ISSN 1853-709X

Fascículo 18

Cursos y seminarios de matemática

Serie A

S. Lojasiewicz

Sobre el problema de la división y la triangulación de conjuntos semianalíticos

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2011

Cursos y Seminarios de Matemática – Serie A

Fascículo 18

ISSN 1853-709X (Versión Electrónica)
ISSN 0524-9643 (Versión Impresa)

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

FASCICULO **18** cursos y seminarios de matemática

S. Lojasiewicz

SOBRE EL PROBLEMA DE LA DIVISION Y LA TRIANGULACION DE CONJUNTOS SEMIANALITICOS

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES – DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
1965

CONTENIDO :

INTRODUCCION

Estas notas corresponden a un curso dictado por el profesor S. Lojasiewicz durante los meses de mayo, junio y julio de 1964 en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de Buenos Aires.

La primera parte de las notas concierne al problema de la división de una distribución por una función indefinidamente derivable. Su contenido — sin detalles — es esencialmente el del trabajo del autor (7) en que se da respuesta afirmativa al problema cuando la función es analítica real. Con respecto de ese trabajo se pueden encontrar aquí ciertas novedades de presentación, especialmente en cuanto atañe a la parte algebraica del problema (ver 2§) y a la utilización de la teoría de conjuntos semianalíticos. Como bibliografía complementaria respecto del problema de la división se puede citar [9] , [10] y [4] .

En la segunda parte se ofrece un resumen de la teoría de conjuntos semianalíticos cuyas demostraciones serán publicadas próximamente por el autor. Finalmente se presenta un esquicio de la demostración de un teorema de triangulación de conjuntos semianalíticos. Los detalles completos serán expuestos en una próxima publicación de la Universidad de Pisa. En [2] , [5] , [6] y [8] puede encontrarse material relacionado con el tema.

M. H.

A . - PROBLEMA DE LA DIVISION

1 § . - FORMULACION DEL PROBLEMA

NOTACION:

$\mathbb{N}$ indicará el conjunto de los números enteros, $\mathbb{N}_0$ el conjunto de los enteros ≥ 0 , $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}^n$ el producto cartesiano $\underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \times \ldots\ldots \times \mathbb{R}}_{n}$.

Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$. $D(U)$ notará el espacio de las funciones definidas sobre U , indefinidamente derivables y con soporte compacto. Se dice que una sucesión de funciones $f_n \in D(U)$ converge a cero en $D(U)$ si los soportes de las f_n están todos incluidos en un mismo conjunto compacto de U , y si las f_n y sus derivadas tienden uniformemente a cero. $\mathcal{E}(U)$ notará el espacio de las funciones infinitamente derivables sobre U , con la topología de la convergencia uniforme compacta de las funciones y sus derivadas. $D'(U)$ indicará el espacio de las distribuciones sobre U , o sea formas lineales (sequencialmente) continuas sobre $D(U)$ (ver [9]) .

Dadas $f \in \mathcal{E}(U)$ y $S \in D'(U)$, la igualdad $fS(\varphi) = S(f\varphi)$, $(\varphi \in D(U))$ define una distribución, notada fS , sobre U ([ ] ,) . Entonces el problema de la división puede enunciarse así:

P_1 : Dada $f \in \mathcal{E}(U)$ tal que $f \not\equiv 0$ en ningún subconjunto abierto de U , para cada $T \in D'(U)$ encontrar $S \in D'(U)$ tal que $fS = T$. (*)

(*) Es evidente que si $f \not\equiv 0$ en algún subconjunto abierto U' de U entonces P_1 no tiene solución: basta considerar una distribución $T \neq 0$ con soporte en U'

Este problema no siempre tiene solución. Por ejemplo, la solución S correspondiente al caso $T = 1 \in D'(\mathbb{R})$, $f = e^{-\frac{1}{x^2}}$, debería coincidir con la distribución $e^{\frac{1}{x^2}}$ en $\mathbb{R} - \{0\}$ y ser de orden finito [ver ( )] en el origen, luego $\left| \int e^{1/x^2} \varphi \right| \leqslant K \|\varphi\|_m$ para cierta constante $K > 0$ y natural m y para toda $\varphi \in D(U)$, $U = (0, 1)$; pero es fácil ver que esto es imposible.

En estas páginas se probará que P_1 tiene solución cuando $f \not\equiv 0$ es analítica real (ver también [4] , [9] y [10]) .

1 . 1 - LEMA :

Sean $f \in \mathcal{E}(U)$, $f \not\equiv 0$, $T \in D'(U)$ con soporte en un compacto Q de U . Si $\exists\, S \in D'(U)$ tal que $fS = T$ entonces $\exists\, S_o \in D'(U)$ con soporte compacto tal que $fS_o = T$.

Demostración

Sea $\alpha \in D'(U)$, $\alpha = 1$ en un entorno de Q ; si $S_o = \alpha S$, $fS_o = \alpha f S = \alpha T = T$.

1 . 2 - PRINCIPIO DE LOCALIZACION :

Sea V una variedad indefinidamente diferenciable y paracompacta. Sea $f \in \mathcal{E}(V)$ tal que cada punto $P \in V$ posee un entorno $U(P)$ tal que P_1 tiene solución para $f|_{U(P)}$ = restricción de f sobre $U(P)$. Entonces P_1 tiene solución para f .

Demostración

Por hipótesis $\exists$ un cubrimiento localmente finito por abiertos relativamente compactos $(U_i)_{i \in I}$ de V tal que P_1 tiene solución para cada $f|U_i$. Utilizando una partición de la unidad subordinada a (U_i) se puede descomponer toda $T \in D'(V)$

como $T = \sum_{i \in I} T_i$, donde soporte $(T_i) \subset U_i$. Sea $S_i \in D'(U_i)$ tal que $(f|U_i) S_i = T_i$, $(i \in I)$; por 2. 1 se puede suponer que sop (S_i) es compacto en U_i , por lo tanto que S_i es una distribución en $D'(V)$. Como la familia sop (S_i) , $i \in I$, es localmente finita, está bien definida la distribución $S = \sum_i S_i$ y se cumple $f S = \sum_i f S_i = \sum_i T_i = T$, c. q. d.

Nota: Según esta demostración se ve que basta suponer que P_1 tiene solución para $f|V(P)$ y para cada T con soporte compacto en $V(P)$.

1 . 3

Sea $f \in \mathcal{E}(U)$ tal que $f \not\equiv 0$ en ningún subabierto. Entonces la posibilidad de la división por f es equivalente a la siguiente propiedad: la aplicación λ : $D(U) \longrightarrow D(U)$, $\lambda(\varphi) = f\varphi$ (que es, por supuesto, inyectiva) tiene inversa continua. Por ejemplo, si la aplicación $q : f D(U) \longrightarrow D(U)$, $q(f\varphi) = \varphi$, es continua, entonces la forma lineal t sobre $f . D(U)$, $t : \psi \longrightarrow T(q(\psi))$ también lo es $(T \in D'(U))$; por el teorema de Hahn - Banach se prueba que t tiene una extensión continua, S , sobre $D(U)$. Pero $f S = T$, ya que $f S(\varphi) = S(f\varphi) = T(q(f\varphi)) = T(\varphi)$. La recíproca no será probada aquí.

1 . 4 - CASO DE UNA VARIABLE.

Siempre es posible dividir por una función $f \in \mathcal{E}(\mathbb{R})$ que tiene ceros aislados y de orden finito. Por la localización del problema de la división basta considerar funciones del tipo $x^n f(x)$, donde $f \neq 0$; todo se reduce entonces a dividir por la función x . Por 1 . 3

basta comprobar la continuidad de la aplicación

$q : x\,D(\mathbb{R}) \longrightarrow D'(\mathbb{R})$, $q(x\varphi) = \varphi$, y esto es consecuencia de la continuidad de la aplicación $\varphi \longrightarrow$

$$\longrightarrow \frac{\varphi(x) - \alpha(x)\varphi(0)}{x} , \text{ con } \alpha \in D \text{ y } \alpha(0) = 1,$$

que extiende a q sobre D . .

2 §. - UN LEMA ALGEBRAICO

Sea A un anillo conmutativo tal que, para cada natural n, el endomorfismo $a \longrightarrow na$ de A sea suryectivo. Sea X un A-módulo. Diremos que $\alpha \in A$ es un divisor de X si el endomorfismo $x \longrightarrow \alpha x$ de X inducido por α es suryectivo.

Indicaremos con $X[\xi_1, \text{———}, \xi_n] = X[\xi]$ el A-módulo de los "polinomios" en las n indeterminadas $\xi_1, \ldots, \xi_n$, con coeficientes en X (*). Para cada $i = 1, \ldots, n$, ∂_i notará al endomorfismo en $X[\xi]$ que es la derivada parcial formal respecto de ξ_i. Por definición, si $x \in X$ y p_j ($j = 1, \ldots, n$) son enteros $\geqslant 0$,

$$\partial i \left[x\, \xi_1^{p_1} \ldots \xi_n^{p_n}\right] = \begin{cases} 0 & \text{si } p_i = 0 \\ p_i\, x\, \xi_1^{p_1} \ldots \xi_i^{p_i - 1} \ldots \xi_n^{p_n} & \text{si } p_i > 0; \end{cases}$$

luego se extiende ∂^i por linealidad sobre los restantes elementos de $X[\xi]$. Las notaciones usuales $\partial_i \partial_j = \partial_i \circ \partial_j$, $\partial_i \partial_i = \partial_i^2$, etc., designarán la composición de endomorfismos; siempre $\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$. $A[[\partial_1, \ldots, \partial_n]] = A[[\partial]]$ indicará el álgebra de las series formales con generadores $\partial_1, \ldots, \partial_n$ y con coeficientes en A. Un monomio $a\, \partial_1^{p_1} \ldots \partial_n^{p_n} = a\, \partial^p$ en

(*) Es decir, $X[\xi]$ es el conjunto de las expresiones formales $\sum_p U_{p_1 \ldots p_n} \xi_1^{p_1} \ldots \xi_n^{p_n}$, donde los $U_p \in X$ y son nulos salvo para un número finito de índices. Se define de la manera habitual la suma de dos polinomios y el producto de un polinomio por un elemento de A.

$A\,[[\partial]]$ de grado $|p| = p_1 + \ldots + p_n$ induce un endomorfismo que es nulo sobre los polinomios de $X\,[\xi]$ de grado menor que $|p|$. Por lo tanto, toda serie en $A\,[[\partial]]$ define un endomorfismo de $X\,[\xi]$, y $X\,[\xi]$ puede ser considerado un $A\,[[\partial]]$ - módulo.

2.1 - LEMA :

> Sea $\gamma = \sum \alpha_p \partial^p \in A\,[[\partial]]$ $(p = (p_1, \ldots, p_n) \in N_o^n)$ tal que $\alpha_{o,\ldots,o,i} = 0$ para todo $i < \ell$ y $\alpha_{o,\ldots,o,\ell}$ es un divisor de X. Entonces γ es un divisor de $X\,[\xi]$ (considerado como $A\,[[\partial]]$ - - módulo).

Demostración

La demostración es por inducción sobre el número n de indeterminadas. Supongamos $n = 1$; se puede escribir $\gamma = \partial^{\ell} \sum_{i \geqslant 0} \alpha_{i+\ell}\, \partial^i$. Como ∂ es suryectivo por la hipótesis sobre A, lo es ∂^{ℓ} y basta probar que $\gamma' = \sum_{i \geqslant 0} \alpha_{i+1}\, \partial^i$ es un divisor de $X\,[\xi_1]$. Dado un polinomio $P \in X\,[\xi_1]$, se busca un $Q \in X\,[\xi_1]$ tal que $\gamma' Q = P$. Procedamos por inducción sobre el grado g de P. Si $g = 0$ la solución es inmediata, ya que α_{ℓ} es divisor de X. Supongamos resuelto el problema para polinomios de grado $g < n$ y sea P un polinomio de grado $g = n$. Se puede escribir $P = P^* + x\,\xi^n$, con grado $(P^*) < n$. Por hipótesis existe un $y \in X$ tal que $\alpha_{\ell}\, y = x$. Busquemos un $Q \in X\,[\xi_1]$ de la forma $Q^* + y\,\xi^n$, con grado $Q^* < n$, tal que $\gamma' Q = P$. Deberá cumplirse

$$\gamma' Q^* + \alpha_{\ell}\, y\, \xi^n + \Big(\sum_{i \geqslant \ell} \alpha_{i+1}\, \partial^i\Big)\, y\, \xi^n = P^* + x\,\xi^n$$

o, teniendo en cuenta que $\alpha_{\ell}\, y = x$

$$\gamma' Q^* = P^* - \Big(\sum_{i \geqslant \ell} \alpha_{i+1}\, \partial^i\Big)$$

Como el segundo miembro es un polinomio de grado $< n$, por la hipótesis inductiva es posible encontrar tal Q^*. Esto demuestra el lema para el caso $n = 1$.

