ISSN 1853-709X

Fascículo 17

Cursos y seminarios de matemática

Serie A

Juan Carlos Merlo

Tres teoremas sobre variedades diferenciales

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

2011

Cursos y Seminarios de Matemática – Serie A

Fascículo 17

ISSN 1853-709X (Versión Electrónica)
ISSN 0524-9643 (Versión Impresa)

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria – Pabellón I
(1428) Ciudad de Buenos Aires
Argentina.
http://www.dm.uba.ar
e-mail. secre@dm.uba.ar
tel/fax: (+54-11)-4576-3335

FASCICULO **17**

cursos
y seminarios
de matemática

Juan Carlos Merlo

TRES TEOREMAS SOBRE VARIEDADES DIFERENCIALES

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES — DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
1964

Juan Carlos Merlo

TRES TEOREMAS SOBRE VARIEDADES DIFERENCIABLES

Los tres teoremas aludidos en el título son los de De Rham, Hodge y Riemann-Roch. Aparte del hecho que se refieren todos ellos a variedades diferenciables, creemos que existe entre los mismos alguna analogía, ya sea en el enunciado o en el método de demostración, lo cual hace que no parezca artificioso reunirlos en una misma exposición.

La generalidad de la demostración dada aquí no es demasiado amplia, En todos ellos suponemos que la variedad diferenciable es compacta, y además, para el último, que tiene dimensión compleja uno. Un tratamiento más general para los dos primeros teoremas puede verse, por ejemplo, en [3] (cf. la bibliografía), y para el último en [1].

El tratamiento que aquí seguimos no es original en modo alguno; por el contrario, está basado en un curso dictado por el profesor E. Dyer, en la Universidad de Chicago, en 1962. Sólo hemos efectuado algunas modificaciones menores completado algunas demostraciones, y seleccionado algunos temas. El autor quiere expresar que sin embargo la redacción es suya propia, y por lo tanto no quiere hacer recaer responsabilidades sobre el profesor Dyer en lo que respecta a posibles errores, oscuridades o mala presentación de temas.

Este fascículo ha sido redactado para que en cierto modo constituya una continuación de la obra [6] del profesor L.A. Santaló, que forma parte de esta misma colección, de manera que omitimos el tratamiento de los problemas allí considerados. Suponemos pues conocidas algunas nociones sobre variedades diferenciables que pueden consultarse en el trabajo citado, a saber: su definición, la definición de formas diferenciables, la definición de integral y la fórmula de Stokes. Además, para el capítulo III también suponemos conocidas algunas propiedades elementales sobre espacios de Riemann, que también pueden verse en [6] , a saber, la noción de derivación covariente y de geodésica. Los temas mencionados como prerrequisitos también pueden estudiarse, por ejemplo, en [2] .

Algunas pocas nociones necesarias de álgebra y de topología algebraica están incluídas en el texto, de manera que es autocontenido en ese aspecto.

En lo que respecta a la interdependencia de las diferentes partes del texto, el orden natural puede alterarse en el caso del capítulo III, prácticamente independiente del capítulo II, y en el caso del capítulo IV, en buena parte independiente del capítulo III (excepto tal vez §3.1 y §3.2). Esta enumeración no es exhaustiva.

La demostración de la existencia de solución de la ecuación de Laplace no homogénea, básica en la demostración del teorema de Hodge, ha sido redactada en base a [3]. En lo que respecta al capítulo IV, si bien el teorema de Riemann-Roch está demostrado solamente para superficies de Riemann, hemos creído conveniente dar algunas propiedades sobre variedades complejas en general, que pueden servir de introducción para un estudio más completo, tal como se ve por ejemplo en [1]. Para un estudio más general y detallado de la teoría de haces, que usamos aquí para demostrar los teoremas de De Rham y de Riemann-Roch, puede consultarse, por ejemplo, [9].

La redacción de este fascículo ha sido sugerida por los profesores R. Ricabarra y L.A. Santaló, de la Universidad de Buenos Aires, teniendo en cuenta que puede resultar útil un estudio del tema sin recurrir a una excesiva bibliografía. Ambos profesores han prestado mucha ayuda y guiado al autor con consejos en la redacción, por lo cual éste les expresa su sincero agradecimiento, así como también al profesor E. Dyer, quien le ha hecho posible comenzar a aprender algunos temas de variedades diferenciables.-

Juan Carlos Merlo.

INDICE

—o—

CAPITULO I. HOMOLOGIA Y COHOMOLOGIA SINGULARES.

§ 1.1. Introducción sobre grupos conmutativos.

En este parágrafo se dan nociones auxiliares. El lector puede evitarlas hasta tanto cada una de ellas sea utilizada más adelante.

Designaremos con A, B,... a grupos conmutativos, y con f, g,... a homomorfismos entre tales grupos. Si $f: A \to B$ es un homomorfismo, designaremos $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in A \mid f(x)=0\}$ a su núcleo, $\mathrm{Im}(f) = \{y \in B \mid y=f(x),\ x \in A\}$ a su imagen, y $\mathrm{Coker}(f) = B/\mathrm{Im}(f)$ a su conúcleo. Se ve inmediatamente que $\mathrm{Ker}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ y $\mathrm{Coker}(f)$ son grupos conmutativos.

Si $\mathrm{Ker}(f)=0$, f se llama monomorfismo, si $\mathrm{Im}(f)=B$ f se llama epimorfismo, y si se cumplen ambas condiciones, f se llama isomorfismo. En este último caso escribiremos $A \cong B$.

Obsérvese que $\mathrm{Hom}(A,B) = \{f \mid f: A \to B,\ f \text{ homomorfismo}\}$ es un grupo conmutativo, con la operación $+$ definida por $(f+g)(x)= f(x)+g(x)$, $x \in A$.

Si G es un grupo conmutativo fijo y $f: A \to B$, entonces f induce $f^*: \mathrm{Hom}(B,G) \to \mathrm{Hom}(A,G)$, definido por $f^*(h)= h \circ f$, $h \in \mathrm{Hom}(B,G)$.

Definición (1.1.1). La sucesión $\cdots \to A_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n+1} \to \cdots$ de grupos y homomorfismos se llama exacta en A_n cuando $\mathrm{Im}(f_{n-1}) = \mathrm{Ker}(f_n)$, y se llama exacta cuando es exacta en A_n para todo n.

Ejemplo (1.1.2). $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ es exacta si y sólo si f es un monomorfismo, g un epimorfismo, y $\mathrm{Im}(f)= \mathrm{Ker}(g)$. Sucesiones tales como ésta se llaman sucesiones cortas, y serán utilizadas luego.

Proposición (1.1.3). Sea $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ exacta. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a) Existe $h: B \longrightarrow A$ tal que $h \circ f = I_A$ (identidad en A);

b) Existe $k: C \longrightarrow B$ tal que $g \circ k = I_C$;

c) $B = f(A) \oplus B'$ (suma directa), donde $g \mid B'$; $B' \longrightarrow C$ es un isomorfismo.

Demostración.

Probaremos primero que a) implica b).

Evidentemente, $h \mid Im(f) = f^{-1}$. Sea $z \in C$ y Y_z el coconjunto correspondiente a z, es decir $g(Y_z) = z$. Tomemos y Y_z y definamos $k(z) = y - f \circ h(y)$.

Veremos que $k(z)$ no depende de la elección de $y \in Y_z$. En efecto, si $y' \in Y_z$, $y' \neq y$, entonces por ser $f \circ h$ un homomorfismo, se cumple

$$\left[y'- f \circ h(y')\right] - \left[y - f \circ h(y)\right] = y'- y + f \circ h(y - y').$$

Pero $y'- y \in Im(f)$ y por lo tanto $h(y'- y) = f^{-1}(y'- y)$, de donde $y'- y + f \circ h(y-y')= 0$.

Resta ver que $g \circ k = I_C$. En efecto,

$$g \circ k(z) = g(y) - g \circ f \circ h(y) = z-0 = z,$$

puesto que $f \circ h(y) \in Im(f) = Ker(g)$.

Veremos ahora que b) implica c).

Definamos $B'= k(C)$. Todo $y \in Y_z$ puede escribirse $y= k(z)+y'$. Puesto que $g \circ k = I_C$, entondes $k(z) \in Y_z$ y por lo tanto $y' \in Im(f)$. Como todo $y \in B$ está en elgún Y_z, resulta $B = Im(f) \oplus B'$. Además, por ser $g \circ k = I_C$, resulta evidentemente $B' \cong C$ (el símbolo $\cong$ indica isomorfismo), y tal isomorfismo está realizado por g.

Finalmente, veremos que c) implica a).

Si $y \in B$, entonces $y=f(x)+y'$, $y' \in B'$. Definimos $h(y)=x$, es decir $h(y) = f^{-1}(y-y')$. Evidentemente, h es un homomorfismo.

Además $h \circ f = I_A$, puesto que si $x \in A$, $f(x)$ no tiene componente en B', y entonces $h \circ f(x) = f^{-1}(\ f(x)-0) = f^{-1} \circ f(x) = x$. ///[1]

Definición (1.1.4). Un grupo conmutativo F se llama libre cuando tiene una base, es decir, cuando existe un conjunto $\{e_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset F$ (I es un conjunto de índices) tal que todo $f \in F$ tiene una representación única $f = \sum_\alpha n_{\alpha,f}\, e_\alpha$ en términos de la base, con $n_{\alpha,f} \in Z$ (= conjunto de los enteros), y la suma $\sum_\alpha$ tiene un número finito de términos.

Proposición (1.1.5). Todo subgrupo de un grupo libre, es libre.

Proposición (1.1.6). Sea F libre y $0 \longrightarrow H \xrightarrow{h} G \xrightarrow{g} F \longrightarrow 0$ exacta. Entonces existe un monomorfismo $f\colon F \longrightarrow G$ tal que $g \circ f = I_F$ y $G \cong h(H) \oplus f(F)$.

Demostracion.

Para cada e_α de la base de F, sea Y_α su correspondiente coconjunto en G, es decir, $g(Y_\alpha)= e_\alpha$. Elegimos $y_\alpha \in Y_\alpha$ arbitrariamente, definimos $f(e_\alpha)= y_\alpha$ y extendemos f linealmente a todo F.

Evidentemente f es un monomorfismo y para todo $z = \sum_\alpha n_\alpha e_\alpha \in F$ se cumple

$$g \circ f(z) = g(\sum_\alpha n_\alpha y_\alpha) = \sum_\alpha n_\alpha e_\alpha = z,$$

es decir, $g \circ f = I_F$.

---

[1]: El símbolo /// indicará de ahora en adelante, el final de una demostración.

Además, para todo $y \in G$, llamando Y a su coconjunto por g, se puede escribir $y = y_0 + \bar{y}$, donde $\bar{y} = \sum_\alpha n_\alpha y_\alpha \in \mathrm{Im}(f)$ y $y_0 \in \mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Im}(h)$. Por lo tanto, $G \cong h(H) \oplus f(F)$.///

<u>Definición</u> (1.1.7). G es <u>inyectivo</u> si para cada monomorfismo $j: A \to B$ y homomorfismo $f: A \to G$, existe un homomorfismo $g: B \to G$ tal que $f = g \circ j$.

<u>Definición</u> (1.1.8). G es <u>proyectivo</u> si para cada epimorfismo $p: B \to C$ y homomorfismo $f: G \to C$, existe un homomorfismo $g: G \to B$ tal que $p \circ g = f$.

Es decir, G es inyectivo o proyectivo cuando existen g tales que, respectivamente, los siguientes diagramas -en donde las sucesiones horizontales son exactas- conmutan:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, dashed, "g"] \\ & G & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & G \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f"] & \\ B \arrow[r, "p"'] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Trataremos ahora de caracterizar a los grupos inyectivos y proyectivos.

<u>Definición</u> (1.1.9). G es <u>divisible</u> si para cada $n \in Z$ y $g \in G$, existe $h \in G$ (no necesariamente único) tal que $g = nh$.

<u>Proposición</u> (1.1.10). G es divisible si y sólo si es inyectivo.

Demostración.

Solamente nos interesará conocer más adelante (§1.5) la proposición "sólo si", de manera que nos restringiremos a ella.

Sea pues G divisible. $g = g_0$ estará bien definido en $j(A)$ mediante $g_0(b) = f \circ j^{-1}(b)$. Sea g_i una posible extensión de g_0 en C_i, $j(A) \subset C_i \subset B$. Tales g_i constituyen un conjunto parcialmente ordenado: es $g_i \prec g_j$ si $C_i \subset C_j$ y $g_j | C_i = g_i$. Tal conjunto tiene un elemento maximal $\bar{g}$ definido, de manera obvia, en $C = \bigcup_i C_i$ y tal que $\bar{g} | C_i = g_i$. En particular podría suceder que $\bar{g} = g_o$. Si fuera C=B la tesis estaría demostrada; supongamos entonces que $C \neq B$.

La tesis queda demostrada probando que cualquiera que sea el subgrupo C, $\bar{g}$ se puede extender a un subgrupo más grande. Sea C' el grupo generado por C y u, $u \notin C$, $u \in B$, u fijo. Extenderemos $\bar{g}$ a C'.

Si $b_1 \in C'$, se puede escribir $b_1 = b + nu$, $b \in C$, $n \in Z$ (la representación no es necesariamente única). Sea $Z'' = \{m \in Z \mid mu \in C\}$. Si Z" es vacío la extensión se hace definiendo g(u)=0. De lo contrario Z" tiene un generador $m_o \in Z$. Entonces

$$g(b+m_o u) = g(b)+z, \quad \text{con } z = g(m_o u)$$

tiene perfecto sentido por ser $m_o u \in C$. Definimos entonces

$$g(b_1) = g(b) + ny, \quad y \in G \text{ tal que } m_o y = z;$$

tal y existe por la hipótesis de la divisibilidad.

Hace falta ver que la definición dada no depende de la particular elección de la representación $b_1 = b + nu$. Una vez probado esto, es inmediato comprobar que g es un homomorfismo, y la demostración concluye.

Sea pues $b_1 = b' + n'u$ otra posible representación. Será $b' - b = (n - n')u$, lo cual implica $n - n' \in Z''$, $(n-n')/m_o \in Z$ y $g(b'-b) = ((n-n')/m_o)z = (n-n')y$. Entonces

$$g(b') - g(b_1) = g(b') - g(b) - ny = (n-n')y - ny = -n'y,$$

o sea, $g(b_1) = g(b') + n'y$. ///

Proposición (1.1.11). G es libre si y sólo si es proyectivo.

Demostración.

Sólo utilizaremos (en (2.1.5)) la proposición "sólo si", de manera que nos restringiremos a ella.

Sea pues G libre. Todo $x \in G$ tiene una representación única $x = \sum n_\alpha e_\alpha$, e_α perteneciente a la base de G.

Definimos $g(e_\alpha) = b_\alpha$ donde $b_\alpha \in B$ es cualquier elemento que satisface $f(e_\alpha) = p(b_\alpha)$; tal b_α existe por ser p un epimorfismo. Luego estendemos g a todo G mediante $g(x) = \sum n_\alpha b_\alpha$. Entonces g es un homomorfismo, y además $p \circ g = f$, puesto que

$$f(x) = \sum n_\alpha f(e_\alpha) = \sum n_\alpha p(b_\alpha) = p(\sum n_\alpha b_\alpha) =$$
$$p(g(x)) = p \circ g(x). \;///$$

Daremos ahora una aplicación de los conceptos recientemente definidos.

Proposición (1.1.12). Si $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ es exacta, entonces $0 \to \mathrm{Hom}(G,A) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}(G,B) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}(G,C)$ es exacta.

Demostración.

Debemos probar que: a) f^* es monomorfismo; b) $\mathrm{Im}(f^*) = \mathrm{Ker}(g^*)$

a) Sea $h \in \mathrm{Hom}(G,A)$ tal que $f^*(h) = 0$. Esto significa $f \circ h = 0$ o $f(h(x)) = 0$ para todo $x \in G$. Por ser f monomorfismo, resulta de aquí que $h(x) = 0$, $x \in G$, o sea $h=0$.

b) Supongamos primero que $h' \in \mathrm{Im}(f^*)$, es decir $h' = f^*(h)$, $h \in \mathrm{Hom}(G,A)$. Entonces $g^*(h') = g \circ h' = g \circ f \circ h = 0$, puesto que para todo $x \in G$ es $f(h(x)) \in \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(g)$. Entonces $h' \in \mathrm{Ker}(g^*)$.

Recíprocamente, sea $h' \in \mathrm{Ker}(g^*)$, es decir $g^*(h')=0$, o sea $g \circ h' = 0$. Esto es, si $x \in G$, $h'(x) \in \mathrm{Ker}(g)$ y por lo tanto

$h'(x) \in \mathrm{Im}(f)$, es decir $h'(x) = f \circ h(x)$, $h \in \mathrm{Hom}(G,A)$, o sea $h' = f^*(h)$, por lo cual $h' \in \mathrm{Im}(f^*)$. ///

Obsérvese que aunque en la hipótesis de (1.1.12) se suponga que $0 \to A \to B \to C \to 0$ es exacta, de esto no se deduce que $0 \to \mathrm{Hom}(G,A) \to \mathrm{Hom}(G,B) \to \mathrm{Hom}(G,C) \to 0$ lo sea. Si g es un epimorfismo, entonces $z \in C$ implica $z = g(y)$, $y \in B$. Sea $\ell \in \mathrm{Hom}(G,C)$; entonces $\ell(t) = g(y)$, $t \in G$. De esto no se deduce que $y = k(t)$, $k \in \mathrm{Hom}(G,B)$. En cambio:

<u>Proposición</u> (1.1.13). Si G es proyectivo y $0 \to A \to B \to C \to 0$ es exacta, entonces $0 \to \mathrm{Hom}(G,A) \to \mathrm{Hom}(G,B) \to \mathrm{Hom}(G,C) \to 0$ es exacta.

La demostración es inmediata; basta aplicar la definición de proyectividad.

-o-

§1.2. <u>Homología singular</u>.

En el espacio euclídeo de n dimensiones $E_n = \{x \mid x = (x^1, \ldots, x^n),\ x^i \text{ número real}\}$ sea:

$A_0 = (0,\ldots,0)$, y $A_i = (0,\ldots,1,\ldots,0)$, $i=1,\ldots,n$, el punto cuyas coordenadas son nulas excepto la i-ésima, que vale 1.

<u>Definición</u> (1.2.1). El <u>p-simple standard</u> Δ_p es la cápsula convexa de los puntos $A_0, A_1, \ldots, A_p$, $p \leq n$; se usará la notación $\Delta_p = (A_0, \ldots, A_p)$.(1)

El número p se llama dimensión de Δ_p. Evidentemente Δ_0 es un punto, Δ_1 un segmento, Δ_2 un triángulo, etc. En general, $\Delta_p \subset E_p$.

(1): En rigor, Δ_p depende también de n, de manera que habría que utilizar, por ejemplo, la notación Δ_p^n. Se puede evitar esto suponiendo que el Δ_p del texto es el Δ_p^p

<u>Definición</u> (1.2.2). Se llama <u>p-simple afín</u> en E_n a una transformación afín $\varphi: \mathcal{S}_p \to E_n$.

Recordamos que una transformación afín es una composición de una transformación lineal y de una traslación, y que toda transformación afín transforma hiperplanos de cualquier dimensión en hiperplanos de dimensión igual o menor.

Un simple afín está pues determinado por las imágenes de los vértices del simple standard del cual proviene. Si $\varphi(A_i)= B_i$, designaremos $(B_o, B_1,\ldots,B_p)$ al simple afín considerado.

En particular, $\mathcal{S}_p$ es un simple afín.

Utilizaremos la notación $(B_o,\ldots,\hat{B}_i,\ldots,B_p)$ para designar al simple $(B_o,\ldots,B_{i-1}, B_{i+1},\ldots, B_p)$, es decir, el símbolo $\wedge$ sobre un vértice indica que tal vértice debe suprimirse.

<u>Definición</u> (1.2.3). <u>Cara i</u> de $\mathcal{S}_p$ es el simple afín de dimensión p-1 $a^{(i)}_{p-1}= (A_o,\ldots, \hat{A}_i,\ldots, A_p)$.

<u>Definición</u> (1.2.4). Una <u>p-cadena afín</u> en E_n es una combinación lineal finita de p-simples afines, con coeficientes en los reales E.

Es decir, toda p-cadena afín se escribe de la manera $c_p= \sum_i \lambda_i\, \sigma^i_p$, donde σ^i_p son p-simples afines y λ_i números reales. Las combinaciones lineales de que hablamos deben entenderse como una "suma formal", y no pretendemos darle significación intuitiva.

<u>Definición</u> (1.2.5). <u>Borde</u> de $\mathcal{S}_p$ es la p-1-cadena afín $\partial \mathcal{S}_p = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i\, (A_o,\ldots,\hat{A}_i,\ldots A_p)$. En particular $\partial \mathcal{S}_o = \emptyset$.

En lo sucesivo, designaremos con X a un espacio topológico cualquiera.

Definición (1.2.6). Un p-simple singular en X es una función continua $\varphi_p : \mathcal{S}_p \to X$. Una p-cadena singular en X es una combinación lineal finita de p-simples singulares, con coeficientes en los enteros Z.

En lo sucesivo omitiremos la palabra "singular" cuando no haya lugar a confusión.

Si definimos como suma de dos cadenas $\Phi_p = \sum_i n_i \varphi_p^i$ y $\Psi_p = \sum_i m_i \psi_p^i$ a la cadena

$$\Phi_p + \Psi_p = \sum_i n_i \varphi_p^i + \sum_i m_i \psi_p^i ,$$

resulta que el conjunto de las p-cadenas se transforma en un grupo libre conmutativo. Lo designaremos con $C_p(X)$ o simplemente con C_p. La base de tal grupo libre está constituída por los p-simples.

El soporte del simple φ_p es el conjunto $\sigma_p = \varphi_p(\mathcal{S}_p)$. Por abuso de lenguaje diremos que σ_p es un p-simple, pero esto no es completamente correcto. Por ejemplo, si dos simples tienen el mismo soporte no son necesariamente iguales.

Definición (1.2.7). Borde del p-simple $\sigma_p = \varphi_p \mathcal{S}_p$ es la p-1-cadena $\partial\sigma_p = \varphi_p(\partial\mathcal{S}_p)$.

En otras palabras, el borde de φ_p se obtiene restringiendo φ_p al borde de $\mathcal{S}_p$.

El operador borde $\partial : \sigma_p \to \partial\sigma_p$ se extiende por linealidad a todo C_p, con lo cual se obtiene un homomorfismo

$$\partial : C_p \longrightarrow C_{p-1}.$$

Cuando haya lugar a confusión conviene poner ∂_p en lugar de ∂.

Proposición (1.2.8). $\partial\partial = 0$.

Demostración.

Puesto que $\partial(\partial\sigma_p) = \partial(\varphi_p(\partial\delta_p)) = \varphi_p(\partial\partial\delta_p)$, el problema se reduce a probar $\partial\partial\delta_p = 0$. Se tiene:

$$\partial\partial\delta_p = \sum_{j=0}^{p}(-1)^j\ \partial(A_0,\ldots,\hat{A}_j,\ldots,A_p) =$$

$$\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\Big\{\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^i(A_0,\ldots,\hat{A}_i,\ldots,\hat{A}_j,\ldots,A_p) +$$

$$+\sum_{i=j+1}^{p}(-1)^{i-1}(A_0,\ldots,\hat{A}_j,\ldots,\hat{A}_i,\ldots,A_p)\Big\},$$

lo cual es nulo por cancelarse sumandos con coeficientes opuestos.///

Definición (1.2.9). Sea $c_p \in C_p$. c_p se llama p-ciclo si $\partial c_p=0$, y se llama p-borde si $c_p = \partial c_{p+1}$, para algún $c_{p+1} \in C_{p+1}$.

Los conjuntos de los p-ciclos y p-bordes son evidentemente subgrupos de C_p, en virtud de la linealidad de ∂. Los designaremos respectivamente con $\mathring{C}_p$ y ∂C_{p+1}, de manera que

$$\mathring{C}_p = \mathrm{Ker}(\partial_p)\ ;\qquad \partial C_{p+1} = \mathrm{Im}(\partial_{p+1}).$$

La proposición (1.2.8) asegura que $\partial C_{p+1} \subset \mathring{C}_p$, de manera que ∂C_{p+1} es un subgrupo de $\mathring{C}_p$. Además, tanto ∂C_{p+1} como $\mathring{C}_p$ son libres, en virtud de (1.1.5).

La sucesión

$$0 \longrightarrow \mathring{C}_p \xrightarrow{i} C_p \xrightarrow{\partial} \partial C_p \longrightarrow 0$$

donde i es la inmersión, es exacta, y además $\partial C_p \cong C_p / \overset{\circ}{C}_p$, de manera que aplicando (1.1.6) concluimos que $C_p \cong \overset{\circ}{C}_p \oplus D_p$, con $D_p \cong \partial C_p$.

La siguiente es la definición fundamental de este párrafo.

<u>Definición</u> (1.2.10). $H_p = H_p(X;Z) = \overset{\circ}{C}_p / \partial C_{p+1}$ es el <u>p-grupo singular de homología</u> del espacio X con coeficientes en Z.

-o-

§ 1.3. <u>Cohomología singular</u>.

Una función f^p que asigna a cada p-simple σ_p de X un número real, será llamada una <u>p-cocadena</u>. Tal función se puede extender linealmente a todo C_p, obteniéndose así un homomorfismo de C_p en los reales E. Con la definición obvia $(f^p+g^p)(\sigma_p) = f^p(\sigma_p) + g^p(\sigma_p)$, el conjunto de p-cocadenas queda convertido en un grupo conmutativo.

Más generalmente, f^p puede hacer corresponder a cada $\sigma_p \subset X$ un elemento de un grupo conmutativo cualquiera G, no necesariamente E. Esto conduce a la siguiente

<u>Definición</u> (1.3.1). Sea G un grupo conmutativo. $C^p = C^p(X;G) = \mathrm{Hom}(C_p(X), G)$ es el grupo de las <u>p-cocadenas</u> en X con coeficientes en G.

El operador borde $\partial : \mathcal{C}_{p+1} \to \mathcal{C}_p$ induce el operador dual $\partial^* : C^p \to C^{p+1}$, definido por

$$\partial^* f^p(c_{p+1}) = f^p(\partial c_{p+1}).$$

<u>Definición</u> (1.3.2). $\delta = \partial^* : C^p \to C^{p+1}$ es el <u>operador coborde</u>.

<u>Definición</u> (1.3.3). Sea $f \in C^p$. f se llama <u>p-cociclo</u> si $\delta f=0$, y se llama <u>p-coborde</u> si $f=\delta g$, con algún $g \in C^{p-1}$.

Es trivial comprobar que los conjuntos de los p-cociclos $\mathring{C}^p$ y de los p-cobordes δC^{p-1} forman grupo, y es

$$\mathring{C}^p = \mathrm{Ker}(\delta_p) \ ; \qquad \delta C^{p-1} = \mathrm{Im}(\delta_p).$$

Además, de $\partial\partial=0$ resulta inmediatamente que $\delta\delta=0$, lo cual asegura que δC^{p-1} es un subgrupo de $\mathring{C}^p$.

<u>Definición</u> (1.3.4). $H^p = H^p(X;G) = \mathring{C}^p / \delta C^{p-1}$ es el <u>p-grupo singular de cohomología</u> de X con coeficientes en G.

Esta definición sólo tiene sentido para $p>0$. Si $p=0$ es $\delta C^{p-1} = \emptyset$, y se define $H^o = \mathring{C}^o$.

-o-

§1.4. <u>Invariancia topológica de H_p y H^p.</u>

Sea $\phi : X \rightarrow Y$ una función continua entre espacios topológicos X e Y.

Por composición, ϕ induce una transformación entre los simples de X y los de Y, definida como

$$(\phi_\# \varphi_p)\ (\Delta_p) = (\phi \circ \varphi_p)\ (\Delta_p),$$

la cual se extiende por linealidad a las cadenas de manera que

$$\phi_\# : C_p(X) \rightarrow C_p(Y).$$

Probaremos que $\partial\phi_\# = \phi_\#\partial$, es dedir, que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} C_p(X) & \xrightarrow{\phi_\#} & C_p(Y) \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ C_{p-1}(X) & \xrightarrow{\phi_\#} & C_{p-1}(Y) \end{array}$$

es conmutativo.

Evidentemente, basta probarlo para los generadores de C_p, es decir, para los simples $\sigma_p = \varphi \delta_p$.

