathcal{E}_K)$ de K con respecto a G . Entonces existe un único funtor $F : \mathcal{R} \dashrightarrow \mathcal{L}$ con $FK = \tilde{F}K$ para todo K en $\mathcal{R}$ y tal que $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_K)_{K \in \mathcal{R}}$ es una transformación natural $\mathcal{E} : 1_{\mathcal{R}} \dashrightarrow GF$. El funtor F es adjunto a izquierda de G .

De la proposición 3.4.8. se obtiene

PROPOSICION 3.5.12.: Sea $G : \mathcal{L} \dashrightarrow \mathcal{R}$ un funtor y $\mathcal{Y}$ la subcategoría plena de $\mathcal{R}$, que tiene por objetos a los K que poseen un sistema libre respecto a G. Supongamos que $G(\mathcal{L}) \subset \gamma^1$ y sea $\overline{G} : \mathcal{L} \dashrightarrow \gamma^1$, el funtor inducido por G. Sea $(\tilde{F}K, \varepsilon_K)$ un sistema libre sobre K con respecto a G, para cada K en γ^1. Entonces existe un único funtor $F : \gamma^1 \dashrightarrow \mathcal{L}$ con $FK = \tilde{F}K$ para todo K en γ^1 y tal que $\varepsilon : 1_{\gamma^1} \dashrightarrow \overline{G}F$ es una transformación natural. El funtor F es adjunto a izquierda de $\overline{G}$.

3.6. Sistemas colibres.

Para sistematizar los ejemplos que aparecen en la naturaleza haremos un tratamiento dual al de la sección 3.5. .

Sea $G : \mathcal{L} \dashrightarrow \mathcal{R}$ un funtor. También notaremos con G al funtor de $\mathcal{L}^o$ en $\mathcal{R}^o$ canónicamente definido por G. Sea K un objeto de $\mathcal{R}$ también considerado como objeto de $\mathcal{R}^o$.

DEFINICION 3.6.1.: Un <u>sistema colibre sobre K con respecto a $G : \mathcal{L} \dashrightarrow \mathcal{R}$</u> es un sistema libre sobre K respecto a $G : \mathcal{L}^o \dashrightarrow \mathcal{R}^o$.

Por la proposición 3.5.2. tenemos la siguiente caracterización de sistemas colibres, salvo una equivalencia natural canónica

PROPOSICION 3.6.2.: Sea $G : \mathcal{L} \dashrightarrow \mathcal{R}$ un funtor, K un objeto de $\mathcal{R}$ y (L, ε) un par formado por un objeto L de $\mathcal{L}$ y $\varepsilon \in [GL, K]_{\mathcal{R}}$. Entonces (L, ε) es un sistema colibre sobre K respecto a $G : \mathcal{L} \dashrightarrow \mathcal{R}$ si y sólo si para todo objeto L' de $\mathcal{L}$ y todo morfismo $\varepsilon' : GL' \dashrightarrow K$ de $\mathcal{R}$, existe un único mor fismo $\mathcal{T} : L' \dashrightarrow L$ de $\mathcal{L}$ que hace conmutati vo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} GL \arrow[d, "\mathcal{E}"] & & GL' \arrow[ll, "G(\mathcal{T})"'] \arrow[dll, "\mathcal{E}'"] \\ K & & \end{tikzcd}$$

Ejemplo 3.6.3.: Sea $\mathcal{K} = \mathcal{T}$ la categoría de los espacios topológicos conexos y localmente conexos, con morfismos, las aplicaciones de revestimiento. Sea $\mathcal{L}$ la subcategoría de los espacios simplemente conexos, y $G : \mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{K}$ la inclusión natural. Sea K un objeto de $\mathcal{T}$ y $(L, \mathcal{E})$ un sistema colibre sobre K respecto a G. La caracterización de la proposición 3.6.2. muestra que $(L, \mathcal{E})$ es un <u>revestimiento universal de K</u>.

Ejemplo 3.6.4.: Si en el ejemplo anterior interpretamos a $\mathcal{T}$ como la categoría de los grupos topológicos conexos y localmente conexos con morfismos los homomorfismos que son isomorfismos locales, a $\mathcal{L}$ como la subcategoría de los grupos simplemente conexos, entonces un sistema colibre $(L, \mathcal{E})$ sobre un grupo K de $\mathcal{T}$ es un grupo revestidor universal de K.

Omitiremos la enunciación de las proposiciones duales a las proposiciones 3.5.10. a 3.5.12. .

* * *

CAPITULO 4:

LIMITES

Discutiremos en este capítulo ejemplos de sistemas libres y de sistemas colibres que son de particular importancia.

4.1. Límites inductivos o directos.

Sean $\mathcal{L}$ y $\mathcal{M}$ categorías. Todo objeto de $\mathcal{L}$ da origen a un funtor de $\mathcal{M}$ a $\mathcal{L}$ (ver ejemplos 2.1.10. y 2.3.7.). Esto define un funtor de inyección $G : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}^{\mathcal{M}}$. Sea $K : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{L}$ un funtor.

DEFINICION 4.1.1.: Un límite inductivo o directo de K es un sistema libre sobre K respecto al funtor $G : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}^{\mathcal{M}}$.

Por la proposición 3.5.2. se tiene la siguiente caracterización

PROPOSICION 4.1.2.: Sea $K : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{L}$ un funtor y $(L, \mathcal{E})$ un par formado por un objeto L de $\mathcal{L}$ y una transformación natural $\mathcal{E} : K \longrightarrow GL$. Entonces $(L, \mathcal{E})$ es un límite inductivo de K si y sólo si para todo objeto L' de $\mathcal{L}$ y toda transformación natural $\mathcal{E}' : K \longrightarrow GL'$, existe un único morfismo $\tau : L \longrightarrow L'$ de $\mathcal{L}$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
GL \arrow[r, "G(\tau)"] & GL' \\
K \arrow[u, "\varepsilon"] \arrow[ur, "\varepsilon'"'] &
\end{tikzcd}
$$

Si (L, ε) es un límite inductivo de K, el objeto L se notará $\varinjlim K$.

Ejemplo 4.1.3.: Sea L un objeto de $\mathcal{L}$ y $GL : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{L}$, el funtor constante definido por L. El par $(L, 1_{GL})$ es un límite inductivo de GL, donde $1_{GL} : GL \longrightarrow GL$ es la transformación natural idéntica.

Ejemplo 4.1.4.: Cualquier funtor $K : \mathcal{M} \longrightarrow Ens$ tiene un límite inductivo (ver Bourbaki: Théorie des ensembles, chap. 3, § 7).

Más adelante discutiremos más ejemplos.

Sea $\mathcal{Y}$ la subcategoría plena de $\mathcal{L}^{\mathcal{M}}$ cuyos objetos son los funtores que tienen un límite inductivo. Para todo K en $\mathcal{Y}$, sea $(\varinjlim K, \varepsilon_K)$ un límite inductivo de K. Entonces existe una única extensión de la correspondencia entre objetos $\varinjlim : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{L}$ a un funtor $\varinjlim : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{L}$, tal que $\varepsilon : 1_{\mathcal{Y}} \longrightarrow G o \varinjlim$ sea una transformación natural. Aquí $G o \varinjlim$ nota la composición $\mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{L}^{\mathcal{M}}$. Nótese que el funtor $\varinjlim$ es adjunto a izquierda de la inclusión $\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{Y}$.

4.2. Límites proyectivos o inversos.

Hemos definido los límites inductivos como casos particulares de sistemas libres. Ahora definiremos los límites proyectivos como casos particulares de sistemas colibres.

Sean $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ categorías, $G : \mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{M}$, la inyección canónica y $K : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{L}$ un funtor.

DEFINICION 4.2.1.: Un <u>límite proyectivo o inverso de K</u> es un sistema colibre sobre K respecto a $G : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}^{\mathcal{M}}$.

Gracias a la proposición 3.6.2. se tiene la siguiente caracterización

PROPOSICION 4.2.2.: Sea $K : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{L}$ un funtor y $(L, \mathcal{E})$ un par formado por un objeto L de $\mathcal{L}$ y una transformación natural $\mathcal{E} : GL \longrightarrow K$. Entonces $(L, \mathcal{E})$ es un límite proyectivo de K si y sólo si para todo objeto L' de $\mathcal{L}$ y toda transformación $\mathcal{E}' : GL' \longrightarrow K$, existe un único morfismo $\tau : L' \longrightarrow L$ de $\mathcal{L}$ que hace conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} GL \arrow[r, "G(\tau)"] \arrow[d, "\mathcal{E}"] & GL' \arrow[dl, "\mathcal{E}'"] \\ K & \end{tikzcd}$$

Si $(L, \mathcal{E})$ es un límite proyectivo de K, el objeto L se notará $\varprojlim K$.

Ejemplo 4.2.3.: Sea $K : \mathcal{M} \longrightarrow$ Ens un funtor. Entonces K tiene un límite proyectivo. (ver Bourbaki; théorie des ensembles, chap. 3; § 7).

Dualizando la proposición 4.1.5. se obtiene

PROPOSICION 4.2.4.: Sean $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ categorías y $\mathcal{Y}$ la subcategoría plena de $\mathcal{L}^{\mathcal{M}}$ cuyos objetos son los funtores que tienen límite proyectivo. Sea $(\varprojlim K, \mathcal{E}_K)$ un límite proyectivo de K para cada K en $\mathcal{Y}$. Entonces existe una única extensión de la correspondencia entre objetos $\varprojlim : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{L}$ a un funtor $\varprojlim : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{L}$, tal que $\mathcal{E} : G\circ\varprojlim \longrightarrow 1_{\mathcal{Y}}$ sea una trans formación natural.

No lo hemos mostrado, pero es inmediato que $\varprojlim$ es adjunto a derecha de $G : \mathcal{L} \hookrightarrow \mathcal{L}^{\mathcal{M}}$.

4.3. Sumas directas y productos directos.

Llamemos discreta a la categoría $\mathcal{J}$ si

$$[X, Y] = \begin{cases} \emptyset & \text{si } X \neq Y \\ \{1_X\} & \text{si } X = Y. \end{cases}$$

Consideraremos a $\mathcal{J}$ como una categoría de índices y, consecuentemente, escribiremos $i, j, \ldots$ para indicar los objetos de $\mathcal{J}$. Sea $\mathcal{L}$ una categoría cualquiera e $\mathcal{J}$ una categoría discreta. Un funtor $K : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{L}$ es lo mismo que una familia $(X_i)_{i \in \mathcal{J}}$ de objetos de $\mathcal{L}$, indicada por $\mathcal{J}$.

DEFINICION 4.3.1.: Sea $(X_i)_{i \in \mathcal{J}}$ una familia de objetos de $\mathcal{L}$, indicada por $\mathcal{J}$ y $K : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{L}$, el funtor definido por $K(i) = X_i$ para $i \in \mathcal{J}$. Una suma directa (producto directo) de $(X_i)_{i \in \mathcal{J}}$ es un límite inductivo (límite proyectivo) de K.