Ahora bien, se define de manera evidente un isomorfismo canónico entre $X[\xi_2, \ldots, \xi_n][\xi_1]$, módulo de polinomios en la indeterminada $[\xi_1]$ a coeficientes en $X[\xi_2, \ldots, \xi_n]$ y el módulo $X[\xi_1, \ldots, \xi_n]$; notaremos con $U^{\cdot}$ a la imagen de $U \in X[\xi_2, \ldots, \xi_n][\xi_1]$ mediante este isomorfismo. Similarmente, notaremos con $\alpha^{\cdot}$ la imagen de $\alpha \in A[[\partial_2, \ldots, \partial_n]][\partial_1]$ mediante el isomorfismo $A[[\partial_2, \ldots, \partial_n]][\partial_1] \longrightarrow A[[\partial_1, \ldots, \partial_n]]$. Se verifica fácilmente que $(\beta v)^{\cdot} = \beta^{\cdot} v^{\cdot}$ para $\beta \in A[[\partial_2, \ldots, \partial_n]][\partial_1]$ y $v \in X[\xi_2, \ldots, \xi_n][\xi_1]$.

Dicho esto, supongamos probado el lema para el caso de $n - 1$ indeterminados. Sea $\gamma = \sum \alpha_p \partial^p$ en las condiciones de la hipótesis y sea $Q \in X[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ un polinomio arbitrario. Sean $v \in X[\xi_2, \ldots, \xi_n][\xi_1]$ y $\beta \in A[\partial_2, \ldots, \partial_n][\partial_1]$ tales que $\dot{v} = Q$ y $\dot{\beta} = \gamma$. Entonces $\beta = \sum_{i \geqslant 0} \beta_i \partial^i$, $\beta_i \in A[[\partial_2, \ldots, \partial_n]]$, y $\beta_o = \sum \alpha_{o, p_2, \ldots, p_n} \partial_2^{p_2} \ldots \partial_n^{p_n}$ cumple las hipótesis del lema para $X = X[[\xi_2 \ldots \xi_n]]$. Por la hipótesis inductiva β_o es entonces un divisor de $X[\xi_2 \ldots \xi_n]$. Utilizando el lema para el caso $n = 1$ se deduce por lo tanto que β es un divisor del $A[[\partial_2 \ldots \partial_n]]$-módulo $X[\xi_2 \ldots \xi_n][\xi_1]$; o sea existe un polinomio $\omega \in X[\xi_2 \ldots \xi_n][\xi_1]$ tal que $\beta\omega = v$. Finalmente $Q = v^{\cdot} = \beta^{\cdot}\omega^{\cdot} = \gamma\dot{\omega}$, y $\omega^{\cdot}$ responde a lo buscado.

3 § . - DIVISION DE UNA DISTRIBUCION CON SOPORTE EN UNA SUBVARIEDAD

Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^k$; notaremos con $\mathcal{H}(\Omega)$ al subconjunto de $\mathcal{E}(\Omega)$ formado por las funciones α que verifican la condición siguiente: para cada $p \in N_0^k$ existen constantes ℓ_p y $M_p > 0$ (que dependen de α) tal que

$$|D^p \alpha(u)| \leq M_p \cdot \rho(u)^{-\ell_p}$$

para todo $u \in \Omega$; aquí $\rho(u)$ indíca la distancia de u a la frontera de Ω . Se comprueba que $\mathcal{H}(\Omega)$ es un anillo. Si una función $\alpha \in \mathcal{H}(\Omega)$ cumple $|\alpha(u)| \geqslant \varepsilon_0 \, \rho(u)^{\ell_0}$ para todo $u \in \Omega$, donde ε_0 y l_0 son constantes > 0 , entonces $1/\alpha \in \mathcal{H}(\Omega)$ y α es una unidad del anillo $\mathcal{H}(\Omega)$.

Con $\mathcal{P}'(\Omega)$ indicaremos al subconjunto de las distribuciones de $\mathcal{D}'(\Omega)$ que son prolongables sobre $\mathbb{R}^k$. Se verifica que, si $T \in \mathcal{P}'(\Omega)$ y $\alpha \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces $\alpha T \in \mathcal{P}'(\Omega)$; por lo tanto $\mathcal{P}'(\Omega)$ es un $\mathcal{H}(\Omega)$ - módulo.

Sea ahora $\eta : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ una aplicación $\eta = (\eta_{k+1}, \ldots, \eta_n)$ donde las η_{k+1} (i = 1, ..., n - k) son funciones acotadas de $\mathcal{H}(\Omega)$. El subconjunto $\Gamma = \{(u, v) : v = \eta(u) , \ u \in \Omega\}$ de $\mathbb{R}^n$ es una subvariedad $\mathcal{E}^{\infty}$ de $\Omega \times \mathbb{R}^{n-k}$. Sea Q un intervalo abierto y acotado de $\mathbb{R}^{n-k}$ tal que $\overline{\eta(\Omega)} \subset Q$. Designaremos con $\mathcal{P}^*$ al conjunto de las distribuciones de $\mathcal{P}'(\Omega \times Q)$ con soporte en Γ .

Para toda $U \in \mathcal{D}'(\Omega)$ la fórmula $(\tilde{U}, \varphi(u, v)) = (U, \varphi(u, \eta(u)))$ define una distribución $\tilde{U} \in \mathcal{D}'(\Omega \times \mathbb{R}^{n-k})$; se comprueba que $\tilde{U} \in \mathcal{P}'(\Omega \times Q)$ si $U \in \mathcal{P}'(\Omega)$. Además, si W es un abierto que contiene a Γ y $\alpha \in \mathcal{E}(W)$, entonces $\alpha \tilde{U} = \beta U$, donde $\beta(u) = \alpha(u, \eta(u))$ y el producto $\alpha \tilde{U}$ se considera definido en $\Omega \times \mathbb{R}^{n-k}$ ($\alpha \tilde{U}$ nulo en $\Omega \times \mathbb{R}^{n-k} - \Gamma$) .

Notaremos con $\mathcal{P}^{**}$ el $\mathcal{H}(\Omega)$ - módulo de los polinomios en las ξ_{n-k} indeterminadas $\xi_{n-k+1}, \ldots, \xi_n$ con coeficientes en $\mathcal{P}'_{\Omega}$. Sea $i : \mathcal{P}^{**} \longrightarrow \mathcal{P}^*$ la aplicación que transforma el polinomio $\sum_q U_q \xi^q$ en la distribución $\sum_q D_v^q \tilde{U}_q$ (1) . De manera análoga a [9] , Cap. 3 , par. 10 , se prueba que la aplicación i es biyectiva.

3.1 - PROPOSICION :

Sea $\phi \in \mathcal{H}(\Omega \times Q)$; supongamos que exista un entero $\ell > 0$ tal que para todo $i < \ell$ $\frac{\partial^i \phi}{\partial x_n^i}(u, \eta(u)) = 0$, $u \in \Omega$, y que $\left| \frac{\partial^\ell \phi}{\partial x_n^l}(u, \eta(u)) \right| \geqslant \varepsilon_o \, \rho(u)^{\ell_o}$, $u \in \Omega$, para un par $\varepsilon_o , \ell_o > 0$. Entonces la aplicación $\beta_\phi : \mathcal{P}^* \ni T \longrightarrow \phi T \in \mathcal{P}^*$ es suryectiva.

Demostración

Para cada $u \in \Omega$, sea $\phi \sim \sum_q \phi_q(u) (\eta(u) - v)^q$ el desarrollo de Taylor de la función $v \longrightarrow \phi(u, v)$ en el punto $v = \eta(u)$; se comprueba que $\phi_q \in \mathcal{H}(\Omega)$ para cada $q \in N_o^{n-k}$ y que cada suma finita de $\sum \phi_q(u)(\eta(u) - v)^q$ pertence también a $\mathcal{H}(\Omega \times Q)$.

De acuerdo con lo dicho en 2 § , la serie formal $\gamma\phi = \sum \phi_q \partial^q \in \mathcal{H}(\Omega)\, [[\partial_{n-k+1}, \ldots, \partial_n]]$ define un endomorfismo del módulo $\mathcal{P}^{**}$. Por hipótesis, $\phi_{o,\ldots,o,i} = 0$ para $i < \ell$ y $\phi_{o,\ldots,o,\ell}$ es una unidad en $\mathcal{H}(\Omega)$. Entonces, por el lema algebraico de 3 § , $\gamma\phi$ es una suryección. La proposición quedará demostrada si se prueba la conmutatividad del diagrama

(1) $D_v^q = \dfrac{\partial^{|q|}}{\partial x_{n-k+1}^{q_2} \cdots\cdots \partial x_n^{q_{n-k}}}$

$$(3.2) \qquad \begin{array}{ccc} \wp^* & \xrightarrow{\ \beta_\phi\ } & \wp^* \\ {\scriptstyle i}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle i} \\ \wp & \xrightarrow[\ \gamma_\phi\ ]{} & \wp^{**} \end{array}$$

o sea, $\beta_\phi \circ i = i \circ \gamma_\phi$.

a) 3.2 conmuta si $\phi(u,v) = \Psi(u)$, función de la variable u solamente: en este caso $\gamma_\Psi = \Psi$, luego $i \circ \gamma_\Psi (\sum U_q \xi^q) = i(\sum \Psi U_q \xi^q) =$
$= \sum_q D_v^q (\widetilde{\Psi U_q}) = \Psi \sum_q D_v^q \tilde{U}_q = \Psi \cdot i(\sum U_q \xi^q) = \beta_\Psi \circ i(\sum U_q \xi^q)$.

b) 3.2 conmuta si $\phi(u,v) = \eta_\ell(u) - v_\ell$; aquí $\gamma_\phi = \partial_\ell$,
$i \circ \gamma_\phi (\sum U_q \xi^q) = \sum_q q_\ell D_v^{(\dots, q_\ell - 1, \dots)} \tilde{U}_q$ y $\beta_\phi \circ i(\sum U_q \xi^q) =$
$= (\eta_\ell(u) - v_\ell) \sum_q D_v^q \tilde{U}_q$; como para cada $U_q \in \wp'_\Omega$ se cumple
$(\eta_\ell(u) - v_\ell) D_v^q \tilde{U} = q_\ell \cdot D_v^{(\dots, q_\ell - 1, \dots)} \tilde{U}$, se concluye $\beta_\phi \circ i = i \circ \gamma_\phi$.

c) Para cada par ϕ , $\psi \in \mathcal{H}(\Omega \times Q)$ se verifica $\beta_{\phi\psi} = \beta_\phi \circ \beta_\psi$,
$\beta_{\phi+\psi} = \beta_\phi + \beta_\psi$, $\gamma_{\phi\psi} = \gamma_\phi \circ \gamma_\psi$, $\gamma_{\phi+\psi} = \gamma_\phi + \gamma_\psi$.

Sea ahora $\phi \in \mathcal{H}(\Omega \times Q)$ y $P = \sum_{|q| \leq m} U^q \xi^q \in \wp^{**}$ un polinomio de grado $\leq m$. Siempre puede escribirse $\phi = \phi_1 + \phi_2$, donde $\phi_2 = (\eta(u) - v)^{m+1} \cdot \phi_3$, $\phi_3 \in \mathcal{H}(\Omega \times Q)$ y ϕ_1 es suma de un número finito de términos del desarrollo de Taylor de ϕ . Por a) , b) y c) $\beta_{\phi_1} \circ i = i \circ \gamma_{\phi_1}$, y es fácil ver que $\gamma_{\phi_2}(P) = 0$ y $\beta_{\phi_2}(i(P)) = 0$. Finalmente $i \circ \gamma_\phi (P) = i \circ \gamma_{\phi_1 + \phi_2}(P) = i \circ \gamma_{\phi_1}(P) = \beta_{\phi_1} \circ i(P) = \beta_{\phi_1 + \phi_2}(i(P)) = \beta_\phi \circ i(P)$, lo que demuestra la conmutatividad de 3.2 para un elemento arbitrario $P \in \wp^{**}$. Esto concluye la demostración de la proposición.