Se tiene:

$$\partial \phi_{\#} \sigma_p = \partial (\phi \circ \varphi) \delta_p = (\phi \circ \varphi) \partial \delta_p = \phi_{\#} \varphi (\partial \delta_p) = \phi_{\#} \partial \sigma_p \, .$$

Análogamente, ϕ induce el dual de $\phi_{\#}$

$$\phi^{\#} : C^p(Y) \longrightarrow C^p(X)$$

definido mediante $\phi^{\#} f^p(\sigma_p) = f^p(\phi_{\#} \sigma_p)$ en los simples y extendido por linealidad.

De $\partial \phi_{\#} = \phi_{\#} \partial$ y de la definición de $\phi^{\#}$ resulta inmediatamente $\delta \phi^{\#} = \phi^{\#} \delta$.

Por conmutar con ∂ resulta que $\phi_{\#}$ conserva ciclos y bordes, y por consiguiente induce

$$\phi_* : H_p(X;Z) \longrightarrow H_p(Y;Z).$$

Análogamente, $\phi^{\#}$ conserva cociclos y cobordes, y por lo tanto induce

$$\phi^* : H^p(Y;G) \longrightarrow H^p(X;G).$$

Si se tienen dos funciones continuas $X \xrightarrow{\phi} Y \xrightarrow{\psi} W$ entre tres espacios, se obtiene inmediatamente que

$$(\psi \circ \phi)_* = \psi_* \circ \phi_* \, ; \quad (\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^* .$$

En particular, si W=X, ϕ es un homeomorfismo y $\psi = \phi^{-1}$, resulta que $\psi \circ \phi$, $\psi_* \circ \phi_*$ y $\phi^* \circ \psi^*$ son identidades, lo cual prueba que:

<u>Proposición</u> (1.4.1). $H_p(X;Z)$ y $H^p(X;G)$ son invariantes topológicos.

No debe pensarse que la recíproca de esta proposición es verdadera. Es decir, $H_p(X;Z) = H_p(Y;Z)$ y $H^p(X;G) = H^p(Y;G)$ no implica que X e Y sean homeomorfos. Esto dice que los grupos de homología y cohomología son insuficientes para caracterizar topológicamente a un espacio.

En realidad, para que X e Y tengan los mismos grupos H_p y H^p basta que sean homotópicamente equivalentes, sin necesidad de ser homeomorfos. No probaremos esta afirmación -pues no la necesitaremos-, pero trataremos de aclarar su sentido.

Definición (1.4.2). Dos funciones f_1, f_2: $X \to X$ se llaman homotópicamente equivalentes si existe una función continua f: $X \times I \to X$ (donde $I = [0,1]$) tal que $f_1 = f | X \times \{0\}$ y $f_2 = f | \{X \times \{1\}$ ('). En símbolos, $f_1 \simeq f_2$.

Definición (1.4.3). X e Y se llaman homotópicamente equivalentes si existen f: $X \to Y$ y g: $Y \to X$ tales que $g \circ f \simeq I_X$ (= identidad en X) y $f \circ g \simeq I_Y$.

De esta definición surge trivialmente que si X e Y son homeomorfos, entonces son homotópicamente equivalentes. Basta elegir f un homeomorfismo y $g = f^{-1}$.

La recíproca no es cierta. Así por ejemplo, una esfera en E_n es homotópicamente equivalente a su centro, pero no es homeomorfa a él.

Lo afirmado más arriba se expresa más claramente así:

('): Dada una función g definida en un conjunto A, y B un subconjunto de A, se designa $g|B$ a la restricción de g en B.

<u>Proposición</u> (1.4.4). Si X e Y son homotópicamente equivalentes con $f: X \to Y$ (cf. 1.4.3), entonces $f: H_p(X;Z) \to H_p(Y;Z)$ y y $f: H^p(Y;G) \to H^p(X;G)$ son isomorfismos.

-o-

§ 1.5. Relación entre H_p y H^p.

En §1.3 hemos definido el grupo de cocadenas como

$$C^p(X;G) = \mathrm{Hom}(\, C_p(X);\, G).$$

Es nuestro propósito ahora ver bajo qué condiciones se puede afirmar que

$$H^p(X;G) \cong \mathrm{Hom}\,(\, H_p(X);G).$$

<u>Proposición</u> (1.5.1). Una cocadena es un cociclo si y sólo si se anula en los bordes.

Demostración.

Sea $f^p \in \mathring{C}^p$, es decir, $\delta f^p = 0$. Entonces $f^p(\partial c_{p+1}) = \delta f^p(c_{p+1}) = 0$.

Recíprocamente, si $f^p(\partial c_{p+1}) = 0$ para todo $c_{p+1} \in C_{p+1}$, resulta $\delta f^p(c_{p+1}) = 0$, es decir, $\delta f^p = 0$. ///

<u>Proposición</u> (1.5.2). Si una cocadena es un coborde, entonces se anula en los ciclos.

Demostración.

Sea $f^p = \delta g^{p-1}$ y $\partial c_p = 0$. Entonces
$f^p(c_p) = \delta g^{p-1}(c_p) = g^{p-1}(\partial c_p) = 0$. ///

Como vemos, (1.5.1) caracteriza completamente los cociclos, pero (1.5.2) sólo da una condición necesaria para que una cadena sea un coborde. La propiedad de una cocadena de anularse en los ciclos no asegura que sea un coborde, en general.

Veamos qué significa la afirmación cuestionada. Precisamente, que si $f^p \in C^p(X;G)$ y $f^p(c_p) = 0$ para todo $c_p \in \mathring{C}_p(X)$, entonces existe $g^{p-1} \in C^{p-1}(X;G)$ tal que $f^p = \delta g^{p-1}$.

Ante todo, g_0^{p-1} está bien definida en $\partial C_p \subset C_{p-1}$ mediante $g^{p-1}(\partial c_p) = f^p(c_p)$.

El problema consiste en extender g^{p-1} a todo C_{p-1}. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \partial C_p \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g^{p-1}"'] & C_{p-1} \arrow[dl, dashed] \\ & G & \end{tikzcd}$$

donde i es el monomorfismo de inmersión. Vemos que si G es inyectivo ((1.1.7)) entonces tal extensión se puede hacer y resulta $\bar{g}^{p-1}$ definido en todo C_{p-1}. Además $f^p = \delta \bar{g}^{p-1}$ puesto que $\delta g^{p-1}(c_p) = f^p(c_p)$, por definición de g^{p-1}. Usando (1.1.10) obtenemos pues:

<u>Proposición</u> (1.5.3). Si G es divisible y si una cocadena se anula en los ciclos, entonces es un coborde.

En particular, el grupo E de los reales, en el cual estaremos especialmente interesados, es divisible.

Consideremos ahora el problema que nos hemos propuesto al comienzo del párrafo.

Sea $f^p \in \mathring{C}^p$ y $c_p \in \mathring{C}_p$. En virtud de (1.5.1) y (1.5.2) se cumple, para cualquier $g^{p-1} \in C^{p-1}$ y $c_{p+1} \in C_{p+1}$,

$$f^p(c_p) = (f^p + \delta g^{p-1})(c_p + \partial c_{p+1}),$$

es decir, $f^p(c_p)$ sólo depende de la clase de homología $\{c_p\}$ de c_p y de la clase de cohomología $\{f^p\}$ de f^p.

Entonces $f^p(c_p)$ determina una función bilineal

$$H^p(X;G) \times H_p(X;Z) \longrightarrow G$$

definida mediante

$$(\{f^p\}, \{c_p\}) \longrightarrow f^p(c_p).$$

Dicho de otra manera, queda definida una función lineal

$$H^p(X;G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_p(X;Z);G)$$

mediante

$$\{f^p\} \longrightarrow (\{c_p\} \longrightarrow f^p(c_p)).$$

Sabemos (§1.2) que $\overset{c}{C}_p$, sobre el cual esta función se define (usando f^p en lugar de $\{f^p\}$) es un sumando directo de C_p, siendo $C_p = \overset{o}{C}_p \oplus D_p$. Entonces podemos extender trivialmente a tal función a todo C_p, mediante $\{f^p\}(D_p) = 0$, de manera que

$$H^p(X;G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(H_p(X;Z);G)$$

se convierte en un epimorfismo.

Si ahora suponemos que G es divisible, entonces el núcleo del epimorfismo se reduce a 0, en virtud de (1.5.3), y obtenemos:

Proposición (1.5.4). Si G es divisible, entonces $H^p(X;G) \cong \mathrm{Hom}(H_p(X;Z);G)$.

En particular, tal isomorfismo existe si $G=E$ es el grupo de los reales.

—o—

§1.6. Grupos de De Rham en variedades diferenciables.

Consideraremos ahora el caso en que el espacio topológico X considerado en §1.2-5 sea una variedad diferenciable M de n dimensiones. Todo lo dicho sobre X vale en este caso particular, de manera que, por ejemplo, los grupos de homología y cohomología singular, $H_p(M;Z)$ y $H^p(M;G)$ están bien definidos. Pero ahora aparecen nuevos problemas a considerarse.

Por ejemplo, podría modificarse la definición de simple singular de la siguiente manera:

Definición (1.6.1). Un p-símple diferenciable en M es una función diferenciable $\varphi_p : \delta_p \rightarrow M$.

Dicho en forma un poco más precisa, suponemos que φ_p está definida y es diferenciable en un entorno de δ_p, y consideramos su restricción a δ_p.

Partiendo de esta definición pueden considerarse cadenas diferenciables; en tal caso se supone que las cadenas tienen coeficientes en los reales E; luego se definen análogamente que antes los ciclos y bordes diferenciables, obteniéndose finalmente los grupos de homología diferenciable con coeficientes en los reales de la variedad M, designados con $H_p(M;E) = H_p(M)$.
Se demuestra -cosa que no haremos aquí- que tales grupos son isomorfos a los de homología singular, cuando se toman iguales coeficientes.

Más profundas modificaciones se consiguen cuando se considera la cohomología de M. De esto nos ocuparemos ahora. En el tratamiento que veremos, no surgirá a primera vista la relación con con la cohomología de M, pero más tarde veremos -y éste es uno de los principales objetivos de este curso- que ambas teorías son equivalentes en un cierto sentido.

Designaremos con $\alpha, \beta, \ldots$ a formas diferenciales -las llamaremos formas, simplemente- en M; un índice indicará el grado de la forma. Designamos con $F^p = F^p(M)$ al conjunto de las formas de grado p, y $F = F(M) = \sum_{p=0}^{n} F^p$. La suma y el producto exterior de formas convierte a F en un álgebra.

La homología que usaremos será la diferenciable.

Una herramienta fundamental en lo que sigue será el siguiente teorema, que suponemos conocido.

<u>Proposición</u> (1.6.1). (Teorema de Stokes). Si $\alpha \in F^p(M)$ y $c \in C_{p+1}(M)$, entonces

$$\int_c d\alpha = \int_{\partial c} \alpha ,$$

donde $d\alpha$ designa a la diferencial de α.

Antes de seguir adelante, notemos que la analogía entre formas y cocadenas viene dada por el hecho de que a toda forma α^p le corresponde una cocadena f^p de la manera

$$\alpha^p \longrightarrow f^p(c_p) = \int_{c_p} \alpha^p .$$

De manera que, por la fórmula de Stokes, el operador δ para formas coincide con d.

La definición análoga a la de cociclos y cobordes es la siguiente:

<u>Definición</u> (1.6.2). Una forma α se llama <u>cerrada</u> cuando $d\alpha = 0$, y se llama <u>exacta</u> cuando $\alpha = d\beta$, para alguna forma β.

Designamos $\overset{\circ}{F}{}^p$ al conjunto de las p-formas cerradas, dF^{p-1} al conjunto de las p-formas exactas. Además, $\overset{\circ}{F} = \sum_p \overset{\circ}{F}{}^p$ y

$dF = \sum_p dF^{p-1}$. Todos estos conjuntos son subespacios vectoriales de F, y la igualdad dd=0 asegura que $dF^{p-1} \subset \overset{\circ}{F}{}^p$.

De la igualdad $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$, donde p es el grado de α, se deduce que $\overset{\circ}{F}$ es una subálgebra de F. Asimismo, dF es un ideal de $\overset{\circ}{F}$, puesto que si $\alpha \in dF$ y $\beta \in \overset{\circ}{F}$ se obtiene, escribiendo $\alpha = d\gamma$:

$$\alpha \wedge \beta = d\gamma \wedge \beta = d(\gamma \wedge \beta),$$

en virtud de que $d\beta = 0$.

<u>Definición</u> (1.6.3). $R^p(M) = \overset{\circ}{F}{}^p / dF^{p-1}$ es el <u>p-grupo de De Rham</u> de la variedad diferenciable M (p=1,...,n).

Esta definición no tiene sentido para p=0; en tal caso se define $R^0(M) = \overset{\circ}{F}{}^0$.

Examinaremos ahora un poco más de cerca la relación entre los grupos de De Rham y la cohomología de M cuando el grupo G de coeficientes de esta última es el de los reales E.

Cada p-forma α define una cocadena $f^p = J\alpha$ mediante

$$f^p(c_p) = J\alpha(c_p) = \int_{c_p} \alpha , \qquad c_p \in C_p,$$

de manera que

$$J; \; F^p(M) \longrightarrow C^p(M;E);$$

evidentemente, J es lineal.

Veremos que $Jd = \delta J$. En efecto, para cualquier $\alpha \in F^p$ y cualquier $c \in C_{p+1}$, se cumple;

$$J(d\alpha)(c) = \int_c d\alpha = \int_{\partial c} \alpha = J\alpha(\partial c) = \delta(J\alpha)(c).$$

Entonces $d\alpha = 0$ implica $\delta J\alpha = 0$ y $\alpha = d\beta$ implica

$J\alpha = \delta J\beta$, es decir, J transforma formas cerradas en cociclos y formas exactas en cobordes:

$$J: \overset{o}{F}^p \longrightarrow \overset{o}{C}^p \quad ; \quad J: dF^{p-1} \longrightarrow \delta C^{p-1}.$$

Entonces J induce un homomorfismo

$$J_*: \; R^p(M) \longrightarrow H^p(M;E).$$

El teorema de De Rham, uno de los principales objetivos de este curso, demuestra que en realidad J_* es un isomorfismo, de manera que

$$R^p(M) \cong H^p(M;E).$$

Esto muestra nada menos que las propiedades topológicas (hasta tanto, claro está, que estén caracterizadas por la cohomología) de una variedad están determinadas por las propiedades analíticas de sus formas diferenciales.

En virtud de (1.5.4) el teorema de De Rham se puede enunciar

$$R^p(M) \cong \mathrm{Hom}(H_p(X;E);E),$$

esdecir, todos los homomorfismos de H_p están dados por formas diferenciales.

Obsérvese también que el teorema de De Rham implica que la posibilidad de resolver la ecuación diferencial $\alpha = d\beta$ (β incógnita) depende de las propiedades topológicas de la variedad.

-o-

§ 1.7. Trivialidad local de los grupos H_p, H^p y R^p.

Daremos ahora el primer paso en el camino de la demostración del teorema de De Rham. Probaremos que si $p > 0$, entonces cada punto de la variadad diferenciable M tiene un entorno suficientemente pequeño tal que considerado como una subvariedad diferenciable de M, los correspondientes grupos H_p, H^p y R^p se reducen al elemento 0. En el caso de H_p y H^p esta propiedad vale también en otros espacios topológicos. Este resultado por lo menos en el caso de una variedad M- era de esperar, puesto que se cumplen las condiciones de integrabilidad (= es cerrada) entonces deriva de un potencial (=es exacta); este resultado está en cualquier libro de Cálculo) y toda variedad se comporta "en pequeño" como E_n.

Hay que demostrar pues que "en pequeño" todo ciclo es un borde, todo cociclo es un coborde, y toda forma cerrada es exacta.

Demostraremos algo más que el hecho de que la propiedad se cumple para algún entorno de cada punto; la demostraremos en el caso de que el entorno sea un conjunto contractible al punto en el sentido siguiente:

Definición (1.7.1). Un conjunto $U \subset X$ es contractible al punto $\theta \in U$ cuando U y θ son homotópicamente equivalentes (cf. 1.4.3).

Es decir, debe existir una función continua $\phi : U \times I \to U$ ($I=[0,1]$) tal que $\phi(x,1)= x$ y $\phi(x,0)= \theta$, para todo $x \in U$. ϕ se llama contracción.

En particular, si $M= E_n$ y U es estrellado con respecto a θ -es decir, si para cada $x \in U$ se cumple que el segmento $[\theta,x]$ está en U-, entonces U es contractible. Como contracción puede tomarse a $\phi:\{(x^1,\dots,x^n),t\} \longrightarrow (x_0^1 + t(x^1 -x_0^1),\dots, x_0^n + t(x^n -x_0^n)$ donde $(x_0^1,\dots,x_0^n)= \theta$.

El caso $p=0$ presenta diferencias, y será considerado separadamente.

Comenzaremos con H_p.

<u>Proposición</u> (1.7.2). Si $U \subset X$ es contractible al punto $\theta \in U$, entonces $H_p(U) = 0$ para $p > 0$.

Demostración.

Hay que probar que todo ciclo definido en U es un borde, es decir $\partial c_p = 0$ implica $c_p = \partial c_{p+1}$, para $c_p \in C_p(U)$, $p > 0$.

La demostración se hará así: se encontrará un operador $K: C_p(U) \to C_{p+1}(U)$, $p > 0$, tal que

$$\partial K + K\partial = \text{identidad, para } p \geq 1.$$

Una vez demostrado esto el resto es trivial, puesto que si $c_p \in \overset{o}{C}_p(U)$ se obtiene inmediatamente $\partial K c_p = c_p$, es decir, $c_p \in \partial C_{p+1}$. Entonces $\overset{o}{C}_p = \partial C_{p+1}$ y $H_p(U) = 0$.

El problema se reduce pues a encontrar K; su construcción, por razones intuitivas, se llama "construcción del cono".

Consideremos en primer lugar el simple standard $\mathcal{S}_p$ en E_n.

Si $(B_o, \ldots, B_p)$ es un p-simple afín en E_n y A un punto diferente de los B_i, definimos el operador A mediante $A(B_o, \ldots, B_p) = (A, B_o, \ldots, B_p)$, y lo extendemos a las cadenas afines por linealidad. Entonces A transforma p-cadenas afines en p+1-cadenas afines.

Ahora bien:

$$\mathcal{S}_{p+1} = (A_o, \ldots, A_{p+1}) = A_o(A_1, \ldots, A_{p+1}) = A_o\, a_p^{(o)},$$

donde $a_p^{(o)}$ es la cara 0 de $\mathcal{S}_{p+1}$. Entonces:

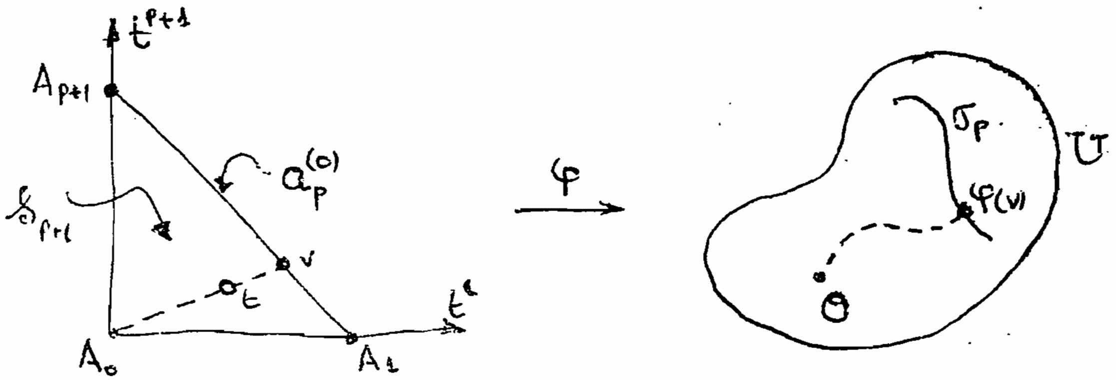
$$\partial \mathcal{S}_{p+1} = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j (A_0, \ldots, \hat{A}_j, \ldots, A_{p+1}) =$$
$$= (A_1, \ldots, A_{p+1}) - \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j-1} A_0 (A_1, \ldots, \hat{A}_j, \ldots, A_{p+1}) =$$
$$= a_p^{(o)} - A_0 \partial a_p^{(o)}.$$

En consecuencia,

$$\partial A_0 a_p^{(o)} + A_0 \partial a_p^{(o)} = a_p^{(o)}.$$

Es decir, en el caso particular de la cadena $a_p^{(o)}$, K se reduce al operador A_0.

Consideremos ahora el caso general de un p-simple σ_p en $U \subset X$. Si $\varphi: a_p^{(o)} \longrightarrow \sigma_p$, entonces $\sigma_p = \varphi_* a_p^{(o)}$



Extenderemos la función φ a un p+1- simple

$$\bar{\varphi} : \mathcal{S}_{p+1} \to U$$

de manera que $\bar{\varphi} \,|\, a_p^{(o)} = \varphi$.

Sea v un punto cualquiera de $a_p^{(o)}$ e $I = [0 \leq t \leq 1] \to [A_0, v]$ una parametrización lineal del segmento $[A_0, v]$.

Definimos $\bar{\varphi}: \mathcal{S}_{p+1} \to U$ mediante

$$\bar{\varphi}(v,t) = \Phi(\varphi(v), t),$$

donde Φ es una contracción de U; evidentemente se cumple

$$\bar{\varphi}(v,1) = \varphi(v); \quad \bar{\varphi}(v,0) = \theta.$$

Definimos $K\sigma_p$ mediante

$$K\sigma_p \triangleq \sigma_{p+1} = \bar{\varphi}_* \delta_{p+1} = \bar{\varphi}_* A_o a_p^{(o)},$$

y extendemos K linealmente a todo $C_p(U)$.; entonces

$$K: C_p(U) \to C_{p+1}(U)$$

es un homomorfismo, y se cumple

$$\partial K\sigma_p = \partial \bar{\varphi}_* \delta_{p+1} = \bar{\varphi}_* \partial \delta_{p+1} = \bar{\varphi}_* \; \partial A_o \; a_p^{(\theta)} = \bar{\varphi}_*(a_p^{(o)} - A_o \partial a_p^{(o)});$$

$$K\partial\sigma_p = \bar{\varphi}_*(A_o \; \partial a_p^{(o)}).$$

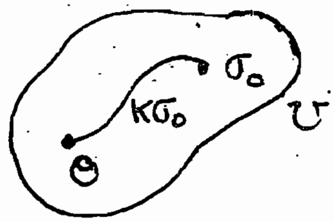
Entonces,

$$\partial K \sigma_p + K\partial\sigma_p = \bar{\varphi}_* a_p^{(o)} = \sigma_p,$$

relación que se extiende linealmente a todo $C_p(U)$, y por consiguiente $\partial K + K\partial$ = identidad, en $C_p(U)$.///

Considermos ahora el caso $p = 0$. Un 0-simple en U tiene como imagen a un punto $\sigma_o \in U$, y se cumple

$$\partial \sigma_o = 0 \; ; \quad \partial K \sigma_o = \sigma_o - \theta.$$



Para una 0-cadena $c_o = \sum_i \lambda_i \sigma_o^{(i)}$ resulta por linealidad:

$$Kc_o = \sum_i \lambda_i K \sigma_o^i \; ; \quad \partial K c_o = \sum_i \lambda_i (\sigma_o^i - \theta) = c_o - \sum_i \lambda_i \; \theta.$$

Notemos que c_o es un borde si y sólo si $\sum_i \lambda_i = 0$. Entonces dos 0-ciclos son homólogos si y sólo si sus $\sum_i \lambda_i$ son iguales. En consecuencia:

<u>Proposición</u> (1.7.3). $H_o(U;Z) = Z$; $H_o(U;E) = E$.

Pasemos ahora a H^p. También consideraremos en primer lugar el caso $p > 0$.

<u>Proposición</u> (1.7.4). Si $U \subset X$ es contractible al punto θ, entonces $H^p(U) = 0$ para $p > 0$.

Demostración.

Definimos el operador dual de K,

$$K^*: C^{p+1}(U) \longrightarrow C^p(U),$$

mediante

$$K^* f^{p+1}(\sigma_p) = f^{p+1}(K\sigma_p).$$

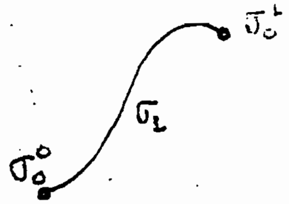
Se cumple evidentemente $(\partial K)^* = K^*\delta$, de manera que $\partial K + K\partial =$ identidad, implica

$$K^*\delta + \delta K^* = (\text{ident.})^* = \text{ident.},$$

de donde resulta, análogamente como en (1.7.2), la trivialidad de $H^p(U)$, $p > 0$. ///

Consideremos ahora el caso $p=0$. Si $c^0 \in \mathring{C}^0(X;G)$ y $\sigma_1 \in C_1(X)$, se tiene:

$$0 = \delta c^0(\sigma_1) = c^0(\partial\sigma_1) = c^0(\sigma_0^0) - c^0(\sigma_0^1),$$



lo cual implica que c^0 es un cociclo si y sólo si es constante en cada componente arco-conexa de X. Es decir:

<u>Proposición</u> (1.7.5). $H^0(X;G)$ está constituido por las funciones definidas en las componentes arco-conexas de X con rango en G. En particular, si X es arco-conexo, se cumple $H^0(X;G) = G$.

Análogamente, (1.7.3) se puede generalizar a todo X, y resulta que $H_0(X;Z)$ es el grupo libre generado por las componentes arco-conexas de X, y si X es arco-conexo, se obtiene $H_0(X;Z) = Z$.

Resta considerar el caso R^p.

Proposición (1.7.6). Si $U \subset M$ es contractible al punto 0, entonces $R^p(U) = 0$ para $p > 0$.

Demostración.

Hay que probar que toda forma cerrada en U es exacta. Para ello, análogamente que en (1.7.2), se encontrará un operador

$$I; \; F^p(U) \longrightarrow F^{p-1}(U), \quad p > 0,$$

(no confundir I con la identidad) tal que

$$Id \pm dI = \text{Identidad},$$

de manera que si α es cerrada, entonces $dI\alpha = \alpha$.

Sea pues ϕ una contracción de U:

$$\phi: U \times I \longrightarrow U,$$
$$\phi(x,t) = (\phi^1(x,t), \ldots, \phi^n(x,t))$$

(no confundir $I = [0,1]$ con el operador I).

Sea $\alpha = \sum a_{j_1,\ldots,j_p}(x)\, dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_p} \in F^p(U)$.

La función ϕ induce

$$\phi^*: F^p(U) \longrightarrow F^p(U \times I)$$

definida mediante

$$\phi^* \alpha = \sum \phi^* a_{j_1 \ldots j_p}(x) \; \phi^* dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge \phi^* dx^{j_p} =$$

$$= \sum a_{j_1 \ldots j_p}(\phi x)\, d\phi^{j_1} \wedge \ldots \wedge d\phi^{j_p},$$

donde

$$d\phi^j = \sum \frac{\partial \phi^j}{\partial x^i} dx^i + \frac{\partial \phi^j}{\partial t} dt.$$

Reemplazando estos valores, resulta que se puede escribir

$$\phi^*\alpha = \beta + \gamma ,$$

con

$$\beta = \sum b_{j_1 \dots j_p}(x,t)\, dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}; \quad y$$

$$\gamma = \sum c_{j_1 \dots j_{p-1}}(x,t)\, dt \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{p-1}}.$$

Las formas α y β están completamente determinadas.

Definimos el operador I mediante

$$I\alpha = \int_{t=0}^{t=1} \phi^*\alpha = \sum_j \left\{ \int_{t=0}^{t=1} c_{j_1 \dots j_p}(x,t)\, dt \right\} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{p-1}}.$$

Entonces

$$dI\alpha = \sum \left\{ \int_{t=0}^{t=1} \frac{\partial c_{j_1 \dots j_{p-1}}(x,t)}{\partial x^k}\, dt \right\} dx^k \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{p-1}}.$$

Por otra parte, escribiendo sólo los términos que dontienen dt y recordando que ϕ^* conmuta con d:

$$\phi^* d\alpha = d\phi^*\alpha = d(\beta + \gamma) =$$

$$= \sum \frac{\partial b_{j_1 \dots j_p}}{\partial t}\, dt \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} + \dots +$$

$$+ \sum \frac{\partial c_{j_1 \dots j_{p-1}}}{\partial x^k}\, dx^k \wedge dt \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{p-1}} + \dots ,$$

de manera que

$$Id\alpha = \int_{t=0}^{t=1} \phi^* d\alpha = \sum \left\{ \int_0^1 \frac{\partial b_{j_1 \dots j_p}}{\partial t}\, dt \right\} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_p} -$$

$$- \sum \left\{ \int_0^1 \frac{\partial c_{j_1 \dots j_{p-1}}}{\partial x^k}\, dt \right\} dx^k \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{p-1}} =$$

$$= \beta(x,1) - \beta(x,0) - dI\alpha.$$

En consecuencia,

$$I d\alpha + dI\alpha = \beta(x,1) - \beta(x,0).$$

Resta calcular el segundo miembro. Probaremos que $\beta(x,1) =\alpha$ y $\beta(x,0)=0$, con lo cual la demostración concluye.