Observación sobre la terminología: Un producto directo es un límite proyectivo o inverso. Esto es algo insastifactorio. Más insatisfactoria aún es la denominación frecuente de producto inverso para la suma directa. Entonces un producto inverso es un límite directo y un producto directo es un límite inverso. Por esta causa hemos preferido los adjetivos inductivo y proyectivo.

Sea L un objeto de $\mathcal{L}$. Una transformación natural ε de K en el funtor constante definido por L es precisamente una familia $(\varepsilon_i)_{i \in \mathcal{J}}$ de morfismos $\varepsilon_i : X_i \longrightarrow L$, sin relaciones de conmutatividad.

Por las proposiciones 4.1.2. y 4.2.2. se tienen las siguientes caracterizaciones de sumas directas y productos directos

PROPOSICION 4.3.2.: Sea $(X_i)_{i \in \mathcal{J}}$ una familia de objetos de $\mathcal{L}$ indicada por $\mathcal{J}$, y $(L, \mathcal{E})$ un par formado por un objeto L de $\mathcal{L}$ y una familia $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_i)_{i \in \mathcal{J}}$ de morfismos

$$\mathcal{E}_i : X \longrightarrow L \quad \| \quad \mathcal{E}_i : L \longrightarrow X .$$

Entonces $(L, \mathcal{E})$ es una

suma directa $\|$ un producto directo

de $(X_i)_{i \in \mathcal{J}}$ si y sólo si para todo par $(L', \mathcal{E}')$ con las mismas propiedades, existe un único morfismo

$$\tau : L \longrightarrow L' \quad \| \quad \tau : L' \longrightarrow L$$

que hace conmutativo el siguiente diagrama para todo i

$$\begin{tikzcd} L \arrow[rr, "\tau"] & & L' \\ & X_i \arrow[ul, "\mathcal{E}_i"] \arrow[ur, "\mathcal{E}'_i"'] & \end{tikzcd} \quad \| \quad \begin{tikzcd} L \arrow[dr, "\mathcal{E}_i"'] & & L' \arrow[ll, "\tau"'] \arrow[dl, "\mathcal{E}'_i"] \\ & X_i & \end{tikzcd}$$

Si $(L, \mathcal{E})$ es una suma (producto) directa (directo) de $(X_i)_{i \in \mathcal{J}}$, el objeto L se nota con $\coprod_{i \in \mathcal{J}} X_i$ ($\prod_{i \in \mathcal{J}} X_i$).

Ejemplo 4.3.3.: Sea $(X_i)_{i \in \mathcal{J}}$ una familia de conjuntos. La unión disjunta de los conjuntos X_i junto con las inyecciones canónicas es una suma directa de $(X_i)_{i \in \mathcal{J}}$ en Ens.

El producto cartesiano de los conjuntos X_i junto con las proyecciones canónicas es un producto directo de $(X_i)_{i \in \mathcal{J}}$ en Ens.

Ejemplo 4.3.4.: Sea $\mathcal{A}\mathcal{G}$ la categoría de los grupos abelianos y $(X_i)_{i \in \mathcal{J}}$ una familia de grupos abelianos. El producto cartesiano con su estructura de grupo y las proyecciones canónicas es un producto directo de $(X_i)_{i \in \mathcal{J}}$ en $\mathcal{A}\mathcal{G}$.

Consideremos el subgrupo $S \subset \prod_{i \in \mathcal{J}} X_i$, definido por los elementos que tienen sólo un número finito de coordenadas diferentes de 0. Entonces S con las inyecciones canónicas $X_i \longrightarrow S$ es una suma directa de $(X_i)_{i \in \mathcal{J}}$ en $\mathcal{Ag}$.

Ejemplo 4.3.5.: La categoría producto $\mathcal{K} \times \mathcal{K}'$ introducida en la sección 1.1., junto con los funtores proyecciones canónicas, se puede considerar como un producto directo de $\mathcal{K}$ y $\mathcal{K}'$ en la categoría de las categorías.

Ejemplo 4.3.6.: Sean $\mathcal{K}$ y $\mathcal{L}$ categorías y $F_i : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ funtores $(i \in \mathcal{J})$. Supongamos que para cada familia $(L_i)_{i \in \mathcal{J}}$ de objetos de $\mathcal{L}$ existe un producto directo. Entonces definimos $(\prod_{i \in \mathcal{J}} F_i)(K) = \prod_{i \in \mathcal{J}} F_i(K)$ para cada objeto K de $\mathcal{K}$, $(\prod_{i \in \mathcal{J}} F_i)(\varkappa) = \prod_{i \in \mathcal{J}} F_i(\varkappa)$ para cada morfismo $\varkappa : K \longrightarrow K'$. Entonces $\prod_{i \in \mathcal{J}} F_i$ es el producto directo de $(F_i)_{i \in \mathcal{J}}$ en $\mathcal{L}^{\mathcal{K}}$.

Este funtor debe distinguirse del funtor $\mathcal{K}^{\mathcal{J}} \longrightarrow \mathcal{L}^{\mathcal{J}}$, canónicamente definido por $(F_i)_{i \in \mathcal{J}}$ que se puede también interpretar como un producto directo en una categoría conveniente.

Sea $\mathcal{L}$ nuevamente una categoría arbitraria, $(X_i)_{i \in \mathcal{J}}$ una familia de objetos de $\mathcal{L}$ y $(\coprod_{i \in \mathcal{J}} X_i, (\varepsilon_i)_{i \in \mathcal{J}})$ una suma directa de esta familia. En vista de la caracterización 3.2.7. de elementos universales, la proposición 4.3.2. muestra que $(\varepsilon_i)_{i \in \mathcal{J}}$ es F-universal para el siguiente funtor $F : \mathcal{L} \longrightarrow \mathrm{Ens}$. Si L es un objeto de $\mathcal{L}$, $FL = \prod_{i \in \mathcal{J}} [X_i, L]$; si $\tau : L \longrightarrow L'$, $F(\tau)((\varepsilon_i)_{i \in \mathcal{J}}) = (\tau \circ \varepsilon_i)_{i \in \mathcal{J}}$. Esto significa que hay una equivalencia natural bien definida (la imagen de ε por la aplicación de Yoneda ϕ de 3.1.1.)

$$\eta : h_{\coprod_{i \in \mathcal{J}} X_i} \longrightarrow F \quad \text{y} \quad \eta_L : [\coprod_{i \in \mathcal{J}} X_i, L] \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \prod_{i \in \mathcal{J}} [X_i, L]$$

que es una biyección para todo L. Supongamos recíprocamente que F es representable, y que el par (S,η) es una representación de F ; sea ε el elemento F-universal correspondiente a η . Entonces el par (S,ε) es una suma directa de $(X_i)_{i\in\mathcal{J}}$.

Si el par $(\prod_{i\in\mathcal{J}} X_i, (\varepsilon_i)_{i\in\mathcal{J}})$ es un producto directo de la familia $(X_i)_{i\in\mathcal{J}}$ entonces $(\varepsilon_i)_{i\in\mathcal{J}}$ es F-universal para el siguiente funtor contravariante $F:\mathcal{L}\longrightarrow \text{Ens}$; $FL = \prod_{i\in\mathcal{J}} [L, X_i]$ para un objeto L de $\mathcal{L}$, $F(\tau)((\varepsilon_i)_{i\in\mathcal{J}}) = (\varepsilon_i \circ \tau)_{i\in\mathcal{J}}$ para $\tau : L' \longrightarrow L$. Esto significa en particular que hay una equivalencia natural $\eta : \mathcal{L}^{\prod_{i\in\mathcal{J}} X_i} \longrightarrow F$ y $\eta_L : [L, \prod_{i\in\mathcal{J}} X_i] \longrightarrow \prod_{i\in\mathcal{J}} [L, X_i]$ que es una biyección para todo L . Si recíprocamente (P,η) es una representación de F y ε es el elemento F-universal correspondiente a η , entonces (P,ε) es un producto directo de $(X_i)_{i\in\mathcal{J}}$.

Estas observaciones sugieren considerar también el funtor $F:\mathcal{L}\longrightarrow \text{Ens}$, $FL = \coprod_{i\in\mathcal{J}} [X_i, L]$ y $F(\tau) : FL \longrightarrow FL'$ para $\tau : L \longrightarrow L'$ es la aplicación canónica inducida por las aplicaciones $[X_i, \tau] : [X_i, L] \longrightarrow [X_i, L']$. Pero este funtor no es representable.

Por nuestra forma de introducir sumas directas, es claro que para un conjunto fijo de índices, $\coprod_{\mathcal{J}}$ y $\prod_{\mathcal{J}}$ son funtores. Basta con interpretar las proposiciones 4.1.4. y 4.2.4. .

La definición directa, por ejemplo, del efecto del funtor $\coprod_{\mathcal{J}}$ sobre el morfismo $(\alpha_i)_{i\in\mathcal{J}} : (X_i)_{i\in\mathcal{J}} \longrightarrow (X'_i)_{i\in\mathcal{J}}$, para $\alpha_i : X_i \longrightarrow X_i$ es evidente por la propiedad universal establecida. En efecto: $\coprod_{\mathcal{J}} \alpha_i : \coprod_{\mathcal{J}} X_i \longrightarrow \coprod_{\mathcal{J}} X'_i$ es el único morfismo tal que $\coprod_{\mathcal{J}} \alpha_i \circ \varepsilon_j = \varepsilon'_j \circ \alpha_j$ para todo j en $\mathcal{J}$. De hecho $\coprod_{\mathcal{J}} \alpha_i$ es la suma de la familia $(\alpha_i)_{i\in\mathcal{J}}$ de morfismos, considerados como objetos de $\mathcal{L}^2$ (ver sección 1.1.).

Sea ahora $\mathcal{L}$ una categoría con cero morfismos y $(X_i)_{i\in\mathcal{J}}$ una familia de objetos de $\mathcal{L}$. Elijamos un $j\in\mathcal{J}$ y consideremos la familia de morfismos $\delta_{ij} : X_i \longrightarrow X_j$ definida por $\delta_{ij} = \begin{Bmatrix} 1_{X_i} & \text{para } i = j \\ 0_{X_i, X_j} & \text{para } i \neq j \end{Bmatrix}$. Sea $(\coprod_{\mathcal{J}} X_i ,$

$(\mathcal{E}_i)_{i \in \mathcal{J}}$) una suma directa de $(X_i)_{i \in \mathcal{J}}$. Entonces existe para cada j existe un único $\prod_j : \coprod_{i \in \mathcal{J}} X_i \longrightarrow X_j$ con $\prod_j \circ \mathcal{E}_i = \delta_{ij}$ para todo $i \in \mathcal{J}$. Notemos que $\prod_j$ es una inversa izquierda de $\mathcal{E}_j$, de modo que en este caso $\mathcal{E}_j$ es, en particular, un monomorfismo y $\prod_j$ es un epimorfismo . Para una familia $(X_i)_{i \in \mathcal{J}}$ con $X_i = X$ para todo $i \in \mathcal{J}$, se tiene análogamente un único morfismo codiagonal $\nabla : \coprod_{i \in \mathcal{J}} X_i \longrightarrow X$ definido por $\nabla \circ \mathcal{E}_i = 1_X$ para todo $i \in \mathcal{J}$.