4 §. - DIVISION DE UNA DISTRIBUCION POR UNA FUNCION INDEFINIDAMENTE DERIVABLE

4.1 - PROPOSICION :

Hip) Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $\phi \in \mathcal{E}(\Omega)$. Supongamos que exista una partición $\Omega = \bigcup_{0}^{n} V^k$ disjunta de Ω tal que, para cada $k = 0, \ldots, n$, $V^k = \bigcup_{\pi} \Gamma_{\pi}^{k}$ sea una unión finita y disjunta que verifica

$$(4.2) \qquad \Omega \cap (\bar{\Gamma}_{\pi}^{k} - \Gamma_{\pi}^{k}) \subset \bigcup_{j < k} V^j$$

para cada π. Supongamos que:

I - Dos conjuntos cualesquiera A_1 y A_2, uniones de alguna subfamilia de $\left\{\bar{\Gamma}_{\pi}^{k}\right\}_{k,\pi}$ o de $B = \bar{\Omega} - \Omega$, satisfacen siempre la condición siguiente: para toda distribución T con soporte $\mathrm{sop}(T) \subset A_1 \cup A_2$, existe una descomposición $T = T_1 + T_2$, con $\mathrm{sop}(T_i) \subset A_i$, $i = 1, 2$.

II - Para toda distribución T con soporte en $\bar{\Gamma}_{\pi}^{k}$ existe una distribución S con soporte en $\bar{\Gamma}_{\pi}^{k}$ tal que $\phi S = T$ en un entorno de cada punto de Γ_{π}^{k}.

Tesis) Para toda $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ existe una $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$

tal que $\phi S = T$.

Demostración

Como toda $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ puede prolongarse mediante una distribución nula en $\mathbb{R}^q - \bar{\Omega}$, basta demostrar que para toda distribución T con soporte en $\bar{\Omega}$ existe una S con soporte en $\bar{\Omega}$ tal que $\phi S = T$ en Ω . Probemos por inducción sobre k $(k = 0, \ldots, n)$ que esto se cumple para toda distribución T con soporte incluido en $B \cup (\bigcup_{i=0}^{k} V^i)$. Por I tal distribución T admite una descomposición $T = \sum_{\varkappa, j \leqslant k} T^j_\varkappa + R$, donde $\operatorname{sop}(T^j_\varkappa) \subset \bar{\Gamma}^j_\varkappa$ y $\operatorname{sop}(R) \subset B$. Por II existen distribuciones $S^j_\varkappa$ con soporte en $\bar{\Gamma}^j_\varkappa$ tales que $\phi S^j_\varkappa = T^j_\varkappa$ en cada punto de $\Gamma^j_\varkappa$, $j \leqslant k$, $\varkappa = \ldots$. Entonces $S = \sum_{\varkappa, j \leqslant k} S^j_\varkappa$ satisface $\phi S = T$ en cada punto de $\Omega - (\bigcup(\bar{\Gamma}^j_\varkappa - \Gamma^j_\varkappa))$, luego $\operatorname{sop}(\phi S - T) \subset \bigcup_{j, \varkappa} (\bar{\Gamma}^j_\varkappa - \Gamma^j_\varkappa) \subset \bigcup_0^{k-1} V^i$ (por S. 2) . Por lo tanto el soporte de $\phi S - T$ es vacío si $k = 0$, lo que prueba el primer paso de la demostración por inducción. Si $k > 0$, por la hipótesis inductiva se puede encontrar una S^* con soporte en $\bar{\Omega}$ tal que $\phi S^* = \phi S - T$ y se obtiene $\phi(S + S^*) = T$, como se buscaba.

4 . 3

Mencionemos condiciones suficientes para la validez de las hipótesis de 4 . 1 . Supongamos que $\Omega = \bigcup_0^n V^k$, $V^k = \bigcup_\varkappa \Gamma^k_\varkappa$ verifica 4 . 2 ; se puede demostrar que I es válida si para los conjuntos A_1 y A_2 en cuestión se cumple:

a) $A_1 \cap A_2 = \phi$ ó $\max(\rho(x, A_1), \rho(x, A_2)) \geqslant c \cdot \rho(x, A_1 \cap A_2)^N$, donde $c, N > 0$. (ver [7]) .

Sea ahora $\phi \in \mathcal{H}(\Omega)$; II es satisfecha para el caso $k = n$ si, para cada $\varkappa$, $|\phi(x)| \geqslant c \cdot \rho(x, -\Gamma^\varkappa)^N$ para todo $x \in \Gamma^\varkappa$ $(c, N > 0)$. En efecto, entonces $\phi / \Gamma^\varkappa$ es inversible en $\mathcal{H}(\Gamma^\varkappa)$ y , si T es una distribución con soporte en $\bar{\Gamma}^\varkappa$, $T/\Gamma^\varkappa \in \mathcal{D}'(\Gamma^\varkappa)$; entonces $(\phi / \Gamma^\varkappa)^{-1} \cdot (T/\Gamma^\varkappa) \in \mathcal{D}'_{\Gamma^n}$ se extien de a una distribución con soporte en $\overline{\Gamma}^n_{\varkappa}$ que satisface II .

Resumiendo, es suficiente para la validez de II , en el caso $k = n$, que se cumplan b) y c) :

b) $Z = \left\{x \in Q : \phi(x) = 0\right\} \subset \bigcup_{0}^{n-1} V^k$

c) $|\phi(x)| \geqslant c\, \rho(x, Z \cup B)^N \quad (c, N > 0)$.

Para obtener II en los casos $k < n$ es preciso usar la Prop. 3.1 . Supongamos que :

d) Para cada par $(k, \varkappa)$, $\Gamma^k_{\varkappa} = (u, v) : v = \left\{ {}^{\varkappa}\eta^k(u) \ , \ u \in \Omega^k_{\varkappa} \right\}$ donde $\Omega^k_{\varkappa} \subset \mathbb{R}^k$ es abierto, ${}^{\varkappa}\eta^k = ({}^{\varkappa}\eta^k_{k+1}, \ldots, {}^{\varkappa}\eta^k_n)$ y las ${}^{\varkappa}\eta^k_j \in$ $\in \mathcal{H}(\Omega^k_n)$ son acotadas.

e) Para cada par $(k, \varkappa)$, $k > 0$, existe un natural $\ell^k_{\varkappa} > 0$ tal que, para todo $u \in \Omega^k_{\varkappa}$,

$$\left| \frac{\partial^i \phi}{\partial x^i_n}(u, \eta^k(u)) \right| \begin{cases} = 0 & \text{si } i < \ell^k_{\varkappa} \\ > \varepsilon_0\, \rho(u, -\Omega^k_{\varkappa})^{\ell_0} & \text{si } i = \ell^k_{\varkappa} \end{cases}$$

si $k = 0$, para cada $\varkappa$ existe un $j_{\varkappa}$ tal que $\frac{\partial^{j_{\varkappa}} \phi}{\partial x_n^{j_{\varkappa}}}(P_{\varkappa}) \neq 0$, donde $\left\{P_{\varkappa}\right\} = \Gamma^0_{\varkappa}$.

f) Si $Q = P_k \times Q_k$, donde P_k y Q_k son intervalos en $\mathbb{R}^k$ y $\mathbb{R}^{n-k}$, respectivamente, entonces $\overline{{}^{\varkappa}\eta^k(\Omega^k_{\varkappa})} \subset Q_k$ para cada par $\varkappa$, k .

g) Para cada $\varkappa$ y k el par $\overline{\Gamma}^k_{\varkappa}$ y $B^k_{\varkappa} = \overline{\Omega^k_{\varkappa} \times Q_k} - \Omega^k_{\varkappa} \times Q_k$ satisface la desigualdad de a) .

Entonces, por d) , e) y 3.1 la condición II se satisface si $k = 0$. Supongamos ahora que $0 < k < n$. Según 3.1 existe una $S' \in \mathcal{D}'(\Omega^k_{\varkappa} \times Q_k)$ tal que $\phi S' = T$ en $\Omega^k_{\varkappa} \times Q_k$ y soporte $(S') \subset \Gamma^k_{\varkappa}$; sea $\tilde{S}$ una extensión de

S' sobre $\mathbb{R}^n$ tal que soporte $(\tilde{S}) \subset \bar{\Gamma}^k_\varkappa \cup B^k_\varkappa$. Por g) existe una descomposición $\bar{S} = S + S_1$, donde soporte $(S) \subset \bar{\Gamma}^k_\varkappa$ y soporte $(S_1) \subset B_k$; consecuentemente $S = \bar{S}$ en $\Omega^k_\varkappa \times Q_k$. Pero entonces $\phi S = T$ en $\Gamma^k_\varkappa$ y la condición II es satisfecha.

En resumen hemos probado que, si Q es un intervalo acotado de $\mathbb{R}^n$ y $\phi \in \mathcal{H}(Q)$, entonces la aplicación $\mathcal{P}'(Q) \ni S \longrightarrow \phi S \in \mathcal{P}'(Q)$ es suryectiva cuando existe una descomposición de Q como la definida en 4.1 que satisface las condiciones a) - g).

De la Teoría de conjuntos semianalíticos se deducirá que si una función ϕ es analítica en un entorno de un punto x, siempre puede encontrarse un intervalo Q y una descomposición de Q que satisfaga las condiciones mencionadas. Por lo tanto hemos obtenido el siguiente teorema :

4.4 - TEOREMA :

Sea $\phi \not\equiv 0$ una función analítica real definida en un abierto conexo G de $\mathbb{R}^n$. Entonces la aplicación $\mathcal{D}'(G) \ni S \longrightarrow \phi S \in \mathcal{D}'(G)$ es suryectiva.

B . - TRIANGULACION DE CONJUNTOS SEMIANALITICOS

5 § . - CONJUNTOS SEMIANALITICOS

5 . 1 - DEFINICION :

Sea M una variedad analítica real y A un subconjunto de M . Se dice que A es semianalítico si cada punto de M posee un entorno U tal que A es descripto en U mediante un número finito de funciones analíticas en U . Se dice que las funciones $f_1 , \ldots , f_n$ definidas sobre U describen a A en U si $A \cap U$ es unión finita de (algunas) intersecciones finitas de conjuntos de la forma $\{x \in U : f_j > 0\}$ ó $\{x \in U : f_j = 0\}$, $j = 1 , \ldots , n$.

Una definición equivalente es la siguiente:

5 . 1'- DEFINICION (*) :

Para cada $x \in M$ sea $\mathcal{G}(x)$ la familia de los gérmenes de conjunto en x y sea $\mathcal{T}(x) \subset \mathcal{G}(x)$ la menor familia tal que (1) α y $\beta \in \mathcal{T}(x) \Longrightarrow$ $\Longrightarrow \alpha \cup \beta \in \mathcal{T}(x)$ y $\alpha - \beta \in \mathcal{T}(x)$; (2) $\mathcal{T}(x)$ contiene todos los gérmenes definidos en x por conjuntos del tipo $\{f > 0\}$, donde f es analítica en un entorno de x . Entonces se dice que un subconjunto A de

(*) Ver [8] .

M es semianalítico si para cada $x \in M$ el germen de A en x pertenece a $\mathcal{J}(x)$.

La unión y la intersección de una familia localmente finita de conjuntos semianalíticos es semianalítica. El complemento de un conjunto semianalítico es semianalítico. Un subconjunto de una subvariedad cerrada M_1 de M es semianalítico en M_1 si y sólo si es semianalítico en M . La imagen de un conjunto semianalítico por un isomorfismo analítico es semianalítica.

5 . 2

Sea $a \in M$. Un sistema normal en a es un par formado por un sistema de coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ de M centrado en a y un sistema de pseudopolinomios distinguidos reales $(H_\ell^k(x_1, \ldots, x_k ; x_\ell))_{0 \leq k < \ell \leq n}$ con discriminantes $D_\ell^k(x_1, \ldots, x_k) \not\equiv 0$, tales que en algún entorno complejo de $a = (0, \ldots, 0)$ se verifica :

a) $H_k^{k-1}(z_1, \ldots, z_{k-1} ; z_k) = H_\ell^k(z_1, \ldots, z_k ; z_\ell) = 0 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow H_\ell^{k-1}(z_1, \ldots, z_{k-1} ; z_\ell) = 0$.

b) $D_\ell^k(z_1, \ldots, z_k) = 0 \Longrightarrow H_k^{k-1}(z_1, \ldots, z_{k-1} ; z_k) = 0$

$(1 \leq k < \ell \leq n)$.

Se dice que un entorno $Q = (|x_i| < \delta_i,\ i = 1, \ldots, n)$ de a es normal (respecto del sistema normal dado) si cada H_ℓ^k es holomorfo en $\tilde{Q} = (|z_i| \leq \delta_i)$, si a) y b) se verifican en $\tilde{Q}$ y si $|z_i| < \delta_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ y $H_\ell^k(z_1, \ldots, z_k ; z_\ell) = 0 \Longrightarrow |z_\ell| < \delta_\ell$ $(\ell > k)$; se prueba que todo entorno de a contiene un entorno normal.