Consideremos las funciones

$$U \overset{J_1}{\underset{J_o}{\rightrightarrows}} U\times I \xrightarrow{\phi} U,$$

donde $J_1(x) = (x,1)$, $J_o(x) = (x,0)$.

Se cumple

$$\phi \circ J_1 = I : U \to U,$$
$$\phi \circ J_o = 0 ; U \to \theta,$$

de donde

$$J_1^*(\beta+\gamma) = J_1^*(\phi^*\alpha) = (\phi \circ J_1)^*\alpha = \alpha ,$$
$$J_o(\beta+\gamma) = J_o^*(\phi^*\alpha) = (\phi \circ J_o)^*\alpha = 0.$$

Pero, designando con J a cualquiera de los J_i, $i=1,0$, se tiene:

$$J^*f(x) = f(Jx);$$
$$J^*dx^i = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial J^i}{\partial x^j} dx^j = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x^i}{\partial x^j} dx^j = dx^i ;$$
$$J^*dt = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial J^{n+1}}{\partial x^j} dx^j = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial t}{\partial x^j} dx^j = 0;$$

y por lo tanto

$$J_1(\beta+\gamma)(x,t) = \sum b_{j_1 \dots j_p}(x,1)\, dx^{j_1}\wedge \dots \wedge dx^{j_p} = \beta(x,1);$$
$$J_o(\beta+\gamma)(x,t) = \sum b_{j_1 \dots j_p}(x,0)\, dx^{j_1}\wedge \dots \wedge dx^{j_p} = \beta(x,0).$$

En consecuencia, $\beta(x,1) = \alpha$, $\beta(x,0) = 0$. ///

En cuanto al caso p=0, se tiene $R^0(U) = \overset{\circ}{F}{}^0(U)$. Pero $f \in \overset{\circ}{F}{}^0(U)$ significa $0 = df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$, lo cual implica f= constante. Entonces:

<u>Proposición</u> (1.7.7). $R^0(U) = E$.

Para terminar este párrafo daremos otra demostración de (1.7.6), probablemente más sencilla pero un tanto más débil, puesto que probará que si α es cerrada en un entorno U de un punto x (no necesariamente contractible), entonces existe otro entorno $V \subset U$ del mismo punto en donde α es exacta.

Sea pues $\alpha \in \overset{\circ}{F}{}^p(U)$, $p > 0$. En un entorno de x, α se puede expresar en un sistema de coordenadas locales $x^1,\dots,x^n$, y siempre se la puede escribir

$$\alpha = dx^1 \wedge \omega + \alpha_0,$$

donde ω y α_0 no dependen de dx^1. Probaremos que también se la puede escribir

$$\alpha = d\beta_1 + \alpha_1,$$

con β_1 independiente de dx^1 y α_1 independiente de x^1 y dx^1. Para ello, si

$$\omega = \sum g_{i_1\dots i_{p-1}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{p-1}}, \quad i_j \neq 1,$$

tomamos

$$\beta_1 = \sum f_{i_1\dots i_{p-1}} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_{p-1}},$$

con

$$\frac{\partial f_{i_1\dots i_{p-1}}}{\partial x^1} = g_{i_1\dots i_{p-1}},$$

lo cual siempre es posible, por integración aunque tal vez β_1 esté definido en un entorno más pequeño.

Se obtiene pues

$$d\beta_1 = dx^1 \wedge \omega + \gamma_1,$$

donde γ_1 no depende de dx^1. Definiendo $\alpha_1 = \alpha_0 - \gamma_1$, obtenemos la descomposición

$$\alpha = d\beta_1 + \alpha_1,$$

con β_1 y α_1 independientes de dx^1.

Resta ver que α_1 es independiente de x^1, para lo cual usaremos el hecho de que α es cerrada.

$d\alpha = 0$ implica $d\alpha_1 = 0$, y puesto que α_1 no depende de dx^1, de aquí resulta $\frac{\partial a}{\partial x^1} = 0$ para todos los coeficientes a de α_1. En consecuencia se logra la descomposición deseada

$$\alpha = d\beta_1 + \alpha_1,$$

con las propiedades exigidas.

Usando el mismo argumento con α_1 en lugar de α, se obtiene

$$\alpha_1 = d\beta_2 + \alpha_2,$$

con β_2 independiente de dx^2 y α_2 independiente de x^2 y dx^2. Además α_2 y β_2 son también independientes de x^1 y dx^1, por serlo así α_1.

Reemplazando, obtenemos

$$\alpha = d(\beta_1 + \beta_2) + \alpha_2.$$

Repitiendo el prodeso, se llega a la descomposición

$$\alpha = d(\beta_1+\dots+\beta_n) + \alpha_n,$$

con β_i independiente de $x^1,\dots, x^{i-1}, dx^1,\dots,dx^i$, y α_n independiente de $x^1,\dots, x^n, dx^1,\dots, dx^n$. Pero $\alpha_n \in F^p$, $p>0$, lo cual implica $\alpha_n = 0$. Si definimos $\beta = \beta_1+\dots+\beta_n$ se obtiene $\alpha = d\beta$. ///

-o-

§1.8. Operadores de homotopía.

Un grupo (conmutativo) graduado A es aquél que se puede representar como suma directa no trivial $A = \sum_{i=0}^{\infty} A_i$. Si además el grupo graduado A tiene estructura de anillo y se cumple $A_i A_j \subset A_{i+j}$, se llama anillo graduado. Un ejemplo de anillo graduado es el álgebra $F(M)$.

Un grupo graduado se llama un complejo de grado r si está definido en él un operador diferencial de grado r, es decir, si existe $d: A \to A$ tal que $d: A_i \to A_{i+r}$ para cada i, y se cumple $dd=0$.

Un complejo de grado r se llama homotópicamente nulo si existe un endomorfismo h de grado $-r$, es decir, $h: A_i \to A_{i-r}$, y además se cumple $dh + hd =$ Identidad. Tal endomorfismo h se llama operador de homotopía.

Por ejemplo, si $U \subset M$ es contractible, $F(U)$ es un complejo homotópicamente nulo de grado 1, d es el operador diferencial e I el de homotopía. Lo mismo sucede con $C(U)$, de grado -1, siendo ∂ y K los operadores respectivos.

Es nuestro propósito ver qué relación existe entre los operadores de homotopía I y K. El resultado es muy análogo a la fórmula de Stokes...

<u>Proposición</u> (1.8.1). Sea $U \subset M$ contractible, $c \in C_p(U)$ y $\alpha \in F^{p+1}(U)$, $p > 0$. Entonces

$$\int_{Kc} \alpha = \int_c I\alpha .$$

Demostración.

Observemos primero que si $\beta \in F^{p+1}(U)$ y $\sigma' \in C_{p-1}(U)$, entonces

$$\int_{K\sigma'} I\beta = 0,$$

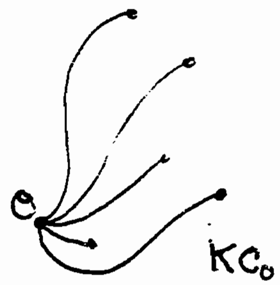
puesto que $I\beta$ no contien el parámetro t.

Por lo tanto

$$\int_{Kc} \alpha = \int_{Kc} Id\alpha + dI\alpha = \int_{Kc} dI\alpha = \int_{\partial Kc} I\alpha = \int_{c-K\partial c} I\alpha =$$

$$= \int_c I\alpha \ . \ ///$$

El caso p=0 es diferente. Si $c_o = \sum \lambda_i \sigma_o^i \in C_o(U)$ y $\alpha \in F^1(U)$, se tiene



$$\int_{Kc_o} \alpha = \sum \lambda_i \int_{K_o^i} \alpha = \sum \lambda_i \int_{K\sigma_o^i} dI\alpha + Id\alpha =$$

$$= \sum \lambda_i \int_{K\sigma_o^i} dI\alpha = \sum \lambda_i I\alpha \Big|_{\sigma_o^i} - \sum \lambda_i I\alpha \Big|_\theta .$$

-o-

§ 1.9. <u>Homología y cohomología simpliciales</u>.

Una exposición más detallada sobre elmaterial de esta parrafo puede verse, por ejemplo, en [5].

Un p-simple afín $(B_o,\ldots, B_p)$ en E_n se llama euclídeo si sus vértices están en posición general, es decir, si los vectores $B_i - B_o$, $i=1,\ldots,p$ son linealmente independientes. Entondes, no más de m puntos de un p-simple euclídeo están en un hiperplano de dimensión m-1.

Una familia de simples afines en E_n se llama regular cuando la intersección de dos cualesquiera de ellos es o bien vacía o una cara común a ambos.

Definición (1.9.1). Un complejo simplicial K es una familia regular finita de simples euclídeos en E_n.

La dimensión de K es el máximo de la dimensión de sus simples. La unión de los puntos de las imágenes de todos los simples de K, con la topología inducida por E_n se llama el poliedro de K, y se simboliza $|K|$. Se dice que K es una triangulación de $|K|$. Un espacio topológico se llama triangulable cuando es homeomorfo a algún poliedro de un complejo simplicial.

Una transformación simplicial es una función $\phi: K \to K'$ entre complejos simpliciales, que transforma vértices en vértices y simples en simples, en forma afín. Evidentemente, ϕ induce una función continua $|\phi|: |K| \to |K'|$ entre los correspondientes poliedros.

Definición (1.9.2). Un conjunto K (cuyos elementos se llaman vértices) y una familia (finita o infinita) de subconjuntos no vacíos de K y constituído cada uno de ellos por un número finito de vértices (tales subconjuntos se llaman simples), se llama un complejo simplicial abstracto o un esquema simplicial, si:

a) cada vértice de K pertenece por lo menos a un simple; y

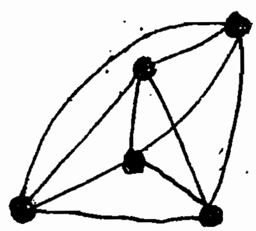
b) cada subconjunto no vacío de un simple es un simple.

Como se ve, es ésta una abstracción de la noción de complejo simplicial. Obsérvese también que ahora no se pide que haya un número finito de simples.

Se define la dimensión de un simple de un esquema simplicial K como el número de sus vértices menos uno, y la dimensión de K como el máximo de la dimensión de sus simples (pues de pues ser infinito).

Una realización geométrica de un esquema simplicial es una correspondencia biunívoca entre sus vértices y los de un complejo simplicial, tal que cada simple del esquema simplicial se transforma en los vértices de un simple del complejo simplicial.

Puede demostrarse, aunque no lo haremos aquí, que cada esquema simplicial finito de dimensión n tiene una realización geométrica en E_{2n+1}, y es éste el resultado óptimo, es decir, existen esquemas simpliciales de dimensión n no realizables en E_{2n}. La figura ilustra el caso n=1 (los puntos gruesos son los vértices; dos vértices unidos por una curva significa que constituyen un simple.).



Definiremos ahora los grupos de homología de un esquema simplicial finito K. Para ello consideramos un orden en sus vértices. Tal orden induce un orden en cada p-simple de K, digamos $(B_{i_0}, \dots, B_{i_p})$, $i_0 < i_1 < \dots < i_p$. Diremos que

$(B_{j_o},\ldots, B_{j_p})$, con $B_{j_k} = B_{i_q}$, tiene orientación positiva (+) si $(j_o,\ldots,j_p)$ es una permutación par de $(i_o,\ldots,i_p)$; en caso contrario diremos que $(B_{j_o},\ldots, B_{j_p})$ tiene orientación negativa (-).

Las clases de equivalencia de los simples respecto a la paridad de las permutaciones se llaman <u>simples orientados</u>.

Sea K_p el grupo libre conmutativo generado por los p-simples orientados de K. El homomorfismo $\partial : K_p \longrightarrow K_{p-1}$ se define en la forma usual,

$$\partial(B_{i_o},\ldots, B_{i_p}) = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j (B_{i_o},\ldots, \hat{B}_{i_j},\ldots, B_{i_p}) ,$$

y se lo extiende linealmente a K_p.

De la misma manera que en el caso singular, resulta $\partial\partial=0$, y por lo tanto $K = \{K_p\}_{p\geq 0}$ se convierte en un complejo, y en él se define de la manera usual los grupos de homología, designadoa ahora con $\mathcal{H}_p(K)$, y llamados <u>grupos simpliciales de homología</u> del esquema simplicial K.

La ventaja de los grupos simpliciales respecto de los singulares reside principalmente en el hecho de que su construcción es mucho más simple, puesto que el grupo de p-cadenas simpliciales es finitamente generado, y no así el de p-cadenas singulares. En cambio, existe el incoveniente de que la definición de los grupos simpliciales de un poliedro K depende de la triangulación K y del orden elegido de los vértices. Sin embargo, los grupos de homología no dependen de tal elección, puesto que según veremos más adelante, se cumple $\mathcal{H}_p(K) = H_p(|K|)$.

Pasemos ahora a la cohomología. Una <u>p-cocadena alternada</u> f^p en el esquema simplicial K es una función lineal en K_p.

Designaremos $K^p(G) = \mathrm{Hom}(K_p;G)$ al grupo de p-cocadenas con coeficientes en G.

El operador δ en K^p se define en la forma usual como dual de ∂, y entonces $\{K^p\}_{p\geqslant 0}$ se convierte en un complejo en el cual se define de la manera usual los grupos de cohomología con coeficientes en G, designados con $\mathcal{H}^p(K;G)$.

Si K es un complejo simplicial finito y $|K|$ es su poliedro, a cada simple orientado de K le corresponde naturalmente un simple singular en $|K|$. Esta correspondencia genera un homomorfismo

$$K_p \longrightarrow C_p(|K|),$$

para cada p, que es la inmersión de K_p en $C_p(|K|)$.

Consideremos ahora una función continua

$$\phi : |K| \rightarrow X,$$

donde X es un espacio topológico. ϕ induce, de la manera usual; teniendo en cuenta que K_p está sumergido en $C_p(|K|)$, los homomorfismos

$$\phi_{\#}: K_p \longrightarrow C_p(X) \ ;$$
$$\phi_{*}: \mathcal{H}_p(K) \longrightarrow H_p(X) \ ;$$
$$\phi^{*}: H^p(X;G) \longrightarrow \mathcal{H}^p(K).$$

Veremos más adelante la importante propiedad de que si $X = |K|$, entonces ϕ_* es un isomorfismo en homología y ϕ^* un isomorfismo en cohomología.

----oOo----

(Fin Cap. I)

CAPITULO II. HACES Y EL TEOREMA DE DE RHAM.

§2.1. Teorema de Bockstein.

En lo sucesivo, llamaremos complejo de cocadenas, o simplemente complejo, a un complejo de grado 1 (§1.8).

Sea pues $A = \{A^p\}_{p \geq 0}$ un complejo, y δ un operador diferencial (de grado 1); se cumple δ ; $A^p \longrightarrow A^{p+1}$, y $\delta\delta = 0$.

Definición (2.1.1). Un subcomplejo $A' = \{A'^p\}_{p \geq 0}$ de A es una sucesión de subgrupos $A'^p \subset A^p$ tales que $\delta | A'^p: A'^p \longrightarrow A'^{p+1}$ para cada $p \geq 0$.

Si A' es un subcomplejo de A, entonces la sucesión de subgrupos cocientes $\{A^p / A'^p\}_{p \geq 0}$ forman un complejo, llamado complejo cociente y designado con A/A'.

Sea A un complejo y δ_p la restricción de δ sobre A_p, es decir $\delta_p = \delta | A_p$. Los grupos de cohomología de A se definen de la manera usual:

Definición (2.1.2). $H^p(A) = \mathrm{Ker}(\delta_p) / \mathrm{Im}(\delta_{p-1})$, para $p > 0$, y $H^0(A) = \mathrm{Ker}(\delta_0)$.

Obsérvese que la sucesión $\{A^p\}$, $p = 0, 1, \ldots$ es exacta si y sólo si $H^p(A) = 0$.

Definición (2.1.3). Sean $A = \{A^p\}_{p \geq 0}$ y $B = \{B^p\}_{p \geq 0}$ dos complejos. Un homomorfismo de complejos $h: A \longrightarrow B$ es una sucesión $h^p: A^p \longrightarrow B^p$, $p = 0, 1, 2, \ldots$ de homomorfismos que conmutan con δ, es decir, tales que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A^{p-1} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "h^{p-1}"] & A^{p} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "h^{p}"] & A^{p+1} \arrow[r] \arrow[d, "h^{p+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & B^{p-1} \arrow[r, "\delta"] & B^{p} \arrow[r, "\delta"] & B^{p+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Puesto que los h^p respetan cociclos y cobordes, el homomorfismo $h: A \to B$ induce un homomorfismo entre grupos de homología $h_*: H^p(A) \to H^p(B)$; la ley de composición entre dos homomorfismos tales es $(h \circ g)_* = h_* \circ g_*$

Diremos que una sucesión de complejos y homomorfismos de complejos es exacta cuando es exacta para cada $p=0,1,\ldots$

La siguiente afirmación es básica para la demostración del teorema de Bockstein.

<u>Proposición</u> (2.1.4). Sea $0 \to A \xrightarrow{j} B \xrightarrow{h} C \to 0$ una suceción exacta de complejos y homomorfismos de complejos. Entonces para cada $p \geqslant 0$ existe un homomorfismo de complejos

$$\Delta : H^p(C) \to H^{p+1}(A)$$

tal que la sucesión

$$0 \to H^0(A) \xrightarrow{j_*} H^0(B) \xrightarrow{h_*} H^0(C) \xrightarrow{\Delta} H^1(A) \to \cdots$$

$$\cdots \to H^p(A) \xrightarrow{j_*} H^p(B) \xrightarrow{h_*} H^p(C) \xrightarrow{\Delta} H^{p+1}(A) \to \cdots$$

es exacta.

Demostración.

En primer lugar construiremos el homomorfismo Δ .

Sea $c^p \in \overset{o}{C}{}^p$, es decir $c^p \in C^p$ y $\delta c^p=0$. Puesto que h es un epimorfismo, existe $b^p \in B^p$ tal que $h(b^p)= c^p$.

Se cumple que $\delta b^p \in B^{p+1}$, y puesto que h es un homomorfismo de complejos, resulta

$$h(\delta b^p) = \delta h b^p = \delta c^p = 0.$$

Esto es, δb^p está en el núcleo de h, y entonces en virtud de la exactitud, está en la imagen de j.

Siendo j un monomorfismo, existe un único $a^{p+1} \in A^{p+1}$ tal que $j(a^{p+1}) = \delta b^p$.

(Hablando sin rigor, podríamos decir que $a^{p+1} = j^{-1}\delta h^{-1}(c^p)$, pero esto no es correcto por no ser h^{-1} unívoca.)

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A^p \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\delta"] & B^p \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\delta"] \arrow[d, dashed, bend right] & C^p \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] \arrow[l, dashed, bend left] & 0 \\
0 \arrow[r] & A^{p+1} \arrow[r, "j"] \arrow[d] & B^{p+1} \arrow[r, "h"] \arrow[d] \arrow[l, dashed, bend left] & C^{p+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \, & \, & \, &
\end{tikzcd}$$

Además, siendo j un homomorfismo de complejos, se cumple

$$j\delta a^{p+1} = \delta j a^{p+1} = \delta\delta b^p = 0.$$

Esta igualdad implica $\delta a^{p+1} = 0$, pues j es un monomorfismo; es decir, $a^{p+1} \in \overset{\circ}{A}{}^{p+1}$

Designando con llaves $\{\ \}$ a la clase de cohomología del elemento escrito entre las mismas, definimos

$$\Delta\{c^p\} = \{a^{p+1}\}.$$

Para que esta definición sea correcta, debemos probar que no depende de las elecciones arbitrarias efectuadas, a saber, la elección de c^p en $\{c^p\}$ y la de b^p en la imagen inversa de h.

Supongamos que elegimos otro $c'^p \in \{c^p\}$ y otro b'^p en la imagen inversa de c'^p. Hay que probar que $\{a'^{p+1}\} = \{a^{p+1}\}$, o sea $a'^{p+1} - a^{p+1} = \delta a^p$.

Por la elección hecha se cumple

$$h(b'^{p} - b^{p}) = \delta c^{p-1}.$$

Sea b^{p-1} tal que $hb^{p-1} = c^{p-1}$; tal b^{p-1} existe por ser h un epimorfismo, y además se cumple

$$\delta c^{p-1} = \delta h b^{p-1} = h \delta b^{p-1}.$$

Entonces

$$h(b'^{p} - b^{p} - \delta b^{p-1}) = 0,$$

de manera que

$$b'^{p} - b^{p} - \delta b^{p-1} = ja^{p},$$

y en consecuencia

$$j\delta a^{p} = \delta j a^{p} = \delta(b'^{p} - b^{p} - \delta b^{p-1}) = \delta b'^{p} - \delta b^{p} =$$
$$= ja'^{p+1} - ja^{p+1},$$

es decir,

$$a'^{p+1} - a^{p+1} = \delta a^{p},$$

puesto que j es un monomorfismo.

En consecuencia Δ está bien definido.

Dejamos a cargo del lector la verificación de que la sucesión larga que aparece en el enunciado de la proposición es exacta; la demostración es sencilla, si bien un tanto tediosa.///

Una consecuencia de (2.1.4) es una importante herramienta para la demostración del teorema de De Rham.

<u>Proposición</u> (2.1.5). (Teorema de Bockstein). Sea X un espacio topológico y $0 \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow G'' \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de grupos (conmutativos). Entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow H^0(X;G') \longrightarrow \dots$$

$$\dots \longrightarrow H^p(X;G') \longrightarrow H^p(X;G) \longrightarrow H^p(X;G") \longrightarrow H^{p+1}(X;G') \longrightarrow \dots$$

es exacta.

Demostración.

Consideremos el grupo libre $C_p(X;Z) = C_p$ de p-cadenas singulares en X. Puesto que C_p es proyectivo (cf. 1.1.11), entonces en virtud de (1.1.13) resulta que

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(C_p;G') \longrightarrow \mathrm{Hom}(C_p;G) \longrightarrow \mathrm{Hom}(C_p;G") \longrightarrow 0,$$

o lo que es lo mismo,

$$0 \longrightarrow C^p(X;G') \longrightarrow C^p(X;G) \longrightarrow C^p(X;G") \longrightarrow 0,$$

es exacta.

Aplicando (2.1.4) resulta la tesis.///

La sucesión larga que aparece en (2.1.5) se llama <u>sucesión de Bockstein</u>, y será importante en lo que sigue.

-o-

§2.2. Sistemas de coeficientes locales.

Sea $\mathcal{S}_q$ una cara de dimensión q del simple standard $\mathcal{S}_p$ $(q<p)$. Si $\sigma_p = \varphi_* \mathcal{S}_p$ es un p-simple singular en el espacio topológico X, entonces la restricción $\sigma_q = (\varphi_* | \mathcal{S}_q)(\mathcal{S}_q)$ se llama una <u>q-cara</u> de σ_p.

Si σ' es una cara de σ, escribiremos $\sigma' \prec \sigma$.

Designaremos Σ_p el conjunto de los p-simples singulares en X, y $\Sigma = \bigcup_{p \geq 0} \Sigma_p$.

El concepto que introduciremos ahora puede considerarse como introductorio al concepto de prehaz, que luego veremos (§2.3).

Definición (2.2.1). Un sistema de coeficientes locales $\mathcal{G}$ sobre Σ es una función sobre Σ tal que a cada $\sigma \in \Sigma$ le hace corresponder un grupo conmutativo G_σ, y una función sobre el subconjunto de $\Sigma \times \Sigma$ contituido por los pares (σ, σ') tales que $(\sigma, \sigma') \in \Sigma \times \Sigma$ y $\sigma' \prec \sigma$, de manera que a cada par (σ, σ') con esas propiedades le hace corresponder un homomorfismo $\eta_{\sigma,\sigma'} : G_{\sigma'} \rightarrow G_\sigma$, y donde tales homomorfismos cumplen las condiciones siguientes:

a) Si $\sigma = \sigma'$, entonces $\eta_{\sigma,\sigma'}=$ Identidad; y

b) Si $\sigma'' \prec \sigma' \prec \sigma$, entonces $\eta_{\sigma,\sigma'} \circ \eta_{\sigma',\sigma''} = \eta_{\sigma,\sigma''}$.

Utilizaremos la notación $\mathcal{G} = (G_\sigma , \eta_{\sigma,\sigma'})$

Creemos que esta definición aparecerá clara a lo sumo cuando en §2.3 definamos y veamos ejemplos de prehaces.

Definición (2.2.2). Una p-cocadena singular f^p en X con coeficientes en un sistema local $\mathcal{G} = (G_\sigma , \eta_{\sigma,\sigma'})$ es una función tal que a cada $\sigma \in \Sigma_p$ hace corresponder un elemento $f^p(\sigma) \in G_\sigma$.

Observamos que ahora no podemos extender f^p por linealidad a todo $C_p(X;Z)$ puesto que el valor de f^p en cada simple pertenece a un grupo que cambia al variar el simple. Como vemos, la definición dada ahora de p-cocadena es una generalización de la estudiada antes de p-cocadena singular con coeficientes en un grupo G. Si en particular, en el sistema $\mathcal{G} = (G_\sigma, \eta_{\sigma,\sigma'})$ se cumple $G_\sigma = G$ y $\eta_{\sigma,\sigma'} =$ Identidad para todo $\sigma, \sigma' \in \Sigma$, entonces las dos definiciones coiciden.

Al conjunto de p-cocadenas ahora definidas los designamos con $C^p(X;\mathcal{G})$, y constituye un grupo conmutativo.

Definición (2.2.3). El operador coborde δ es el homomorfismo $\delta : C^p(X;\mathcal{G}) \longrightarrow C^{p+1}(X;\mathcal{G})$ definido por

$$\delta f^p(\sigma_{p+1}) = \sum_{j=0}^{p+1} (-1)^j \, \eta_{\sigma_{p+1},\sigma_p^{(j)}} \, f(\sigma_p^{(j)})$$

donde $\sigma_p^{(j)}$ es la cara j de σ_{p+1}.

Obsérvese que ahora no podemos definir directamente δ mediante $\delta f^p(\sigma_{p+1}) = f^p(\partial\sigma_{p+1})$, puesto que $\partial\sigma_{p+1}$ no es un simple; los simples que son sus caras tienen coeficientes en grupos diferentes, y por lo tanto antes de sumar hay que aplicar los homomorfismos $\eta_{\sigma_{p+1},\sigma_p^{(j)}}$ para obtener todos los coeficientes en $G_{\sigma_{p+1}}$.

De la manera usual se demuestra que $\delta\delta = 0$, y entonces

$$C(X;\mathcal{G}) = \left\{C^p(X;\mathcal{G})\right\}_{p \geq 0}$$

queda convertido en un complejo, para el cual se define, también de la manera usual, los grupos de cohomología, designados ahora con

$$H^p(X;\mathcal{G}) = \operatorname{Ker}(\delta_p) \,/\, \operatorname{Im}(\delta_{p-1}) \;, \quad p > 0, \quad \text{y}$$
$$H^0(X;\mathcal{G}) = \operatorname{Ker}(\delta_0).$$

Definición (2.2.4). Un homomorfismo de coeficientes locales $h: \mathcal{G}=(G_\sigma, \eta_{\sigma,\sigma'}) \longrightarrow \bar{\mathcal{G}}=(\bar{G}_\sigma, \bar{\eta}_{\sigma,\sigma'})$ entre dos sistemas de coeficientes locales sobre Σ de un espacio X, es una familia de homomorfismos $h_\sigma : G_\sigma \longrightarrow \bar{G}_\sigma$, $\sigma \in \Sigma$, tales que, si $\sigma' < \sigma$, entonces $h_\sigma \eta_{\sigma,\sigma'} = \bar{\eta}_{\sigma,\sigma'} h_{\sigma'}$, es decir, tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G_{\sigma'} & \xrightarrow{h_{\sigma'}} & \overline{G}_{\sigma'} \\ \eta_{\sigma,\sigma'} \downarrow & & \downarrow \overline{\eta}_{\sigma,\sigma'} \\ G_{\sigma} & \xrightarrow{h_{\sigma}} & \overline{G}_{\sigma} \end{array}$$

conmuta.