Los morfismos análogos para un producto directo $(\prod_{i \in \mathcal{J}} X_i , \gamma_i)$ de la familia $(X_i)_{i \in \mathcal{J}}$, se definen como sigue: $\iota_j : X_j \longrightarrow \prod_{i \in \mathcal{J}} X_i$ por $\gamma_i \circ \iota_j = \delta_{ji}$, donde $\delta_{ji} = \begin{Bmatrix} 1_{X_j}; & \text{para } i = j \\ 0_{X_j X_i} & \text{para } i \neq j \end{Bmatrix}$. En particular, $\gamma_j \circ \iota_j = 1_{X_j}$ y el morfismo diagonal $\Delta : X \longrightarrow \prod_{i \in \mathcal{J}} X_i$ para el caso $X_i = X$ para todo $i \in \mathcal{J}$ se define por $\gamma_i \circ \Delta = 1_X$ para todo $i \in \mathcal{J}$.

Notemos que con las definiciones anteriores, se tiene también un único morfismo $\coprod_{i \in \mathcal{J}} X_i \xrightarrow{\mu} \prod_{i \in \mathcal{J}} X_i$ que satisface tanto $\gamma_i \circ \mu = \prod_i$ como $\mu \circ \mathcal{E}_i = \iota_i$ para todo $i \in \mathcal{J}$.

Ejemplo 4.3.7.: Sea $\mathcal{A}\mathcal{G}$ la categoría de los grupos abelianos, $(X_i)_{i \in \mathcal{J}}$ una familia de grupos abelianos y $(S, \mathcal{E})$ su suma , (P, γ) su producto. Entonces $\prod_j : S \longrightarrow X_j$ es la restricción de $\gamma_j : P \longrightarrow X_j$. La inyección $j : X_j \longrightarrow P$ es el homomorfismo obvio. La aplicación $S \longrightarrow P$ mencionada más arriba, es la inclusión.

Ejemplo 4.3.8.: Sea γ la categoría de los conjuntos puntuados (ver 1.3.16.): Sea $(X_i)_{i \in \mathcal{J}}$ una familia de conjuntos puntuados. La unión disjunta es, después de la identificación de los puntos privilegiados, junto con las inclusiones naturales, una suma directa de $(X_i)_{i \in \mathcal{J}}$. El producto cartesiano, con el punto privilegiado obvio, es junto con las proyecciones naturales, un producto directo de $(X_i)_{i \in \mathcal{J}}$. Las aplicaciones $\prod_i$ e ι_i son visibles y también lo es la inclusión $\mu : \coprod_{i \in \mathcal{J}} X_i \rightarrow$

$\longrightarrow \prod_{i \in \mathcal{J}} X_i .$

4.4. Otros ejemplos de límites.

Igualadores diestros y siniestros.

Consideremos una categoría $\mathcal{J}$ de dos objetos: 1 , 2 y un conjunto $I = \{i, j, \dots\}$ de morfismos, de 1 a 2 . Sea $\mathcal{L}$ una categoría arbitraria. Un funtor $K : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{L}$ es lo mismo que un par de objetos $A = K(1)$, $B = K(2)$ y una familia $(\varphi_i)_{i \in I}$ de morfismos $\varphi_i : A \longrightarrow B$, indicada por I.

DEFINICION 4.4.1.: Sea $(\varphi_i)_{i \in I}$ una familia de morfismos de $\mathcal{L}$, $\varphi_i : A \longrightarrow B$, indicada por I y $K : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{L}$ el funtor definido por: $K(1) = A$, $K(2) = B$, $K(i) = \varphi_i$ para $i \in I$. Un igualador diestro (siniestro) de $(\varphi_i)_{i \in I}$ es un límite inductivo (proyectivo) de K.

Sea L un objeto de $\mathcal{L}$. Una transformación natural ε de K en el funtor constante definido por L está dada por un único morfismo $\varepsilon : B \longrightarrow L$ que satisface $\varepsilon \circ \varphi_i = \varepsilon \circ \varphi_j$ para todo $i, j \in I$.

Por las proposiciones 4.1.2. y 4.2.2. , tenemos las siguientes caracterizaciones de igualadores diestros y siniestros :

PROPOSICION 4.4.2.: Sea $(\varphi_i)_{i \in I}$ una familia de morfismos $\varphi_i : A \longrightarrow B$, de $\mathcal{L}$, y (L, ε) un par formado por un objeto L de $\mathcal{L}$ y un morfismo

$$\varepsilon : B \longrightarrow L \quad \Big| \quad \varepsilon : L \longrightarrow A$$

que satisface

$$\varepsilon \circ \varphi_i = \varepsilon \varphi_j \quad \Big| \quad \varphi_i \circ \varepsilon = \varphi_j \circ \varepsilon$$

para todo $i, j \in I$. Entonces $(L, \mathcal{E})$ es un

igualador diestro | igualador siniestro

de $(\varphi_i)_{i \in I}$ si y sólo si para todo par $(L', \mathcal{E}')$ con las mismas propiedades, existe una única factorización

$$\tau \circ \mathcal{E} = \mathcal{E}', \quad \tau : L \longrightarrow L' \quad \Big| \quad \mathcal{E} \circ \tau = \mathcal{E}', \quad \tau : L' \longrightarrow L.$$

PROPOSICION 4.4.3.: Sea $(\varphi_i)_{i \in I}$ una familia de morfismos $\varphi_i : A \longrightarrow B$ de $\mathcal{L}$, y $(L, \mathcal{E})$ un igualador diestro (siniestro). Entonces $\mathcal{E}$ es un epimorfismo (monomorfismo).

Demostración: Sean $\lambda_i : L \longrightarrow X$ $(i = 1, 2)$ morfismos con $\lambda_1 \circ \mathcal{E} = \lambda_2 \circ \mathcal{E}$. Llamemos $\varkappa$ a este morfismo $\varkappa : B \longrightarrow X$. Ahora $\varkappa \circ \varphi_i = \varkappa \circ \varphi_j$ para todo $i, j \in I$. Entonces existe un único $\lambda : L \longrightarrow X$ con $\lambda \circ \mathcal{E} = \varkappa$. Esto implica $\lambda_1 = \lambda_2$, y $\mathcal{E}$ es un epimorfismo.

Ejemplo 4.4.4.: En la categoría Ens, el subconjunto L de A sobre el cual coinciden $\varphi_i : A \longrightarrow B$ es, junto con la inyección natural, un igualador siniestro de $(\varphi_i)_{i \in I}$.

Conúcleos y núcleos.

Consideremos el caso particular de la situación precedente en que el conjunto I consiste de dos morfismos de 1 a 2. Supongamos que $\mathcal{L}$ es una categoría con cero-morfismos.

DEFINICION 4.4.5.: Sea $\varphi : A \longrightarrow B$ un morfismo de $\mathcal{L}$. Un conúcleo (núcleo) de φ es un igualador diestro (siniestro) del par (φ, O) de morfismos de A en B.

Por la proposición 4.4.2. se tiene pues:

PROPOSICION 4.4.6.: Sea $\varphi : A \longrightarrow B$ un morfismo de $\mathcal{L}$ (categoría con cero morfismos), y (L, ε) un par formado por un objeto L y un morfismo

$$\varepsilon : B \longrightarrow L \quad \Big| \quad \varepsilon : L \longrightarrow A$$

que satisfacen

$$\varepsilon \circ \varphi = 0 \quad \Big| \quad \varphi \circ \varepsilon = 0 .$$

Entonces (L, ε) es un

conúcleo | núcleo

de φ si y sólo si para todo par (L', ε') con las mismas propiedades, existe una única factorización:

$$\tau \circ \varepsilon = \varepsilon', \quad \tau : L \longrightarrow L' \quad \Big| \quad \varepsilon \circ \tau = \varepsilon', \quad \tau : L' \longrightarrow L.$$

PROPOSICION 4.4.7.: Sea $\mathcal{L}$ una categoría con cero morfismos, en la que todo morfismo tiene un conúcleo y un núcleo. Sea $\varphi : A \longrightarrow B$ un morfismo, (C, p) un conúcleo y (K, i) un núcleo de φ, $(C\mathcal{J}, p')$ un conúcleo de $i : K \longrightarrow A$ y $(\mathcal{J}, i')$ un núcleo de $p : B \longrightarrow C$. Entonces existe un único $\gamma : C\mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J}$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& C\mathcal{J} \arrow[r, "\gamma"] & \mathcal{J} \arrow[d, "i'"] & \\
K \arrow[r, "i"] & A \arrow[u, "p'"] \arrow[r, "\varphi"] & B \arrow[r, "p"] & C
\end{tikzcd}$$

Demostración: Como $\varphi \circ i = 0$, existe un único $\beta : C\mathcal{J} \longrightarrow B$ con $\beta p' = \varphi$; lo que implica $(p \circ \beta) \circ p' = p \circ \varphi = 0$, lo que, a su vez implica $p \circ \beta = 0$, pues p' es un epimorfismo. Entonces existe un único $\gamma : C\mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{J}$ con $i'\gamma = \beta$ e $i' \circ \gamma \circ p' = \beta \circ p' = \varphi$. Si γ' es otro tal morfismo, entonces $i' \circ \gamma = i' \circ \gamma'$ pues p' es un epimorfismo. Esto muestra que $\gamma = \gamma'$, dado que i' es un monomorfismo, y γ es único.

Ejemplo 4.4.8.: Sea γ la categoría de los conjuntos puntuados (1.3.16.). Sea $\varphi: A \longrightarrow B$ un morfismo. Entonces $\varphi^{-1}(b_0)$ con su inclusión natural es un núcleo de φ, B mód $\varphi(A)$ con la aplicación canónica $B \longrightarrow B$ mód $\varphi(A)$ es un conúcleo de φ. La aplicación γ de la proposición 4.4.7. es la aplicación evidente A mód $\varphi^{-1}(b_0) \longrightarrow \varphi(A)$.

Ejemplo 4.4.9.: Sea $\mathcal{G}$ la categoría de los grupos, $\varphi: A \longrightarrow B$ un morfismo. El núcleo del conúcleo es el subgrupo invariante $N(\varphi(A))$ de B engendrado por $\varphi(A)$. El conúcleo del núcleo es el grupo $A/\mathrm{Ker}\,\varphi$. La aplicación $\gamma: A/\mathrm{Ker}\,\varphi \longrightarrow N(\varphi(A))$ no es necesariamente suryectiva.