Una descomposición normal en a (de un entorno normal Q , respecto de un sistema normal) es una descomposición

$$Q = \bigcup_{k=0}^{n} \bigcup_{\varkappa} \Gamma_{\varkappa}^{k}$$

donde los $\Gamma_{\varkappa}^{k}$ son las componentes conexas de $V^k = (x \in Q : H_n^{n-1} = \ldots = H_{k+1}^{k} = 0,$ $H_k^{k-1} \neq 0$); aquí convenimos $\overset{o}{H}_{-1} = 1$. Los conjuntos $\Gamma_{\varkappa}^{k}$ se llaman miembros de la descomposición. Las siguientes son algunas propiedades de las descomposiciones normales, respecto de un sistema normal fijo:

1. Toda descomposición normal es finita. Si el entorno normal Q es suficientemente pequeño, para todo entorno normal $\widetilde{Q} \subset Q$ se verifica $\widetilde{\Gamma}_{\varkappa}^{k} = \Gamma_{\varkappa}^{k} \cap \widetilde{Q}$, donde los $\Gamma_{\varkappa}^{k}$ y $\widetilde{\Gamma}_{\varkappa}^{k}$ son los miembros de las descomposiciones de Q y $\widetilde{Q}$, respectivamente.

2. Todo conjunto $(\overline{\Gamma}_{\varkappa}^{k} - \Gamma_{\varkappa}^{k}) \cap Q$ es unión de algunos $\Gamma_{\varkappa}^{j}$ con $j < k$.

Consideremos ahora a $Q = (|x_i| < \delta_i)$ como subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

3. Sea $0 < m < n$ y $\Pi : (x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow (x_1, \ldots, x_m)$ la proyección Entonces el par $((x_i : i = 1, \ldots, m), (H_{\ell}^{k} : 0 \leq k < 1 \leq m))$ es un sistema normal, y $Q* = (|x_i| < \delta_i, i = 1, \ldots, m)$ es un entorno normal; si $Q* = \bigcup_{j=0}^{m} \bigcup_{i} \Gamma_{*i}^{j}$ es la descomposición normal correspondiente, se verifica:

   a) si $k \leq m$, para todo $\varkappa$ existe $\varkappa'$ tal que $\Pi(\Gamma_{\varkappa}^{k}) = \Gamma_{*\varkappa'}^{k}$; si $\Gamma_{*i}^{j} \subset \overline{\Pi(\Gamma_{\varkappa}^{k})}$, entonces $\Gamma_{*i}^{j} = \Pi(\Gamma_{i'}^{j})$ para algún $\Gamma_{i'}^{j} \subset \overline{\Gamma_{\varkappa}^{k}}$.

   b) si $k > m$, cada $\Pi(\Gamma_{\varkappa}^{k})$ es unión de algunos Γ_{*i}^{j}

4. Todo $\Gamma_{\varkappa}^{k}$ con $k < n$ es el gráfico de una aplicación analítica $\eta = {}_{\varkappa}^{k}\eta$:

$$\Omega_{\varkappa}^{k} \ni u = (x_1, \ldots, x_k) \longrightarrow \eta(u) = (\eta_{k+1}(u), \ldots, \eta_n(u))$$

tal que $H_{\ell}^{k}(u, \eta_{\ell}(u)) = 0$ y $D_{\ell}^{k}(u) \neq 0$ $(u \in \Omega_n^k,\ 0 < k < \ell \leq n)$.

Cada Ω_n^k es abierto en $\mathbb{R}^k$; cada $\Gamma_{\varkappa}^{n}$ es abierto en $\mathbb{R}^n$; $\Gamma_{\varkappa}^{o}$ es el origen $O \in \mathbb{R}^n$. Además, para cada $k, \varkappa$, $O \in \overline{\Omega_{\varkappa}^{k}}$ y $\lim_{u \to 0} \eta_{\ell}(u) = 0$ para cada ℓ $(0 < \ell \leq n)$.

5. Sea Z la unión de alguna subfamilia de (Γ_i^j); sea $0 \leq k \leq n$. Entonces el conjunto de los puntos de Z en un entorno de los cuales Z es el gráfico de una aplicación analítica $u = (x_1, \ldots, x_k) \longrightarrow (\overline{\eta}_{k+1}(u), \ldots, \overline{\eta}_n(u))$, es unión de algunos Γ_i^j.

6. **Sea** $x \in \Gamma_i^j \subset \Gamma_{\varkappa}^k$ **; sea** σ **una subvariedad de clase** $\mathscr{C}^1$ **, de dimensión** $n - j$ **, transversal a** Γ_i^j **en x (o sea, los espacios tangentes a** Γ_i^j **y a** σ **en x. tienen en comun solamente el vector nulo) . Entonces** $\sigma \cap \Gamma_{\varkappa}^k \neq \emptyset$

5\. 3

Una descomposición normal (de un entorno normal Q de a) se dice compatible con un subconjunto A de M , si para todo miembro $\Gamma_{\varkappa}^j$ de la descomposición se verifica $\Gamma_{\varkappa}^j \subset A$ ó $\Gamma_{\varkappa}^j \subset M - A$; la descomposición es compatible con una función f definida en algún entorno de a , si lo es respecto del conjunto de ceros de f , es decir, si $f \equiv 0$ ó $f \not\equiv 0$ en cada $\Gamma_{\varkappa}^j$.

5\. 3. 1 - TEOREMA :

Sea $a \in M$ y sean $A_1, \ldots, A_p$ conjuntos semianalíticos de M. Entonces existe una descomposición normal en a compatible con cada A_i. En particular, existe una descomposición normal compatible con funciones analíticas $(f_i)_{i=1,\ldots,p}$ definidas en un entorno de a.

Supongamos que M es un espacio vectorial real de dimensión n y que $a = 0$. Entonces se puede elegir de la siguiente manera una base $(e_i)_{i=1}^n$ de M que defina un sistema coordenado (afin) para el cual exista la última descomposición normal mencionada:

a) e_n es arbitrario, siempre que $f_i(t\, e_n) \not\equiv 0$ en un entorno de $t = 0$, para $i = 1, \ldots, p$.

b) supuestos elegidos $e_n, \ldots, e_{k+1}$, de manera lícita, entonces, para todo subespacio N de dimensión k de M tal que $N \cap (\sum_{k+1}^{n} \mathbb{R}\, e_j) = 0$, e_k puede elegirse arbitrariamente de un subconjunto abierto y denso de N. (*)

(*) Vale la misma propiedad respecto de las funciones que definen una familia prefijada de conjuntos semianalíticos de M.

Sea ahora (Γ^k_{π}) una descomposición normal en a . Se llama refinamiento de (Γ^k_{π}) a toda descomposición normal en a compatible con cada Γ^k_{π}.

5. 3. 2. TEOREMA

Dada una familia finita de descomposiciones normales en a y una familia finita de funciones f_i analíticas en un entorno de a (resp. una familia finita de conjuntos A_i, semianalíticos de M), existe un refinamiento común a esas descomposiciones compatible con cada f_i (resp., con cada conjunto A_i).

5. 4. 1. Para que un conjunto $A \subset M$ sea semianalítico es necesario y suficiente que en cada punto $x \in M$ exista una descomposición normal compatible con A.

5. 4. 2. La clausura de un conjunto semianalítico es semianalítica (por consiguiente, son también semianalíticos la frontera y el interior de un conjunto semianalítico)

5. 4. 3. Toda componente conexa de un conjunto semianalítico es semianalítica.

5. 4. 4. Sea Z semianalítico y $Y \subset Z$; sea Y_0 el interior y Y_1 la clausura de Y en Z . Entonces Y es semianalítico si y solo si $Y_1 - Y$ y $Y - Y_0$ son semianalíticos.

5. 5. DIMENSION

Un punto x de un conjunto semianalítico A se dice k-dimensionalmente regular (en breve, k-regular) si existe un entorno U de x tal que $U \cap A$ es una subvariedad analítica de M de dimensión k.

5. 5. 1. El conjunto de los puntos k-regulares de un conjunto semianalítico es semianalítico.

5. 5. 2. DEFINICION:

Se llama dimensión de un conjunto semianalítico $A \subset$ variedad conexa M al máximo de las dimensiones de los puntos regulares de A.

Se verifica que para entornos U suficientnmente pequeños de un punto $x \in A$, $\dim (A \cap U) = \dim_x A$ no depende de U. Entonces se tiene $\dim A = \max_{x \in A} \dim_x A$.

5. 5. 3. Si (Γ_i^j) es una discomposición en a compatible con un conjunto semianalítico A, se verifica: $\dim_a A = \max \left\{ j : \Gamma_i^j \subset A \text{ para algún } i \right\}$.

5. 5. 4. Si A es semianalítico, $k = \dim A$ y $A_0 = \{x : x$ es un punto k - regular de $A\}$, entonces $\dim(\overline{A} - A_0) < k$.

5. 5. 5. Las dos proposiciones siguientes son equivalentes: (a) A es semianalítico y $\dim A \leq k$; (b) para todo $x \in M$ existe un entorno U de x y un conjunto E analítico en U, de dimensión k, tal que $A \cap U \subset E$ y que, si A_1 y A_0 son la clausura y el interior de $A \cap U$ en E, entonces $A_1 - A$ y $A - A_0$ son conjuntos semianalíticos en U, de dimensión $\leq k - 1$.

5. 6. TEOREMAS DE PROYECCION.

5. 6. 1. Sean M y N variedades analíticas reales y $g : M \longrightarrow N$ una aplicación analítica. Sea $A \subset M$ semianalítico y tal que $g/_{\overline{A}}$ es propia. Si $\dim A \leq 1$ ó $\dim N \leq 2$, entonces g (A) es semianalítico.

5. 6. 2. Si $S_1 = \{x \subset \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$, existe un conjunto analítico en $S_1^4 = S_1 \times S_1 \times S_1 \times S_1$ cuya proyección en S_1^3 no es semianalítica.

5. 6. 3. un subconjunto semianalítico $A \subset M \times \mathbb{R}^k$ es llamado parcialmente semialgebráico (respecto de $x_1, \ldots, x_k$) si para todo $x \in M$ existe un entorno U de x tal que en $U \times \mathbb{R}^k$ A es descripto mediante un número finito de funciones analíticas

$f_i(u, x_1, \ldots, x_k)$ que son polinomios en $x_1, \ldots, x_k$. (*)

Toda componente conexa de un conjunto parcialmente semialgebraico es parcialmente semialgebraica. La unión de una familia de conjuntos parcialmente semialgebraicos es parcialmente semialgebraica si la familia de las proyecciones sobre M es localmente finita.

5. 6. 4. TEOREMA (GENERALIZADO) DE SEIDEMBERG: (**)

Sea $0 \leq \ell < k$ y $\Pi: M \times \mathbb{R}^k \ni (u, x_1, \ldots, x_k) \longrightarrow (u, x_1, \ldots, x_\ell) \in M \times \mathbb{R}^\ell$.

si $A \subset M \times \mathbb{R}^k$ es parcialmente semialgebraico respecto de $x_1, \ldots, x_k$, entonces también lo es $\Pi(A)$ respecto de $x_1, \ldots, x_\ell$.

5. 6. 5. Sea A semianalítico y acotado en un espacio vectorial real M de dimensión n. Entonces para todo subespacio L de dimensión k de un conjunto denso de la grassmaniana, y para todo subespacio N de dimensión $n-k$ tal que $N \cap L = 0$, la imagen de A por la proyección $N \oplus L \longrightarrow L$ es semianalítica.

5. 7. PROPIEDADES METRICAS.

Sea $M = \mathbb{R}^n$.

5. 7. 1. Dados dos conjuntos semianalíticos compactos A y B, para todo $r > 0$ existen constantes d_r y $N_r > 0$ tales que

$$\max [\rho(x, A), \rho(x, B)] \geqslant d_r \, \rho(x, A \cap B)^{N_r}$$

si $|x| \leqslant r$.

5. 7. 2. Si f es analítica en un entorno del conjunto semianalítico compacto A, entonces

$$|f(x)| \geqslant d \,.\, \rho(x, A \cap Z)^N, \quad \text{para todo } x \in A,$$

donde $Z = \{x : f(X) = 0\}$ y d, N son constantes > 0.

(*) Un subconjunto A de un espacio afín Λ es semialgebraico si puede ser descripto por un conjunto finito de polinomios en Λ.