<u>Definición</u> (2.2.5). Una sucesión de sistemas de coeficientes locales y homomorfismos de tales sistemas $0 \to \mathcal{G}' \to \mathcal{G} \to \mathcal{G}'' \to 0$ es <u>exacta</u> cuando para cada $\sigma \in \Sigma_1$, la sucesión $0 \to G'_\sigma \to G_\sigma \to G''_\sigma \to 0$ es exacta.

Cada homomorfismo $h: \mathcal{G} \to \overline{\mathcal{G}}$ induce un homomorfismo en cocadenas $h_*: C^p(X;\mathcal{G}) \to C^p(X;\overline{\mathcal{G}})$ definido mediante

$$h_* f^p(\sigma_p) = hf^p(\sigma_p)$$

No ofrece dificultad probar que $h_*\delta = \delta h_*$, de manera que h_* es un homomorfismo de complejos. En otras palabras:

Cada homomorfismo $h: \mathcal{G} \to \overline{\mathcal{G}}$ de sistema de coeficientes locales induce un homomorfismo de complejos $h_*: C(X;\mathcal{G}) \to C(X;\overline{\mathcal{G}})$ entre los correspondientes complejos de los sistemas de coeficientes locales.

De una manera análoga a la vista en §2.1 se prueba que si $0 \to \mathcal{G}' \to \mathcal{G} \to \mathcal{G}'' \to 0$ es exacta, entonces también lo es la sucesión inducida $0 \to C^p(X;\mathcal{G}') \to C^p(X;\mathcal{G}) \to C^p(X;\mathcal{G}'') \to 0$, y también es exacta la sucesión de Bockstein

$$0 \to H^0(X;\mathcal{G}') \to \dots$$
$$\dots \to H^p(X;\mathcal{G}') \to H^p(X;\mathcal{G}) \to H^p(X;\mathcal{G}'') \to H^{p+1}(X;\mathcal{G}') \to \dots$$

Es decir:

Proposición (2.2,6). El teorema de Bockstein (2.1.5) conserva su validez para la cohomología originada por un sistema de coeficientes locales.

Análogamente se puede definir un sistema de coeficientes locales en un esquema simplicial (cf. 1.9.2), es decir, en sus simples, y procediendo en la misma foma que hemos visto ahora se demuestra el teorema de Bockstein. Es decir:

Proposición (2.2.7). El teorema de Bockstein (2.1.5) conserva su validez para la cohomología simplicial originada por un sistema de coeficientes locales en los simples de un esquema simplicial. En particular, el teorema se conserva para la cohomología "ordinaria" (coeficientes no locales) de un esquema simplicial.

-o-

§ 2.3. Prehaces.

Sea X un espacio topológico, $I = \{i\}$ un conjunto de índices, y $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de X, es decir, cada U_i abierto y además $\bigcup_{i \in I} U_i = X$. Asignemos a I un orden, arbitrario pero fijo.

Sea n un número natural fijo; definimos

$$U_{j_0, \dots, j_p} = U_{j_0} \cap \dots \cap U_{j_p},$$

si la intersección no es vacía y $p \leq n$.

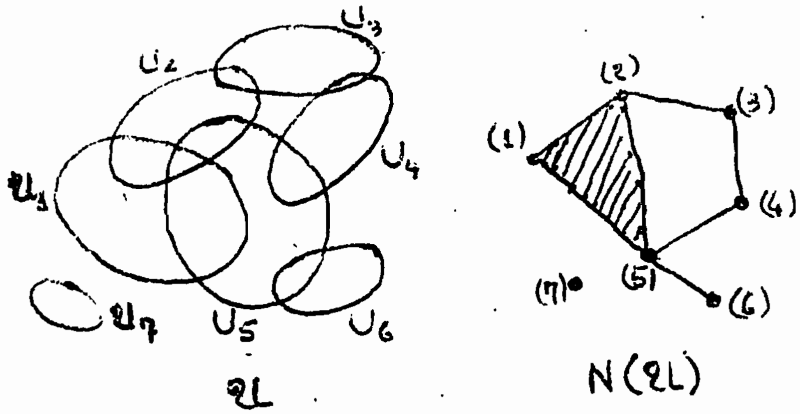
Esta construcción describe un esquema simplicial de dimensión $\leq n$, siendo U_i sus vértices y $U_{j_0 \dots j_p}$ sus p-simples.

A cada U_i le hacemos corresponder un punto (i) en el espacio euclídeo E_m, con $m \geq 2n+1$ (cf. §1.9), de manera que cada conjunto de $r \leq 2n+2$ de esos puntos estén en posición general. Para cada $U_{j_0 \cdots j_p}$ definimos el correspondiente p-simple euclídeo mediante $\sigma_p = ((j_0), \ldots, (j_p))$. Notemos que $\sigma_p \cap \sigma_q$, estando constituído por menos de $p+1+q+1 \leq n+1+n+1 = 2n+2$ puntos, está en posición general y es una cara común a σ_p y σ_q.

Queda construido así un complejo simplicial en E_m, que notaremos con $N(\mathfrak{U})$. El poliedro correspondiente está determinado, salvo homeomorfismo, independientemente del orden elegido en I.

<u>Definición</u> (2.3.1). El complejo simplicial $N(\mathfrak{U})$ se llama el <u>nervio</u> del cubrimiento $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de X

La figura ilustra el caso en que $n=2$.



Supongamos ahora que para cada $U_i \in \mathfrak{U}$ (en particular, para cada abierto de X, o de una base de X) se da un grupo conmutativo G_U, y para cada par (U,U') con $U \subset U'$ un homomorfismo

$$\eta_{U,U'} : G_{U'} \longrightarrow G_U \quad ,$$

de tal manera que $\eta_{U,U}$ es la identidad en G_U y para cada $U \subset U' \subset U''$ se cumple que $\eta_{U,U'} \circ \eta_{U',U''} = \eta_{U,U''}$.

Definición (2.3.2). El sistema así descripto $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}_U, \eta_{U,U'}\}$ se llama un prehaz en X.

Obsérvese que para cada prehaz en X se obtiene un sistema de coeficientes locales $\mathcal{G} = (G_\sigma, \eta_{\sigma\sigma'})$ para el nervio $N(\mathcal{U})$, de la manera natural siguiente:

Si $\sigma = ((i_o)\ldots(i_p))$, entonces $G_\sigma = G_{U_{i_o \ldots i_p}}$;

Si $\sigma' \prec \sigma$, entonces $\eta_{\sigma,\sigma'} = \eta_{U_\sigma, U_{\sigma'}}$ (obsérvese que si $\sigma' \prec \sigma$, entonces $U_\sigma \subset U_{\sigma'}$).

Designaremos pues $\mathcal{G} = \{G_\sigma, \eta_{\sigma,\sigma'}\}$ al sistema de coeficientes locales en $N(\mathcal{U})$ determinado por el prehaz $\mathcal{G} = \{\mathcal{G}_U, \eta_{U,U'}\}$ del cubrimiento $\mathcal{U}$ de X.

Aplicando los resultado de §2.2 concluimos que un prehaz determina sus correspondientes grupos de cohomología -es decir, los del sistema a coeficientes locales en el nervio-, que designaremos con $\mathcal{H}^p(N;\mathcal{G})$, y la correspondiente sucesión de Bockstein es exacta. ((2.3.3)).

(2.3.4) Ejemplos de prehaces.

(a) X un espacio topológico arbitrario; G_U (U abierto de X) el grupo de las funciones continuas a valores reales definidas en U; $\eta_{U,U'}$ la restricción de cada función de U' en U.

(b) X=M una variedad diferenciable. Igual que en el ejemplo anterior, considerando funciones diferenciables en lugar de continuas.

(c) X un espacio topológico cualquiera; $G_U = C^p(U;E)$ el grupo de las p-cocadenas singulares en U con coeficientes en E; $\eta_{U,U'}$, $U \subset U'$, la restricción $C^p(U') \longrightarrow C^p(U)$ de p-cocadenas. (Una p-cocadena en U se obtiene de una p-cocadena en X y restringiéndola a U, es decir, considerándola definida sólo sobre las p-cadenas de U, e identificando dos cocadenas tales cuando toman valores iguales en todas las cadenas de U ; análogamente se define la restricción de cocadenas de U' en U).

(d) Igual que en (c), considerando p-cociclos en lugar de p-cocadenas.

(e) Igual que en (c), considerando p-cobordes en lugar de p-cocadenas.

(f) X=M una variedad diferenciable. Igual que en (c), (d), (e), considerando p-cocadenas, p-cociclos o p-cobordes diferenciables en lugar de singulares.

(g) X=M una variedad diferenciable; $G_U = F^p(U)$ el grupo de las p-formas en U ; $\eta_{U,U'}$ la restricción de formas.

-o-

§2.4. La noción de haz.

Para motivar la definición de haz, comenzaremos investigando el significado de $\mathcal{H}^0(N;\mathcal{S})$. Puesto que no existen 0-cobordes, se trata del grupo $\overset{o}{C}{}^0$ de 0-cociclos

Si $f^o \in C^o(N;\mathcal{G})$ es una 0-cocadena en $N(\mathcal{U})$, se tiene $f^o(i) \in G_{U_i} = G_i$. El coborde de f^o será

$$\delta f^o((i),(j)) = \eta_{U_{i,j},U_j} f^o(j) - \eta_{U_{i,j},U_i} f^o(i).$$

Entonces f^o es un cociclo, es decir $f^o \in \mathcal{H}^o(N;\mathcal{G})$ si y sólo si

(2.4.1) $$\eta_{U_{i,j},U_j} f^o(j) = \eta_{U_{i,j},U_i} f^o(i).$$

En otras palabras, cuando f^o es un cociclo, su valor en cada vértice de una 1-cadena es independiente del vértice particular elegido, módulo los homomorfismos η. Utilizando esta igualdad probaremos que:

Proposición (2.4.2). Si $\mathcal{G}$ es un prehaz y X pertenece al cubrimiento $\mathcal{U}$, entonces $\mathcal{H}^o(N;\mathcal{G}) \cong G_X$.

Demostración.

Sea $g \in G_X$; establecemos la correspondencia $g \longrightarrow f^o \in C^o(N;\mathcal{G})$ mediante

$$f^o(i) = \eta_{(i),(o)}\ g$$

donde designamos (o) al vértice del nervio correspondiente al espacio total X. Es fácil ver que f^o cumple (2.4.1) y por lo tanto $f^o \in \overset{o}{C}{}^o(N;\mathcal{G}) = \mathcal{H}^o(N;\mathcal{G})$.

Si $g' \neq g$, entonces $f^o \neq f'^o$, puesto que por lo menos es $f^o(o) \neq f'^o(o)$. Esto prueba que $g \longrightarrow f^o$ es un monomorfismo.

Además, si $f^o \in \overset{o}{C}{}^o(N;\mathcal{G})$, entonces tomamos $f^o(o) = g \in G_X$, de lo cual resulta $\eta(i),(o)\, f^{o} = \eta(i),(o)\, g$. Pero el miembro derecho es -según (2.4.1.), haciendo $j = o - f^{o}(i)$.

Entonces $g \longrightarrow f^{o}$ es un epimorfismo. ///

Si bien una proposición de este tipo será esencial en la demostración del teorema de De Rham, la que acabamos de ver no es todavía demasiado útil. Esto se debe a que consideramos luego cubrimientos $\mathcal{U}$ con propiedades especiales (a saber, contractibilidad, cf. § 2.5), lo cual hace que en general no podamos suponer que $X \in \mathcal{U}$. Sin embargo, queremos que (2.4.2) conserve su validez. Aclaremos que aunque no supongamos que $X \in \mathcal{U}$, puede tener sentido hablar de G_X, como muestran los ejemplos (2.3.4); dicho de otra manera: consideramos un prehaz definido en todos los abiertos de X, por lo cual en particular G_X está bien definido, pero luego nos restringimos a un cubrimiento especial que en general no contiene al espacio total.

Si $X \notin \mathcal{U}$, la demostración dada de que $\mathcal{H}^{o}(N;\mathcal{G}) \cong G_X$ falla al probar que $g \longrightarrow f^{o}$ es un monomorfismo, de manera que no sepuede afirmar en general que $G_X \subset \mathcal{H}^{o}(N;\mathcal{G})$; por otra parte falla también al probar que $g \longrightarrow f^{o}$ es un epimorfismo, pues ahora no tiene sentido hablar de $\eta(i),(o)$, y en consecuencia también puede ocurrir que dos f^{o}, f'^{o} diferentes cumplan $f^{o}(o) = f'^{o}(o) = g$, y entonces $G_X \subset \mathcal{H}^{o}(N;\mathcal{G})$ es también falsa en general (por supuesto, aquí la inclusión se entiende como isomorfismo con un subconjunto). Pronto ilustramos esta circunstancia con ejemplos.

Para obviar el inconveniente mencionado se introduce la definición de haz.

<u>Definición</u> (2.4.3.). Un <u>haz</u> (o haz de Godement) sobre un espacio topológico X es un prehaz definido sobre todos los abiertos de X tal que:

(a) Si U es un abierto de X y $\{U_i\}$ un cubrimiento abierto de U, y si g y g' son elementos de G_U que tienen la misma imagen en cada G_{U_i} para todo i, entonces $g = g'$; y

(b) Si U y U_i son como en (a), y para cada i, $g_i \in G_{U_i}$ tal que g_i y g_j tienen la misma imagen $G_{U_{i,j}}$ para todo par i,j, entonces existe un elemento $g \in G_U$ que tiene imagen g_i en G_{U_i} para cada i.

La condición (a) asegura -eligiendo U=X- que $\mathcal{H}^0(N;\mathcal{G}) \supset G_X$, y (b) asegura que $\mathcal{H}^0(N;\mathcal{G}) \subset G_X$. Entonces:

<u>Proposición</u> (2.4.4). Si $\mathcal{G}$ es un haz sobre X, entonces es $\mathcal{H}^0(N;\mathcal{G}) \cong G_X$, para el nervio de cualquier cubrimiento abierto $\mathcal{U}$.

Veamos qué sucede en los ejemplos (2.3.4).

En el caso (a) de las funciones continuas la demostración de (2.4.2) se mantiene aunque $X \notin \mathcal{U}$, puesto que si $g' \neq g$, entonces existirá un $U_i \in \mathcal{U}$ tal que $f^0(i) \neq f'^0(i)$; se ve también inmediatamente que la definición de haz se cumple. Razonando de la misma manera se ve que en caso (g) de las p-formas valen las mismas afirmaciones.

En el caso (c) de las p-cocadenas las cosas cambian debido a que la definición de cocadena no es local en X. En efecto, dado un cubrimiento $\mathcal{U}$ de X, puede ocurrir que $f'^0 = f^0$ a pesar de que $g' \neq g$. Esto sucede cuando $g'(c) \neq g(c)$ sólo para cadenas c no contenidas totalmente en ningún $U_i \in \mathcal{U}$. Esto prueba que G_X no puede considerarse contenido en $\mathcal{H}^0(N;\mathcal{G})$. Sin embargo, la relación $\mathcal{H}^0(N;\mathcal{G}) \subset G_X$ se mantiene en este caso, como se comprueba fácilmente.

Las mismas afirmaciones valen para el caso (d) de p-cociclos.

Es decir, los prehaces (c) y (d) no son haces, y la relación $\mathcal{H}^o(N;\mathcal{G}) \cong G_X$ es falsa.

Llamemos ahora $\mathcal{C}^p$ al prehaz de p-cocadenas y $\mathring{\mathcal{C}}^p$ al de p-cociclos, y consideremos la igualdad -que más adelante necesitaremos-

$$(2.4.5) \qquad \mathring{C}^p(X;G) \,/\, \delta C^{p-1}(X;G) \cong \mathcal{H}^o(N;\, \mathring{\mathcal{C}}^p) \,/\, \delta_* \mathcal{H}^o(N;\, \mathcal{C}^{p-1}),$$

donde δ_* es el operador inducido por δ.

Si se tratara de haces, la veracidad de esta afirmación sería inmediata, por ser iguales "numeradores" y "denominadores". A pesar de no ser esto último cierto, notemos que (2.4.5) es verdadera, pues las cadenas que hay que considerar "de más" en el miembro izquierdo son irrelevantes en los grupos $H^p(X;G)$.

<u>Proposición</u> (2.4.6). Si $0 \longrightarrow \mathcal{G}^o \longrightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{h} \mathcal{G}^1 \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta (para cada U_i) de haces, y $\mathcal{H}^p(N;\mathcal{G}) = 0$ para $p > 0$, entonces se cumple

$$\mathcal{H}^p(N;\, \mathcal{G}^1) \cong \mathcal{H}^{p+1}(N;\, \mathcal{G}^o) \quad , \quad y \qquad \mathcal{H}^1(N;\, \mathcal{G}^o) \cong G^1_X / \, hG_X.$$

Demostración.

En virtud de (2.2.7) la sucesión de Bockstein

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}^o(N;\mathcal{G}^o) \longrightarrow \mathcal{H}^o(N;\mathcal{G}) \xrightarrow{h_*} \mathcal{H}^o(N;\mathcal{G}^1) \longrightarrow \mathcal{H}^1(N;\mathcal{G}^o)$$

$$\longrightarrow 0 \longrightarrow \dots \qquad \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathcal{H}^p(N;\mathcal{G}^1) \longrightarrow \mathcal{H}^{p+1}(N;\mathcal{G}^o) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

es exacta. De aquí surge la tesis. ///

-o-

§2.5. Trivialidad global.

Diremos que un cubrimiento U_i de X es contractible cuando cada $U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_p} = U_{i_0 \ldots i_p}$ es contractible.

Utilizaremos en §2.6 el hecho de que toda variedad diferenciable M tiene un cubrimiento diferenciablemente contractible; más exactamente, dado un cubrimiento de M existe un refinamiento del mismo diferenciablemente contractible. La palabra "diferenciablemente" significa aquí que las contracciones $\phi_i : U_i \times I \longrightarrow U_i$ son funciones diferenciables. La afirmación mencionada se puede demostrar, por ejemplo, introduciendo en M una métrica de Riemann, cubriendo M con esferas geodésicas y contrayendo diferenciablemente las esferas a lo largo de las geodésicas.

Por el momento, solamente consideraremos cubrimientos contractibles. Designaremos $\mathfrak{F}^p$ al prehaz de p-formas en un cubrimiento $\{U_i\}$ contractible de una variedad diferenciable M. Considerando $\mathfrak{F}^p$ como un sistema de coeficientes locales en el nervio N de $\{U_i\}$, (1.7.6) asegura que para $p > 0$ la sucesión

$$0 \longrightarrow \overset{\circ}{\mathfrak{F}}{}^{p-1} \longrightarrow \mathfrak{F}^{p-1} \xrightarrow{d} \overset{\circ}{\mathfrak{F}}{}^{p} \longrightarrow 0$$

es exacta, es decir, hay exactitud en las sucesiones de coeficientes locales.

Análogamente, designamos $\mathfrak{C}^p$ al prehaz de p-cocadenas singulares en un cubrimiento contractible $\{U_i\}$ de un espacio topológico X. Valen afirmaciones análogas a las de $\mathfrak{F}^p$.

Proposición (2.5.1). Sea $\mathfrak{U} = \{U_i\}$ un cubrimiento abierto, contractible, finito de X. Entonces $\mathcal{H}^p(N;\mathcal{C}^q) = 0$ para $p>0$, $q\geq 0$.

Demostración.

Análogamente que en los teoremas de trivialidad local, la demostración se hará encontrando un operador de homotopía $L: C^p(N;\mathcal{C}^q) \longrightarrow C^{p-1}(N;\mathcal{C}^q)$. Se tratará esencialmente de la construcción del cono, pero ahora construiremos un cono para cada simple.

Sea $f^p \in C^p(N;\mathcal{C}^q)$, $p>0$, es decir
$f^p(i_o,\dots,i_p) \in C^q(U_{i_o\dots i_p};G)$, o también
$f^p(i_o,\dots,i_p) : \sum_q (U_{i_o\dots i_p}) \longrightarrow G$.

Recordemos que hemos introducido un orden en $\mathcal{U}$. Para cada simple $\sigma_q \in C_q$, sea $k(\sigma_q)$ el menor índice tal que $\sigma_q \subset U_{k(\sigma_q)}$.

Definimos $L: C^p(N;\mathcal{C}^q) \longrightarrow C^{p-1}(N;\mathcal{C}^q)$ mediante

$$Lf^p(i_o\dots i_{p-1})(\sigma_q) = f^p(k(\sigma_q),i_o,\dots i_{p-1})(\sigma_q),$$

donde $\sigma_q \in C_q(U_{i_o\dots i_{p-1}})$, y por consiguiente también

$\sigma_q \in C_q(U_{k(\sigma_q),i_o,\dots,i_{p-1}})$, por definición de $k(\sigma_q)$.

Sea ahora $\sigma_q \in C_q(U_{i_o\dots i_p})$; entonces

$$\delta(Lf^p)(i_o,\dots,i_p)(\sigma_q) =$$

$$= \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \, \eta_{(i_o\dots i_p),(i_o\dots \hat{i}_j\dots i_p)} \, Lf^p(i_o\dots\hat{i}_j\dots i_p)(\sigma_q).$$

El miembro derecho tiene sentido puesto que

$$U_{i_o\ldots\hat{i}_j\ldots i_p} \supset U_{i_o\ldots i_p};$$

además podemos eliminar la restricción η por ser $\sigma_q \in C_q(U_{i_o\ldots i_p})$; entonces

$$\delta(Lf^p)(i_o\ldots i_p)(\sigma_q) = \sum_{j=0}^{p}(-1)^j\, Lf^p(i_o\ldots\hat{i}_j\ldots i_p)(\sigma_q) =$$

$$= \sum_{j=0}^{p}(-1)^j\, f^p(k(\sigma_q),i_o,\ldots,\hat{i}_j,\ldots,i_p)(\sigma_q).$$

Por otra parte:

$$L(\delta f^p)(i_o\ldots i_p)(\sigma_q) = \delta f^p(k(\sigma_q),i_o,\ldots,i_p)(\sigma_q) =$$

$$= f^p(i_o,\ldots,i_p)(\sigma_q) -$$

$$-\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\, \eta_{(k(\sigma_q),i_o\ldots i_p),(k(\sigma_q),i_o\ldots\hat{i}_j\ldots i_p)}\, f(k(\sigma_q),i_o\ldots\hat{i}_j\ldots i_p)(\sigma_q).$$

El miembro derecho tiene sentido porque $\sigma_q \in C_q(k(\sigma_q),i_o\ldots i_p) \subset C_q(k(\sigma_q),i_o\ldots\hat{i}_j\ldots i_p)$. Además se puede eliminar la restricción η por ser $\sigma_q \in C_q(k(\sigma_q),i_o\ldots i_p)$; entonces:

$$L(\delta f^p)(i_o\ldots i_p)(\sigma_q) =$$

$$= f^p(i_o\ldots i_p)(\sigma_q) - \sum_{j=0}^{p}(-1)^j\, f(k(\sigma_q),i_o\ldots\hat{i}_j\ldots i_p)(\sigma_q).$$

Comparando, obtenemos:

$$(\delta Lf^p + L\,\delta f^p)(i_o,\ldots,i_p)(\sigma_q) = f^p(i_o,\ldots,i_p)(\sigma_q).$$

Esta fórmula es válida para cualquier $\sigma_q \in C_q(Ui_o \cdots i_p)$, cualquier p-simple $(i_o \ldots i_p)$ en N, y cualquier $f^p \in C^p(N; \mathcal{C}^q)$. Entonces:

$$\delta L + L\delta = \text{Identidad.}$$

Si se aplica esta fórmula a un cociclo $f^p \in \overset{o}{C}{}^p(N; \mathcal{C}^q)$, obtenemms inmediatamente que $f^p \in \delta C^{p-1}(N; \mathcal{C}^q)$, que completa la demostración.///

<u>Proposición</u> (2.5.2). Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un cubrimiento abierto, contractible, finito de una variedad diferenciable M. Entonces $\mathcal{H}^p(N; \mathcal{F}^q) = 0$ para $p > 0$, $q \geq 0$.

Demostración.

Sea $\{\psi_i\}$ una partición diferencial de la unidad en M, subordinada al cubrimiento $\{U_i\}$.

Mostraremos la existencia de un operador de homotopía $L: C^p(N; \mathcal{F}^q) \longrightarrow C^{p-1}(N; \mathcal{F}^q)$, $p > 0$.

Sea $f^p \in C^p(N; \mathcal{F}^q)$, $p > 0$, es decir,

$f^p(i_o, \ldots, i_p) \in F^q(U_{i_o \ldots i_p})$.

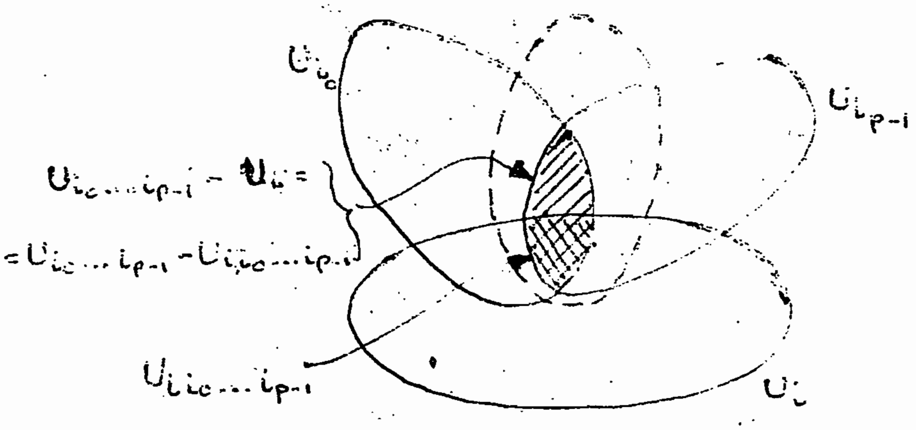
Definimos L mediante

$$Lf^p(i_o \ldots i_{p-1}) = \sum_i g_i^{p-1}(i_o \ldots i_{p-1}),$$

donde

$$g_i^{p-1}(i_o \ldots i_{p-1}) = \begin{cases} \psi_i f^p(i, i_o \ldots i_{p-1}), & \text{en } U_{i, i_o \ldots i_{p-1}}; \\ 0 & \text{en } U_{i_o \ldots i_{p-1}} - U_i. \end{cases}$$

(ver figura).



Se tiene, usando el hecho de que η es una restricción:

$$\delta(Lf^p)(i_o\ldots i_p) =$$

$$= \sum_{j=0}^{p}(-1)^j\, \eta_{(i_o\ldots i_p),(i_o\ldots \hat{i}_j\ldots i_p)}\; Lf^p(i_o\ldots \hat{i}_j\ldots i_p) =$$

$$= \sum_{j=0}^{p}(-1)^j\, \eta_{(i_o\ldots i_p),(i_o\ldots \hat{i}_j\ldots i_p)} \sum_i \left\{ \begin{matrix} \psi_i f^p(i,i_o\ldots \hat{i}_j\ldots i_p) \\ 0 \end{matrix} \right\} =$$

(la igualdad superior en $U_{i,i_o\ldots \hat{i}_j\ldots i_p}$; la inferior en $U_{i_o\ldots \hat{i}_j\ldots i_p} - U_i$)

$$\sum_{j=0}^{p}(-1)^j \sum_i \left\{ \begin{matrix} \psi_i f^p(i,i_o\ldots \hat{i}_j\ldots i_p) \\ 0 \end{matrix} \right\} \quad \begin{matrix} (\text{en } U_{i,i_o\ldots i_p}); \\ (\text{en } U_{i_o\ldots i_p} - U_i). \end{matrix}$$

Por otra parte, indicando en la línea superior las igualdades en $U_{i,i_o\ldots i_p}$ y en la inferior en $U_{i_o\ldots i_p} - U_i$, tenemos:

$$L(\delta f^p)(i_o\ldots i_p) = \sum_i \left\{ \begin{matrix} \psi_i\; f^p(i,i_o\ldots i_p) \\ 0 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \sum_i \left\{ \psi_i \, \eta_{(i,i_0\dots i_p),(i_0\dots i_p)} \, f^p(i_0\dots i_p) \right\}_0 -$$

$$- \sum_i \left\{ \psi_i \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \, \eta_{(i,i_0\dots i_p),(i,i_0\dots \hat{i}_j \dots i_p)} \, f^p(i,i_0\dots \hat{i}_j \dots i_p) \right\}_0 =$$

$$= \sum_i \left\{ \psi_i f^p(i_0\dots i_p) \right\}_0 - \sum_i \left\{ \psi_i \sum_{j=0}^{p} (-1)^j f^p(i,i_0\dots \hat{i}_j \dots i_p) \right\}_0 =$$

$$= f^p(i_0\dots i_p) - \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \sum_i \left\{ \psi_i f^p(i,i_0\dots \hat{i}_j \dots i_p) \right\}_0$$

Comparando, obtenemos

$$\delta L f^p(i_0\dots i_p) + L\delta f^p(i_0\dots i_p) = f^p(i_0\dots i_p),$$

y como la fórmula vale para cualquier $(i_0\dots i_p)$ y cualquier f^p, resulta:

$$\delta L + L\delta = \text{Identidad},$$

de donde surge la tesis.///

-o-

§ 2.6. Demostración del teorema de De Rham.