En la categoría de grupos abelianos el núcleo del conúcleo es precisamente la imagen, y el conúcleo del núcleo, la coimagen de un morfismo. La aplicación γ de la proposición 4.4.7. es una equivalencia.

<u>Sumas amalgamadas y productos fibrados</u>.

Consideremos una categoría $\mathcal{J}$ con tres objetos 1, 2, 3 y dos morfismos $1 \longrightarrow 2$, $1 \longrightarrow 3$. Sea $\mathcal{L}$ una categoría arbitraria. Un funtor $K: \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{L}$ es lo mismo que un diagrama en $\mathcal{L}$:

$$\begin{tikzcd} B & & C \\ & A \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

DEFINICION 4.4.10.: Una <u>suma amalgamada</u> de un tal diagrama es un límite inductivo del funtor correspondiente $K: \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{L}$.

Nótese que una suma amalgamada es una suma directa en una categoría convenientemente definida.

Ejemplo 4.4.11.: Consideremos la categoría $\mathcal{G}$ de los grupos y dos grupos B, C que contienen al grupo A. La suma amalgamada de este diagrama es precisamente, la noción clásica de suma amalgamada de A, B, C.

Un funtor $K : \mathcal{J}^{o} \longrightarrow \mathcal{L}$ es lo mismo que un diagrama en $\mathcal{L}$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[dr] & & C \arrow[dl] \\ & A & \end{tikzcd}$$

DEFINICION 4.4.12.: Un <u>producto fibrado</u> de un tal diagrama es un límite proyectivo del funtor correspondiente $K : \mathcal{J}^{o} \longrightarrow \mathcal{L}$.

Un producto fibrado es un producto directo en una categoría conveniente.

Ejemplo 4.4.13.: Sea $\mathcal{T}$ la categoría de los espacios topológicos y $\beta : B \longrightarrow A$, $\gamma : C \longrightarrow A$ suryecciones continuas. Entonces la diagonal $\Delta : A \to \longrightarrow A \times A$ induce $E \longrightarrow A$ de $B \times C \longrightarrow A \times A$, donde $E = \{ (b, c) : (b, c) \in B \times C, \beta(b) = \gamma(c) \}$. Junto con las aplicaciones $E \longrightarrow B \times C \longrightarrow \to B$, $E \longrightarrow B \times C \longrightarrow C$, esto es un producto fibrado del diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[dr, "\beta"'] & & C \arrow[dl, "\gamma"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

4.5. <u>Compatibilidad de funtores con límites.</u>

Sea $F : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ un funtor covariante e $\mathcal{J}$ una categoría.

DEFINICION 4.5.1.: F es <u>compatible con límites inductivos de tipo $\mathcal{J}$</u>, si para cualquier funtor $D : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{K}$ que tiene un límite inductivo $(\underrightarrow{\lim}\, D, \mathcal{E})$, el par $(F(\underrightarrow{\lim}\, D), F_* \mathcal{E})$ es un límite inductivo de $F \circ D$.

Aquí $F_* \mathcal{E} : F \circ D \longrightarrow F(\underrightarrow{\lim}\, D)$ es la transformación natural inducida por F de $\mathcal{E} : D \longrightarrow \underrightarrow{\lim}\, D$, habiéndose identificado $F(\underrightarrow{\lim}\, D)$ y $\underrightarrow{\lim}\, D$ a los funtores constantes que ellos definen.

Si $F : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ es un funtor contravariante, se llamará compatible con límites inductivos de tipo $\mathcal{J}$, si el funtor canónico $F^o : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}^o$ definido por F es compatible con límites inductivos de tipo $\mathcal{J}$.

Se define en forma análoga la noción de compatibilidad con límites proyectivos.

Notemos que para un funtor contravariante $F : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ la compatibilidad con límites inductivos significa lo mismo que la compatibilidad con límites proyectivos del funtor $\mathcal{K}^o \longrightarrow \mathcal{L}$, canónicamente definido.

Ejemplo 4.5.2.: Sea $\mathcal{J}$ una categoría discreta y notemos $X : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{K}$ al funtor definido por una familia $(X_i)_{i \in \mathcal{J}}$ de objetos de $\mathcal{K}$. Supongamos que $\prod X = \prod_{i \in \mathcal{J}} X_i$ existe. Por la sección 4.3. para todo objeto L de $\mathcal{L}$ se tiene una biyección $h_L(\prod X) \longrightarrow \prod h_L \circ X$, lo que se puede escribir en la forma $h_L \circ \prod = \prod \circ h_L$. Entonces $h_L : \mathcal{L} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ es compatible con productos de tipo $\mathcal{J}$. El funtor h_L es, en realidad, compatible con límites proyectivos de cualquier tipo.

Ejemplo 4.5.3.: Sean $\mathcal{J}, \mathcal{K}, X$ como en el ejemplo 4.5.2.. Supongamos que existe $\coprod X = \coprod_{i \in \mathcal{J}} X_i$. Por la sección 4.3., para todo objeto L de $\mathcal{L}$ se tiene $h^L \circ \coprod = \prod \circ h^L$. Así el funtor contravariante $h^L : \mathcal{L} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ es compatible con límites inductivos de tipo $\mathcal{J}$. El funtor h^L es, en realidad, compatible con límites inductivos de cualquier tipo.

Ejemplo 4.5.4.: Sea $\mathcal{M}$ la categoría de las variedades diferenciables, $\mathcal{V}$ la categoría de los fibrados vectoriales reales. El funtor "fibrado tangente" T :

$\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{V}$ es compatible con sumas directas arbitrarias y con productos directos finitos.

Ejemplo 4.5.5.: Sea $\mathcal{K}$ una categoría y consideremos el funtor $h : \mathcal{K} \longrightarrow \text{Ens}^{\mathcal{K}^o}$ definido en la proposición 3.1.6. . Sea $\mathcal{J}$ una categoría discreta con dos objetos. Entonces h es compatible con límites proyectivos de tipo $\mathcal{J}$, esto es, con productos directos de dos factores (y entonces, de cualquier número finito de factores, como se prueba fácilmente). Esto significa que los funtores $h^{A \prod B}$ y $h^A \prod h^B$ son naturalmente equivalentes para todo para de objetos (A, B) de $\mathcal{K}$ para los cuales existe $A \prod B$, lo cual sigue de la definición de $A \prod B$.

Análogamente el funtor $h : \mathcal{K}^o \longrightarrow \text{Ens}^{\mathcal{K}}$ de 3.1.3. es compatible con sumas directas de dos factores, esto es: para todo para de objetos (A, B) de $\mathcal{K}$ para los cuales existe $A \coprod B$ (suma directa en $\mathcal{K}$, resp. producto directo en $\mathcal{K}^o$), hay una equivalencia natural entre los funtores $h_{A \coprod B}$ y $h_A \prod h_B$.

DEFINICION 4.5.6.: $F : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ es <u>compatible con límites inductivos</u>, si F es compatible con límites inductivos de tipo $\mathcal{J}$ para toda categoría $\mathcal{J}$.

Análogamente para límites proyectivos.

PROPOSICION 4.5.7.: Sea $F : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ un funtor covariante. Si F tiene un adjunto a derecha $G : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{K}$, entonces F es compatible con límites inductivos.

Demostración: Sea $D : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{K}$ un funtor que tiene un límite inductivo $(\varinjlim D, \mathcal{E})$.

Supongamos que $\eta : [F\cdot, \cdot]_{\mathcal{L}} \longrightarrow [\cdot, G\cdot]_{\mathcal{K}}$ es una adjunción de F a G y consideremos la equivalencia natural $\eta_* : [F_*\cdot, \cdot]_{\mathcal{L}^{\mathcal{J}}} \longrightarrow [\cdot, G_*\cdot]_{\mathcal{K}^{\mathcal{J}}}$, definida por η (ver proposición 2.5.6.). Sea L un objeto de $\mathcal{L}$, $\tilde{L} : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{L}$ y $\widetilde{GL} : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{K}$, los funtores constantes definidos por L y GL. Primero observamos que $G_* \tilde{L} = \widetilde{GL}$, $F_*(\widetilde{\varinjlim D}) = F(\widetilde{\varinjlim D})$. Entonces con muta el siguiente diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\left[\widetilde{F(\varinjlim D)}, \tilde{L}\right]_{\mathcal{L}^{\mathcal{J}}} \arrow[r, "\eta_* \widetilde{\varinjlim D}, \tilde{L}"] \arrow[d, "{[F_* \varepsilon,\, 1_{\tilde{L}}]_{\mathcal{L}^{\mathcal{J}}}}"'] & \left[\widetilde{\varinjlim D}, \widetilde{GL}\right]_{\mathcal{K}^{\mathcal{J}}} \arrow[d, "{[\varepsilon,\, 1_{\widetilde{GL}}]_{\mathcal{K}^{\mathcal{J}}}}"] \\
\left[F_* D, \tilde{L}\right]_{\mathcal{L}^{\mathcal{J}}} \arrow[r, "\eta_* D, \tilde{L}"] & \left[D, \widetilde{GL}\right]_{\mathcal{K}^{\mathcal{J}}}
\end{tikzcd}
$$

Consideremos el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\left[F(\varinjlim D), L\right]_{\mathcal{L}} \arrow[r, "\eta \varinjlim D, L"] \arrow[d] & \left[\varinjlim D, \widetilde{GL}\right]_{\mathcal{K}} \arrow[d] \\
\left[\widetilde{F(\varinjlim D)}, \tilde{L}\right]_{\mathcal{L}^{\mathcal{J}}} \arrow[r, "\eta_* \varinjlim D, \tilde{L}"] & \left[\widetilde{\varinjlim D}, \widetilde{GL}\right]_{\mathcal{K}^{\mathcal{J}}}
\end{tikzcd}
$$

donde las flechas verticales son las inyecciones naturales. Este diagrama es trivialmente conmutativo. Póngase este diagrama en la parte superior del primero. Entonces se obtiene un cuadrado conmutativo en el que las aplicaciones horizontales son biyecciones. La aplicación vertical de la derecha es biyectiva por la universalidad de ε. Entonces la flecha vertical de la izquierda es biyectiva, lo que muestra la universalidad de $F_* \varepsilon$; esto concluye la proposición.

Supongamos que para todo funtor $\mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{K}$ y todo funtor $\mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{L}$ existe un límite directo y supongamos que se eligen tales límites, es decir, se definen los funtores $\varinjlim : \mathcal{K}^{\mathcal{J}} \longrightarrow \mathcal{K}$, $\varinjlim : \mathcal{L}^{\mathcal{J}} \longrightarrow \mathcal{L}$ (ver 4.1.15). Entonces la proposición afirma la conmutatividad del diagrama:

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{K} \arrow[r, "F"] & \mathcal{L} \\
\mathcal{K}^{\mathcal{J}} \arrow[u, "\varinjlim"] \arrow[r, "F_*"] & \mathcal{L}^{\mathcal{J}} \arrow[u, "\varinjlim"']
\end{tikzcd}
$$

Pero también asegura la existencia de un límite directo de $F \circ D$ cuando se supone que $D : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{K}$ tiene un límite directo.