(**) Ver [11]

5. 7. 3. Sea A semianalítico y compacto; sean φ, ψ : $A \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas con gráfico semianalítico (en $\mathbb{R}^{n+1}$)

Si $\varphi(x) = 0 \Rightarrow \psi(x) = 0$ para todo $x \in A$, entonces existen $d > 0$ y $N > 0$ tales que

$$|\varphi(x)| \geqslant d\,|\psi(x)|^N \quad , x \in A.$$

5. 7. 4. Sea A semianalítico. Si A es abierto (respectivamente cerrado) todo $x \in M$ posee un entorno $U(x)$ tal que $A \cap U = \bigcup_i \bigcap_j (f_{ij} > 0)$ (respectivamente $\bigcup_i \bigcap_j (f_{ij} \geqslant 0)$), donde las f_{ij} son analíticas en U (esta propiedad no es métrica, pero para su demostración se utilizan las propiedades métricas).

5. 8. DIVISION POR UNA FUNCION ANALITICA

Sea a ora $\phi \not\equiv O$ una función analítica en un entorno del origen O de $\mathbb{R}^n$. Construiremos una descomposición normal en O que satisfaga las condiciones 4. 3 (a) —— (g).

Siempre existe un sistema coordenado $(x_1, \ldots, x_n)$ tal que $\phi(0, x_n) \not\equiv 0$, y por lo tanto existe un entero $p > 0$ tal que $\dfrac{\partial^p \phi}{\partial x_n^p} \neq 0$ en un entorno U de O.

El teorema 5. 3. nos proporciona (salvo una eventual transformación de las coordenadas $(x_1, \ldots, x_{n-1})$) un entorno $Q = \{|x_i| < \delta_i\}$, $\bar{Q} \subset U$, y una descomposición $Q = \bigcup_i \bigcup_j \Gamma_i^j$ compatible con $\varphi, \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n}, \ldots, \dfrac{\partial^p \varphi}{\partial x_n^p}$

Entonces 4. 3. (a) y (g) se deducen de 5. 7. 1. , 4. 3. (b) y (c) se deducen de la compatibilidad y de 5. 7. 2, 4. 3. (f) se obtiene modificando convevientemente Q. En cuanto a 5. 3 (d), $\eta = {}^{\pi}\eta_\ell^k$ satisface $H_\ell^k(u, \eta(u)) = 0$ en $\Omega = \Omega_n^k$ y $D_\ell^k \neq 0$ en Ω ; por 5. 7. 2. resulta $|D_\ell^k(u)| \geqslant \varepsilon\, \rho(u - \Omega)^\ell$. Además de $D_\ell^k(u) = \prod_i \dfrac{\partial H_\ell^k}{\partial x_\ell}(u, \eta^i)$, donde $\eta^i = \eta^i(u)$ son las raíces de H_ℓ^k en u, se obtiene $\left|\dfrac{\partial H_\ell^k}{\partial x_\ell}(u, \eta(u))\right| \geqslant \bar{\varepsilon} \cdot \varphi(u)^\ell$, De estas desigualdades resultan aquellas que prueban $\eta \in \mathcal{H}(\Omega)$. Para obtener 4. 3 (e) observemos que, por la compatibilidad, para cada $\Gamma^k_{\varkappa}$ se cumple $\dfrac{\partial^i \phi}{\partial x_n^i} = 0$ en $\Gamma^k_{\varkappa}$ $(i = 0 , \ldots , \ell^k_{\varkappa} - 1)$ y $\dfrac{\partial^{\ell^k_{\varkappa}} \phi}{\partial x_n^{\ell^k_{\varkappa}}} \neq 0$ en $\Gamma^k_{\varkappa}$; finalmente, la desigualdad respecto de esta última derivada se deduce de 5 . 7 . 2 .

6 § . - TRIANGULACION

6 . 1 - PRELIMINARES

Sea M un espacio afín real de dimensión finita. Se llama simple abierto en M a un conjunto de la forma $c_o \ldots c_k = \left\{ \sum_{i=0}^{k} t_i c_i : \sum_{0}^{k} t_i = 1 , t_i > 0 \right\}$, donde $c_1 , \ldots , c_k$ es un sistema independiente de puntos de M ; las caras de $c_o \ldots$ $\ldots c_k$ son los simples $c_{\gamma_o} \ldots c_{\gamma_s}$, con $\gamma_o < \ldots < \gamma_s$. Un complejo simplicial localmente finito en M es una familia localmente finita y disjunta K de simples abiertos en M , tal que cada cara de un simple de K pertenece a K .

Una célula en M es un subconjunto abierto, acotado y convexo de un subespacio afín de M . Un complejo celular localmente finito de M es una familia localmente finita y disjunta L de células de M tal que para toda $\rho \in L$ la clausura $\overline{\rho}$ es unión finita de células de L . Mediante subdivisión baricéntrica se comprueba (ver [1]) que para todo complejo celular localmente finito L en M existe un complejo simplicial localmente finito K en M tal que toda célula de L es unión finita de algunos simples de K .

Sea M un espacio afín, V su espacio vectorial, P el espacio proyectivo derivado de V (o sea, el conjunto de las direcciones en M) . Sea Ω un conjunto abierto de M y sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función analítica. Se dice que una dirección $\sigma \in P$ es <u>no singular</u> para f si para cada $c \in \Omega$ la función $t \longrightarrow$ $\longrightarrow f(c + \sigma t)$, definida en un entorno del origen de $\mathbb{R}$, no es idénticamente nula.

6.1.1 - LEMA (Koopman and Brown)*

Sea f analítica, $f \not\equiv 0$, definida en un conjunto abierto y conexo $\Omega \subset M$. Entonces el conjunto de todas las direcciones singulares para f es magro en P.

Se dice que una dirección σ es no singular para el conjunto analítico $B \subset M$, si cualquiera sea $x \in M$, σ es no singular para cada una de las funciones (analíticas) de un sistema que describe B en un entorno de x.

6.1.2 - LEMA

Sea $\{B_\nu\}$ una familia numerable de conjuntos semianalíticos. El conjunto de todas las direcciones que son simultáneamente no singulares para cada B_ν es denso en P.

6.1.3 - LEMA

Un conjunto semianalítico acotado en $M \times \mathbb{R}$ para el que la dirección $\{0\} \times \mathbb{R}$ (0 = cero de V) es no singular es parcialmente semialgebraico (respecto de $\mathbb{R}$).

Sea ahora Π la proyección $M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$. Se dice que una subvariedad analítica $\psi \subset M \times \mathbb{R}$ es topográfica si $\Pi(\psi)$ es una subvariedad analítica de M y si $\Pi_\psi : \psi \longrightarrow \Pi(\psi)$ es un isomorfismo analítico; entonces ψ es el gráfico de una función analítica $\Pi(\psi) \longrightarrow \mathbb{R}$ que identificaremos con ψ

* Ver [5]

6.1.4

Diremos que un subconjunto Z de $M \times \mathbb{R}$ tiene la propiedad (P) si la proyección $Z \longrightarrow M$ (restricción sobre Z de la proyección $M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$) es abierta. Toda subvariedad topográfica de $M \times \mathbb{R}$ de dimensión igual a $\dim M$ tiene la propiedad (P).

Se puede probar que en el Teorema 5.3.1 la descomposición normal puede elegirse de manera que $V^{n-1} \cup \ldots\ldots \cup V^0$ tenga la propiedad (P).

6.2 - LOS TEOREMAS

Sea M una variedad analítica real y E un subconjunto del espacio afín real Λ. Se dice que una aplicación $g : E \longrightarrow M$ tiene la propiedad (A) si su gráfico es un subconjunto de $\Lambda \times M$ parcialmente semialgebraico respecto de Λ. De 5.6.4 se deduce que entonces la imagen por g de un conjunto semialgebraico de Λ es un conjunto semianalítico de M.

6.2.1 - TEOREMA

Sea M un espacio afín de dimensión finita y $\{B_\nu\}$ una familia localmente finita de conjuntos semianalíticos de M. Entonces existe un complejo simplicial localmente finito K, tal que $|K| = M$ (1) y un homeomorfismo $\tau : M \longrightarrow M$ que cumple:

a) τ tiene la propiedad (A).

b) Para todo $\sigma \in K$, $\tau(\sigma)$ es una subvariedad analítica de M y $\tau_\sigma : \sigma \longrightarrow \tau(\sigma)$ es un isomorfismo analítico.

---

(1) $|K|$ designa a la unión de los simples de K.

c) Para todo $\sigma \in K$ y para todo B_ν , o $\tau(\sigma) \subset$ $\subset B_\nu$ o $\tau(\sigma) \subset M - B_\nu$.

Granert ha demostrado en ([3]) que toda variedad analítica real conexa con base numerable de abiertos es isomorfa a una subvariedad analítica cerrada de un espacio afín real. Consecuencia sencilla de este resultado y del teorema anterior es

6.2.2

Sea M una variedad analítica real conexa, con base numerable de abiertos. Sea $\{B_\nu\}$ una familia localmente finita de conjuntos semianalíticos de M . Entonces existe un complejo simplicial localmente finito K (de un espacio afín Λ) y un homeomorfismo $\tau : |K| \longrightarrow M$ tal que se cumplen a) , b) y c) de 6.2.1 .

También puede mencionarse el resultado siguiente:

6.2.3 - TEOREMA

Sean $B_1 , \ldots , B_k$ conjuntos semialgebraicos acotados de un espacio afín M . Existe un complejo simplicial finito K en M y un homeomorfismo semialgebraico(*) $\tau : |K| \longrightarrow \bigcup_{i=1}^{k} \overline{B}_i$ tal que se verifican las propiedades b) y c) de 6.2.1 .

6.3 - DEMOSTRACION DEL TEOREMA 6.2.1

Notemos con M_1 el espacio afín de 6.2.1 y sea $n = \dim M_1$. La demostración es por inducción sobre n . El caso $n = 1$ es trivial. Supongamos demostrado el teorema para los espacios afines de dimensión $n - 1$.

(*) O sea, el gráfico de τ es un subconjunto semialgebraico en $M \times M$.

Diremos que un conjunto E es compatible con una familia (A_ν) de conjuntos sii, para todo ν, $E \subset A_\nu$ ó $E \cap A_\nu = \emptyset$ (luego 6.2.1 c) dice que todo $\sigma \in K$ es compatible con $\{B_\nu\}$).

I - Un sistema de variedades topográficas

Existe un isomorfismo analítico $f : M_1 \longrightarrow M \times \mathbb{R}$, donde M es un espacio afín de dimensión $n-1$ y una familia $\mathcal{C}$ de subvariedades analíticas de $M \times \mathbb{R}$ tal que se verifica:

1) Cada $\Gamma \in \mathcal{C}$ es topográfica, acotada y parcialmente semialgebraica (respecto de $\mathbb{R}$);
2) $\mathcal{C}$ es localmente finita;
3) Los conjuntos $\Gamma \cap \{(u, t) : |t| \geqslant 2\}$, donde $\Gamma \in \mathcal{C}$, son compactos y mutuamente disjuntos; son vacíos cuando $\dim \Gamma < n$.
4) El conjunto $S = \bigcup\{\Gamma : \Gamma \in \mathcal{C}\}$ es cerrado y tiene la propiedad (P).
5) Para cada $a \in M$ los conjuntos $S \cap (\{a\} \times (0, \infty))$ y $S \cap (\{a\} \times (-\infty, 0))$ son no acotados.
6) Todo subconjunto conexo de $M \times \mathbb{R}$ compatible con $\mathcal{C}$ es también compatible con $\{B'_u\}$, donde $B'_u = f(B_u)$.

Demostración

Según 6.1.2, existe una dirección en M_1 que es no singular para la familia (B_ν). Por lo tanto podemos identificar M_1 con $M \times \mathbb{R}$, donde M es un espacio afín de dimensión $n-1$, de manera que la dirección de las rectas $\{a\} \times \mathbb{R}$, $a \in M$, es no singular para la familia $\{B_\nu\}$. Por 5.3.1, cada punto (a, α) de $M \times \mathbb{R}$ es el centro de un entorno de una descomposición normal compatible con (B_ν), cuyo sistema coordenado (afín) $(x_1, \ldots, x_n)$ es tal que la recta $x_1 = a_1, \ldots, x_{n-1} = a_{n-1}$ es $\{a\} \times \mathbb{R}$ y el hiperplano $x_n = 0$ es $M \times \alpha$. Por lo tanto, es posible construir una familia numerable $\mathcal{F}$ de descomposiciones normales $Q \times \Delta = V^n \cup \ldots \cup V^0$, todas compatibles con (B_ν) y gozando de la última propiedad, tales que los $Q \times \Delta$ son un cubrimiento localmente finito de $M \times \mathbb{R}$. Si consideramos las descomposiciones proyectadas (5.2.3) $Q =$

$= V_*^{n-1} \cup \ldots\ldots \cup V_*^{0}$ sobre M , la unión de los $Q - V_*^{n-1}$ es magro en M , uego el complemento de esa unión respecto de M contiene un punto c .