Supondremos ahora que M es una variedad diferenciable compacta.

Comenzaremos por probar que

(2.6.1) $$R^q(M) \cong \mathcal{H}^1(N; \mathring{\mathcal{F}}^{q-1}) , \quad q > 0,$$

donde N es el nervio de un cubrimiento $\mathcal{U} = \{U_i\}$ abierto, finito y diferenciablemente contractible de M; siendo M compacta, tal cubrimiento existe. $\mathcal{H}^1(N;\overset{\circ}{\mathcal{F}}{}^{q-1})$ será pues el correspondiente grupo simplicial de cohomología con coeficientes en el prehaz $\overset{\circ}{\mathcal{F}}{}^{q-1}$.

Ante todo, se cumple:

$$R^q(M) = \overset{\circ}{F}{}^q(M) \;/\; dF^{q-1}(M) = \mathcal{H}^0(N;\overset{\circ}{\mathcal{F}}{}^q) \;/\; d_*\mathcal{H}^0(N;\mathcal{F}^{q-1}),$$

donde la primera igualdad no es más que la definición de R^q, y la segunda resulta del hecho que $\mathcal{F}^q$ y $\overset{\circ}{\mathcal{F}}{}^q$ son haces y entonces vale (2.4.4). d_* es el operador inducido por d.

Puesto que $\mathcal{U}$ es contractible, se cumple (cf.(1.7.6); cf. también §2.5) que la sucesión

$$(2.6.2)\quad 0\to\overset{\circ}{\mathcal{F}}{}^{q-1}\longrightarrow \mathcal{F}^{q-1}\xrightarrow{\;d\;}\overset{\circ}{\mathcal{F}}{}^{q}\longrightarrow 0,\qquad q>0$$

es exacta, considerada como sistema de coeficientes locales en el nervio de $\mathcal{U}$.

La sucesión de Bockstein de (2.6.2) se escribe, teniendo en cuenta (2.5.2):

$$0\to\mathcal{H}^0(N;\overset{\circ}{\mathcal{F}}{}^{q-1})\longrightarrow\mathcal{H}^0(N;\mathcal{F}^{q-1})\xrightarrow{\;d_*\;}\mathcal{H}^0(N;\mathcal{F}^{q})\longrightarrow$$
$$\mathcal{H}^1(N;\overset{\circ}{\mathcal{F}}{}^{q-1})\longrightarrow 0\longrightarrow\cdots\cdots$$

Como esta sucesión es exacta, por (2.2.7), resulta:

$$\mathcal{H}^1(N;\overset{\circ}{\mathcal{F}}{}^{q-1})\cong\mathcal{H}^0(N;\overset{\circ}{\mathcal{F}}{}^{q})\;/\;d_*\,\mathcal{H}^0(N;\mathcal{F}^{q-1}),$$

y en consecuencia (2.6.1) queda probado.

Consideremos ahora la sucesión de Bockstein de (2.6.2) con $q-1$ en lugar de q ; usando (2.5.2) obtenemos

$$\cdots \longrightarrow \mathscr{H}^1(N;\overset{\circ}{\mathfrak{F}}{}^{q-2}) \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathscr{H}^1(N;\overset{\circ}{\mathfrak{F}}{}^{q-1}) \longrightarrow \mathscr{H}^2(N;\overset{\circ}{\mathfrak{F}}{}^{q-2})$$
$$\longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots,$$

lo cual implica

$$\mathscr{H}^1(N;\overset{\circ}{\mathfrak{F}}{}^{q-1}) \cong \mathscr{H}^2(N;\overset{\circ}{\mathfrak{F}}{}^{q-2}).$$

Repitiendo el mismo argumento con $q-2$, $q-3$, etc., se obtiene:

$$R^q(M) \cong \mathscr{H}^1(N;\overset{\circ}{\mathfrak{F}}{}^{q-1}) \cong \mathscr{H}^2(N;\overset{\circ}{\mathfrak{F}}{}^{q-2}) \cong \cdots \cong \mathscr{H}^q(N;\overset{\circ}{\mathfrak{F}}{}^{0}).$$

Pero $\overset{\circ}{\mathfrak{F}}{}^{0}$ ya no es más a coeficientes locales, sino simplemente el conjunto de las funciones constantes, es decir, los números reales. Entonces:

<u>Proposición</u> (2.6.3). $R^q(M) = \mathscr{H}^q(N;E)$.

$\mathscr{H}^q(N;E)$ es el grupo simplicial de cohomología en el nervio $N(\mathfrak{U})$ del cubrimiento $\mathfrak{U}$. En particular hemos probado que el grupo simplicial aludido no depende del cubrimiento contractible elegido.

Para probar el teorema de De Rham hay que reemplazar $\mathscr{H}^q(N;E)$ por $H^q(M;E)$ en (2.6.3).

Para relacionar $\mathscr{H}^q$ con H^q no hace falta suponer que el espacio sea una variedad, sino solamente un espacio topológico X triangulable, con un cubrimiento contractible. Esto se verifica en particular para variedades.

Análogamente que en la demostración de (2.6.3), comenzaremos probando que

(2.6.4) $$H^q(X;G) \cong \mathscr{H}^1(N;\mathring{\mathcal{C}}^{q-1}), \quad q>0.$$

Se tiene:

$$H^q(X;G) = \mathring{C}^q(X;G) \,/\, \delta C^{q-1}(X;G) = \mathscr{H}^0(N;\mathring{\mathcal{C}}^q) \,/\, \delta_*\mathscr{H}^0(N;\mathcal{C}^{q-1}).$$

La primera igualdad es la definición de H^q. La segunda necesita una cuidadosa atención. $\mathring{\mathcal{C}}^q$ no es un haz, sino solamente un prehaz, y no es cierto (cf.(2.4)) que $\mathscr{H}^0(N;\mathring{\mathcal{C}}^q) = \mathring{C}^q(X;G)$; solamente vale la inclusión $\subset$. Sin embargo, la igualdad entre los grupos cocientes se mantiene, como señalamos en (2.4.5)

Por otra parte, siendo $\mathfrak{U}$ contractible,

$$0 \longrightarrow \mathring{\mathcal{C}}^{q-1} \longrightarrow \mathcal{C}^{q-1} \xrightarrow{\delta} \mathring{\mathcal{C}}^q \longrightarrow 0, \quad q>0,$$

es una sucesión exacta de coeficientes locales en $N(\mathfrak{U})$.

Repitiendo ahora el mismo argumento que para (2.6.3) con la sucesión de Bockstein con $\mathcal{C}$ en lugar de $\mathcal{F}$, y usando (2.5.1) en lugar de (2.5.2), resulta:

$$\mathscr{H}^1(N;\mathring{\mathcal{C}}^{q-1}) \cong \mathscr{H}^0(N;\mathring{\mathcal{C}}^q) \,/\, \delta_*\mathscr{H}^0(N;\mathcal{C}^{q-1}),$$

y entonces

$$H^q(X;G) \cong \mathscr{H}^1(N;\mathring{\mathcal{C}}^{q-1}).$$

Siguiendo con el mismo argumento, se obtiene:

$$H^q(X;G) \cong \mathscr{H}^1(N;\mathring{\mathcal{C}}^{q-1}) \cong \mathscr{H}^2(N;\mathring{\mathcal{C}}^{q-2}) \cong \dots \cong \mathscr{H}^q(N;\mathring{\mathcal{C}}^0).$$

Pero $\mathring{\mathcal{C}}^0 = G$, y en consecuencia

(2.6.5) $$H^q(X;G) \cong \mathcal{H}^q(N;G).$$

En particular, si $G=E$ es el grupo de los reales y $X=M$ es una variedad diferenciable compacta, se cumple:

$$H^q(M;E) \cong \mathcal{H}^q(N;E).$$

Comparando con (2.6.3), obtenemos:

Proposición (2.6.6). (Teorema de De Rham) Si M es una variedad diferenciable compacta, entonces $R^q(M) \cong H^q(M;E)$.

-o-

§ 2.7. El isomorfismo J_*

Aunque hemos probado que $R^q(M)$ y $H^q(M;E)$ son isomorfos, no sabemos aún si el homomorfismo natural J_* definido en §1.6 realiza el isomorfismo.

Recordamos que si $\alpha \in F^q$ y $c \in C_q$, $J: F^q \to C^q$ está definido mediante

$$J\alpha(c) = \int_c \alpha ,$$

y puesto que J tranforma formas cerradas en cociclos y formas exactas en cobordes, entonces induce un homomorfismo

$$J_*: R^q(M) \to H^q(M;E).$$

Proposición (2.7.1). J_* es un isomorfismo.

Demostración.

Consideremos el diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
R^q(M) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{H}^1(N;\overset{\circ}{\mathcal{F}}{}^{q-1}) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{H}^2(N;\overset{\circ}{\mathcal{F}}{}^{q-2}) & \xrightarrow{\cong} & \cdots & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{H}^q(N;\overset{\circ}{\mathcal{F}}{}^{0}) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{H}^q(N;E) \\
\downarrow J_* & & \downarrow J_* & & \downarrow J_* & & & & \downarrow J_* & & \\
H^q(M;E) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{H}^1(N;\overset{\circ}{\mathcal{C}}{}^{q-1}) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{H}^2(N;\overset{\circ}{\mathcal{C}}{}^{q-2}) & \xrightarrow{\cong} & \cdots & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{H}^q(N;\overset{\circ}{\mathcal{C}}{}^{0}) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{H}^q(N;E),
\end{array}$$

donde J_* son los homomorfismos (de coeficientes) inducidos por J en los diferentes grupos indicados.

Mostraremos que el diagrama conmuta y que el último $J_* : \mathcal{H}^q(N;\overset{\circ}{\mathcal{F}}{}^{0}) \longrightarrow \mathcal{H}^q(N;\overset{\circ}{\mathcal{C}}{}^{0})$ es un isomorfismo. Entonces J_* será una composición de isomorfismos y por lo tanto un isomorfismo.

Claro está que para hablar de conmutatividad del diagrama es necesario antes decir cuáles son los isomorfismos elegidos en las filas horizontales (el diagrama puede ser conmutativo para algunos isomorfismos y no para otros). Esto es lo primero que haremos.

Consideremos primero el caso $R^q(M) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}^1(N;\overset{\circ}{\mathcal{F}}{}^{q-1})$. Se tiene:

$$R^q(M) = \overset{\circ}{F}{}^q(M)/\, dF^{q-1}(M) \cong \mathcal{H}^0(N;\overset{\circ}{\mathcal{F}}{}^{q}) \,/\, d_*\mathcal{H}^0(N;\mathcal{F}^{q-1}) \cong$$

$$\cong \mathcal{H}^1(N;\overset{\circ}{\mathcal{F}}{}^{q-1}).$$

Tomemos un elemento $\{\alpha^q\} \in R^q(M)$ individualizado por el representante $\alpha^q \in \overset{\circ}{F}{}^q(M)$. En $\mathcal{H}^0(N;\overset{\circ}{\mathcal{F}}{}^{q})$, α^q es una familia $\{\alpha_i^q\}$, $\alpha_i^q = f^0(i) \in \overset{\circ}{F}{}^q(U_i)$ obtenida como restricción de α^q a U_i. Se cumple entonces $d\alpha_i^q = 0$ en U_i y $\alpha_j^q = \alpha_i^q$ en $U_{i,j}$.

Ahora definiremos el isomorfismo con $\mathcal{H}^1(N;\overset{\circ}{\mathcal{F}}{}^{q-1})$, dando la correspondencia

$$\{\alpha_i^q\} \longrightarrow \{\beta_{i,j}^{q-1}\}.$$

Puesto que α_i^q es cerrada, se cumple $\alpha_i^q = dI\alpha_i^q$, siendo I el operador de homotopía de §1.7. Definimos $\beta_{i,j}^{q-1} \in F^{q-1}(U_{i,j})$ mediante

$$\beta_{i,j}^{q-1} = I\alpha_j^q - I\alpha_i^q.$$

(Obsérvese que I tiene **expresión diferente** en cada U_i; para ser correctos, habría que llamarlo I_j, I_i, etc. Entonces $\beta_{i,j}^{q-1} \neq 0$ en general.)

Se cumple:

$$d\beta_{i,j}^{q-1} = dI\alpha_j^q - dI\alpha_i^q = \alpha_j^q - \alpha_i^q = 0,$$

es decir, $\beta_{i,j}^{q-1} \in \overset{\circ}{F}{}^{q-1}(U_{i,j})$, que es un representante de $\mathcal{H}^1(N; \overset{\circ}{\mathcal{F}}{}^{q-1})$, $f^1(i,j) = \beta_{i,j}^{q-1}$.

Para establecer el segundo isomorfismo $\mathcal{H}^1(N; \overset{\circ}{\mathcal{F}}{}^{q-1}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}^2(N; \overset{\circ}{\mathcal{F}}{}^{q-2})$, observemos que en $U_{i,j,k}$:

$$\beta_{j,k}^{q-1} + \beta_{k,i}^{q-1} + \beta_{i,j}^{q-1} = I\alpha_k^q - I\alpha_j^q + I\alpha_i^q - I\alpha_k^q + I\alpha_j^q - I\alpha_i^q = 0.$$

Siendo $\beta_{i,j}^{q-1}$ cerrado, se tiene $\beta_{i,j}^{q-1} = dI\beta_{i,j}^{q-1}$, y establecemos el isomorfismo $\{\beta_{i,j}^{q-1}\} \longrightarrow \{\gamma_{i,j,k}^{q-2}\}$ definiendo $\gamma_{i,j,k}^{q-2} \in F^{p-2}(U_{i,j,k})$ mediante

$$\gamma_{i,j,k}^{q-2} = I\beta_{i,j}^{q-1} + I\beta_{j,k}^{q-1} + I\beta_{k,i}^{q-1}.$$

(Recordar que I es diferente en cada $U_{i,j}$.)

Se cumple

$$d\gamma^{q-2}_{i,j,k} = \beta^{q-1}_{i,j} + \beta^{q-1}_{j,k} + \beta^{q-1}_{k,i} = 0,$$

lo cual dice que $\gamma^{q-2}_{i,j,k} \in \mathring{F}^{q-2}(U_{i,j,k})$, es decir, $\gamma^{q-2}_{i,j,k}$ es un representante de $\mathcal{H}^2(N;\mathring{\mathcal{F}}^{q-2})$, o sea $\gamma^{q-2}_{i,j,k} = f^2(i,j,k)$.

Para el siguiente isomorfismo se continúa de manera análoga, definiendo

$$\delta^{q-3}_{i,j,k,l} = I\gamma^{q-3}_{i,j,k} - I\gamma^{q-3}_{j,k,r} + I\gamma^{q-3}_{k,r,i} - I\gamma^{q-3}_{r,i,j} ,$$

y así siguiendo.

Se obtiene finalmente,

$$\omega^{o}_{i_o,\dots,i_q} \in \mathring{F}^{o}(U_{i_o\dots i_q}) = E.$$

Consideremos ahora la fila inferior del diagrama. En primer lugar definiremos el isomorfismo $H^q(M;E) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}^1(N;\mathring{\mathcal{C}}^{q-1})$. Se tiene:

$$H^q(M;E) = \mathring{C}^q(M;E) \,/\, \delta C^{q-1}(M;E) \cong \mathcal{H}^o(N;\mathring{\mathcal{C}}^q) \,/\, \delta_*\mathcal{H}^o(N;\mathring{\mathcal{C}}^{q-1}) \cong$$

$$\cong \mathcal{H}^1(N;\mathring{\mathcal{C}}^{q-1}).$$

Cada elemento de $H^q(M;E)$ está determinado por un representante $\gamma^q \in \mathring{C}^q(M;E)$, que determina en $\mathcal{H}^o(N;\mathring{\mathcal{C}}^q)$ una familia $\{\gamma^q_i\}$, donde $\gamma^q_i \in \mathring{C}^q(U_i)$ es la restricción de γ^q. Se cumple $\delta\gamma^q_i = 0$ en U_i y $\gamma^q_i = \gamma^q_j$ en $U_{i,j}$.

Siendo γ^q_i un cociclo, $\delta K^*\gamma^q_i = \gamma^q_i$, donde K^* es el operador definido en §1.7., y es diferente en cada U_i.

Definimos $\tau^{q-1}_{i,j} \in C^{q-1}(U_{i,j})$ mediante

$$\tau^{q-1}_{i,j} = K^* \gamma^q_j - K^* \gamma^q_i ,$$

es decir,

$$\tau^{q-1}_{i,j}(\sigma_{q-1}) = K^* \gamma^q_j(\sigma_{q-1}) - K^* \gamma^q_i(\sigma_{q-1}) = \gamma^q_j\, K\, \sigma_{q-1} - \gamma^q_i\, K\, \sigma_{q-1} .$$

Se cumple

$$\delta \tau^{q-1}_{i,j} = \delta K^* \gamma^q_j - \delta K^* \gamma^q_i = \gamma^q_j - \gamma^q_i = 0 ,$$

es decir, $\tau^{q-1}_{i,j} \in \mathring{C}^{q-1}(U_{i,j})$, que es un representante de $\mathcal{H}^1(N; \mathring{\mathcal{C}}^{q-1})$.

Sabemos que $\tau^{q-1}_{i,j} + \tau^{q-1}_{j,k} + \tau^{q-1}_{k,i} = 0$, y se continúa de manera similar que para la fila superior.

Ahora, estando los isomorfismos ya determinados, mostraremos la conmutatividad de

$$\begin{array}{ccc} R^q(M) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{H}^1(N; \mathring{\mathcal{F}}^{q-1}) \\ \downarrow J_* & & \downarrow J_* \\ H^q(M;E) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{H}^1(N; \mathring{\mathcal{C}}^{q-1}) \end{array} .$$

Sea $\gamma^q_i = J\alpha^q_i$. Debemos probar que $J\beta^{q-1}_{i,j} = \tau^{q-1}_{i,j}$. Se tiene:

$$J\beta^{q-1}_{i,j}(\sigma_{q-1}) = (JI\alpha^q_j - JI\alpha^q_i)(\sigma_{q-1}) = \int_{\sigma_{q-1}} I\alpha^q_j - \int_{\sigma_{q-1}} I\alpha^q_i =$$

$$= \int_{K\sigma_{q-1}} \alpha_j^q - \int_{K\sigma_{q-1}} \alpha_i^q = J\alpha_j^q(K\sigma_{q-1}) - J\alpha_i^q(K\sigma_{q-1}) =$$

$$= \gamma_j^q(K\sigma_{q-1}) - \gamma_i^q(K\sigma_{q-1}) = (K^*\gamma_j^q - K^*\gamma_i^q)(\sigma_{q-1}) = \tau_{i,j}^{q-1}(\sigma_{q-1}).$$

De manera análoga se prueba la conmutatividad en los otros cuadrados del diagrama.

Además, puesto que $\mathring{\mathcal{F}}^o = E = \mathring{\mathcal{C}}^o$ (siendo $G=E$), el último J_* es el isomorfismo identidad. Con esto concluye la demostración.///

-o-

§ 2.8. <u>Idea del camino seguido</u>.

Resumiremos ahora, para aclarar la idea general, independientemente de todo detalle, el camino que hemos seguido para demostrar el teorema de De Rham.

Hemos comenzado con un espacio X y una sucesión de prehaces en X:

$$(2.8.1)\quad \begin{cases} 0 \longrightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{i} \mathcal{G}^o \xrightarrow{h} \mathcal{G}^1 \xrightarrow{h} \mathcal{G}^2 \longrightarrow \cdots\cdot \\ \cdots\cdot \longrightarrow \mathcal{G}^{q-1} \xrightarrow{h} \mathcal{G}^q \xrightarrow{h} \mathcal{G}^{q+1} \longrightarrow \cdots\cdot \end{cases}$$

(Por ejemplo, $\mathcal{G}^q = \mathcal{F}^q$ y $h=d$, o $\mathcal{G}^q = \mathcal{C}^q$ y $h=\delta$; en ambos casos $\mathcal{G}$ es el grupo de coeficientes e i la inmersión.)

En X hemos definido um cubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_i\}$ con nervio $N(\mathcal{U})$ de tal manera que se cumplan las dos siguientes condiciones:

(a) como sistema de coeficientes locales en $N(\mathfrak{U})$, la sucesión (2.8.1) es exacta; y

(b) $\mathcal{H}^p(N; \mathcal{G}^q) = 0$ para $p > 0$, $q \geqslant 0$.

Para que (a) se satisfaga, tomamos $\mathfrak{U}$ contractible; para que (b) se satisfaga supusimos X compacto y $\mathfrak{U}$ finito.

Una consecuencia inmediata de (a) es que la sucesión

(2.8.2) $$0 \longrightarrow \mathring{\mathcal{G}}^{q-1} \xrightarrow{i} \mathcal{G}^{q-1} \xrightarrow{h} \mathcal{G}^{q} \longrightarrow 0$$

es exacta, donde $\mathring{\mathcal{G}}^q = \operatorname{Ker}(h)$.

Entonces el teorema de Bockstein afirma que la sucesión de Bockstein de (2.8.2) es exacta. Escribiéndola y utilizando la condición (b), obtuvimos

$$\mathcal{H}^0(N; \mathring{\mathcal{G}}^q) \,/\, h\,\mathcal{H}^0(N; \mathcal{G}^{q-1}) \cong \mathcal{H}^1(N; \mathring{\mathcal{G}}^{q-1}).$$

Escribiendo la sucesión de Bockstein para $q-1$ en lugar de q, resultó

$$\mathcal{H}^1(N; \mathring{\mathcal{G}}^{q-1}) \cong \mathcal{H}^2(N; \mathring{\mathcal{G}}^{q-2}).$$

Repitiendo el proceso para $q-2$, $q-3$, etc., y teniendo en cuenta que $\mathring{\mathcal{G}}^0 = \mathcal{G}$, se llegó a

$$\mathcal{H}^0(N; \mathring{\mathcal{G}}^q) \,/\, h\,\mathcal{H}^0(N; \mathcal{G}^{q-1}) \cong \mathcal{H}^q(N; \mathcal{G}).$$

Si los $\mathcal{G}^q$ son haces, se cumple $\mathcal{H}^0(N; \mathcal{G}^q) = G^q_X$, y en consecuencia

$$\mathcal{H}^q(N; \mathcal{G}) = \mathring{G}^q_X \,/\, hG^{q-1}_X.$$

Eligiendo $\mathcal{G}^q = \mathcal{F}^q$ y $\mathcal{G}^q = \mathcal{C}^q$, en el miembro derecho se obtiene $R^q(M)$ y $H^q(M;E)$ respectivamente, y como los miembros izquierdos son $\mathcal{H}^q(N;E)$ en ambos casos, resulta el teorema de De Rham.

-o-

§ 2.9. Cohomología de Cech.

Además de las cohomologías singular y simplicial, la cohomología de Cech, de la cual hablaremos ahora, juega un importante papel en la topología algebraica, y cuando se la considera definida en variedades diferenciables el teorema de De Rham mantiene su validez con ella. Aquí sólo daremos una ligera idea del tema, y muchas demostraciones serán omitidas.

Definición (2.9.1). Sea $\mathcal{G}' \xrightarrow{f} \mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{G}''$ una sucesión de prehaces y homomorfismos en un espacio topológico X. La sucesión se llama localmente exacta en el punto $p \in X$ y en $\mathcal{G}$ si para cada entorno abierto U de p y cada elemento $x \in G_U$ tal que $g(x) = 0 \in G''_U$, existe un entorno abierto V de p, $V \subset U$, y un elemento $y \in G'_V$ tal que $f(y) = \eta_{V,U}(x) \in G_V$.

$$\begin{tikzcd} & (x) \arrow[r, dashed] & (0) \\ G'_U \arrow[r, "f"] & G_U \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\eta_{V,U}"] & G''_U \\ (y) & & \\ G'_V \arrow[r, "f"] & G_V & \end{tikzcd}$$

El sentido de la definición es que la sucesión es exacta si restringimos cada abierto U a V.

La definición se extiende trivialmente a cualquier suceción de prehaces $0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}^0 \longrightarrow \mathcal{G}^1 \longrightarrow \mathcal{G}^2 \longrightarrow \cdots$

Consideremos ahora un prehaz $\mathcal{G}$ en un espacio compacto X, y un cubrimiento $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ abierto finito. Con tales premisas habíamos definido ya en §2.2 los grupos simpliciales de cohomología $\mathcal{H}^p(N; \mathcal{G})$ sobre el nervio $N(\mathcal{U})$ del cubrimiento.

Supongamos ahora que $\mathcal{U}' = \{U'_j\}_{j \in J}$ es otro cubrimiento abierto finito de X, con nervio $N'(\mathcal{U}')$, y que refina al anterior, es decir, cada U'_j está contenido en algún U_i. Entonces existe una función -no necesariamente única-

$$\tau : J \longrightarrow I$$

definida por la condición $U'_j \subset U_{\tau(j)}$ para todo j.

Si designamos $(\tau(j_o),\dots,\tau(j_p)) = \tau(j_o,\dots,j_p)$, esto implica

$$U'_{j_o \dots j_p} \subset U_{\tau(j_o \dots j_p)} ,$$

de manera que τ es una tranformación simplicial

$$\tau : N' \longrightarrow N .$$

Entonces τ induce una transformación

$$\tau_* : N'_p \longrightarrow N_p$$

entre los grupos de cadenas simpliciales, que a su ves induce una transformación en cohomología:

$$\tau^* : N^p(\mathcal{G}) \longrightarrow N'^p(\mathcal{G})$$

(obsérvese que los $\mathcal{G}$ son diferentes; para ser correcto habría que llamarlos $\mathcal{G}_N$ y $\mathcal{G}_{N'}$ respectivamente) definida por

$$(\tau^* f^p)(j_o,\dots j_p) = \eta_{U_{j_o\dots j_p},\, U_{\tau(j_o\dots j_p)}}\, f^p(\tau(j_o\dots j_p)).$$

La aparición de η se debe a que los prehaces son diferentes.

No ofrece dificultad ver que $\delta\tau^* = \tau^*\delta$, de manera que τ^* respeta cociclos y cobordes, y por lo tanto induce

$$\tau^*: \mathcal{H}^p(N'; \mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{H}^p(N; \mathcal{G}).$$

Se puede probar que τ^* es independiente de la función τ elegida. Para ver esto, llamaremos <u>contiguos</u> a dos transformaciones simplicicales $\tau, \sigma : N' \to N$ tales que para cada simple $s' \in N'$, los simples $\tau(s')$ y $\sigma(s')$ están en un mismo simple de N.

Con estas condiciones, existe un homomorfismo $D: N'_p \to N_{p+1}$ tal que $\partial D + D\partial = \tau_* - \sigma_*$. De hecho, si $(j_o\dots j_p) \in N'$, puede definirse D mediante

$$D(j_o\dots j_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \,(\tau(j_o)\dots\tau(j_i), \sigma(j_i)\dots\sigma(j_p)\,).$$

Dos funciones $\tau, \sigma : J \to I$ tales que $U'_j \subset U_{\tau(j)}$, $U'_j \subset U_{\sigma(j)}$ son evidentemente contiguas como funciones de N' en N, y por lo tanto existe en este caso tal homomorfismo D , el cual induce un operador

$$D^*: N^{p+1}(\mathcal{G}_N) \longrightarrow N'^p(\mathcal{G}_{N'})$$

definido mediante

$$(D^* f^{p+1})(j_o\dots j_p) =$$

$$= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \,\eta_{U'_{j_o\dots j_p},\, U_{\tau(j_o)\dots\tau(j_i),\sigma(j_i)\dots\sigma(j_p)}}\, f^{p+1}(\tau(j_o)\dots\tau(j_i), \sigma(j_i)\dots\sigma(j_p))$$

el cual verifica

$$D^*\delta + \delta D^* = \sigma^* - \tau^* .$$

Si aplicamos esta fórmula a un cociclo f^p, obtenemos inmediatamente que $(\sigma^* - \tau^*)f^p$ es un coborde, lo cual prueba que las dos transformaciones

$$\tau^*, \sigma^* : \mathcal{H}^p(N; \mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{H}^p(N'; \mathcal{G})$$

coinciden.