Es fácil ver que en las condiciones mencionadas más arriba para todo funtor $F : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ existe una transformación natural $\underrightarrow{\lim} \circ F_* \longrightarrow F \circ \underrightarrow{\lim}$.

Análogamente a 4.5.7. se muestra que un funtor que tiene un adjunto a izquierda es compatible con límites proyectivos.

COROLARIO 4.5.8.: Sea $F : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ una equivalencia. Entonces F es compatible con límites proyectivos e inductivos. Precisamente, se tiene: sea $D : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{K}$ un funtor y $(K, \mathcal{E})$ un par formado por un objeto K de $\mathcal{K}$ y una transformación natural $\mathcal{E} : D \longrightarrow \tilde{K}$ en el functor constante definido por K . Entonces $(K, \mathcal{E})$ es un límite directo de D si y sólo si $(FK, F_* \mathcal{E})$ es un límite directo de $F \circ D$. Vale un enunciado análogo para límites proyectivos.

Demostración: Por 2.5.5., una equivalencia posee un adjunto a derecha e izquierda. Esto demuestra la parte "sólo si", por la proposición 4.5.7. .

Supongamos recíprocamente que $(FK, F_* \mathcal{E})$ es un límite directo de $F \circ D$. Por 2.4.3. y 2.4.6. , existe una equivalencia $G : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{K}$, y equivalencias naturales $\phi : 1_{\mathcal{K}} \longrightarrow G \circ F$, $\psi : 1_{\mathcal{L}} \longrightarrow F \circ G$. Entonces $(GFK, G_* F_* \mathcal{E})$ es un límite directo de $G F D$ por el argumento anterior. Consideremos ahora la equivalencia $\phi_K : K \longrightarrow GFK$ y la correspondiente transformación natural $\tilde{\phi}_K : \tilde{K} \longrightarrow \widetilde{GFK}$. Entonces $\phi_K \circ \mathcal{E}_i = (G_* F_* \mathcal{E})_i$ para todo i , lo que muestra que $(K, \mathcal{E})$ es un límite directo de D .

COROLARIO 4.5.9.: Sea $F : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{L}$ un funtor completamente fiel, $\hat{F} : \mathcal{K} \longrightarrow F(\mathcal{K})$ el funtor inducido por F , $D : \mathcal{J} \longrightarrow \mathcal{K}$ un funtor , y $(K, \mathcal{E})$ un par formado por un objeto K de $\mathcal{K}$ y una transformación natural $\mathcal{E} : D \longrightarrow \tilde{K}$, al funtor constante $\tilde{K}$ definido por K . Entonces $(K, \mathcal{E})$ es un límite directo de D si y sólo si $(FK, F_* \mathcal{E})$ es un límite directo de $\hat{F} \circ D$;

$\mathcal{J} \longrightarrow F(\mathcal{R})$.

Demostración: El funtor $F : \mathcal{R} \longrightarrow F(\mathcal{R})$ es una equivalencia.

Ejemplo 4.5.10.: Sea $\mathcal{T}$ la categoría de los espacios topológicos compactos, $\mathfrak{R}$ la categoría de los anillos conmutativos con identidad y $C : \mathcal{T} \longrightarrow \mathfrak{R}$, el funtor contravariante que asigna a cada espacio, su anillo de funciones reales continuas. Se sabe que entonces C es completamente fiel. Sea $(X_i)_{i \in \mathcal{J}}$ una familia finita de espacios. El corolario 4.5.8. dice que C aplica la unión disjunta de los X_i en el producto directo $\prod_{i \in \mathcal{J}} C X_i$ en $C(\mathcal{T})$. Es claro que en este caso, es idéntico con el anillo producto en $\mathfrak{R}$. El producto cartesiano de los X_i es enviado por C en la suma directa $\coprod_{i \in \mathcal{J}} C X_i$ en $C(\mathcal{T})$. Pero esta suma no coincide con la suma directa de $(CX_i)_{i \in \mathcal{J}}$ en $\mathfrak{R}$, que es el producto tensorial de los anillos CX_i. En efecto, la suma de la familia $(CX_i)_{i \in \mathcal{J}}$ en $C(\mathcal{T})$ es un subanillo del producto tensorial $\bigotimes_{i \in \mathcal{J}} C X_i$.

Ahora aplicamos la proposición 4.5.7. a sistemas libres.

PROPOSICION 4.5.11.: Sea $G: \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{R}$ un funtor y $\mathcal{Y}$ la subcategoría plena de $\mathcal{R}$ cuyos objetos son los K que poseen un sistema libre $(\tilde{F}K, \varepsilon_K)$ con respecto a G. Supongamos que $G(\mathcal{L}) \subset \mathcal{Y}$, y sea $F : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{L}$ el funtor de 3.5.12. . Entonces F es compatible con límites directos.

Demostración: Por 3.5.12. y 4.5.7. .

Esta proposición tiene muchas aplicaciones. Sólo mencionaremos:

COROLARIO 4.5.12.: Sean $\mathcal{M}$, $\mathcal{L}$ categorías, $\mathcal{Y}$ la subcategoría plena de $\mathcal{L}^{\mathcal{M}}$ cuyos objetos son los funtores que tienen un límite inductivo, $\varinjlim : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{L}$, el funtor de 4.1.5. . Entonces $\varinjlim$ es compatible con límites directos.

* * *

CAPITULO 5 :

ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS EN CATEGORIAS

5.1. Multiplicaciones.

Sea $\mathcal{K}$ una categoría y A un objeto de $\mathcal{K}$. Usaremos el funtor producto $h^A \prod h^A$, definido en 4.3.6. .

DEFINICION 5.1.1.: Una multiplicación o ley de composición interna en A es una transformación natural $\mu : h^A \prod h^A \longrightarrow h^A$.

Esto significa explícitamente, que para todo objeto X hay una aplicación $\mu_X : h^A X \prod h^A X \longrightarrow h^A X$, esto es, una multiplicación o ley de composición interna en el conjunto $h^A X = [X, A]$, tal que para todo morfismo $\varphi : X \longrightarrow X'$, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} h^A X \prod h^A X & \longrightarrow & h^A X \\ {\scriptstyle h^A(\varphi) \prod h^A(\varphi)} \uparrow & & \uparrow {\scriptstyle h^A(\varphi)} \\ h^A X' \prod h^A X' & \longrightarrow & h^A X' \end{array}$$

conmuta, esto es $h^A(\varphi) : h^A X' \longrightarrow h^A X$, es un homomorfismo.

Recordamos de 4.5.5. que el funtor $h : \mathcal{K} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\mathcal{K}^o}$ es compatible con productos directos finitos.

PROPOSICION 5.1.2.: Sea A un objeto de $\mathcal{K}$ tal que existe un objeto producto directo $A \prod A$. Entonces existe una biyección entre las multiplicaciones en A y los mor fismos $A \prod A \longrightarrow A$.

Demostración: En vista de la observación que precede a la proposición, podemos escribir $h^A \prod h^A = h^{A \prod A}$. Entonces $[h^{A \prod A}, h^A]$ es el conjunto de las multiplicaciones en A . Ahora, por 3.1.6. existe una biyección ϕ: $[A \prod A, A] \longrightarrow [h^{A \prod A}, h^A]$, q. e. d. .

Esta biyección es precisamente la función de Yoneda. Usaremos el mismo símbolo μ para el morfismo $A \prod A \longrightarrow A$ que define la multiplicación μ .

Ejemplo 5.1.3.: Sea A un conjunto. Una multiplicación en A es por 5.1.2. , precisamente la noción usual de una ley de composición en A .

Ejemplo 5.1.4.: Si A es un espacio topológico, una multiplicación en A respecto a la categoría $\mathcal{T}$ de los espacios topológicos es una multiplicación continua en el sentido usual.

Ejemplo 5.1.5.: Sea X un espacio topológico y $\mathcal{R}$ la categoría de los haces de grupos abelianos sobre X . La adición, definida para pares de elementos de una misma fibra, en un haz A define una multiplicación en A en el sentido de 5.1.1. .

Ejemplo 5.1.6.: Sea X un espacio topológico y $\mathcal{R}$ la categoría de los $\mathbb{R}$-fibrados vectoriales sobre X . Un fibrado vectorial A de $\mathcal{R}$ tiene una multiplicación natural respecto a $\mathcal{R}$ definida por la adición fibra a fibra de vectores.

Sean A , A' objetos de $\mathcal{R}$ y μ, μ' multiplicaciones en A , A' respectivamente.

DEFINICION 5.1.7.: El morfismo $\alpha : A \longrightarrow A'$ es un homomorfismo respecto a μ, μ' si el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} h^A \amalg h^A & \xrightarrow{\mu} & h^A \\ {\scriptstyle h^\alpha \amalg h^\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h^\alpha} \\ h^{A'} \amalg h^{A'} & \xrightarrow[\mu']{} & h^{A'} \end{array}$$

Aquí $h^\alpha \amalg h^\alpha : h^A \amalg h^A \longrightarrow h^{A'} \amalg h^{A'}$ es la transformación natural definida para todo objeto X de $\mathcal{R}$ por

$$(h^\alpha \amalg h^\alpha)(X) = h^\alpha X \amalg h^\alpha X : (h^A \amalg h^A)(X) = [X,A] \amalg [X,A] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow (h^{A'} \amalg h^{A'})(X) = [X,A'] \amalg [X,A'] .$$

PROPOSICION 5.1.8.: Sean A, A' objetos de $\mathcal{R}$ tales que $A \amalg A$, $A' \amalg A'$ existen. Sean μ, μ' multiplicaciones en A, A'. Entonces $\alpha : A \longrightarrow A'$ es un homomorfismo respecto a μ, μ' si y sólo si el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A \amalg A & \xrightarrow{\mu} & A \\ {\scriptstyle \alpha \amalg \alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ A' \amalg A' & \xrightarrow{\mu'} & A' \end{array}$$

es conmutativo.

Demostración: En vista de 3.1.6., lo único que hay que observar es que $h^{\alpha \amalg \alpha} = h^\alpha \amalg h^\alpha$, lo cual es claro por definición.

Sea $\mathcal{R}$ una categoría. Consideremos los pares (A, μ) donde A es un objeto de $\mathcal{R}$ y μ es una multiplicación en A. Junto con los homomorfismos definidos en 5.1.7., se obtiene una categoría; la categoría de los objetos con multiplicaciones de $\mathcal{R}$.