Dicho esto, podemos elegir una sucesión de descomposiciones normales $Q_\nu \times \Delta_\nu = V_\nu^n \cup \ldots\ldots \cup V_\nu^0$ ($\nu = \pm 1 , \pm 2 , \ldots\ldots$) de $\mathcal{F}$, tal que $c \in Q_\nu$, $\{c\} \times \mathbb{R} \subset \bigcup_\nu (Q_\nu \times \Delta_\nu)$ y tal que las familias de los extremos superiores y la de los extremos inferiores de Δ_ν son monótonas (respecto de ν) . Entonces existe una sucesión γ_ν ($\nu = \pm 1 , \ldots\ldots$) en $\mathbb{R}$ tal que $\gamma_{|\nu|+1} > \gamma_{|\nu|}$ y $\gamma_{-|\nu|-1} < \gamma_{-|\nu|}$, que γ_ν , $\gamma_{\nu+1} \in \Delta_\nu$ (luego $\lim\limits_{\nu \to \pm\infty} \gamma_\nu = \pm\infty$) y que (c, γ_ν) , $(c, \gamma_{\nu+1}) \in V_\nu^n$. Por la misma elección de c , se verifica $c \notin \Pi (V_\nu^{n-2} \cup \ldots\ldots \cup V_\nu^0)$ para cada ν , donde Π es la proyección $M \times \mathbb{R} \ni (u, t) \longrightarrow t \in \mathbb{R}$; luego, para cada ν , existe un entorno U_ν de c tal que (ver 6. 2) :

- $U_\nu \times [\gamma_\nu , \gamma_{\nu+1}] \subset (Q_\nu \times \Delta_\nu) - (V_\nu^{n-2} \cup \ldots\ldots \cup V_\nu^0)$.
- $(U_\nu \times (\gamma_\nu , \gamma_{\nu+1})) \cap V_\nu^{n-1} = \bigcup\limits_{\sigma=1}^{k_\nu} \varphi_{\nu_\sigma}$ donde las φ_{ν_σ} son analíticas y $\varphi_{\nu_1} < \ldots\ldots < \varphi_{\nu_{k_\nu}}$ en U_ν .
- $U_\nu \times \{\gamma_\nu\} \subset V_\nu^n$.

Sea $G = \bigcup\limits_{-\infty}^{\infty} U_\nu \times [\gamma_\nu , \gamma_{\nu+1})$ y definamos $\varphi_{\nu_0} = \gamma_\nu$ en U_ν ; veamos que cualquier subconjunto conexo E de G que es compatible con $\{\varphi_{\nu_\sigma}\}$ es también compatible con $\{B_u\}$. En efecto, $E \subset \varphi_{\nu_\sigma}$ con $\sigma > 0 \Longrightarrow E \subset V_\nu^{n-1}$, $E \subset \varphi_{\nu_0} \Longrightarrow E \subset V_\nu^n$ y, finalmente, $E \subset G - \bigcup \varphi_{\nu_\sigma} \Longrightarrow$ $\Longrightarrow E \subset \bigcup (U_\nu \times (\gamma_\nu , \gamma_{\nu+1}))$, y por lo tanto $E \subset U_\nu \times (\gamma_\nu , \gamma_{\nu+1})$ para algún ν , que implica $E \subset ((Q_\nu \times \Delta_\nu) - V_\nu^{n-1}) - (V_\nu^{n-2} \cup \ldots\ldots \cup V_\nu^0) =$ $= V_\nu^n$; por lo tanto E está siempre contenido en una componente de algún V_ν^{n-1} o V_ν^n .

Ahora aceptaremos sin demostración el lema siguiente:

<u>LEMA I'</u>

Si (φ_ν) ($\nu = \pm 1 , \pm 2 \ldots\ldots$) es una ordenación de la familia $(\varphi_{\nu\sigma})$ de manera que $(\varphi_\nu(c))$ sea estrictamente monótona, para cada ν existen restricciones φ_ν^* de φ_ν sobre entornos de c y existe un isomorfismo analítico $g : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M \times \mathbb{R}$ tal que se verifican las propiedades:

1) $g[(M \times \mathbb{R}) - G] \subset M \times (-1, 1)$.

2) Los $\psi_\nu = g(\varphi_\nu^*)$ son disjuntos, acotados, semianalíticos y topográficos.

3) Todo conjunto acotado de M está contenido en algún $\bigcap \{\Omega_\nu : |\nu| \geqslant N\}$, donde $\Omega_\nu = \Pi(\psi_\nu)$.

4) $\lim\limits_{\nu \to +\infty} \psi_\nu(u) = +\infty$, $\lim\limits_{\nu \to -\infty} \psi_\nu(u) = -\infty$, uniformemente sobre todo conjunto acotado de M .

5) $|\psi_\nu(u') - \psi_\nu(u)| \leq A|u' - u|$ si $u, u' \in \Omega_\nu$, con A independiente de ν , para una norma euclídea sobre V = espacio vectorial del espacio afín M .

6) $\overline{\psi}_\nu \subset g(\varphi_\nu)$, $g(\varphi_\nu) - \psi_\nu \subset M \times (-1, 1)$ (lo que implica que $\psi_\nu \bigcap \{(u, t) : |t| \geqslant 1\}$ es cerrado para cada ν) .

Entonces se deduce de 1ª) y 6ª) que todo conjunto conexo de $\{(u, t) : |t| \geqslant 1\}$ que es compatible con ψ_ν es también compatible con $\{B''_\nu = g(B_\nu)\}$, ya que debe ser compatible con $\{g(\varphi_\nu)\}$.

Introduzcamos ahora una norma euclídea en el espacio vectorial V de M de manera que valga la propiedad 5) . Por 5. 3. 1 existe $z \in V$ con $|z| < A$ tal que la dirección $(-z, 1)$ en $M \times \mathbb{R}$ es no singular para las familias (B''_ν) y (ψ_ν) ; consideremos la transformación $\ell : (u, t) \longrightarrow (u + tz, t)$, y sea f = log Entonces la dirección $\{0\} \times \mathbb{R}$ es no singular para todos los $B'_u = \ell(B''_u) = f(B_u)$ y $\psi'_\nu = \ell(\psi_\nu)$. Por lo tanto los ψ_ν' son parcialmente semialgebraicos (6. 1. 3) y; teniendo en cuenta 2) y 5) , es fácil probar que son topográficos. Además $\{\psi_\nu'\}$ es localmente finita (por la propiedad 4)) , los ψ_ν' son acotados y disjuntos (propiedad 2)), los conjuntos $\psi'_\nu \cap \{(u, t) : |t| \geqslant 1\}$ son cerrados (propiedad 6)) y todo subconjunto conexo de $\{(u, t) : |t| \geqslant 1\}$ que es compatible con $\{\psi'_\nu\}$ es también compatible con $\{B'_u\}$. Finalmente, veamos que para cada $a \in M$ los conjuntos $(\{a\} \times (0, \infty)) \cap (\bigcup \psi'_\nu)$ y $(\{a\} \times (-\infty, 0)) \cap \cap (\bigcup \psi'_\nu)$ no son acotados: en efecto, de la propiedad 6) se deduce que, si $\psi_\nu(a - z) > 1$, entonces ψ_ν corta la semirrecta $\{(a - tz, t) : t > 0\}$; entonces de 3) y 4) se deduce que infinitas ψ_ν cortan dicha semirrecta; lo mismo puede decirse respecto de la semirrecta $\{(a - tz, t) : t < 0)$. Por lo tanto los conjuntos en cuestión son infinitos, y como los ψ_ν son localmente finitos, son no acotados.

Hemos demostrado entonces que la familia $\mathcal{C}_1$ de todas las subvariedades $\psi'_\nu \cap \cap \{(u, t) : |t| > 1\}$ y los hiperplanos $M \times \{1\}$ y $M \times \{-1\}$, satisface las condiciones 1) - 5) y la condición 6) para todo subconjunto conexo de $\{(u, t) ; |t| \geqslant 1\}$. Por lo tanto basta encontrar una familia $\mathcal{C}_o$ de subvariedades analíticas de $M \times \times (-2, 2)$ que satisfaga las condiciones 1), 2), 4) y la condición 6) para todo subconjunto conexo de $M \times (-1, 1)$, puesto que entonces $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_o$ satisfará 1) - 6).

Usando 6.1.4 puede definirse una familia de conos truncados $T_\nu = = \{(u, t) : |u - c_\nu| < r_\nu\ (1 - t/2),\ |t| < 1\}$ y una familia de descomposiciones normales $Q_{\nu\sigma} = \bigcup_{k, \varkappa} \Gamma^k_\varkappa(\nu, \sigma)$ todas compatibles con cada B'_u, de manera que los $\Gamma^k_\varkappa(\nu, \sigma)$ con $k < n$ son parcialmente semialgebraicos y topográficos, $C_{\nu\sigma} = \bigcup_{k<n} \Gamma^k_\varkappa(\nu, \sigma)$ tienen la propiedad (P), $\{Q_{\nu\sigma}\}$ y $\{T_\nu\}$ son localmente finitos, $\bar{T}_\nu \subset \bigcup_\sigma Q_{\nu\sigma}$ y $M \times (-1, 1) = \bigcup T_\nu$. Para ello basta considerar, para cada $c \in M$, una familia finita de descomposiciones normales $Q_i = = \bigcup \Gamma^k_\varkappa(i)$ tal que $\{c\} \times [-1, 1] \subset \bigcup Q_i \subset \{(u, t) : |u - c| < 2,\ |t| < 2\}$ y que los $\Gamma^k_\varkappa(i)$ con $k < n$ sean parcialmente algebraicos y topográficos, eligiendo luego r tal que $T = \{(u, t) : |u - c| \leq r\ (1 - t/2),\ |t| \leq 1\} \subset \bigcup Q_i$, con $r > 0$. Seleccionemos de esta familia de conos una subfamilia T_ν localmente finita que cubra $M \times (-1, 1)$. Sea $\mathcal{C}_o$ la familia de los conjuntos $\Gamma^k_\varkappa(\nu, \sigma) \cap T_\nu$, $(k < n)$,

$\Sigma_\nu = \{(u, t) : |u - c_\nu| = r_\nu (1 - t/2), \ |t| < 1\}$ y $\Pi_+ = Mx\{1\}, \Pi_- = Mx\{-1\}$

$\mathcal{C}_0$ satisface evidentemente las condiciones (1) y (2) ; Para probar (4), observemos que $S_0 = \bigcup\{\Gamma : \Gamma \in \mathcal{C}_0\} = \Theta \cup \bigcup (C_{\nu_\sigma} \cap T_\nu)$, donde $\Theta = \Pi_+ \cup \Pi_- \cup \bigcup \Sigma_\nu$; como Π_+, Π_-, Σ_ν y $C_{\nu_\sigma} \cap T_\nu$ tienen la propiedad (P), entonces también la tiene S_0 ; como Θ y $\bar{T}_\nu \cap (\bigcup_\sigma C_{\nu_\sigma})$ son cerrados y $\bar{T}_\nu - T_\nu \subset \Theta$, S_0 es cerrado. En cuanto a (6), sea E un subconjunto conexo de $Mx(-1, 1)$ compatible con $\mathcal{C}_0$; existe ν tal que $E \cap T_\nu \neq \emptyset$. luego $E \subset T_\nu$. Pero entonces E es compatible con cada $\Gamma^k_\varkappa(\nu, \sigma)$, y como éstos son compatibles con (B'_μ), resulta E compatible con (B'_μ).

<u>Observación:</u> En el corolario del teorema 6. 2. 3. , no se precisa utilizar el Lema I'; directamente se puede suponer $B_\mu \subset M \times (-1, 1)$, tomar por $\mathcal{C}_1$ al conjunto de los hiperplanos $M \times \{k\}$, $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, y tomar por f a la identidad; además, no necesitamos triangular todo M.

De acuerdo con estas consideraciones, el teorema 6. 2. 1 quedará demostrado si se satisfacen sus condiciones para la familia (B'_μ) en $M x \mathbb{R}$ en lugar de (B_μ) en M_1.

<u>II - TRIANGULACION DEL SISTEMA PROYECTADO</u>

Sea Π la proyección $M x \mathbb{R} \ni (u, t) \longrightarrow u \in M$. Veamos que existe un complejo simplicial localmente finito K_1, tal que $|K_1| = M$, y un homeomorfismo $\tau : M \longrightarrow M$ tal que:

(1) τ Tiene la propiedad (A).