Construiremos ahora los grupos de cohomología de Cech.

Dado el espacio compacto X, designamos con $\mathcal{F}$ la familia de todos los cubrimientos abiertos finitos de X. Designamos $\mathcal{U} \in \mathcal{F}$ a un cubrimiento tal.

$\mathcal{F}$ está parcialmente ordenada por refinamiento: si $\mathcal{U}, \mathcal{U}' \in \mathcal{F}$, diremos que $\mathcal{U}' > \mathcal{U}$ si $\mathcal{U}'$ refina a $\mathcal{U}$.

Es inmediato ver que si $\mathcal{U}$, $\mathcal{U}' \in \mathcal{F}$, entonces existe $\mathcal{U}'' \in \mathcal{F}$ tal que $\mathcal{U}'' > \mathcal{U}$, $\mathcal{U}'' > \mathcal{U}'$ (por ejemplo, $\mathcal{U}''$ puede ser el conjunto de las intersecciones de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}'$).

Si $\mathcal{U}' > \mathcal{U}$, está determinado unívocamente un homomorfismo

$$\eta_{\mathcal{U}',\mathcal{U}} : \mathcal{H}^p(N(\mathcal{U}); \mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{H}^p(N(\mathcal{U}'); \mathcal{G}).$$

De hecho, $\eta_{\mathcal{U}',\mathcal{U}} = \tau^*$, donde τ es cualquiera de las funciones consideradas más arriba.

Es sencillo ver que los homomorfismos η cumplen:

a) $\eta_{\mathcal{U},\mathcal{U}} =$ Identidad; y

b) si $\mathfrak{U}'' > \mathfrak{U}' > \mathfrak{U}$, entonces $\eta_{\mathfrak{U}'',\mathfrak{U}'} \circ \eta_{\mathfrak{U}',\mathfrak{U}} = \eta_{\mathfrak{U}'',\mathfrak{U}}$.

Consideremos ahora la suma directa

$$\sum_{\mathfrak{U} \in \mathfrak{F}} \mathcal{H}^p(N); \mathcal{G})$$

e introduzcamos la siguiente relación de equivalencia:

Si $\alpha \in \mathcal{H}^p(N(\mathfrak{U}); \mathcal{G})$ y $\beta \in \mathcal{H}^p(N(\mathfrak{U}'); \mathcal{G})$, entonces $\alpha \sim \beta$ en caso de que exista un $\gamma \in \mathcal{H}^p(N(\mathfrak{U}''); \mathcal{G})$, con $\mathfrak{U}'' > \mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}'' > \mathfrak{U}$ tal que $\eta_{\mathfrak{U}'',\mathfrak{U}} \alpha = \gamma = \eta_{\mathfrak{U}'',\mathfrak{U}'} \beta$.

La suma directa de los $\mathcal{H}^p$, módulo esta relación de equivalencia, se llama <u>límite directo</u> de $\mathcal{H}^p(N(\mathfrak{U}); \mathcal{G})$, $\mathfrak{U} \in \mathfrak{F}$, y se designa con

$$\varinjlim_{\mathfrak{U} \in \mathfrak{F}} \mathcal{H}^p(N(\mathfrak{U}); \mathcal{G}) = \mathcal{H}^p(X; \mathcal{G}).$$

<u>Definición</u> (2.9.2). $\mathcal{H}^p(X; \mathcal{G})$ es el <u>p-grupo de cohomología de Cech</u> (con coeficientes en $\mathcal{G}$).

La definición de $\mathcal{H}^p(X; \mathcal{G})$ incluye todos los cubrimientos de $\mathfrak{F}$, y es un invariante topológico.

Se puede probar (y esto es muy intuitivo) que no hace falta que $\mathcal{G}$ esté definido en todos los abiertos, sino solamente en una base de X (intuitivamente: en los abiertos pequeños), y en tal caso la definición de límite directo es similar. Un poco más exactamente: basta considerar una familia $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{F}$ cofinal de $\mathfrak{F}$.

<u>Proposición</u> (2.9.3). Sea $0 \longrightarrow \mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'' \longrightarrow 0$ una sucesión localmente exacta de haces en X. Entonces la sucesión de Bockstein de los grupos de cohomología de Cech,

$$0 \to \mathcal{H}^0(X;\mathcal{G}') \to \mathcal{H}^0(X;\mathcal{G}) \to \dots$$

$$\dots \to \mathcal{H}^p(X;\mathcal{G}') \to \mathcal{H}^p(X;\mathcal{G}) \to \mathcal{H}^p(X;\mathcal{G}'') \to \mathcal{H}^{p+1}(X;\mathcal{G}') \to \dots$$

es exacta.

Daremos solamente una muy ligera idea del camino de la demostración.

Se considera la sucesión $0 \to \mathcal{G}' \to \mathcal{G} \to \mathcal{G}_1'' \to 0$, definiendo $\mathcal{G}_1'' \subset \mathcal{G}''$ de manera que la sucesión sea exacta.

Si luego se define $\mathcal{E}$ de manera que la sucesión $0 \to \mathcal{G}_1'' \to \mathcal{G}'' \to \mathcal{E} \to 0$ sea exacta, se prueba que $\mathcal{E}$ es localmente trivial, de manera que $\mathcal{G}_1'' \to \mathcal{G}''$ es un isomorfismo en cohomología, de lo cual se deduce la exactitud de la sucesión de Bockstein.

Proposición (2.9.4). Sea X un espacio compacto de Hausdorff con una sucesión de haces $0 \to \mathcal{G} \xrightarrow{i} \mathcal{G}^0 \xrightarrow{h} \mathcal{G}^1 \xrightarrow{h} \mathcal{G}^2 \to \dots$ localmente exacta, y tal que $\mathcal{H}^p(X;\mathcal{G}^q) = 0$ para $p>0$ y $q \geq 0$. Entonces

$$\mathcal{H}^p(X;\mathcal{G}) \cong \overset{o}{G}{}^q_X \,/\, hG^{q-1}_X.$$

Demostración.

Exactamente como en (2.4.4). Ahora la sucesión es sólo localmente exacta, pero (2.9.3) elimina esta dificultad.///

De aquí resulta entonces que si X es triangulable (llamando K a su complejo simplicial), entonces

$$\mathcal{H}^p(X;G) \cong H^p(X;G) \cong \mathcal{H}^p(K;G),$$

(Cech $\cong$ singular $\cong$ simplicial) puesto que los tres grupos son isomorfos a $\overset{o}{G}{}^p_X \,/\, hG^{p-1}_X$.

En particular, si $X = M$ es una variedad diferenciable,

$$R^p(M) \cong \mathcal{H}^p(M;E) \cong H^p(M;E) \cong \mathcal{H}^p(N(\mathcal{U});E),$$

donde $\mathcal{U}$ es un cubrimiento finito abierto diferenciablemente contractible.

Es decir, el teorema de De Rham mantiene su validez con respecto a la cohomología de Cech.

----oOo----

CAPITULO III. FORMAS ARMONICAS Y EL TEOREMA DE HODGE.

En lo que sigue daremos por conocidas las propiedades más elementales de los espacios de Riemann. Consideraremos una variedad diferencial M de dimensión n, orientada y compacta, con un campo tensorial (tensor métrico) covariante, positivo definido, de componentes g_{ij}, que la convierte en un espacio de Riemann.

§ 3.1. Formas adjuntas

Usaremos las siguientes notaciones.

Si j_i, $k_i = 1,\dots,n$, $j=(j_1,\dots,j_n)$, $k=(k_1,\dots,k_n)$, entonces:

$$\delta^{j_1\dots j_n}_{k_1\dots k_n} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \text{ es una permutación par de } k, \text{ y los } k_i \text{ son diferentes;} \\ -1 & \text{si } j \text{ es una permutación impar de } k, \text{ y los } k_i \text{ son diferentes;} \\ 0 & \text{si alguno de los } k_i \text{ o } j_i \text{ son iguales;} \end{cases}$$

$$g_{i_1\dots i_n, k_1\dots k_n} = \begin{vmatrix} g_{i_1k_1} & \cdots\cdots & g_{i_1k_n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{i_nk_1} & \cdots\cdots & g_{i_nk_n} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_j g_{i_1j_1} \cdots\cdots g_{i_nj_n} \; \delta^{j_1\dots j_n}_{k_1\dots k_n} .$$

Resulta que $\delta^{j_1\dots j_n}_{k_1\dots k_n}$ constituyen las componentes de un tensor de tipo (n, n).

ma elemento de volumen.

Ahora pasaremos a considerar las formas adjuntas.

Definición (3.1.2). Dada una p-forma

$$\alpha = \sum_{i_1<\dots<i_p} a_{i_1\dots i_p}\, dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_p},$$

la forma adjunta de α es la n-p forma

$$*\alpha = \sum_{j_1<\dots<j_{n-p}} a^*_{j_1\dots j_{n-p}}\, dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_{n-p}},$$

donde

$$a^*_{j_1\dots j_{n-p}} = \sum_{i_1<\dots<i_p} e_{i_1\dots i_p, j_1\dots j_{n-p}}\, a^{i_1\dots i_p}$$

En la definición, $a^{i_1\dots i_p}$ son las componentes contravariantes de la forma α, es decir:

$$a^{i_1\dots i_p} = g^{i_1k_1}\dots g^{i_pk_p}\, a_{k_1\dots k_p},$$

donde g^{ij} son las componentes contravariantes del tensor métrico. Utilizamos aquí y en lo que sigue la convención de no indicar específicamente sumas sobre índices de variancia diferente cuando se realiza para todos los valores de 1 a n.
Además, $e_{i_1\dots i_n} = \delta^{1\dots n}_{i_1\dots i_n} e_{1\dots n}$ es la definición del primer miembro

El operador $*: F^p \to F^{n-p}$ es lineal y se llama operador de adjunción.

Definición (3.1.3). $w: F \to F$ es el operador lineal tal que si $\alpha \in F^p$ entonces $w\alpha = (-1)^p\alpha$. Además, $\bar{w} = w^{n+1}$

Supongamos que $\alpha = a\, dx^1\wedge\dots\wedge dx^p$ en un sistema local de

Se obtiene fácilmente que

$$g_{i_1\ldots i_n,k_1\ldots k_n} = \delta^{1\ldots\ldots n}_{i_1\ldots i_n} \cdot \delta^{1\;\ldots\;n}_{k_1\ldots k_n} \quad g_{1\ldots n,1\ldots n} \, ,$$

es decir, todas las componentes de $g_{i_1\ldots i_n,k_1\ldots k_n}$ están determinadas por una de ellas.

En particular, en un sistema de coordenadas ortogonales se cumple:

$$g_{1\ldots n,1\ldots n} = \begin{vmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

En una transformación de coordenadas se obtiene

$$\bar{g}_{1\ldots n,1\ldots n} = J^2 \, g_{1\ldots n,1\ldots n} \, ,$$

donde J es el jacobiano de la transformación, de manera que si definimos

$$e_{1\ldots n} = + \sqrt{g_{1\ldots n,1\ldots n}} \, ,$$

la ley de transformación es

$$\bar{e}_{1\ldots n} = J \, e_{1\ldots n} \, .$$

Esta ley de transformación (densidad escalar) por cambios de coordenadas es precisamente la ley de transformación del coeficiente de las formas de grado n, de manera que la definición siguiente tiene sentido:

<u>Definición</u> (3.1.1). La n-forma $e_{1\ldots n}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ se lla-

coordenadas ortogonales; no ofrece dificultad ver que
$*\alpha = a\, dx^{p+1}\wedge \ldots \wedge dx^n$, y

$$**\alpha = a\ \delta^{1\ \ldots\ldots\ n}_{p+1\ldots n,1\ldots p}\ dx^1\wedge \ldots \wedge dx^p = (-1)^{p(n+p)}\,\alpha .$$

Este resultado es independiente del sistema de coordenadas elegido (no aparece en él) y del punto considerado. Además se extiende linealmente a todo F^p. Entonces $** = (-1)^{p(n+1)}$ en F^p y por consiguiente

<u>Proposición</u> (3.1.4). $** = \bar{w}$.

De aquí resulta $*^{-1} = *\bar{w} = \bar{w}*$, puesto que $(\bar{w})^{-1} = \bar{w}$.

En particular, $*1$ es el elemento de volumen.

Si $\alpha = \sum a_{i_1\ldots i_p}\, dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}$ y $\beta = \sum b_{i_1\ldots i_p}\, dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}$ son p-formas, entonces $\alpha\wedge *\beta$ es una n-forma, dada por

$$\alpha\wedge *\beta = \Big(\sum_{i_1<\ldots<i_p} a^{i_1\ldots i_p}\, b_{i_1\ldots i_p}\Big).*1 ,$$

y de aquí se obtiene:

<u>Proposición</u> (3.1.5). $\alpha\wedge *\beta = \beta\wedge *\alpha \quad , \quad \alpha, \beta \in F^p$.

Además el coeficiente $\big(\sum a^{i_1\ldots i_p}\, a_{i_1\ldots i_p}\big)\, e_{1\ldots n}$ de $\alpha\wedge *\alpha$ es no negativo, y nulo sólo si $\alpha = 0$. Esto permite dar la siguiente definición:

<u>Definición</u> (3.1.6). El <u>producto escalar</u> de dos formas α, β, es

$$(\alpha,\beta) = \int_M \alpha\wedge *\beta .$$

La definición no es trivial sólo si α y β tienen componentes en un mismo F^p. La integral existe por ser M compacto y orientable, y (α,β) cumple efectivamente las propiedades de un producto escalar (real):

a) $(\alpha,\beta) = (\beta,\alpha)$;
b) $(\alpha,\alpha) \geqslant 0$;
c) $(\alpha,\alpha) = 0$ si y sólo si $\alpha = 0$;
d) (α,β) es bilineal.

Conviene hacer notar que el producto escalar (α,β) no transforma a F es un espacio de Hilbert, pues carece de completidad la métrica definida por él.

Proposición (3.1.7). Para $\alpha,\beta \in F$, se cumple $(*\alpha,*\beta)=(\alpha,\beta)$.

Demostración.

Basta probar que $*\alpha \wedge **\beta = \alpha \wedge *\beta$ para $\alpha,\beta \in F^p$, p=0,..

$$*\alpha \wedge **\beta = (-1)^{p(n+1)} *\alpha \wedge \beta = (-1)^{p(n+1)} (-1)^{p(n-p)} \beta \wedge *\alpha =$$
$$= \beta \wedge *\alpha = \alpha \wedge *\beta \ . \ ///$$

La noción de producto escalar permite, dado un operador, definir su adjunto ("métrico"). En particular,

Definición (3.1.8). El operador codiferencial δ es el adjunto del operador diferencial d, es decir, si $\alpha,\beta \in F$, δ se define mediante

$$(\delta\alpha,\beta) = (\alpha,d\beta).$$

Para ver algunas propiedades de δ necesitaremos un resultado previo:

Proposición (3.1.9). Si $\gamma \in F^{n-1}$, entonces $\int_M d\gamma = 0$.

Demostración.

Sea $\{\psi_i\}$ una partición diferenciable de la unidad.

$$\int_M d\gamma = \sum_i \int \psi_i d\gamma = \sum_i \left\{ \int d(\psi_i \gamma) - \int (d\psi_i) \wedge \gamma \right\} =$$

$$= - \sum_i \int d\psi_i \wedge \gamma = - \sum_{i,j} \int \psi_j d\psi_i \wedge \gamma = - \sum_j \int \psi_i \, d(\sum_i \psi_i) \wedge \gamma =$$

$= 0$, puesto que $\sum_i \psi_i = 1$. ///

Proposición (3.1.10). $\delta : F^p \longrightarrow F^{p-1}$; la restricción de δ a F^p es $\delta | F^p = (-1)^{n(p+1)+1} * d * ;$ $\delta\delta = 0$.

Demostración.

La tercera afirmación es inmediata, y la primera una consecuencia inmediata de la segunda. Basta pues demostrar ésta última. Sea pues $\alpha \in F^p$, $\beta \in F^{p-1}$; entonces

$$(\delta\alpha, \beta) = (\alpha, d\beta) = (*\alpha, *d\beta) = \int_M *\alpha \wedge **d\beta =$$

$= (-1)^{(n-p)(n+1)} \int_M *\alpha \wedge d\beta =$ (aplicando ahora (3.1.9) a la forma $*\alpha \wedge d\beta$) $= - (-1)^{(n-p)(n+1)} (-1)^{n-p} \int_M d*\alpha \wedge \beta =$

$$= -(-1)^{(n-p)n} (-1)^{(n-p+1)(n+1)} \int_M **d*\alpha \wedge \beta =$$

$$= -(-1)^{p+1} (-1)^{(n-p-1)(n+1)} \int_M **d*\alpha \wedge **\beta =$$

$$= -(-1)^{n(n-p)} (**d*\alpha \wedge *\beta) = (-1)^{np+n+1} (*d*\alpha \wedge \beta). \quad ///$$

Proposición (3.1.11). $d\delta\alpha = 0$ implica $\delta\alpha = 0$; $\delta d\alpha = 0$ implica $d\alpha = 0$.

Demostración.

a) $d\delta\alpha=0 \Longrightarrow (d\delta\alpha,\alpha)=0 \Longrightarrow (\delta\alpha,\delta\alpha)=0 \Longrightarrow \delta\alpha=0$;

b) $\delta d\alpha=0 \Longrightarrow (\delta d\alpha,\alpha)=0 \Longrightarrow (d\alpha,d\alpha)=0 \Longrightarrow d\alpha=0$. ///

<u>Proposición</u> (3.1.12). Los subespacios dF^{p-1} y δF^{p+1} de F^p son ortogonales.

Demostración.

Sea $\alpha\in F^{p-1}$, $\beta\in F^{p+1}$. Entonces $(d\alpha,\delta\beta) = (dd\alpha,\beta) = 0$. ///

-o-

§ 3.2. <u>Formas armónicas</u>.

<u>Definición</u> (3.2.1). El <u>operador laplaciano</u> (o de Laplace-Beltrami) $\Delta: F^p \longrightarrow F^p$ es $\Delta = (d+\delta)^2 = d\delta + \delta d$, extendido linealmente a todo F.

Por ejemplo, en $F^o(E_n)$ resulta $\Delta f = -\sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$, en coordenadas cartesianas ortogonales.

<u>Proposición</u> (3.2.2). Δ es autoadjunto.

Demostración.

$(\Delta\alpha,\beta) = (d\delta\alpha,\beta) + (\delta d\alpha,\beta) = (\delta\alpha,\delta\beta) + (d\alpha,d\beta) =$

$= (\alpha,d\delta\beta) + (\alpha,\delta d\beta) = (\alpha,\Delta\beta)$. ///

<u>Definición</u> (3.2.3). Una forma $\alpha\in F$ es <u>armónica</u> cuando $\Delta\alpha = 0$. En símbolos, $\alpha\in W$.

Designaremos con $W^p\subset F^p$ al conjunto de formas armónicas de F^p.

<u>Proposición</u> (3.2.4). $\Delta\alpha=0$ si y sólo si $d\alpha=0$ y $\delta\alpha=0$.

Demostración.

La implicación "si" és obvia. Recíprocamente, si $\Delta\alpha=0$, entonces

$$0 = d\Delta\alpha = dd\delta\alpha + d\delta d\alpha = d\delta d\alpha.$$

Aplicando dos veces (3.1.11) resulta $d\alpha=0$.

Análogamente, si se calcula $\delta\Delta\alpha$ se obtiene $\delta\alpha=0$. ///

<u>Proposición</u> (3.2.5). Los subespacios W^p, dF^{p-1} y δF^{p+1} de F^p son mutuamente ortogonales.

Demostración.

Ya hemos probado en (3.1.12) que dF^{p-1} es ortogonal a δF^{p+1}.

Sea ahora $\alpha\in W^p$ y $\beta\in F^{p-1}$. Entonces

$(\alpha, d\beta) = (\delta\alpha, \beta) = 0$ en virtud de (3.2.4); es decir, W^p es ortogonal a dF^{p-1}.

Por otra parte, si $\alpha\in W^p$ y $\beta\in F^{p+1}$, entonces

$(\alpha, \delta\beta) = (d\alpha, \beta) = 0$ en virtud de la misma (3.2.4), de manera que W^p es ortogonal a δF^{p+1}. ///

Conviene tal vez hacer notar que no hemos probado que los tres subespacios que aparecen en (3.2.5) son cerrados. Esto dificulta la teoría; hablaremos algo de ello en el próximo párrafo.

-o-

§ 3.3. La descomposición de F^p y el teorema de Hodge.

Así como el teorema de De Rham permite afirmar que las formas diferenciales de M caracterizan su cohomología, el teorema de Hodge asegura que bastan las formas armónicas para ello. Este teorema es el principal objetivo que perseguimos en esta sección §3. Su demostración está basada en las siguientes dos proposiciones fundamentales;

Proposición (3.3.1). Sea $\beta \in F$. La condición necesaria y suficiente para que $\Delta\mu = \beta$ tenga solución (es decir, que exista $\mu \in F$ tal que la igualdad se cumpla) es que β sea ortogonal a W.

Proposición (3.3.2). W tiene dimensión finita (como subespacio vectorial de F).

La demostración de la condición necesaria en (3.3.1) es sencilla. Si $\alpha \in W$, entonces $(\beta,\alpha) = (\Delta\mu,\alpha) = (\mu,\Delta\alpha) = 0$. Además, si μ y μ' son soluciones ortogonales a W, $\mu - \mu'$ también será ortogonal a W. Pero $\Delta(\mu - \mu') = \beta - \beta = 0$, de manera que $\mu - \mu' \in W$. En consecuencia $\mu - \mu' = 0$.

Además, si μ es una solución y π la proyección de F sobre W, entonces $\mu - \pi\mu$ es una solución ortogonal a W. En cuanto a la existencia de π, observemos que si bien en general no se puede afirmar en F la existencia de proyecciones sobre subespacios por no ser F un espacio de Hilbert, sí se lo puede hacer en el caso particular de W, puesto que al ser de dimensión finita, por (3.3.2), entonces resulta ser completo y por consiguiente π está bien definida.

En definitiva, lo único que resta probar para las dos proposiciones (3.3.1) y (3.3.2) son las dos afirmaciones siguientes:

(A) Si β es ortogonal a W, entonces $\Delta\mu = \beta$ tiene solución.

(B) W tiene dimensión finita.

La demostración de estos hechos no es de ningún modo sencilla, y a ella le dedicaremos los párrafos §3.5 hasta §3.9. En §3.5, 6 y 7 daremos nociones auxiliares para ello; en §3.8 definiremos la parametriz, con la cual la demostración será efectuada, y en §3.9 llevaremos a cabo la misma.

Por el momento, daremos por sentada la validez de (A) y (B), en base a lo cual probaremos el teorema de Hodge.

En primer lugar, descompondremos F^p en tres subespacios.

Si $\alpha \in F^p$ y π es la proyección de F^p sobre W^p, entonces $\pi\alpha \in W^p$ y $\alpha - \pi\alpha \in W^{p\perp}$ ($A^{\perp}$ significa el subespacio ortogonal a A).

Designemos $G\alpha$ a la única solución perteneciente a $W^{p\perp}$ de $\Delta\mu = \alpha - \pi\alpha$, cuya existencia asegura (3.3.1). Entonces $\alpha = \pi\alpha + \Delta G\alpha$, o sea

$$\alpha = \pi\alpha + d\delta G\alpha + \delta d G\alpha,$$

es decir,

$$\alpha = \alpha_0 + d\beta + \delta\gamma,$$

donde

$$\alpha_0 = \pi\alpha \in W^p, \qquad \beta = \delta G\alpha \in F^{p-1}, \qquad \gamma = dG\alpha \in F^{p+1}.$$

Probaremos que esta descomposición de α es única, en el sentido que α_o, $d\beta$ y $\delta\gamma$ están unívocamente determinadas, pero no así β y γ. De hecho, si en lugar de β tomamos $\beta + d\beta_1$, $\beta_1 \in F^{p-2}$, entonces la igualdad se cumple; y análogamente para γ.

Supongamos pues que existiera otra descomposición $\alpha = \alpha_o' + d\beta' + \delta\gamma'$ con $\alpha_o' \in W^p$, $\beta' \in F^{p-1}$, $\gamma' \in F^{p+1}$, es decir,

$$\alpha_o' + d\beta' + \delta\gamma' = \alpha_o + d\beta + \delta\gamma .$$

Aplicando d y utilizando (3.2.4) obtememos $d\delta\gamma' = d\delta\gamma$, lo cual implica, por (3.1.11), que $\delta\gamma' = \delta\gamma$.

Análogamente, aplicando δ, por (3.2.4) obtenemos $\delta d\beta' = \delta d\beta$, y de aquí, por (3.1.11), $d\beta' = d\beta$.

En consecuencia, vale también $\alpha_o' = \alpha_o = \pi\alpha$.

Hemos probado pues que cada $\alpha \in F^p$ se descompone de manera única en una suma de elementos de W^p, dF^{p-1} y δF^{p+1}. En otras palabras, si $\alpha \in F^p$, entonces $\alpha = \alpha_o + \beta_o + \gamma_o$, con $\alpha_o \in W^p$, $\beta_o \in dF^{p-1}$, $\gamma_o \in \delta F^{p+1}$, y α_o, β_o, γ_o únicos. Es decir:

<u>Proposición</u> (3.3.3). $F^p = W^p \oplus dF^{p-1} \oplus \delta F^{p+1}$.

Consideremos ahora en particular la descomposición de una forma $\alpha \in \overset{o}{F}{}^p$ cerrada. De $\alpha = \alpha_o + d\beta + \delta\gamma$, aplicando d resulta $d\delta\gamma = 0$ y por lo tanto $\delta\gamma = 0$, es decir, las formas cerradas tienen componente nula en δF^{p+1}; $\alpha = \alpha_o + d\beta$.

Sea α' otra forma cerrada, y $\alpha' = \alpha_o' + d\beta'$.

Si α y α' están en la misma clase de conomología, es decir, si $\alpha' - \alpha = d\rho$, obtenemos

$$\alpha_0' - \alpha_0 = d(\beta - \beta' + \rho).$$

Pero W^p es perpendicular a dF^{p-1}, de manera que $\alpha_0' = \alpha_0$.

Hemos probado pues que cada elemento del grupo de De Rham R^p contiene una única forma armónica, lo cual define un homomorfiamo $R^p \longrightarrow W^p$.

Tal homomorfismo es un epimorfismo, puesto que cualquier elemento de W^p, siendo una forma cerrada, es un representante de un elemento de R^p.

Probaremos ahora que es un monomorfismo. Para ello, supongamos que $\alpha, \alpha' \in \overset{\circ}{F}{}^p$ pertenecen a distintas clases de cohomología. Sean

$$\alpha = \alpha_0 + d\beta, \quad \alpha' = \alpha_0' + d\beta'$$

sus descomposiciones. Debemos probar que $\alpha_0' \neq \alpha_0$.

Sea $\alpha' - \alpha = \alpha_0'' + d\beta''$ la descomposición de $\alpha' - \alpha$. Se obtiene inmediatamente que $\alpha_0'' = \alpha_0' - \alpha_0$, pero $\alpha_0'' \neq 0$ porque de lo contrario $\alpha' - \alpha = d\beta''$, que contradice al hecho de que α y α' no son cohomólogas.

En consecuencia, hemos demostrado:

<u>Proposición</u> (3.3.4). (Teorema de Hodge) $W^p \cong R^p$. El isomorfismo está realizado por $\alpha_0 \longrightarrow \{\alpha_0\}$.

Como corolario de este teorema y del de De Rham, resulta que $W^p = H^p(M;E)$.

-o-

§3.4. Dualidad de Poincaré.

Proposición (3.4.1). $*\Delta = \Delta *$.

Demostración.