5.2. Comultiplicaciones.

Las definiciones de la sección 5.1. sugieren un tratamiento dual. Sea $\mathcal{R}$ una categoría y A un objeto de $\mathcal{R}$.

DEFINICION 5.2.1.: Una comultiplicación en A es una transformación natural $\nu : h_A \prod h_A \longrightarrow h_A$.

Explícitamente, esto significa que para todo objeto X de $\mathcal{R}$, existe una aplicación $\nu_X : h_A X \prod h_A X \longrightarrow h_A X$, esto es, una multiplicación en el conjunto $h_A X = [A, X]$, tal que para todo morfismo $\varphi : X \longrightarrow X'$ el diagrama

$$\begin{array}{ccc} h_A X \prod h_A X & \xrightarrow{\nu_X} & h_A X \\ {\scriptstyle h_A(\varphi) \prod h_A(\varphi)} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle h_A(\varphi)} \\ h_A X' \prod h_A X' & \longrightarrow & h_A X' \end{array}$$

conmuta, esto es, $h_A(\varphi) : h_A X \longrightarrow h_A X'$ es un homomorfismo.

Recordamos que el funtor $h : \mathcal{R}^o \longrightarrow \mathcal{E}ns^{\mathcal{R}}$ es compatible con sumas directas finitas, esto es, si A , B son objetos de $\mathcal{R}$ tales que $A \amalg B$ existe, entonces $h_{A \amalg B}$ y $h_A \prod h_B$ son naturalmente equivalentes.

Análogamente a la proposición 5.1.2., se tiene

PROPOSICION 5.2.2.: Sea A un objeto de $\mathcal{R}$ tal que existe $A \amalg A$. Entonces hay una biyección entre las comultiplicaciones en A y los morfismos $A \longrightarrow A \amalg A$.

Demostración: La función de Yoneda $\phi : [A, A \amalg A] \longrightarrow [h_{A \amalg A}, h_A]$ de 3.1.2. es una biyección.

Ejemplo 5.2.3.: En la categoría de los grupos abelianos $A \prod B = A \amalg B$. Entonces la diagonal $\Delta : A \longrightarrow A \prod A = A \amalg A$ es una comultiplicación.

La definición de homomorfismo es dual de la definición 5.1.7. .

5.3. Propiedades particulares de multiplicaciones y comultiplicaciones.

Veremos aquí cómo imponer axiomas para una multiplicación sobre un objeto A de $\mathcal{R}$, que sean precisamente los axiomas usuales de grupo en el caso $\mathcal{R} = \mathrm{Ens}$.

Antes de hablar de una unidad para una multiplicación $\mu : h^A \prod h^A \longrightarrow h^A$ en A, debemos poder hablar de un "elemento" de A.

Sea $F : \mathcal{R} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ el funtor definido por $FX = \{1\}$ para cada objeto X de $\mathcal{R}$.

DEFINICION 5.3.1.: Un punto en A es una transformación natural $e : F \longrightarrow h^A$

PROPOSICION 5.3.2.: Sea $\mathcal{R}$ una categoría con un objeto puntual P. Entonces hay una biyección entre los morfismos $P \longrightarrow A$ y los puntos de A.

Demostración: La función de Yoneda $\phi : [P, A] \longrightarrow [F\ h^A]$ es una biyección entre morfismos $P \longrightarrow A$ y puntos en A. Sólo hay que recordar que P representa a F, esto es $h^P = F$ (3.3.5.).

Ejemplo 5.3.3.: Un punto en un conjunto A es lo mismo que una aplicación $P \longrightarrow A$ de un conjunto unitario P en A.

Ejemplo 5.3.4.: Sea $\mathcal{R}$ la categoría de los $\mathbb{R}$-fibrados vectoriales sobre un espacio topológico X. El fibrado vectorial sobre X que tiene fibra de dimensión nula sobre cada punto es un objeto puntual en $\mathcal{R}$. Sea ahora A un fibrado vectorial sobre X. La sección nula de A es una aplicación $X \longrightarrow A$, esto es, un punto en A.

Un punto en A está dado, en el caso general, por una aplicación $e_X : FX \longrightarrow h^A X$, esto es, un punto en $[X, A]$ para cada objeto X de $\mathcal{R}$, tal que para $\varphi : X \longrightarrow X'$ la aplicación $h^A(\varphi) : h^A X' \longrightarrow h^A X$ respeta estos puntos.

Sea e un punto en A, donde A es un objeto de $\mathcal{R}$ con una multiplicación μ.

DEFINICION 5.3.5: La transformación natural e es una <u>unidad diestra</u> para μ, si el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} h^A \sqcap F \arrow[r, "1_{h^A} \sqcap e"] \arrow[d] & h^A \sqcap h^A \arrow[d, "\mu"] \\ h^A \arrow[r, "1_{h^A}"] & h^A \end{tikzcd}$$

Aquí la flecha $h^A \sqcap F \longrightarrow h^A$ nota la equivalencia natural trivial definida por la identificación $[X, A] \sqcap \{1\} = [X, A]$ para todo objeto X de $\mathcal{R}$.

Esto significa que para todo objeto X de $\mathcal{R}$ el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} {[X, A] \sqcap \{1\}} \arrow[r, "1_{[X, A]} \sqcap e_X"] \arrow[d] & {[X, A] \sqcap [X, A]} \arrow[d, "\mu_X"] \\ {[X, A]} \arrow[r, "1_{[X, A]}"] & {[X, A]} \end{tikzcd}$$

donde $[X, A] \sqcap \{1\} \longrightarrow [X, A]$ es la identificación trivial.

PROPOSICION 5.3.6.: Sea $\mathcal{R}$ una categoría con un punto P. Supongamos que para el objeto A, el objeto $A \sqcap A$ existe; sea $\mu : A \sqcap A \longrightarrow A$ una multiplicación en A y e un punto en A, esto es, un morfismo $P \longrightarrow A$. Entonces e es una unidad derecha para μ si y sólo si conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A \,\Pi\, P & \xrightarrow{1_A \,\Pi\, e} & A \,\Pi\, A \\ \downarrow & & \downarrow \mu \\ A & \xrightarrow{1_A} & A \end{array}$$

Aquí $A \,\Pi\, P \longrightarrow A$ es el morfismo que corresponde a la equivalencia natural trivial $h^A \,\Pi\, F \longrightarrow h^A$ por la función de Yoneda.

Demostración: Es obvia por 3.1.6. en vista de $h^A \,\Pi\, F = h^{A \,\Pi\, P}$, $h^A \,\Pi\, h^A = h^{A \,\Pi\, A}$.

Ejemplo 5.3.7.: En la categoría Ens, un punto en el conjunto A es una unidad diestra para $\mu : A \,\Pi\, A \longrightarrow A$ en el sentido usual.

Ejemplo 5.3.8.: (ver 5.3.4.) La sección nula de A es una unidad para la multiplicación de A definida por la adición de vectores, fibra a fibra.

Se definen análogamente unidades siniestra Una unidad es una unidad siniestra que es también una unidad diestra.

Dualmente se definen counidades de la siguiente manera. Sea A un objeto de $\mathcal{K}$ con una comultiplicación ν. Consideremos ahora el funtor $F : \mathcal{K} \longrightarrow$ Ens definido por $FX = \{1\}$ como funtor covariante.

DEFINICION 5.3.9.: Una transformación natural $\varepsilon : F \longrightarrow h_A$ es una <u>counidad diestra</u> si el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} h_A \,\Pi\, F & \xrightarrow{1_{h_A} \,\Pi\, \varepsilon} & h_A \,\Pi\, h_A \\ \downarrow & & \downarrow \nu \\ h_A & \xrightarrow{1_{h_A}} & h_A \end{array}$$

Supongamos que haya un copunto $\mathcal{J}$ en $\mathcal{K}$. Entonces $F \cong h_{\mathcal{J}}$ (ver

3.3.7.) y por la función de Yoneda, a la transformación natural $\varepsilon : h_{\mathcal{J}} \longrightarrow h_A$ corresponde una única $\tilde{\varepsilon} : A \longrightarrow \mathcal{J}$ (se la podría llamar un copunto en A). Escribiremos por simplicidad $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}$.

PROPOSICION 5.3.10.: Sea $\mathcal{R}$ una categoría con copunto $\mathcal{J}$. Supongamos que para el objeto A, existe el objeto $A \sqcup A$; sea $\nu : A \longrightarrow A \sqcup A$ una comultiplicación en A y $\varepsilon : A \longrightarrow \mathcal{J}$ un morfismo. Entonces ε es un counidad diestra para ν si y sólo si conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
A \sqcup \mathcal{J} & & A \sqcap A \arrow[ll, "1_A \sqcup \varepsilon"'] \\
A \arrow[u] & & A \arrow[ll, "1_A"] \arrow[u, "\nu"']
\end{tikzcd}$$

Aquí $A \longrightarrow A \sqcup \mathcal{J}$ es la equivalencia que corresponde a la equivalencia natural trivial $h_{A \sqcup \mathcal{J}} \longrightarrow h_A$ definida por $[A \sqcup \mathcal{J}, X] = [A, X] \sqcap [\mathcal{J}, X] \longrightarrow [A, X]$ para todo objeto X de $\mathcal{R}$.

Demostración: Es clara, de 3.1.2. .

Ejemplo 5.3.11.: Sea Λ un anillo conmutativo con identidad y $\mathcal{R}$ la categoría de las Λ-álgebras conmutativas con identidad. La Λ-álgebra Λ es un copunto en $\mathcal{R}$. El producto tensorial $A \otimes B$ de las álgebras A y B es nuevamente un álgebra de $\mathcal{R}$ y es una suma directa de A y B. Una comultiplicación en A es un morfismo $A \longrightarrow A \otimes A$ (A se llama una coálgebra). Un morfismo $A \longrightarrow \Lambda$ es un counidad diestra, si el diagrama 5.3.10., conmuta.

Ejemplo 5. 3. 12. : Sea Υ la categoría de los conjuntos puntuados. Un punto es al mismo tiempo un copunto $\mathfrak{J}$. Supongamos ahora que A está equipado con una comultiplicación $\nu : A \longrightarrow A \coprod A$ y sea $\varepsilon : A \longrightarrow \mathfrak{J}$ una counidad para ν . Consideremos la aplicación canónica de inclusión $\varkappa : A \coprod A \longrightarrow A \prod A$. Entoncés la composición $A \longrightarrow A \coprod A \longrightarrow A \prod A$ tiene a $1_A : A \longrightarrow A$ como proyecciones, siendo ε una counidad, y es entonces la aplicación diagonal $\Delta : A \longrightarrow A \prod A$ (ver sección 4. 3.). Estó sólo es posible si A se reduce a un punto.

Antes de hablar de asociatividad de una multiplicación μ en A , observamos que los funtores $(h^A \prod h^A) \prod h^A$ y $h^A \prod (h^A \prod h^A)$ son naturalmente equivalentes y pueden, entonces, ambos notarse con $h^A \prod h^A \prod h^A$.