(2) Todo miembro de $\mathcal{K}_1 = \tau(K_1)$ es compatible con
$\{\Pi(\Gamma \cap \Gamma') : \Gamma, \Gamma' \in \mathcal{C}\}$; para cada $\rho \in K_1$, $\tau(\rho)$ es una subvariedad analítica y $\tau_\rho : \rho \longrightarrow \tau(\rho)$ es un isomorfismo analítico.

En efecto , por las condiciones I (1) y (2) y por el teorema de proyección 6. 6. 4. , los conjuntos $\Pi(\Gamma \cap \Gamma' \cap M \times (-2, 2))$ son semianalíticos y forman una familia localmente finita. Sean K_1 un complejo simplicial y $\tau : M \longrightarrow M$ un homeomorfismo obtenidos aplicando la hipótesis inductiva a M y a esta familia. Necesitamos verificar solamente la primera parte de (2) : sea $\beta \in \mathcal{K}_1$ y $\Gamma, \Gamma' \in \mathcal{C}$; veremos que $\beta \subset (\Gamma \cup \Gamma')$ o

$\beta \subset M - \Pi(\Gamma \cap \Gamma')$; si $\Gamma \neq \Gamma'$ o dim $\Gamma < n$, por I. 3 es $\Gamma \cap \Gamma' \subset$ $\subset M_x(-2, 2)$ y la disyuntiva es válida; de lo contrario, $\Gamma = \Gamma'$ y dim $(\Gamma) = n$; pero entonces β está incluído en $\Pi(\Gamma \cap (M_x(-2, 2)))$ o en su complemento; como este último es unión de los conjuntos cerrados disjuntos $M - \Pi(\Gamma)$ y $\{u \in \Pi(\Gamma) : |\Gamma(u)| \geqslant 2\}$, un razonamiento de conexión y las propiedades I (1), (3) aseguran que $\beta \subset \Pi(\Gamma)$ o $\beta \subset M - \Pi(\Gamma)$.

Sea ahora K un complejo simplicial localmente finito tal que $|K| = M$ y que :

(3) cada simplejo de K está incluido, junto con alguno de sus vértices, en un simplejo de K_1 .

Por ejemplo, como K se puede considerar la subdivisión baricéntrica de K_1 . Entonces valen :

(4) Todo miembro de $\mathcal{K}_1 = \tau(K)$ es compatible con $\{\Pi(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) : \Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{C}\}$.

(5) Para todo $\rho \in K$, $\tau(\rho)$ es una subvariedad analítica y $\tau_\rho : \rho \longrightarrow \tau(\rho)$ es un isomorfismo analítico.

III - UNA ESTRATIFICACION PRISMATICA

Sea $\mathcal{L}$ la familia de todos los conjuntos no vacíos de la forma $(\beta \times \mathbb{R}) \cap \Gamma$ con $\beta \in \mathcal{K}$ y $\Gamma \in \mathcal{C}$. Entonces $\bigcup\{\gamma : \gamma \in \mathcal{L}\} = S = \bigcup\{\Gamma : \Gamma \in \mathcal{C}\}$. Para todo $\beta \in \mathcal{K}$, sea $s(\beta)$ la imagen por τ del conjunto de vértices de $\tau^{-1}(\beta)$; claramente $s(\beta) \subset \overline{\beta}$. Veamos que se verifican las propiedades siguientes :

(1) Cada $\gamma \in \mathcal{L}$ es una subvariedad analítica topográfica de $M \times \mathbb{R}$, acotada, parcialmente semialgebraica y tal que $\Pi(\gamma) \in \mathcal{K}$;

(2) $\mathcal{L}$ es una familia localmente finita de conjuntos disjuntos ;

(3) $\mathcal{K} = \Pi(\mathcal{L})$ y para cada $\gamma \in \mathcal{L}$ existen $\gamma', \gamma'' \in \mathcal{L}$ tales que $\Pi(\gamma) = \Pi(\gamma') = \Pi(\gamma'')$ y $\gamma' < \gamma < \gamma''$ sobre $\Pi(\gamma)$;

(4) $S = \bigcup\{\gamma : \gamma \in \mathcal{L}\}$ es cerrado y tiene la propiedad (P) ;

(5) Todo subconjunto conexo de $M \times \mathbb{R}$ que es compatible con $\mathcal{L}$ es también compatible con $\{B'_u\}$;

(6) Para cada $\gamma \in \mathcal{L}$, $\overline{\gamma}$ es una función continua sobre $\overline{\Pi(\gamma)}$ y una unión de miembros de $\mathcal{L}$: para cada $\beta \in \mathcal{K}$ incluído en $\overline{\Pi(\gamma)}$ se cumple $\overline{\gamma}_\beta \in \mathcal{L}$ (aquí $\overline{\gamma}_\beta$ indica la restricción de $\overline{\gamma}$ sobre β) ;

(7) Si $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{L}$ y $\Pi(\gamma_1) = \Pi(\gamma_2) = \beta$, entonces $\gamma_1 < \gamma_2$ en $\beta \Longrightarrow \overline{\gamma}_1 \leq \overline{\gamma}_2$ y $\overline{\gamma}_1 \not\equiv \overline{\gamma}_2$ en $s(\beta)$.

Demostración :

Por II (4), para todo $\gamma = (\beta \times \mathbb{R}) \cap \Gamma \in \mathcal{L}$ se cumple $\beta \subset \Pi(\Gamma)$; esto, junto con I (1), II (1) y (5), implica (1). Con respecto de (2), $\mathcal{L}$ es localmente finita puesto que lo son $\mathcal{K}$ y $\mathcal{C}$ (ver I (2)) ; si $\gamma_i = (\beta_i \times \mathbb{R}) \cap \Gamma_i \in \mathcal{L}$, $i = 1, 2$, y $\gamma_1 \cap \gamma_2 \neq \emptyset$, entonces $\beta_1 \cap \beta_2 \cap \Pi(\Gamma_1 \cap \Gamma_2) \neq \emptyset$, y por II (4) $\beta_1 = \beta_2 \subset \Pi(\Gamma_1 \cap \Gamma_2)$, luego $\gamma_1 = \gamma_2$. La propiedad (3) es consecuencia de I (5) (y II (2)), ya que los miembros de $\mathcal{L}$ son funciones continuas sobre conjuntos conexos. (4) es I (4), y (5) es consecuencia de I (6), ya que todo $\Gamma \in \mathcal{C}$ es unión de algunos miembros de $\mathcal{L}$.

Para probar (6), sea $\gamma \in \mathcal{L}$ y $\beta = \Pi(\gamma)$. Como γ es acotado, $\Pi(\overline{\gamma}) = \overline{\beta}$ y, por (4), $\overline{\gamma} \subset S$. Para todo $u \in \overline{\beta} - \beta$, el conjunto $(\{u\} \times \mathbb{R}) \cap \overline{\gamma}$ consiste de un solo punto, por ser un subconjunto conexo (*) del con-

(*) conexo puesto que $(\{u\} \times \mathbb{R}) \cap \overline{\gamma} = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} \overline{(U_\nu \times \mathbb{R}) \cap \gamma}$, donde $U_\nu = \tau(K_\nu)$, $K_\nu = \{\nu : |\nu - \tau^{-1}(u)| < 1/\nu\}$ y $\{\overline{(U_\nu \times \mathbb{R}) \cap \gamma}\}$ es una sucesión decreciente de conjuntos compactos y conexos (ya que $U_\nu \cap \beta = \tau(K_\nu \cap \tau^{-1}(\beta))$ es conexo) junto $(\{u\} \times \mathbb{R}) \cap S$, que es aislado (por I (1) , (2)) . Por lo tanto $\overline{\gamma}$ es una función continua sobre $\overline{\beta}$. Sea ahora $\beta_1 \in K$, $\beta_1 \subset \overline{\beta}$; $\overline{\gamma}_{\beta_1}$ es una función continua sobre β_1 y está incluída en $(\beta_1 \times \mathbb{R}) \cap S$, que es una unión localmente finita y disjunta de miembros de $\mathcal{L}$, cada uno de los cuales es una función continua sobre β_1 ; por lo tanto β_1 debe ser uno de tales miembros, ya que β_1 es conexo.

Para probar (7) , supongamos que γ_1 , $\gamma_2 \in \mathcal{L}$ y $\Pi(\gamma_1) = \Pi(\gamma_2) = \beta$. Sea $\gamma_1 < \gamma_2$ sobre β ; entonces $\overline{\gamma}_1 \leqslant \overline{\gamma}_2$ en $S(\beta)$. Además, $\gamma_i \subset \Gamma_i \in \mathcal{C}$ y $\beta = \tau(\rho) \subset \widetilde{\beta} = \tau(\widetilde{\rho})$, donde $\rho \subset \widetilde{\rho}$, $\rho \in K$ y $\widetilde{\rho} \in K_1$ (ver II (3)) ; ahora, $\gamma_i \subset \widetilde{\gamma}_i = (\widetilde{\beta} \times \mathbb{R}) \cap \Gamma_i$ y, usando II (2) y el mismo razonamiento que en (1) y (2) , podemos concluir que $\widetilde{\gamma}_i$ son funciones continuas y $\widetilde{\gamma}_1 < \widetilde{\gamma}_2$ sobre $\widetilde{\beta}$. Como $\widetilde{\rho}$ contiene un vértice de ρ (II (3)) , obtenemos que $S(\beta) \cap \widetilde{\beta} \neq \emptyset$; esto implica que $\overline{\gamma}_1 < \overline{\gamma}_2$ en $S(\beta) \cap \widetilde{\beta}$, ya que $\overline{\gamma}_i = \widetilde{\gamma}_i$ en $\overline{\beta} \cap \widetilde{\beta}$. Q. E. D.

Para cada conjunto $E \subset M$ y aplicaciones φ, $\varphi' : E \to \mathbb{R}$, tal que $\varphi(u) \leqslant \varphi'(u)$ en E , notaremos

$$[\varphi, \varphi'] = \{ (u, t) : u \in E , \varphi(u) \leqslant t \leqslant \varphi'(u) \} ;$$

en particular $[\varphi, \varphi] = \varphi$; si $\varphi(u) < \varphi'(u)$ en E , notaremos

$$(\varphi, \varphi') = \{ (u, t) : u \in E , \varphi(u) < t < \varphi'(u) \} .$$

Sean ahora γ_1 , $\gamma_2 \in \mathcal{L}$; diremos que $\{\gamma_1 , \gamma_2\}$ es un par consecutivo de $\mathcal{L}$ si $\Pi(\gamma_1) = \Pi(\gamma_2)$, $\gamma_1 < \gamma_2$ y (γ_1 , γ_2) no contiene miembro alguno de $\mathcal{L}$. Entonces vale la siguiente propiedad:

(8) Si $\{\gamma, \gamma'\}$ es consecutivo, entonces, para todo $\beta \in K$ contenido en $\overline{\Pi(\gamma)}$, ó $\overline{\gamma}_\beta = \overline{\gamma}'_\beta$ ó $\{\overline{\gamma}_\beta , \overline{\gamma}'_\beta\}$ es consecutivo.

En efecto, por (6) $\overline{\gamma}_\beta$ y $\overline{\gamma}'_\beta \in \mathcal{L}$, luego $\overline{\gamma}_\beta = \overline{\gamma}'_\beta$ ó $\overline{\gamma}_\beta < \overline{\gamma}'_\beta$ (sobre β). Supongamos que exista $\gamma_1 \in \mathcal{L}$ tal que $\gamma_1 \subset (\overline{\gamma}_\beta, \overline{\gamma}'_\beta)$; (1) implica $\Pi(\gamma_1) = \beta$. Sea $x \in \gamma_1$; como $\mathcal{L}$ es localmente finita,

$$S \cap U \subset \bigcup \left\{ \gamma'' : \gamma'' \in \mathcal{L} \text{ y } x \in \overline{\gamma}'' \right\}$$

para algún entorno U de x. Como $\Pi(x) \in \overline{\Pi(\gamma)}$, (4) asegura que $\Pi(\gamma) \cap \Pi(\gamma'') \neq \emptyset$ para algún $\gamma'' \in \mathcal{L}$ tal que $x \in \overline{\gamma}''$. Por lo tanto $\Pi(\gamma'') = \Pi(\gamma)$ y por (6) y (2) $\gamma_1 \subset \overline{\gamma}''$. Pero esto implica $\gamma'' \subset (\gamma, \gamma')$ (pues de lo contrario $\gamma'' \leqslant \gamma$ ó $\gamma' \leqslant \gamma''$, luego $\gamma_1 \leqslant \overline{\gamma}_\beta$ ó $\overline{\gamma}'_\beta \leqslant \gamma_1$), absurdo. Esto prueba (8) .