Basta probar la igualdad en un F^p, pues se extiende por linealidad. Se tiene:

$$*\Delta = *(\delta d + d\delta) = (-1)^{n(p+1+1)+1} **d*d + (-1)^{n(p+1)+1} *d*d* =$$

$$= (-1)^{np+1}(-1)^{(n-p)(n+1)} d*d + (-1)^{n(p+1)+1} *d*d* =$$

$$= (-1)^{p+1}(-1)^{p(n+1)} d*d** + (-1)^{n(p+1)+1} *d*d* =$$

$$= (-1)^{pn+1}(-1)^{n(n-p+1)+1} d\delta* + (-1)^{n(p+1)+1}(-1)^{n(n-p+1+1)+1} \delta d* =$$

$$= d\delta* + \delta d* = \Delta*. \quad ///$$

Entonces $*: W^p \longrightarrow W^{n-p}$. El hecho que $** = (-1)^{p(n+1)}$ en F^p implica que $*$ es un monomorfismo, y por simetría, es sobre. Se trata entonces de un isomorfismo, y en consecuencia obtenemos $W^p \cong W^{n-p}$. Utilizando el teorema de Hodge, concluimos:

Proposición (3.4.2). (Teorema de dualidad de Poincaré) $R^p \cong R^{n-p}$.

Como corolario, resulta que $H^p(M;E) \cong H^{n-p}(M;E)$. Aclaremos que tal conclusión no es cierta si en lugar del grupo de los reales E se utiliza cualquier otro para H^p.

La proposición (3.4.1) afirma que $*$ conmuta con Δ. Concluiremos este párrafo dando una propiedad de los operadores que conmutan con el laplaciano.

<u>Proposición</u> (3.4.3). Sea $L: F^p \rightarrow F^p$ y $L\Delta = \Delta L$. Entonces $L\pi = \pi L$ y $LG = GL$.

Demostración.

Sea $\alpha \in F^p$. Entonces -como en la demostración de (3.3.2), con $L\alpha$ en lugar de α-:

(a) $L\alpha = \pi L\alpha + \Delta GL\alpha$, $\pi L\alpha \in W^p$, $\Delta GL\alpha \in W^{p\perp}$.

Además, de $\alpha = \pi\alpha + \Delta G\alpha$ y la hipótesis, resulta

$$L\alpha = L\pi\alpha + \Delta LG\alpha .$$

$\Delta\pi = 0$ implica $\Delta L\pi\alpha = L\Delta\pi\alpha = 0$, de manera que $L\pi\alpha \in W^p$.

Además, para cualquier $\omega \in W^p$ es $(\Delta LG\alpha, \omega) = (LG\alpha, \Delta\omega) = 0$, de manera que $\Delta LG\alpha \in W^{p\perp}$. Es decir:

(b) $L\alpha = L\pi\alpha + \Delta LG\alpha$, $L\pi\alpha \in W^p$, $\Delta LG\alpha \in W^{p\perp}$.

Comparando (a) y (b) obtenemos:

$$\pi L\alpha = L\pi\alpha, \qquad \Delta GL\alpha = \Delta LG\alpha .$$

La primera igualdad implica $\pi L = L\pi$. La segunda se puede escribir $\Delta(GL-LG)\alpha = 0$, de manera que $(GL-LG)\alpha \in W^p$, o sea $\pi(GL-LG)\alpha = (GL-LG)\alpha$. Pero $\pi GL=0$ por ser $\pi G=0$ y $\pi LG=0$ puesto que, según ya hemos probado, $\pi LG = L\pi G$. Queda entonces $(GL-LG)\alpha = 0$. ///

-o-

§ 3.5. <u>Fórmula de Green</u>,

La demostración de (A) y (B) (§3.3), fundamental para el teorema de Hodge, la haremos siguiendo el argumento que utilizó De Rham (cf. [3]). En este párrafo demostraremos un resultado auxiliar necesario.

Convendrá utilizar la siguiente notación. Si $\alpha, \beta \in F$, $\alpha \doteq \beta$ significa que las componentes de grado n de α y β son iguales.

Recordamos que en F^p:

$$** = (-1)^{p(n+1)}, \qquad \delta = (-1)^{n(p+1)+1} *d* .$$

Proposición (3.5.1). (Fórmula de Green) Si $c \in C_n(M)$ y $\alpha, \beta \in F$, entonces

$$\int_{\partial c} \alpha \wedge *d\beta - \beta \wedge *d\alpha + \delta\alpha \wedge *\beta - \delta\beta \wedge *\alpha = \int_c \Delta\alpha \wedge *\beta - \Delta\beta \wedge *\alpha .$$

Demostración.

Sean $\mu \in F^p$ y $\nu \in F^q$. Entonces

$$d(\mu \wedge *\nu) = d\mu \wedge *\nu + (-1)^p \mu \wedge d*\nu .$$

Trabajaremos con el último término.

$$(-1)^p \mu \wedge d*\nu = (-1)^p (-1)^{(n-q+1)(n+1)} \mu \wedge **d*\nu =$$

$$= (-1)^{p+(n-q+1)(n+1)} (-1)^{n(q+1)+1} \mu \wedge *\delta\nu = \text{(usando (3.1.5))}$$

$$= (-1)^{p-q} \delta\nu \wedge *\mu .$$

Supongamos en particular que $\mu \wedge d*\nu \in F^n$, es decir, $p+(n-q+1) = n$, o sea $p-q+1 = 0$. Entonces

$$(-1)^p \mu \wedge d*\nu = -\delta\nu \wedge *\mu,$$

de manera que

$$d(\mu\wedge *\nu) = d\mu\wedge *\nu - \delta\nu\wedge *\mu.$$

En el caso en que μ y ν son dos formas cualesquiera de F, siempre se cumplirá:

$$d(\mu\wedge *\nu) \doteq d\mu\wedge *\nu - \delta\nu\wedge *\mu.$$

Haciendo primero $\mu=\alpha$, $\nu = d\beta$, luego $\mu=\beta$, $\nu = d\alpha$, y sustrayendo, resulta

$$d(\alpha\wedge *d\beta - \beta\wedge *d\alpha) \doteq d\alpha\wedge *d\beta - \delta d\beta\wedge *\alpha - d\beta\wedge *d\alpha + \delta d\alpha\wedge *\beta,$$

es decir,

$$d(\alpha\wedge *d\beta - \beta\wedge *d\alpha) \doteq \delta d\alpha\wedge *\beta - \delta d\beta\wedge *\alpha.$$

Análogamente, haciendo $\mu = \delta\alpha$, $\nu = \beta$ y luego $\mu = \delta\beta$, $\nu = \alpha$, y sustrayendo, obtenemos

$$d(\delta\alpha\wedge *\beta - \delta\beta\wedge *\alpha) \doteq d\delta\alpha\wedge *\beta - d\delta\beta\wedge *\alpha.$$

Sumando las dos últimas igualdades resulta

$$d(\alpha\wedge *d\beta - \beta\wedge *d\alpha + \delta\alpha\wedge *\beta - \delta\beta\wedge *\alpha) \doteq \Delta\alpha\wedge *\beta - \Delta\beta\wedge *\alpha.$$

Integrando en c y aplicando la fórmula de Stokes se obtiene la tesis. ///

-o-

§ 3.6. <u>Expresión de d, δ y Δ mediante la derivada covariante</u>.

Es éste el segundo resultado auxiliar que necesitamos.

Recordamos que las componentes de una forma escrita en forma antisimétrica se transforman como las de un tensor covariante, y que si $a_{i_1\ldots i_p}$ son las componentes de un tal tensor de rango p, entonces su derivada covariante es el tensor covariante de rango $p+1$ con componentes

$$\nabla_i a_{i_1\ldots i_p} = \frac{\partial a_{i_1\ldots i_p}}{\partial x^i} - \sum_{\nu=1}^{p} a_{i_1\ldots i_{\nu-1}, i_{\nu+1}\ldots i_p} \Gamma^{j}_{i_\nu i} ,$$

donde

$$\Gamma^{i}_{jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{i\ell}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{k\ell}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^\ell} \right) g^{i\ell}$$

son los símbolos de Christoffel de segunda especie.

En estas fórmulas, así como en las que aparecerán luego, utilizamos la convención de sumar de 1 a n (sin indicarlo explícitamente) índices repetidos de distinta variancia.

Supongamos ahora que $\alpha = \sum_{i_1<\ldots<i_p} a_{i_1\ldots i_p}\, dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}$ $\in F^p$. En virtud de la definición de d:

$$d\alpha = \sum_{i_1<\ldots<i_p} d(a_{i_1\ldots i_p})\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p},$$

se cumple

$$(d\alpha)_{k_1\ldots k_{p+1}} = \sum_{i_1<\ldots<i_p} \delta^{j,i_1\ldots i_p}_{k_1\ldots k_{p+1}} \frac{\partial a_{i_1\ldots i_p}}{\partial x^j} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{p+1} (-1)^{\nu-1} \frac{\partial}{\partial x^k} a_{k_1\ldots\hat{k}_\nu\ldots k_{p+1}}.$$

Puesto que la derivada covariante de un escalar se reduce a la derivada ordinaria, obtenemos

$$(3.6.1) \qquad (d\alpha)_{k_1\ldots k_{p+1}} = \sum_{\nu=1}^{p+1} (-1)^{\nu-1} \nabla_{k_\nu} \alpha_{k_1\ldots\hat{k}_\nu\ldots k_{p+1}}.$$

Ahora calcularemos la expresión de $\delta\alpha$. Sea

$$\beta = \sum_{i_1<\ldots<i_{p-1}} b_{i_1\ldots i_{p-1}} dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_{p-1}} \in F^{p-1};$$ se cumple

$$\int \delta\alpha\wedge*\beta = (\delta\alpha,\beta) = (\alpha, d\beta) = \int \alpha\wedge * d\beta.$$

Pero

$$*d\beta = \sum_{j_1<\ldots<j_{n-p}} (d\beta)^*_{j_1\ldots j_{n-p}} dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_{n-p}} =$$

$$= \sum_{j_1<\ldots<j_{n-p}} \sum_{i_1<\ldots<i_p} e_{i_1\ldots i_p, j_1\ldots j_{n-p}} g^{i_1k_1}\ldots g^{i_pk_p} (d\beta)_{k_1\ldots k_p} dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_{n-p}} =$$

$$= \sum\sum\sum_{\nu=1}^{p} (-1)^{\nu-1} e_{i_1\ldots i_p, j_1\ldots j_{n-p}} g^{i_1k_1}\ldots g^{i_pk_p} \nabla_{k_\nu} b_{k_1\ldots\hat{k}_\nu\ldots k_p} dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_{n-p}}.$$

Entonces, llamando $dx^1\ldots\ldots dx^n = dx$ y teniendo en cuenta que $\nabla_l g_{ik} = 0$ (la derivada covariante del tensor métrico es nula), obtenemos

$$\int_M \alpha\wedge*d\beta = \int \sum_{j_1<\ldots<j_{n-p}} \sum_{i_1<\ldots<i_p}' \sum_{\nu=1}^{p} \delta^{1\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;n}_{j_{n-p+1}\ldots j_n, j_1\ldots j_{n-p}} \cdot$$

$$\cdot (-1)^{\nu-1} a_{j_{n-p+1}\ldots j_n} e_{i_1\ldots i_p, j_1\ldots j_{n-p}} g^{i_1k_1}\ldots g^{i_pk_p} \nabla_{k_\nu} b_{k_1\ldots\hat{k}_\nu\ldots k_p} dx =$$

(a la pag. sgte.)

$$= -\int \sum\sum\sum \delta^{\cdots\cdots}_{\cdots\cdots} (-1)^{\nu-1} \nabla_{k_\nu} a_{j_{n-p+1}\dots j_n} \cdot$$

$$\cdot\, e_{i_1\dots i_p, j_1\dots j_{n-p}}\, g^{i_1k_1}\dots g^{i_pk_p}\, b_{k_1\dots\hat{k}_\nu\dots k_p}\, dx =$$

$$= -\int \sum\sum\sum \delta^{\cdots\cdots}_{\cdots\cdots} (-1)^{\nu-1} \cdot$$

$$\nabla^{i_\nu} a_{j_{n-p+1}\dots j_n}\, e_{i_1\dots i_p, j_1\dots j_{n-p}}\, g^{i_1k_1}\dots \widehat{g^{i_\nu k_\nu}} \dots g^{i_pk_p}\, b_{k_1\dots\hat{k}_\nu\dots k_p}\, dx\,,$$

donde hemos llamado $\nabla^i = g^{ik}\nabla_k$ a las componentes contravariantes de la derivada covariante. Puesto que la última expresión obtenida es igual a $\int \delta\alpha \wedge * \beta$, por comparación obtenemos

$$(3.6.2) \qquad (\delta\alpha)_{k_1\dots k_{p-1}} = -\nabla^i \alpha_{i,k_1\dots k_{p-1}}$$

Hallaremos finalmente la expresión de $\Delta\alpha = (\delta d + d\delta)\alpha$. De (3.6.1) y (3.6.2) obtenemos

$$(\delta d\alpha + d\delta\alpha)_{k_1\dots k_p} =$$

$$= -\nabla^i (d\alpha)_{i,k_1\dots k_p} - \sum_{\nu=1}^{p} (-1)^{\nu-1} \nabla_{k_\nu} (\delta\alpha)_{k_1\dots\hat{k}_\nu\dots k_p} =$$

$$= -\nabla^i \nabla_i a_{k_1\dots k_p} - \sum_{\nu=1}^{p} (-1)^{\nu} \nabla^i \nabla_{k_\nu} a_{i,k_1\dots\hat{k}_\nu\dots k_p} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{p} (-1)^{\nu} \nabla_{k_\nu} \nabla^i a_{i,k_1\dots\hat{k}_\nu\dots k_p}\,,$$

de manera que

(3.6.3) $(\Delta\alpha)_{k_1\ldots k_p} =$

$$= -\nabla^i \nabla_i \, a_{k_1\ldots k_p} + \sum_{\nu=1}^{p} (-1)^{\nu} \, (\nabla_{k_\nu}\nabla^i - \nabla^i \nabla_{k_\nu}) \, a_{i,k_1\ldots\hat{k}_\nu\ldots k_p} \, .$$

Observemos que para un escalar f, en particular, es $d\,\delta f = 0$ y por lo tanto

$$\Delta f = -\nabla^i \nabla_i \, f = - g^{ik} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^k} \, .$$

Calcularemos ahora $\Delta(f\alpha)$, donde $f \in F^0$. Puesto que, según es sencillo verificar, se cumple

$$(\nabla^i \nabla_i \, f\alpha)_{k_1\ldots k_p} =$$

$$= f \, \nabla^i \nabla_i \, \alpha_{k_1\ldots k_p} + 2 \, (\nabla^i f)(\nabla_i \alpha_{k_1\ldots k_p}) + (\Delta f)_{k_1\ldots k_p} \, ,$$

y además

$$(\nabla_r \nabla^k - \nabla^k \nabla_r) f \alpha_{k_1\ldots k_p} = f \, (\nabla_r \nabla^k - \nabla^k \nabla_r) \, \alpha_{k_1\ldots k_p}$$

por el hecho de ser $\nabla_k f = \dfrac{\partial f}{\partial x^k}$ y por consiguiente conmutar las derivadas covariantes segundas sobre los escalares, obtenemos de (3.6.3)

(3.6.4) $(\Delta(f\alpha))_{k_1\ldots k_p} =$

$$= f(\Delta\alpha)_{k_1\ldots k_p} - 2 \, (\nabla^i f)(\nabla_i a_{k_1\ldots k_p}) + (\Delta f)\alpha_{k_1\ldots k_p} \, .$$

-o-

§3.7. Formas dobles.

Necesitamos también conocer el concepto de forma (diferencial) doble. Aquí no examinaremos detenidamente la cuestión; un tratamiento más detallado puede verse en [4].

Las formas se definen habitualmente de manera que sus coeficientes pertenecen al espacio vectorial E de los reales, pero nada obsta para que se consideren coeficientes en un espacio vectorial **diferente**.

Supongamos dadas dos variedades diferenciables M_1 (dimensión n; coordenadas locales x_i) y M_2 (dimensión m; coordenadas locales y_i). Una p-forma en M_1 con coeficientes en las q-formas de M_2 se representa localmente como

$$\alpha = \sum_{i_1<\dots<i_p} \beta_{i_1\dots i_p}\, dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_p},$$

donde cada β es una q-forma en M_2:

$$\beta_{i_1\dots i_p} = \sum_{j_1<\dots<j_q} c_{i_1\dots i_p, j_1\dots j_q}\, dy^{j_1}\wedge\dots\wedge dy^{j_q},$$

y los c son **reales**.

Si los índices j_k son fijos,

$$\gamma_{j_1\dots j_q} = \sum_{i_1<\dots<i_p} c_{i_1\dots i_p, j_1\dots j_q}\, dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_p}$$

es una p-forma en M_1 con coeficientes reales, y

$$\alpha' = \sum_{j_1<\dots<j_q} \gamma_{j_1\dots j_q}\, dy^{j_1}\wedge\dots\wedge dy^{j_q}$$

es un q-forma en M_2 con coeficientes en las p-formas de M_1.

Identificaremos las dos formas α y α', y la llamaremos una <u>forma doble</u> de bigrado (p,q) sobre $M_1 \times M_2$, y la representaremos en coordenadas locales mediante

$$\alpha = \alpha(x,y) = \sum_{\substack{i_1<\dots<i_p \\ j_1<\dots<j_q}} c_{i_1\dots i_p, j_1\dots j_q} (dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p})(dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_q}).$$

El conjunto de formas doble sobre $M_1 \times M_2$ se designa con $F(M_1 \times M_2)$; el de las de bigrado (p,q) con $F^{p,q}(M_1 \times M_2)$.

Existe conmutatividad para cada par dx^{i_k}, dy^{j_h}. La suma y el producto de formas dobles se define de la manera usual, lo cual convierte a $F(M_1 \times M_2)$ en un álgebra. Ahora habrá dos operadores diferenciales d_x, d_y, que cumplen

$$d_x d_x = d_y d_y = 0, \qquad d_x d_y = d_y d_x .$$

Las formas dobles se las puede considerar como <u>núcleos</u> de operadores que transforman formas de M_2 en formas de M_1. Así, puede definirse a tal operador T mediante

$$T\varphi(x) = \int_{y\in\theta} \alpha(x,y) \wedge \varphi(y) ,$$

donde $\varphi \in F(M_2)$, $\alpha(x,y) \in F(M_1 \times M_2)$, $c \in C(M_2)$, y la integración se realiza con respecto a la variable y. Resulta $T\varphi \in F(M_1)$.

Nosotros utilizaremos formas dobles en el caso en que $M_1 = M_2 = M$, es decir, elementos de $F(M \times M)$.

-o-

§ 3.8. <u>La parametriz</u>.

Sea $r(x,y)$ la distancia geodésica entre los puntos x,y

de la variedad diferenciable n-dimensional M. La función $r(x,y)$ está bien definida, es diferenciable y simétrica en un entorno reducido de la diagonal de $M \times M$. La función $r^2(x,y)$ es diferenciable en un entorno de la diagonal de $M \times M$. Además, por ser $x^i - y^i = O(r)$ (es decir, el cociente de $x^i - y^i$ por r es acotado), se cumple

$$r^2(x,y) = g_{ij}(x)\,(x^i - y^i)(x^j - y^j) + O(r^3).$$

Consideremos ahora la función

$$A(x,y) = -\frac{1}{2}\, r^2(x,y).$$

Se tiene:

$$\frac{\partial A}{\partial x^i} = - g_{ij}(x)\,(x^j - y^j) - \frac{1}{2}\,\frac{\partial g_{kh}}{\partial x^i}\,(x^k - y^k)(x^h - y^h) + O(r^2) =$$

$$= - g_{ij}(x)\,(x^j - y^j) + O(r^2),$$

y entonces

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^i\,\partial y^j} = g_{ij}(x) + O(r).$$

En consecuencia se verifica

$$d_x d_y A(x,y) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 A}{\partial x^i \partial y^j}\, dx^i dy^j = \sum_{i,j} g_{ij}(x)\, dx^i dy^j + O(r).$$

Esto permitirá trabajar con mayor comodidad con la forma doble $d_x d_y A(x,y)$; no hemos partido directamente con $g_{ij}(x) dx^i dy^j$ porque no es simétrica en x,y, mientras que la primera sí lo es.

Si definimos ahora

$$\alpha_p(x,y) = \frac{1}{p!}\left[d_x d_x A(x,y)\right]^p, \qquad p=0,1,\dots n,$$

donde la potencia se entiende en el sentido de la multiplicación exterior (nota: no es cierto en general que $\varphi\wedge\varphi=0$ para $\varphi\in F$), y poniendo además $\alpha_o(x,y) = 1$, se cumple

$$\alpha_p(x,y) = \frac{1}{(p!)^2}\, g_{i_1\dots i_p,j_1\dots j_p}(x)\; dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_p}.dy^{j_1}\wedge\dots\wedge dy^{j_p} +$$

$+ O(r)$.

Si $\varphi\in F^p(M)$, se cumple

$$\alpha_p(x,y)\wedge *\varphi(y) =$$

$$= \frac{1}{(p!)^2}\, g_{i_1\dots i_p,j_1\dots j_p}(x)\; dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_p}\;\varphi^{j_1\dots j_p}(y)\; *_y 1 + O(r),$$

donde $\varphi^{j_1\dots j_p}$ son las componentes contravariantes de φ, y $*_y$ indica que la adjunción se toma en las variables y.

Puesto que se cumple $\varphi(y) = \varphi(x) + O(r)$, la fórmula anterior se puede escribir

$$\alpha_p(x,y)\wedge *\varphi(y) = \varphi(x) *_y 1 + O(r).$$

Si definimos ahora

$$\alpha(x,y) = \sum_{p=0}^{n} \alpha_p(x,y),$$

resulta que para cualquier $\varphi\in F(M)$ se cumple

(3.8.1) $$\alpha(x,y)\wedge *\varphi(y) \overset{y}{=} \varphi(x) *_y 1 + O(r),$$

donde $\overset{y}{\doteq}$ significa que existe igualdad entre los términos de grado n en y.

Sea ahora $\sigma(x,y)$ una función definida en $M\times M$ con soporte en un entorno de la diagonal de $M\times M$ tal que en él la función $A(x,y)$ sea diferenciable. Además elegimos $\sigma(x,y)$ no negativa, no mayor que uno, simétrica en x,y, diferenciable, y que valga uno en un entorno de la diagonal de $M\times M$. Sea además s_n el área de la superficie esférica unitaria (n-1 dimensional) de E_n.

Definición (3.8.2). La forma doble definida fuera de la diagonal de $M\times M$ (extendida con valor 0 fuera del soporte de $\sigma(x,y)$) mediante

$$\omega(x,y) = \frac{1}{s_n} \; \frac{\sigma(x,y)}{(n-2)\; r^{n-2}(x,y)} \cdot \alpha(x,y),$$

se llama <u>parametriz</u>.

Esta definición es válida sólo para $n>2$; en el caso $n=2$ se toma $-\ln r(x,y)$ en lugar de $(n-2)^{-1}\, r^{2-n}(x,y)$. En lo sucesivo usaremos la expresión para $n>2$, aunque el mismo razonamiento se extiende al caso $n=2$.

Observemos que el coeficiente de α en la expresión de es una aproximación de la solución elemental de la ecuación de Laplace.

Evidentemente, $\omega(x,y)$ es simétrica en x,y, definida en todo $M\times M$ fuera de la diagonal, y diferenciable.

Llamaremos ahora

(3.8.3) $$q(x,y) = -\Delta_x \omega(x,y),$$

donde Δ_x indica que el laplaciano se toma en la variable x.

Un cálculo directo, basado en (3.6.4) y en el hecho $\Delta_x r^{2-n}(x,y) = O(r^{2-n})$, prueba que $q(x,y) = O(r^{2-n})$ (').

Definición (3.8.4). Ω, Q y Q' : $F(M) \longrightarrow F(M)$ son los operadores definidos mediante

$$\Omega\varphi(x) = \int_{y\in M} \omega(x,y) \wedge * \varphi(y),$$

$$Q\varphi(x) = \int_{y\in M} q(x,y) \wedge * \varphi(y),$$

$$Q'\varphi(x) = \int_{y\in M} q(y,x) \wedge * \varphi(y).$$

Ω es autoadjunto, en virtud de la simetría de ω, y Q' es el adjunto de Q.

Proposición (3.8.5). En $F(M)$ se cumple

$$\Omega\Delta = I - Q' , \quad \Delta\Omega = I - Q ,$$

donde I es el operador identidad.

Demostración.

Basta probar la primera fórmula, puesto que la segunda resulta de ella tomando los adjuntos de ambos miembros.

Sea Σ_ε la esfera geodésica de centro $x \in M$ y radio ε; sea D_ε su interior y D'_ε su exterior. Entonces, para $\varphi \in F(M)$,

('); Cf. [3], §28, Lemme 1, y §27, Lemme 2.

$$\Omega\,\Delta\varphi(x) - Q'\varphi(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{D'_\varepsilon} \omega\wedge *\Delta\varphi - \Delta\omega\wedge *\varphi,$$

donde la integral y los operadores del segundo miembro se aplican a la variable y.

La fórmula de Green (3.5.1) transforma la integral en

$$-\int_{\Sigma_\varepsilon} \varphi\wedge *d\omega - \delta\omega\wedge *\varphi + \delta\varphi\wedge *\omega - \omega\wedge *d\varphi .$$

Los últimos dos términos son $O(r^{2-n})$, de manera que su integral se anula cuando $\varepsilon\to 0$. Basta pues considerar sólo los dos primeros, y la integral se puede expresar (siendo $r=\varepsilon=$ constante, en Σ_ε):

$$-\frac{1}{\varepsilon^n}\int_{\Sigma_\varepsilon} \varphi\wedge * r^n\, d\omega - r^n\delta\omega\wedge *\varphi .$$

La forma bajo el signo de integral está bien definida y es diferenciable en D_ε, por ser $\omega = O(r^{2-n})$, de manera que se puede aplicar la fórmula de Stokes, y resulta

$$-\frac{1}{\varepsilon^n}\int_{D_\varepsilon} w\,\varphi\wedge d(*r^n d\omega) - d(r^n\delta\omega)\wedge *\varphi ,$$

donde hemos eliminado los términos $O(r)$, puesto que la integral correspondiente tiende a cero para $\varepsilon\to 0$.

Entonces, transformando el primer término tal como hicimos al demostrar la fórmula de Green, resulta

$$\frac{1}{\varepsilon^n}\int_{D_\varepsilon} \left[\delta(r^n d\omega) + d(r^n\delta\omega)\right]\wedge *\varphi .$$

Ahora aplicaremos los resultados de §3.6. Se tiene, por (3.6.1) y (3.6.2):

$$\left[\delta(r^n d\omega)\right]_{j_1\ldots j_p} = -\nabla^i(r^n d\omega)_{i,j_1\ldots j_{p-1}} =$$

$$= -nr^{n-1}(\nabla^i r)(d\omega)_{i,j_1\ldots j_{p-1}} - r^n\nabla^i(d\omega)_{i,j_1\ldots j_{p-1}} =$$

$$= -nr^{n-1}\nabla^i r\,\nabla_i\omega_{i,j_1\ldots j_{p-1}} + nr^{n-1}\sum_{\nu=1}^{p}(-1)^{\nu}(\nabla^i r)\,\nabla_{j_\nu}\omega_{i,j_1\ldots\hat{j}_\nu\ldots j_p} -$$

$$- r^n\nabla^i\nabla_i\omega_{j_1\ldots j_{p-1}} - r^n\sum_{\nu=1}^{p}(-1)^{\nu}\nabla^i\nabla_{j_\nu}\omega_{i,j_1\ldots\hat{j}_\nu\ldots j_p},$$

y por otra parte

$$\left[d(r^n\delta\omega)\right]_{j_1\ldots j_p} = (nr^{n-1}dr\wedge\delta\omega + r^n d\delta\omega)_{j_1\ldots j_p} =$$

$$= -nr^{n-1}\sum_{\nu=1}^{p}(-1)^{\nu-1}(\nabla_{k_\nu}r)\,\nabla^i\omega_{i,j_1\ldots\hat{j}_\nu\ldots j_p} + r^n\sum_{\nu=1}^{p}(-1)^{\nu-1}\nabla_{j_\nu}(\delta\omega)_{j_1\ldots\hat{j}_\nu\ldots j_p} =$$

$$= -nr^{n-1}\sum_{\nu=1}^{p}(-1)^{\nu-1}(\nabla_{k_\nu}r)\,\nabla^i\omega_{i,j_1\ldots\hat{j}_\nu\ldots j_p} + r^n\sum_{\nu=1}^{p}(-1)^{\nu}\nabla_{j_\nu}\nabla^i\omega_{i,j_1\ldots\hat{j}_\nu\ldots j_p}.$$

En consecuencia, usando (3.6.3):

$$\left[\delta(r^n d\omega) + d(r^n d\omega)\right]_{j_1\ldots j_p} =$$

$$= -nr^{n-1}\left\{\nabla^i r\,\nabla_i\omega_{i,j_1\ldots j_{p-1}} - \sum_{\nu=1}^{p}(-1)^{\nu}\nabla^i r\,\nabla_{j_\nu}\omega_{i,j_1\ldots\hat{j}_\nu\ldots j_p} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=1}^{p}(-1)^{\nu}\nabla_{j_\nu}r\,\nabla^i\omega_{i,j_1\ldots\hat{j}_\nu\ldots j_p}\right. + r^n(\Delta\omega)_{j_1\ldots j_p}.$$

El último término, por ser $\Delta\omega = O(r^{2-n})$, es $O(r^2)$ y puede eliminarse de la integral.