DEFINICION 5. 3. 13. : Sea μ una multiplicación en A . Entonces μ se llama <u>asociativa</u>, si conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & (h^A \prod h^A) \prod h^A \arrow[r, "\mu \prod 1_{h^A}"] & h^A \prod h^A \arrow[dr, "\mu"] & \\
h^A \prod h^A \prod h^A \arrow[ur, equal] \arrow[dr, equal] & & & h^A \\
 & h^A \prod (h^A \prod h^A) \arrow[r, "1_{h^A} \prod \mu"] & h^A \prod h^A \arrow[ur, "\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

PROPOSICION 5. 3. 14. : Sea A un objeto de $\mathcal{R}$ tal que $A \prod A$ y $A \prod A \prod A$, existen. Una multiplicación μ : $A \prod A \longrightarrow A$ en A es asociativa si y sólo si conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & (A \prod A) \prod A \arrow[r, "\mu \prod 1_A"] & A \prod A \arrow[dr, "\mu"] & \\
A \prod A \prod A \arrow[ur, equal] \arrow[dr, equal] & & & A \\
 & A \prod (A \prod A) \arrow[r, "1_A \prod \mu"] & A \prod A \arrow[ur, "\mu"'] &
\end{tikzcd}$$

Demostración: Obvia por 3.1.6. .

Se define análogamente asociatividad para una comultiplicación.

Sea nuevamente $F : \mathcal{K} \longrightarrow Ens$ el funtor definido por $FX = \{1\}$ para cada objeto X de $\mathcal{K}$. Observamos que F es un objeto final en la categoría $h(\mathcal{K})$, donde $h : \mathcal{K} \longrightarrow Ens^{\mathcal{K}^o}$. Esto significa que hay una única transformación natural $h^A \longrightarrow F$ para todo objeto A de $\mathcal{K}$.

Sea $\Delta : h^A \longrightarrow h^A \prod h^A$ la transformación natural definida por la aplicación diagonal $\Delta_X : h^A X \longrightarrow h^A X \prod h^A X$ para todo objeto X de $\mathcal{K}$.

Sea ahora μ una multiplicación en A con unidad e.

DEFINICION 5.3.15.: <u>Una inversa a derecha para μ</u> es una transformación natural $I : h^A \longrightarrow h^A$ que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
h^A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d] & h^A \prod h^A \arrow[r, "1_{h^A} \prod I"] & h^A \prod h^A \arrow[d, "\mu"] \\
F \arrow[rr, "e"] & & h^A
\end{tikzcd}$$

Se definen en forma análoga inversas izquierdas para μ. Una inversa es una inversa derecha que es también una inversa izquierda.

Análogamente para comultiplicaciones con counidades se pueden definir coinversas derechas, etc.

Ahora es claro cómo se definen grupos, cogrupos anillos y coanillos en $\mathcal{K}$.

Advertimos que existe una equivalencia natural $\tau : h^A \prod h^A \longrightarrow h^A \prod h^A$ definida como sigue: $\tau_X : h^A X \prod h^A X \longrightarrow h^A X \prod h^A X$ consiste para cada X de $\mathcal{K}$, del intercambio de los factores. La equivalencia τ se llama el "intercambio". Se tiene:

DEFINICION 5.3.16.: Sea μ una multiplicación en A. Llamaremos a μ <u>conmutativa,</u> si el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} h^A \prod h^A \arrow[d, "\tau"] \arrow[dr, "\mu"] & \\ h^A \prod h^A \arrow[r, "\mu"'] & h^A \end{tikzcd}$$

Sea ahora $\mathcal{K}$ una categoría con un objeto puntual P y G un grupo en $\mathcal{K}$ respecto a una multiplicación μ, una unidad $e : h^P \longrightarrow h^G$ y una inversa $I : h^G \longrightarrow h^G$. Por la definición de un grupo en $\mathcal{K}$, para un objeto X de $\mathcal{K}$, el conjunto $[X, G]$ es un grupo ordinario con identidad $e_X : [X, P] = \{1\} \longrightarrow [X, G]$ e inversa, la aplicación $I_X : [X, G] \longrightarrow [X, G]$. Esto es, en particular, cierto para el conjunto $[P, G] = \hat{G}$ de los "puntos de G".

Ejemplo 5.3.17.: Sea $\mathcal{K} = \mathcal{T}$ la categoría de los espacios topológicos y G un grupo en $\mathcal{T}$, esto es, un grupo topológico. Como toda aplicación $P \longrightarrow G$ es continua, el grupo $\hat{G} = [P, G]$ es equipotente a G y se puede identificar a G como conjunto.

La propiedad usada en el ejemplo anterior es la existencia de un funtor olvido $V : \mathcal{K} \longrightarrow Ens$ tal que VP es un punto en Ens y $[P, G] \cong [VP, VG]$. Bajo estas condiciones se tiene $\hat{G} = [P, G] \cong [VP, VG] \cong VG$.

5.4. Un teorema sobre multiplicaciones y comultiplicaciones.

Comenzaremos probando:

LEMA 5.4.1.: Sea μ una multiplicación en el objeto B de $\mathcal{K}$ y sean A_1, A_2 objetos tales que $A_1 \coprod A_2$ existe. Consideremos las multiplicaciones μ_{A_1}, μ_{A_2}, $\mu_{A_1 \coprod A_2}$ definidas en $[A_1, B]$, $[A_2, B]$, $[A_1 \coprod A_2, B]$ respectivamente. Entonces para (φ_1, φ_2), (ψ_1, ψ_2) en $[A_1, B] \prod [A_2, B] =$

$= [A_1 \coprod A_2, B]$ se tiene

$$\mu_{A_1 \coprod A_2}((\varphi_1, \varphi_2),(\psi_1, \psi_2)) = (\mu_{A_1}(\varphi_1, \psi_1), \mu_{A_2}(\varphi_2, \psi_2))$$

Demostración: Consideremos los morfismos $i_j : A_j \longrightarrow A_1 \coprod A_2$ $(j=1,2)$ que definen a $A_1 \coprod A_2$ como suma directa de A_1, A_2. La naturalidad de μ asegura la conmutatividad del diagrama:

$$\begin{array}{ccc} [A_1 \coprod A_2, B] \prod [A_1 \coprod A_2, B] & \xrightarrow{\mu_{A_1 \coprod A_2}} & [A_1 \coprod A_2, B] \\ {\scriptstyle [i_j, B] \prod [i_j, B]} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle [i_j, B]} \\ [A_j, B] \prod [A_j, B] & \xrightarrow{\mu_{A_j}} & [A_j, B] \end{array}$$

para $j = 1, 2$.

Observando que $[i_j, B] : [A_1 \coprod A_2, B] = [A_1, B] \prod [A_2, B] \longrightarrow [A_j, B]$ es la proyección sobre el j-ésimo factor, esto muestra de inmediato la fórmula deseada.

PROPOSICION 5.4.2.: Sea (A, ν) un objeto con comultiplicación ν, (B, μ) un objeto con multiplicación μ. Supongamos, o bien que $A \coprod A$ existe, o bien que existe $B \prod B$. Consideremos $[A, B]$ y notemos $+$, $\cdot$ las leyes de composición inducidas por ν, μ respectivamente. Entonces para $\varphi_j, \psi_j \in [A, B]$ $(j = 1, 2)$ se tiene

$$(\varphi_1 + \varphi_2) \cdot (\psi_1 + \psi_2) = (\varphi_1 \cdot \psi_1) + (\varphi_2 \cdot \psi_2)$$

Demostración: Suponemos que existe $A \coprod A$. Consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc}[A\coprod A,B]\prod[A\coprod A,B] & \xrightarrow{\mu_{A\coprod A}} & [A\coprod A,B] \\ \nu_B\prod\nu_B \downarrow & & \downarrow \nu_B \\ [A,B]\prod[A,B] & \xrightarrow{\mu_A = \cdot} & [A,B]\end{array}$$

Es conmutativo en vista de la naturalidad de μ . Ahora la fórmula deseada sigue inmediatamente usando 5.4.1. . Se tiene una demostración similar si existe $B\prod B$.

Sea $\mathcal{K}$ una categoría con un punto P y un copunto $\mathcal{J}$.

TEOREMA 5.4.3.: Sea (A, ν) un objeto con comultiplicación ν y counidad O , (B,μ) un objeto con multiplicación μ y unidad e . Supongamos, o bien que $A\coprod A$ existe, o bien que existe $B\prod B$. Consideremos $[A,B]$ y notemos con $+,\cdot$ las leyes de composición inducidas por ν y μ respectivamente. Entonces estas leyes de composición coinciden y son asociativas y conmutativas. Más aún, $O_B = e_A \in [A,B]$.

Demostración: $O : h_{\mathcal{J}} \longrightarrow h_A$ y $O_B : [\mathcal{J},B] \longrightarrow [A,B]$. Identificamos O_B con la imagen en $[A,B]$ del único elemento de $[\mathcal{J},B]$. Análogamente $e : h^P \longrightarrow h^B$ y $e_A : [A,P] \dashrightarrow [A,B]$ se puede identificar con la imagen en $[A,B]$ del único elemento de $[A,P]$. Ponemos $O = O_B$, $e = e_A$.

Ahora $e = e.e = (e+O).(O+e) = (e.O)+(O.e)$ (usando 5.4.2.) $= O+O = O$ y entonces $e = O$.

Para $\varphi , \psi \in [A,B]$ tenemos $\varphi . \psi = (\varphi + e).(e+\psi) = (\varphi.e)+(e.\psi)$ (nuevamente por 5.4.2.) $= \varphi + \psi$ y las leyes de composición coinciden.

Más aún $\varphi . \psi = (e+\varphi).(\psi+e) = (e.\psi)+(\varphi.e) = \psi+\varphi = \psi.\varphi$ y las leyes de composición son conmutativas.

Finalmente $(\varphi_1+\varphi_2)+\varphi_3 = (\varphi_1+\varphi_2).(O+\varphi_3) = (\varphi_1.O)+(\varphi_2.\varphi_3) = \varphi_1+(\varphi_2+\varphi_3)$ y la leyes de composición son asociativas.

5.5. Leyes de composición externas.

Sea $\mathcal{R}$ una categoría y G, A objetos de $\mathcal{R}$.

DEFINICION 5.5.1.: Una operación de G sobre A es una transformación natural $\omega : h^G \prod h^A \longrightarrow h^A$. El objeto A se llama un G-objeto respecto a ω.

PROPOSICION 5.5.2.: Supongamos que $G \coprod A$ existe. Entonces hay una biyección entre las operaciones de G sobre A y los morfismos $G \coprod A \longrightarrow A$.

Demostración: Por 3.1.6. .

Sea A un G-objeto, A' un G'-objeto y $\rho : G \longrightarrow G'$ un morfismo.