Notemos $\mathcal{L}^{\#}$ la familia de todos los conjuntos (γ_1, γ_2) tal que $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ es consecutivo y sea $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \mathcal{L}^{\#}$. Se verifica :

(9) $\mathcal{L}^*$ es una familia localmente finita de subvariedades analíticas disjuntas de $M \times \mathbb{R}$, y $\bigcup \{ \gamma : \gamma \in \mathcal{L}^* \} = M \times \mathbb{R}$.

En efecto, (1) y (2) implican la primera parte de (9) ; para la segunda parte observemos que $M = \bigcup \{ \beta : \beta \in K \}$ y que, por (3), para cada $\beta \in K$, $\bigcup \{ [\gamma, \gamma'] : \{\gamma, \gamma'\}$ consecutivo y $\Pi(\gamma) = \beta \} = \bigcup \{ (\gamma, \gamma'') : \{\gamma, \gamma'\}$ y $\{\gamma', \gamma''\}$ son consecutivos y $\Pi(\gamma) = \beta \}$; como la primera unión es localmente finita, este conjunto es cerrado y abierto en $\beta \times \mathbb{R}$, luego igual a $\beta \times \mathbb{R}$.

De (5) se deduce :

(10) Todos los miembros de $\mathcal{L}^*$ son compatibles con $\{ B'_u \}$.

Demostremos por último que :

(11) Para todo $\gamma \in \mathcal{L}^*$, $\overline{\gamma}$ es unión de miembros de $\mathcal{L}^*$; si $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{L}^{\#}$, todo miembro de $\mathcal{L}^*$ incluído en $\overline{\gamma}$ es de la forma $(\overline{\gamma}_1)_\beta$, $(\overline{\gamma}_2)_\beta$ ó $((\overline{\gamma}_1)_\beta, (\overline{\gamma}_2)_\beta)$, con

$$\beta \in K \quad y \quad \beta \subset \overline{\Pi(\gamma)} \, .$$

En efecto, es fácil ver que

$$\overline{(\gamma_1,\ \gamma_2)} = [\ \overline{\gamma}_1,\ \overline{\gamma}_2] = \bigcup \{ [\, (\overline{\gamma}_1)_\beta \ ,\ (\overline{\gamma}_2)_\beta] \ :\ \beta \in K \ ,\ \beta \subset \overline{\Pi(\gamma)} \} \, ;$$

como $[\ (\overline{\gamma}_1)_{\beta'}\ ,\ (\overline{\gamma}_2)_\beta]$ es igual a $(\overline{\gamma}_1)_\beta$ ó $(\overline{\gamma}_1)_\beta \cup ((\overline{\gamma}_1)_\beta\ ,\ (\overline{\gamma}_2)_\beta) \cup$ $\cup\ (\overline{\gamma}_2)_\beta$, (11) queda demostrado,dados (6) y (8) ..

IV - ESTRATIFICACION RECTILINEAL Y APLICACION ESTRATIFICADA

Para toda aplicación $\eta : r \longrightarrow \mathbb{R}$, donde $r = r(\rho)$ es el conjunto de vértices de un simplejo abierto ρ de M , sea (η) el simplejo abierto en $M \times \mathbb{R}$ cuyo conjunto de vértices es η ; por lo tanto $(\eta) : \rho \longrightarrow \mathbb{R}$. Evidentemente: $\eta_1 \leqslant \eta_2$ y $\eta_1 \not\equiv \eta_2$ sobre $r \Rightarrow (\eta_1) < (\eta_2)$ sobre ρ , y $\eta_1 \subset \eta_2$ $\Rightarrow (\eta_1) \subset \overline{(\eta_2)}$.

Sea $g = \tau^{-1}$. Para todo $\gamma \in \mathcal{L}$ sea

$$\sigma(\gamma) = (\overline{\gamma}_{s(\beta)} \circ \tau) = (\overline{\gamma} \circ \tau /_{r(g\beta)}) \ , \quad \text{donde} \quad \beta = \Pi(\gamma) \, .$$

Por lo tanto, como $g(s(\beta))$ es el conjunto de vértices de $g(\beta)$, $\sigma(\gamma)$ es una función sobre $g(\beta)$:

$$(1) \quad \Pi(\sigma(\gamma)) = g(\Pi(\gamma)) \quad (\text{para} \quad \gamma \in \mathcal{L}) \, .$$

Por III - (7) ,

$$(2) \quad \gamma < \gamma' \ \text{ sobre } \ \beta = \Pi(\gamma) \Rightarrow \sigma(\gamma) < \sigma(\gamma') \ \text{ sobre } \ g(\beta)$$
$$(\text{para } \ \gamma\ ,\ \gamma' \in \mathcal{L} \ \text{ tales que } \ \Pi(\gamma) = \Pi(\gamma')) \, .$$

Evidentemente,

$$(3) \quad \gamma \geqslant a \ (\leqslant a) \ \text{ sobre } \ \beta = \Pi(\gamma) \Rightarrow \sigma(\gamma) \geqslant a \ (\leqslant a) \ \text{ so-}$$

bre $g(\beta)$ (para $\gamma \in \mathcal{L}$ y $a \in \mathbb{R}$).

Finalmente

(4) $\gamma' \subset \overline{\gamma} \Rightarrow \sigma(\gamma') \subset \overline{\sigma(\gamma)}$ (para γ', $\gamma \in \mathcal{L}$) ya que $\beta' \subset \overline{\beta} \Rightarrow s(\beta') \subset s(\beta)$ (para β', $\beta \in K$).

Sea $L^* = \{{}^{\circ}\sigma(\gamma) : \gamma \in \mathcal{L}\} \cup \{(\sigma(\gamma), \sigma(\gamma')) : \gamma, \gamma' \in \mathcal{L}$ y $\{\gamma, \gamma'\}$ consecutivo $\}$. Entonces (1), (2), (3) y III-(2) implican:

(5) L^* es una colección localmente finita disjunta de células abiertas.

Además:

(6) $\bigcup \{\sigma : \sigma \in L^*\} = M \times \mathbb{R}$;

esto se prueba por un razonamiento similar al de III-(9).

Sea ahora $\gamma \in \mathcal{L}^*$ y $\beta = \pi(\gamma)$. Si $\gamma \in \mathcal{L}^{\#}$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$; si $\gamma \in \mathcal{L}$, convendremos $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$. En el primer caso definimos

$$h^{\gamma} : \begin{cases} \gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \longrightarrow (\sigma(\gamma_1), \sigma(\gamma_2)) \\ \\ (u, t) \longrightarrow \left(g(u), \ \sigma_1(g(u)) + \dfrac{t - \gamma_1(u)}{\gamma_2(u) - \gamma_1(u)} [\sigma_2(g(u)) - \sigma_1(g(u))]\right) \end{cases}$$

donde $\sigma_1 = \sigma(\gamma_1)$ y $\sigma_2 = \sigma(\gamma_2)$.

En el segundo caso:

$$h^{\gamma} : \begin{cases} \gamma \longrightarrow \sigma(\gamma) \\ \\ (u, t) \longrightarrow (g(u), \ \sigma(g(u))) \quad (\text{con } \sigma = \sigma(\gamma) \ldots) \end{cases}$$

De II-(5) y III-(1) se deduce fácilmente que en ambos casos h^{γ} es un isomorfismo analítico.

Diremos que una aplicación f de un subconjunto de un espacio afín M' en un espacio afín N' tiene la propiedad (A^{-1}) si su gráfico es parcialmente semialgèbraico respecto de N'. Según II-(1), $\tau_{g(\beta)}$ tiene la propiedad (A), luego su inversa g_{β} tiene la propiedad (A^{-1}). Se demuestra que la aplicación

$$\tilde{h}^{\gamma} : \overline{\gamma} = [\overline{\gamma}_1, \overline{\gamma}_2] \longrightarrow [\overline{\sigma(\gamma_1)}, \overline{\sigma(\gamma_2)}],$$

definida mediante $g_{\overline{\beta}} : \overline{\beta} \longrightarrow g(\overline{\beta})$ por la primera fórmula para h^{γ} o por la segunda, según sea $\overline{\gamma}_1 < \overline{\gamma}_2$ ó $\overline{\gamma}_1 = \overline{\gamma}_2$, es continua y tiene la propiedad (A^{-1}). Además se puede probar que:

$$(7) \quad \gamma' \subset \overline{\gamma} \Longrightarrow h^{\gamma'} \subset \tilde{h}^{\gamma} \quad (\text{para } \gamma', \gamma \in \mathcal{L}^*)$$

Sea ahora $h = \bigcup \{h^{\gamma} : \gamma \in \mathcal{L}^*\}$. Por (5), (6), III-(9) y por la definición de L^*, $h : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M \times \mathbb{R}$ es biyectiva y $h(\mathcal{L}^*) = L^*$.

Por (7) y III-(11) toda $\tilde{h}^{\gamma}$ (con $\gamma \in \mathcal{L}^*$) es unión de $h^{\gamma'}$ con $\gamma' \subset \overline{\gamma}$ (y $\gamma' \in \mathcal{L}^*$); por lo tanto $h = \bigcup \{\tilde{h}^{\gamma} : \gamma \in \mathcal{L}^*\}$, de donde se deduce fácilmente que h es un homeomorfismo, ya que por (5) y III-(9) $\{\tilde{h}^{\gamma} : \gamma \in \mathcal{L}^*\}$ es una familia localmente finita de conjuntos compactos. Esto y III-(11) permite afirmar:

(8) Para todo $\sigma \in L^*$, $\overline{\sigma}$ es una unión de algunos miembros de L^*.

Finalmente, como la familia $\mathcal{L}^*$ es localmente finita, para todo conjunto acotado $U \subset M \times \mathbb{R}$ el conjunto $U \times (M \times \mathbb{R})$ interseca sólo un número finito de $\tilde{h}^{\gamma}$; según 5.6.3, h tiene entonces la propiedad (A^{-1}).

Por lo tanto $\tau^* = h^{-1} : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M \times \mathbb{R}$ es un homeomorfismo que satisface las siguientes condiciones:

$$(9) \quad \begin{cases} \bullet\ \tau^* \text{ tiene la propiedad } (A). \\ \bullet\ \tau^*(L^*) = \mathcal{L}^*. \\ \bullet\ \text{Para todo } \sigma \in L^*,\ \tau^*_{\sigma} : \sigma \longrightarrow \tau^*(\sigma) \text{ es un isomor-} \end{cases}$$

fismo analítico .

V - TRIANGULACION

Por (5) y (8) , L^* es un complejo celular localmente finito. Sea K^* un complejo simplicial localmente finito tal que cada célula de L^* sea una unión finita de simples de K^* ; por (6) , $|K^*| = M \times \mathbb{R}$; además, por (9) , III-(9) y III-(10) , $\mathcal{T}^*$ y K^* satisfacen las condiciones del teorema para $\{B'_u\}$.

Esto completa la demostración del teorema.

BIBLIOGRAFIA

[1] - P.S. Alexandrov. Combinatorial Topology, Graylock, Rochester N.Y., 1956.

[2] - B. Giesecke. Simpliziale Zerlegung abzählbarer komplexer Räume. Tesis, A. Schubert, Münich, 1963 .

[3] - H. Grauert. On Levi's problem and the imbedding of real analytic manifolds. Ann. of Math. (2) 68 (1958) . 460 - 472 .

[4] - Hörmander. On division of distributions by polynomials. Arkiv für Mathematik. 3 (1958) , p. 555 - 568 .

[5] - B.O. Koopman y A.B. Brown. On the covering of analytic loci by complexes. Trans. Amer. Math. Soc. 34 (1932) , 231 - 251 .

[6] - S. Lefschetz y J.H. Whitehead. On analytical complexes. Trans. Amer. Math. Soc. 35 (1933) , 510 - 517 .

[7] - S. Lojasiewicz. Sur le problème de la division. Studia Mathematica. T XVIII (1959) , pag. 88 - 136 y Rozprawy Mat. 22 (1961) .

[8] - --------------------- Une propriété topologique des sous-ensembles analytiques réels. Coll. du CNRS sur les équations aux dérivées partielles. Paris, 1962, 87 - 89 .

[9] - L. Schwartz. Théorie des distributions. T. 1, Hermann, Paris, 1950 .

[10] - --------------- Division par une fonction holomorphe sur une variété analytique. Summa Brasil. Math. 39 (1955) , 181 - 209 .

[11] - A. Seidenberg. A new decision method for elementary algebra. Ann. of Math. (2) 60 (1954) , 24 - 33 .

Realizado en IMPRENTA "U R G E"

Viamonte 2296 * Buenos Aires

CURSOS Y SEMINARIOS DE MATEMATICA

PEDIDOS:

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Biblioteca y Publicaciones
Perú 272 - Casilla de Correo 1766
Buenos Aires - Argentina