DEFINICION 5.5.3.: Un morfismo $\alpha : A \longrightarrow A'$ es ρ-equivariante, si el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} h^G \prod h^A \arrow[r] \arrow[d, "h^\rho \prod h^\alpha"'] & h^A \arrow[d, "h^\alpha"] \\ h^{G'} \prod h^{A'} \arrow[r] & h^{A'} \end{tikzcd}$$

Si $G = G'$ y $\rho = 1_G$, entonces una ρ-equivariancia se llama simplemente una equivariancia. Para G fijo, las equivariancias se pueden componer. Para G fijo, se obtiene la categoría $\widetilde{\mathcal{R}}^G$ de los G-objetos de $\mathcal{R}$.

Supongamos ahora, más particularmente, que G sea un grupo en $\mathcal{R}$ con respecto a una multiplicación μ y una unidad e. En este caso, buscamos que una operación ω de G sobre A sea tal que los siguientes diagramas sean conmutativos

$$\begin{tikzcd}
h^G \prod h^G \prod h^A \arrow[r, "\mu \prod 1_{h^A}"] \arrow[d, "1_{h^G} \prod \omega"'] & h^G \prod h^A \arrow[d, "\omega"] \\
h^G \prod h^A \arrow[r, "\omega"] & h^A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F \prod h^A \arrow[r, "e \prod 1_{h^A}"] \arrow[d] & h^G \prod h^A \arrow[d, "\omega"] \\
h^A \arrow[r, "1"] & h^A
\end{tikzcd}$$

Aquí F nota nuevamente el funtor definido por $FX = \{1\}$ para todo objeto X de $\mathcal{K}$, y $F \prod h^A \longrightarrow h^A$ es la identificación trivial.

Supongamos ahora que P sea un punto en $\mathcal{K}$, esto es, $h^P \cong F$, y consideremos el grupo $\hat{G} = [P, G]$.

LEMA 5.5.4.: Si el grupo G de $\mathcal{K}$ opera por $\omega : h^G \prod h^A \longrightarrow h^A$ sobre el objeto A de $\mathcal{K}$, entonces existe un homomorfismo $\tau : \hat{G} \longrightarrow$ $\rightarrow [A, A]_{\mathcal{K}}$, esto es, una operación ordinaria del grupo $\hat{G} = [P, G]$ sobre A en el sentido usual.

Demostración: Sea $\omega : h^G \prod h^A \longrightarrow h^A$ la operación de G en A. Debemos definir $\tau : \hat{G} = [P, G] \longrightarrow [A, A]$. Ahora, existe una biyección ϕ : $[P, G] \longrightarrow [h^P, h^G]$ por 3.1.6. . Notemos con $\phi(\hat{g}) = g : h^P \longrightarrow h^G$ para $\hat{g} : P \longrightarrow G$. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
h^P \prod h^A \arrow[r, "g \prod 1_{h^A}"] \arrow[d] & h^G \prod h^A \arrow[d] \\
h^A \arrow[r, "\tau_g"] & h^A
\end{tikzcd}$$

La transformación $h^P \prod h^A \longrightarrow h^A$ es una equivalencia natural y enton ces el diagrama define una única $\tau_g : h^A \longrightarrow h^A$. Por 3.1.6. ésta define un único $\tau_{\hat{g}} : A \longrightarrow A$. Esto define $\tau : \hat{G} \longrightarrow [A, A]$.

Ahora sea $e : h^P \longrightarrow h^G$, respectivamente $\hat{e} : P \longrightarrow G$ una unidad de G. Debemos mostrar $\tau_e = 1_A$. Pero esto es obvio en vista de la condición especial impuesta sobre una operación de G sobre A en el caso en que G sea un grupo.

La otra de estas dos condiciones implica, como se ve fácilmente $\tau_{\hat{g}_1 \hat{g}_2} = \tau_{\hat{g}_1}\tau_{\hat{g}_2}$, para $\hat{g}_1, \hat{g}_2 : P \longrightarrow G$.

PROPOSICION 5.5.5.: Sea $\mathcal{K}$ una categoría con un objeto puntual P, G un grupo de $\mathcal{K}$ y $\hat{G} = [P, G]$. $\widetilde{\mathcal{K}}^G$ nota la categoría de los G-objetos de $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}^{\hat{G}}$ la categoría de los $\hat{G}$-objetos de $\mathcal{K}$ en el sentido usual. Entonces existe un funtor bien definido $\phi : \widetilde{\mathcal{K}}^G \longrightarrow \mathcal{K}^{\hat{G}}$.
Si $\mathcal{K}$ = Ens, este funtor ϕ es una equivalencia.

Demostración: Sea A un G-objeto de $\mathcal{K}$ respecto a $\omega : h^G \prod h^A \longrightarrow h^A$. Hemos definido en el lema 5.5.4. un homomorfismo $\tau : \hat{G} \longrightarrow [A, A]$ Notaremos $\phi(A)$ al objeto A considerado como un $\hat{G}$-objeto de $\mathcal{K}$ respecto a τ. Falta definir un morfismo $\phi(\alpha)$ para un morfismo equivariante $\alpha : A \longrightarrow A'$. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
h^A \arrow[r] \arrow[d, "h^\alpha"'] & h^P \prod h^A \arrow[r] \arrow[d, "1 \prod h^\alpha"] & h^G \prod h^A \arrow[r] \arrow[d, "1 \prod h^\alpha"] & h^A \arrow[d, "h^\alpha"] \\
h^{A'} \arrow[r] & h^P \prod h^{A'} \arrow[r] & h^G \prod h^{A'} \arrow[r] & h^{A'}
\end{tikzcd}$$

para $g : h^P \longrightarrow h^G$. Es conmutativo por hipótesis. Pero la línea horizontal superior es τ_g, la línea horizontal inferior τ'_g. Esto muestra que

$$\begin{tikzcd} h^A \arrow[r, "\tau_g"] \arrow[d, "h^\alpha"'] & h^A \arrow[d, "h^\alpha"] \\ h^{A'} \arrow[r, "\tau'_g"] & h^{A'} \end{tikzcd}$$

conmuta, esto es, h^α es también una equivarianca en $\mathcal{K}^{\hat{G}}$. Podemos definir $\phi(\alpha) = \alpha$ y entonces $\phi : \widetilde{\mathcal{K}^G} \longrightarrow \mathcal{K}^{\hat{G}}$ es un funtor.

Sea ahora $\mathcal{K} =$ Ens. Entonces $\hat{G} = [P, G] \cong G$.

Sea A un conjunto y $\tau : \hat{G} \longrightarrow [A, A]$ una operación de $\hat{G}$ sobre A. El diagrama que aparece en la demostración de 5.5.4. define ahora una operación ω de G sobre A y ϕ aplica este G-conjunto precisamente, en el $\hat{G}$-conjunto original. Entonces ϕ es una equivalencia.

Ejemplo 5.5.6.: Sea $\mathcal{T}$ la categoría de los espacios topológicos y aplicaciones continuas. Una operación de un grupo topológico G sobre un espacio A es una aplicación continua $G \prod A \longrightarrow A$ que satisface ciertas condiciones que significan precisamente que la aplicación $\tau : G \longrightarrow [A, A]$, es un homomorfismo. $\phi(A)$ es el G-objeto A, donde se ha olvidado la continuidad de la aplicación $G \prod A \longrightarrow A$.

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

BIBLIOGRAFIA

[1] Eckman, B. and Hilton, P. J.: Group-like structures in general categories.
I : Math. Ann. 145 (1962), 227-255 .
II : Math. Ann. 151 (1963), 150-186 .

[2] Eilenberg, S. and Mac. Lane, S.: General theory of natural equivalences. Trans. AMS 58 (1945), 231-294 .

[3] Fakir, S.: Catégories et foncteurs. Thèse, Université de Paris. (1963).

[4] Grothendieck, A.: Sur quelques points d' algebre homologique. Tohôku Math. J. 9(1957), 119-121 .

[5] Grothendieck, A. et Dieudonné, J.: Eléments de géométrie algébrique. Vol. III, I.H.E.S., Paris (1961), 349-356.

[6] Kan, D. M.: Adjoint Functors. Trans. AMS 87(1958), 294-329.

[7] Mac Lane, S.: Homology. Grudlehren Math. Wiss., Band 114, Berlin (1963).

[8] Mac Lane, S.: Categorical Algebra. Colloquium lectures AMS, Boulder, Colorado (1963).

* * *

INDICE

* * *

r e a l i z a d o e n

U R G E

Viamonte 2296
Buenos Aires

CURSOS Y SEMINARIOS DE MATEMATICA

Fascículo	1.	Matemática y física cuántica	Laurent Schwartz
Fascículo	2.	Condiciones de continuidad de operadores potenciales y de Hilbert ...	Mischa Cotlar
Fascículo	3.	Integrales singulares y sus aplicaciones a ecuaciones diferenciales hiperbólicas. Seminario dirigido por ...	Alberto P. Calderón
Fascículo	4.	Propiedades en el contorno de funciones analíticas	Alberto González Domínguez
Fascículo	5.	Teoría constructiva de funciones ...	Jean Pierre Kahane
Fascículo	6.	Algebras de convolución de sucesiones, funciones y medidas sumables .	[illegible] Pierre Kahane
Fascículo	7.	Nociones elementales sobre núcleos singulares y sus aplicaciones	Juan Carlos Merlo
Fascículo	8.	Introducción al estudio del problema de Dirichlet	Esteban Vági
Fascículo	9.	Análisis armónico en varias variables. Teoría de los espacios HP	Guido Weiss
Fascículo	10.	Probabilidades y estadítsica	Roque Carranza
Fascículo	11.	Introducción a la teoría de la representación de grupos	Mischa Cotlar
Fascículo	12.	Algebra lineal	Jean Dieudonné
Fascículo	13.	Una introducción de la integral sin la noción de medida	Jan Mikusinski
Fascículo	14.	Representaciones de grupos compactos y funciones esféricas	Jean Dieudonné
Fascículo	15.	Equipación con espacios de Hilbert ..	Mischa Cotlar
Fascículo	16.	Grupos de Lie y grupos de transformaciones	Philippe Tondeur
Fascículo	17.	Tres teoremas sobre variedades diferenciales	Juan Carlos Merlo
Fascículo	18.	Sobre el problema de la división y la triangulación de conjuntos semianalíticos	S. Lojasiewicz
Fascículo	19.	Introducción a la geometría diferencial de variedades diferenciables ...	L. A. Santaló
Fascículo	20.	Interpolación, espacios de Lorentz y teorema de Marcinkiewicz	Evelio T. Oklander
Fascículo	21.	Categorías y Functores	Philippe Tondeur
Fascículo	22.	Notas de Algebra	Enzo R. Gentile

PEDIDOS:

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Biblioteca y Publicaciones
Perú 272 - Casilla de Correo 1766
Buenos Aires - Argentina