Además, para ε pequeño es $\omega = \dfrac{r^{2-n}}{s_n(n-2)}\alpha$, de manera que

$$\nabla_i \omega_{k_1\dots k_p} = -\frac{r^{1-n}}{s_n} \nabla_i r \, \alpha_{k_1\dots k_p} + O(r^{2-n}),$$

y el factor de $-nr^{n-1}$ se puede escribir, por ser sus dos últimos términos $O(r^{2-n})$,

$$\frac{r^{1-n}}{s_n} \nabla^i r \, \nabla_i r \, \alpha_{k_1\dots k_p} + O(r^{2-n}).$$

Además $\nabla^i r \, \nabla_i r = g^{ij} \dfrac{\partial r}{\partial x^i} \dfrac{\partial r}{\partial x^j} = 1$, y por consiguiente obtenemos

$$\delta(r^n d\omega) + d(r^n \delta\omega) = \frac{n}{s_n} \alpha + O(r),$$

y por lo tanto, usando (3.8.1):

$$\left[\delta(r^n d\omega) + d(r^n \delta\omega)\right] \wedge * \varphi = \frac{n}{s_n} \varphi(x) *_y 1 + O(r),$$

de donde resulta

$$\Omega \wedge \varphi(x) + Q'\varphi(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{n}{s_n} \varepsilon^{-n} \varphi(x) \int_{D_\varepsilon} *_y 1 = \varphi(x),$$

lo cual prueba la tesis.///

-o-

§3.9. Solución de $\Delta\mu = \beta$.

Como preliminar (no imprescindible) de la demostración de la proposición (A) de §3.3, probaremos que:

Proposición (3.9.1). Dada $\beta \in F(M)$, para cada punto de M existe un entorno D (suficientemente pequeño) tal que $\Delta\mu = \beta$ tiene solución en D.

Demostración.

Sean Ω_D y Q_D los operadores definidos en (3.8.4), cuando la integral se restrinje a D. Es decir, si f_D es la función característica de D, será

$$\Omega_D \varphi = \Omega(f_D \varphi), \qquad Q_D \varphi = Q(f_D \varphi).$$

La segunda fórmula de (3.8.5) implica

$$\Delta \Omega_D \varphi = f_D \varphi - Q_D \varphi .$$

Si hallamos una forma ξ que en D satisface a la ecuación integral

$$\xi - Q_D \xi = \beta ,$$

en virtud de la ecuación anterior resulta que $\mu = \Omega_D \xi$ es la solución buscada en D, puesto que

$$\Delta\mu = \Delta \Omega_D \xi = f_D \xi - Q_D \xi = \beta .$$

Para hallar ξ hay que invertir el operador $I - Q_D$; para ello consideramos la identidad

$$(I-Q_D)(I+Q_D+ \dots +Q_D^{m-1}) = I - Q_D^m .$$

Puesto que $q(x,y) = O(r^{2-n})$, para D suficientemente pequeño es

$$\sup_{x\in D} \left| Q_D \varphi(x) \right| \leq C \sup_{x\in D} \left| \varphi(x) \right| ,$$

con C independiente de φ, y donde $|\varphi(x)|$ designa al máximo de los valores absolutos de los coeficientes de $\varphi(x)$.

En consecuencia $Q_D^m \longrightarrow 0$ uniformemente cuando $m \longrightarrow \infty$, y $\sum_{h=0}^{m-1} Q_D^h$ converge uniformemente hacia

$$\sum_{h=0}^{\infty} Q_D^m = (I-Q_D)^{-1}.$$

Es decir, $\xi = \sum_{m=0}^{\infty} Q_D^m \beta$, y la convergencia es uniforme en D. Tal ξ da la solución. Observemos que hemos considerado Q_D en lugar de Q, porque en caso contrario no podríamos en general afirmar la convergencia de la serie. ///

Ahora probaremos las proposiciones (A) y (B) de §3.3, lo cual concluirá la demostración del teorema de Hodge.

Si $\varphi \in W$, en particular cumple la ecuación $\Omega\Delta\varphi=0$, que según (3.8.5) se puede escribir

$$\varphi - Q'\varphi = 0.$$

Puesto que $q(x,y) = O(r^{2-n})$, si $\{\varphi\}$ es un conjunto acotado (en la norma uniforme), entonces $\{Q'\varphi\}$ es un conjunto acotado y equicontinuo, y en consecuencia compacto, por el teorema de Ascoli. Esto prueba que Q' es un operador compacto. Por lo tanto, las soluciones de $\varphi - Q'\varphi = 0$ forman un espacio vectorial $\mathcal{E}$ de dimensión finita (cf. [8], §5.5, para la teoría de operadores compactos o completamente continuos). Como evidentemente $W \in \mathcal{E}$, la proposición (B) queda demostrada.

La resolución de $\Delta\mu = \beta$ se puede reducir, como en (3.9.1), a la de $\xi - Q\xi = \beta$, y en tal caso $\mu = \Omega\xi$. Por ser Q compacto, $\xi - Q\xi = \beta$ tiene solución si y sólo si β es ortogonal a las soluciones de la ecuación homogénea transpuesta, es decir, si $\beta \in \mathcal{E}^{\perp}$. Pero sólo sabemos que (en la hipótesis de la proposición (A)) que $\beta \in W^{\perp} \supset \mathcal{E}^{\perp}$, de manera que este método no da la solución en el caso en que β pertenezca a $W^{\perp}$ pero no a $\mathcal{E}^{\perp}$. Por supuesto, esto sólo quiere decir que no se puede hallar la solución en la forma $\mu = \Omega\xi$, pero no afirma la no existencia de solución de $\Delta\mu = \beta$.

De hecho, probaremos a continuación la existencia de la solución μ.

Sea $\mathcal{E}'$ el subespacio de $\mathcal{E}$ ortogonal a W, es decir $\mathcal{E} = W \oplus \mathcal{E}'$

Si $\varphi_1 \in \mathcal{E}'$ no es idénticamente nula, será $\Delta\varphi_1 \neq 0$ y $(\Delta^2\varphi_1, \varphi_1) = (\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_1) \neq 0$, de manera que la función lineal f_φ en $\mathcal{E}'$ definida mediante

$$f_\varphi : \varphi_1 \longrightarrow (\Delta^2\varphi_1, \varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{E}',$$

no es nula.

Esto quiere decir que la transformación $\varphi \longrightarrow f_\varphi$ de $\mathcal{E}'$ en su dual es un isomorfismo, de manera que a cada β corresponde un $\varphi_1 \in \mathcal{E}'$ tal que

$$(\Delta^2\varphi_1, \varphi) = (\beta, \varphi), \qquad \varphi \in \mathcal{E}'.$$

Entonces $\beta - \Delta^2\varphi_1 \in \mathcal{E}'^{\perp}$. Además $\beta - \Delta^2\varphi_1 \in W^{\perp}$ puesto que ambos sumandos están en $W^{\perp}$. Por lo tanto $\beta - \Delta^2\varphi_1 \in \mathcal{E}^{\perp}$, y entonces $\xi - Q\xi = \beta - \Delta^2\varphi_1$ tiene solución ξ. En tal caso,

$$\mu = \Omega\xi + \Delta\varphi_1$$

satisface $\Delta\mu = \beta$, con lo cual la proposición (A) queda demostrada.

-----oOo-----

(Fin Cap. III)

CAP. IV. VARIEDADES COMPLEJAS Y EL TEOREMA DE RIEMANN-ROCH.

Aquí daremos sólo algunos hechos elementales de la teoría. Si bien el tratamiento comienza en general, el teorema de Riemann-Roch será demostrado solamente para superficies de Riemann compactas. La principal bibliografía es [1] y [7].

§4.1. Variedades complejas y casi complejas.

Consideremos una variedad diferenciable de dimensión par, V^{2m}. En una carta -es decir, un sistema de coordenadas locales- $x^1,\dots, x^{2m}$, sean $z^1,\dots, z^m$ funciones complejas de x^i, $i=1,\dots,2m$.

El conjunto $z^1,\dots,z^m$ se llama un sistema local admisible complejo de coordenadas (o carta admisible compleja) cuando las partes real e imaginaria $\Re z^\mu$ y $\Im z^\mu$ de z^μ, $\mu=1,\dots m$, constituyen un sistema de coordenadas locales de V^{2m}.

Esto significa que $\{z^\mu\}_1^m$ es una carta compleja admisible si y sólo si

$$\frac{\partial(z^1,\dots,z^m,\bar z^1,\dots,\bar z^m)}{\partial(x^1,\dots\dots,x^{2m})} \neq 0,$$

donde $\bar z^\mu$ indica la compleja conjugada de z^μ.

Definición (4.1.1). V^{2m} es una variedad compleja si existe una familia de cartas que cubren V^{2m} tal que en la intersección de dos cartas cualesquiera las transformaciones de coordenadas $z^\mu(\omega^1,\dots,\omega^m)$, $\mu=1,\dots,m$, son funciones holomorfas.

Equivalentemente, si en la definición de variedad (real) diferenciable V^m se reemplaza la palabra "real" por "complejo" y"diferenciable" por "holomorfo", se obtiene la definición de variedad compleja V^{2m}.

Reservamos el adjetivo"holomorfo"para expresar analiticidad en el sentido complejo, y el adjetivo "analítico" para analiticidad en el sentido real, es decir, desarrollable en serie real convergente de potencias.

Llamamos a m la dimensión (compleja) de V^{2m}; entonces la dimensión real es el doble de la compleja.

El plano complejo es el ejemplo más simple de variedad compleja; lo designamos con C. Más generalmente, son variedades complejas $C^m = \overbrace{C \oplus \ldots \oplus C}^{m}$ (conjunto de m-uplas ordenadas de números complejos), el espacio proyectivo complejo de dimensión m, designado con $P_m(C)$ (es el conjunto de m+1-uplas de números complejos módulo la relación de equivalencia de multiplicación de todas las componentes de una m+1-upla por un mismo número, y excluyendo además la m+1-upla de componentes todas nulas), y las variedades algebraicas no singulares (es decir, las definidas por una ecuación algebraica).

El resultado siguiente no será imprescindible en lo que sigue, pero creemos útil incluirlo aquí puesto que da ejemplos no triviales de variedades complejas.

Proposición (4.1.2). Toda variedad orientada de dos dimensiones es una variedad compleja unidimensional (es decir, puede introducirse en ella una estructura de variedad compleja).

La demostración se basa en el hecho de que en toda variedad tal existen coordenadas locales isotermas u,v, es decir, tales que el elemento de arco se expresa en la forma $ds^2 = \lambda(du^2+dv^2)$, siendo $\lambda = \lambda(u,v)$. La demostración de este hecho se ve en los textos de geometría diferencial.

Si u',v' es otro sistema de coordenadas locales isotermas, resulta -por cálculo directo- que u' y v' son funciones armónicas de u y v y se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u'}{\partial u} = \frac{\partial v'}{\partial v}, \quad -\frac{\partial u'}{\partial v} = \frac{\partial v'}{\partial u},$$

lo cual implica que si introducimos el sistema de coordenadas complejas $z=u+iv$, $\bar{z}=u-iv$, y análogamente $\omega=u'+iv'$, $\bar{\omega}=u'-iv'$, entonces ω es una función holomorfa de z.

Es decir, las coordenadas locales isotermas constituyen una estructura de variedad compleja.///

Sigamos ahora con la teoría general.

Cualquier forma diferencial en la variedad compleja $V = V^{2m}$ se puede expresar localmente en términos de la base generada por las coordenadas complejas $z^1,\dots,z^m,\bar{z}^1,\dots,\bar{z}^m$:

$$\alpha = \sum a_{i_1\dots i_p, j_1\dots j_q}\, dz^{i_1}\wedge\dots\wedge dz^{i_p}\wedge d\bar{z}^{j_1}\wedge\dots\wedge d\bar{z}^{j_q}.$$

Queremos hacer notar, aún siendo redundantes, que una variedad compleja está determinada cuando se da una familia de cartas complejas que se transforman holomórficamente. Si dos sistemas locales complejos de coordenadas no se transforman de esa manera, quiere decir que no pertenecen a la misma estructura compleja, o en otras palabras, las variedades complejas determinadas por ellos son diferentes. Puede pues suceder que dos variedades complejas diferentes coincidan cuando se las considera como variedades reales, es decir, cuando se considera en ellas la estructura real solamente.

Se presenta pues el problema de saber cuándo dos sistemas locales complejos de coordenadas pertenecen a una misma estructura, o sea, cuando definen la misma variedad compleja. La solución de esta cuestión se basa en la

Proposición (4.1.3). Sea $f \in F^0(V)$ y $df = \sum_\mu A_\mu dz^\mu + B_\mu d\bar{z}^\mu$. Entonces f es holomorfa en $z^1,\ldots,z^m$ si y sólo si $B_\mu = 0$, $\mu=1,\ldots,m$. En tal caso, $\frac{\partial f}{\partial z^\mu} = A_\mu$.

Demostración.

Consideraremos sólo el caso $m=1$. La demostración se generaliza sin dificultad cuando $m>1$.

En primer lugar, supongamos f holomorfa. Llamando $z=x+iy$, se tiene:

$$df = A\,dz + B\,d\bar{z} = (A+B)\,dx + i(A-B)\,dy.$$

Por lo tanto,

$$A+B = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad i(A-B) = \frac{\partial f}{\partial y},$$

de lo cual se obtiene

$$B = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

y escribiendo $f=u+iv$ resulta:

$$B = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

expresión que se anula en virtud de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Entonces $df = A\,dz$, por lo cual $\frac{\partial f}{\partial z} = A$.

Recíprocamente, si suponemos $B=0$, obtenemos $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$, que, junto con la continuidad de las derivadas de u y v, que se cumple por la diferenciabilidad de f, implica que f es holomorfa.///

De este resultado obtenemos inmediatamente la respuesta al problema planteado -basta recordar la definición de variedad compleja- :

Proposición (4.1.4). Dos cartas complejas $\{z^\mu\}$ y $\{\omega^\nu\}$ pertenecen a la misma estructura compleja si y sólo si $d\omega^\nu = \sum_\mu A^\nu_\mu\, dz^\mu$.

Ahora estamos en condiciones de definir, con perfecto sentido, la conjugada compleja de la forma

$$\alpha = \sum a_{i_1 \ldots i_p, j_1 \ldots j_q}\, dz^{i_1} \wedge \ldots \wedge dz^{i_p} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}^{j_q}$$

mediante

$$\bar{\alpha} = \sum \bar{a}_{i_1 \ldots i_p, j_1 \ldots j_q}\, d\bar{z}^{i_1} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}^{i_p} \wedge dz^{j_1} \wedge \ldots \wedge dz^{j_q},$$

puesto que en virtud de (4.1.4) esta definición no depende del particular sistema de coordenadas $\{z^\mu\}$. Claro está que la definición tiene sentido en cada variedad compleja. Si $\bar{\alpha}$ es conjugada de α con respecto a una estructura compleja, no lo será en general con respecto de otra.

Otra consecuencia importante es la

Proposición (4.1.5). Toda variedad compleja es orientable.

Demostración.

Si $\{z^\mu\}$ y $\{\omega^\nu\}$ son dos cartas, aplicando (4.1.4) y la definición de conjugado, resulta:

$$\frac{\partial(\omega^1,\dots,\omega^m,\bar\omega^1,\dots,\bar\omega^m)}{\partial(z^1,\dots,z^m,\bar z^1,\dots,\bar z^m)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial(\omega^1,\dots,\omega^m)}{\partial(z^1,\dots,z^m)} & 0 \\ & \dfrac{\partial(\bar\omega^1,\dots,\bar\omega^m)}{\partial(\bar z^1,\dots,\bar z^m)} \end{vmatrix} =$$

$$= \left|\frac{\partial(\omega^1,\dots,\omega^m)}{\partial(z^1,\dots,z^m)}\right|^2 > 0,$$

pues la relación $=0$ está excluída por ser $\{z^\mu\}$ y $\{\omega^\nu\}$ cartas.///

Supongamos ahora que $V = V^{2m}$ es una variedad real, no necesariamente compleja, que posee un automorfismo $T: F \longrightarrow F$ tal que $T^2 = -I$ (I= identidad). T será un campo tensorial de tipo (1,1) que en cada sistema local de coordenadas $x^1,\dots,x^{2m}$ se expresa mediante

$$T: \quad dx^j \longrightarrow h^j_k\, dx^k,$$

y se extiende a todo F por multiplicación exterior y por linealidad, y además cumple

$$h^j_k\, h^k_p = -\delta^j_p.$$

En el caso de variedades complejas existe un tal T, que puede definirse en un sistema local mediante

$$T:\ dz^{\mu} \longrightarrow i\ dz^{\mu}, \quad d\bar{z}^{\mu} \longrightarrow -i\ d\bar{z}^{\mu}, \quad \mu=1,\dots,m.$$

Por ejemplo, en C se tratará de una rotación de ángulo $\frac{\pi}{2}$, cuando se eligen coordenadas cartesianas ortogonales.

Proposición (4.1.6). $\{z^{\mu}\}$ y $\{\omega^{\nu}\}$ pertenecen a la misma estructura compleja si y sólo si inducen el mismo campo tensorial T.

Demostración.

Supongamos primero que $\{z^{\mu}\}$ y $\{\omega^{\nu}\}$ pertenecen a la misma estructura compleja, por lo cual $d\omega^{\nu} = \sum A^{\nu}_{\mu}\ dz^{\mu}$. Entonces, si $T:\ dz^{\mu} \longrightarrow i\ dz^{\mu}$, es

$$d\omega^{\nu} = \sum A^{\nu}_{\mu}\ dz^{\mu} \longrightarrow i \sum A^{\nu}_{\mu}\ dz^{\mu} = i\ d\omega^{\nu},$$

y análogamente

$$d\bar{\omega}^{\nu} = -i\ d\omega^{\nu}.$$

Recíprocamente, supongamos que el T inducido sea el mismo. Si $d\omega^{\nu} = \sum A^{\nu}_{\mu}\ dz^{\mu} + B^{\nu}_{\mu}\ d\bar{z}^{\mu}$, esto significa

$$i\ d\omega^{\nu} = \sum A^{\nu}_{\mu}\ i\ dz^{\mu} + B^{\nu}_{\mu}\ (-i)\ d\bar{z}^{\mu}.$$

De estas dos expresiones se obtiene $B^{\nu}_{\mu} = 0$. ///

Si bien es cierto que en cada V compleja existe, como vemos, un T de las características indicadas, no es en cambio verdadero en general que si una variedad real V^{2m} posee un tal T entonces se le puede dar una estructura compleja. Esto induce a dar la siguiente

Definición (4.1.7). Una variedad real $V = V^{2m}$ con un automorfismo $T: F \longrightarrow F$ tal que $T^2 = -I$ se llama variedad casi compleja.

De aquí resulta que toda variedad compleja se la puede considerar, en particular, como casi compleja.

Un problema fundamental y difícil de la teoría es probar si una variedad real V^{2m} dada admite una estructura compleja, o al menos, casi compleja. Por ejemplo, se sabe que de todas las superficies esféricas S_{2k}, sólo S_2 y S_6 admiten una estructura casi compleja. De ellas, S_2 admite una estructura compleja -en virtud de (4.1.2)-; que S_6 admita o no una estructura compleja es un problema abierto.

Enunciamos a continuación sin demostración (cf. A. Frölicher, Tesis) un resultado referente al problema planteado, del cual la condición "sólo si" no ofrece grandes dificultades.

Proposición (4.1.8). La variedad casi compleja V^{2m} posee una estructura compleja si y sólo si

$$\left(\frac{\partial h_k^j}{\partial x^q} - \frac{\partial h_q^j}{\partial x^k}\right) h_p^q \quad \text{es simétrico en } k \text{ y } p, \text{ y}$$

$h_k^j(x) \in C^{\omega}$, es decir, es desarrollable en serie de potencias.

-o-

§4.2. Formas holomorfas.

Sean $z^1, \ldots, z^m, \bar{z}^1, \ldots, \bar{z}^m$ coordenadas locales de la variedad compleja $V = V^{2m}$. Toda p-forma compleja $\alpha^p \in F^p(V)$ se puede descomponer en la suma

$$\alpha^p = \sum_{r+s=p} \alpha^{r,s},$$

donde localmente se cumple

$$\alpha^{r,s} = \sum a_{i_1 \dots i_r, j_1 \dots j_s} \, dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_r} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{j_s}.$$

En virtud de (4.1.4) podemos afirmar que tal descomposición de α^p en formas $\alpha^{r,s}$ no depende de la carta elegida y es única.

El par (r,s) se llama <u>bigrado</u> de la forma $\alpha^{r,s}$; si designamos $F^{r,s}$ al conjunto de tales formas, se cumple

$$F^p = \sum_{r+s=p} F^{r,s}.$$

Calcularemos ahora la diferencial de $\alpha^{r,s} \in F^{r,s} \subset F^p$ ($p = r+s$); será $d\alpha^{r,s} \in F^{p+1}$ y

$$d\alpha^{r,s} =$$

$$= \sum \Big(\sum_{\nu} \frac{\partial a_{i_1 \dots i_r, j_1 \dots j_s}}{\partial z^{\nu}} dz^{\nu} + \sum_{\nu} \frac{\partial a_{i_1 \dots i_r, j_1 \dots j_s}}{\partial \bar{z}^{\nu}} d\bar{z}^{\nu} \Big) dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_r} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{j_s}.$$

Esto muestra que $d\alpha^{r,s}$ se descompone de manera única en

$$d\alpha^{r,s} = \alpha^{r+1,s} + \alpha^{r,s+1},$$

esto es,

$$d: F^{r,s} \longrightarrow F^{r+1,s} \oplus F^{r,s+1} \subset F^{p+1}.$$

En otras palabras, llamando

$$\alpha^{r+1,s} = d'\alpha^{r,s}, \qquad \alpha^{r,s+1} = d''\alpha^{r,s},$$

será

$$d\alpha^{r,s} = d'\alpha^{r,s} + d''\alpha^{r,s},$$

es decir, el operador d se descompone unívocamente en

$$d = d' + d'',$$

con

$$d': F^{r,s} \longrightarrow F^{r+1,s}, \qquad d'': F^{r,s} \longrightarrow F^{r+1,s}.$$

Se cumple además

$$0 = dd = (d'+d'')(d'+d'') = d'd' + (d'd''+d''d') + d''d'';$$

pero

$$d'd': F^{r,s} \longrightarrow F^{r+2,s}; \quad d'd''+d''d': F^{r,s} \longrightarrow F^{r+1,s+1}; \quad d''d'': F^{r,s} \longrightarrow F^{r,s+2}$$

lo cual implica, por tener $F^{r+2,s}$, $F^{r+1,s+1}$, $F^{r,s+2}$ al cero como único elemento común, que

$$d'd'=0, \quad d'd''+d''d' = 0, \quad d''d'' = 0,$$

lo cual muestra en particular que d' y d'' son efectivamente operadores diferenciales (de grado 1) (cf. § 1.8).

Entonces tiene sentido hablar de los grupos de De Rham $R^p_{d'}$ y $R^p_{d''}$ correspondientes a d' y d''. Nosotros estamos especialmente interesados en el operador d" por la estrecha relación que tiene, según veremos, con las funciones holomorfas.

Definimos pues en la forma usual

$$R^p_{d''} = \overset{o}{F}{}^p_{d''} / d''F^{p-1}, \qquad R^{r,s}_{d''} = \overset{o}{F}{}^{r,s}_{d''} / d''F^{r,s-1},$$

donde la notación es obvia (así, por ejemplo, $\overset{o}{F}{}^p_{d''}$ es el conjunto de las p-formas d"-cerradas, es decir, las formas α^p de F^p tales que $d''\alpha^p = 0$, etc.).

Evidentemente se cumple

$$R^p_{d''} = \sum_{r+s=p} R^{r,s}_{d''}.$$

Consideremos en particular una forma $\alpha^{p,o} = \sum a_{i_1 \dots i_p} dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_p}$ perteneciente a $\overset{o}{F}{}^{p,o}_{d''} = R^{p,o}_{d''}$. De

$$d''\alpha^{p,o} = \sum \frac{\partial a_{i_1 \dots i_p}}{\partial \bar{z}^{\mu}} d\bar{z}^{\nu} \wedge dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_p} = 0$$

obtenemos

$$\frac{\partial a_{i_1 \dots i_p}}{\partial \bar{z}^{\mu}} = 0, \qquad \mu = 1, \dots, m,$$

por lo cual

$$d\alpha^{p,o} = \sum \frac{\partial a_{i_1 \dots i_p}}{\partial z^{\nu}} dz^{\nu} \wedge dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_p},$$

es decir,

$$da_{i_1 \dots i_p} = \sum \frac{\partial a_{i_1 \dots i_p}}{\partial z^{\nu}} dz^{\nu}.$$

Aplicando ahora (4.1.3) concluímos que $a_{i_1\ldots i_p}$ es una función holomorfa.

Recíprocamente, si suponemos que $a_{i_1\ldots i_p}$ es holomorfa, entonces por (4.1.3) será $\dfrac{\partial a_{i_1\ldots i_p}}{\partial \bar z^\nu} = 0$, $\nu=1,\ldots,m$, y por lo tanto $d''\alpha^{p,o} = 0$, es decir $\alpha^{p,o} \in \overset{o}{F}{}^{p,o}_{d''} = R^{p,o}_{d''}$.

<u>Definición</u> (4.2.1). $\alpha \in F^p$ se llama una <u>forma holomorfa</u> cuando $\alpha \in F^{p,o}$ y sus coeficientes son funciones holomorfas. En símbolos, $\alpha \in F^p_{hol}$.

Tal definición no depende del sistema local de coordenadas elegido, en virtud de la definición de variedad compleja. Es esencial suponer que $\alpha \in F^{p,o}$, pues si fuera $\alpha \in F^{r,s}$, $r+s=p$, $s>0$, la definición no sería correcta, pues si los coeficientes de α fueran funciones holomorfas en una carta, no lo tendrían por qué ser en otra. Por ejemplo, si $\alpha = a\, d\bar z^1$, a holomorfa, al cambiar coordenadas se obtiene $\alpha = a \dfrac{\partial \bar z^1}{\partial \bar \omega^\nu} d\bar\omega^\nu = a \overline{\dfrac{\partial z^1}{\partial \omega^\nu}}\, d\bar\omega^\nu$, y la conjugada de una función holomorfa no es, en general, holomorfa.

Usando la definición (4.2.1), hemos probado más arriba que:

<u>Proposición</u> (4.2.2). $R^{p,o}_{d''} = F^p_{hol}$.

En particular, si V es compacto y conexo, entonces $R^{o,o}_{d''} \cong C$, puesto que las únicas funciones holomorfas son las constantes.

La proposición (4.2.2) muestra la estrecha relación existente entre el operador d'' y las formas holomorfas. Si la escribimos en la forma $\overset{o}{F}{}^{p,o}_{d''} = F^{p}_{hol}$, sugiere también que el conjunto $\overset{o}{F}{}^{r,s}_{d''}$ es la extensión natural del concepto de formas holomorfas en el caso $s > 0$. Es decir, los elementos de $\overset{o}{F}_{d''}$ serían las formas holomorfas más generales. ($\overset{o}{F}_{d''} = \sum_{p} \overset{o}{F}{}^{p}_{d''} = \sum_{r,s} \overset{o}{F}{}^{r,s}_{d''}$).

Las formas holomorfas son pues las formas cerradas respecto de d'' de $F^{p,o}$, pero no nenesariamente cerradas respecto de d o d'. Tiene pues sentido hablar de $\overset{o}{F}{}^{p}_{hol}$ que es el conjunto de formas holomorfas y cerradas respecto de d (cuando no especificamos con un índice de qué operador diferencial se trata, suponémos que se trata de d). Observemos que $\overset{o}{F}{}^{p}_{hol} = \overset{o}{F}{}^{p,o}$, puesto que $F^{p}_{hol} \supset \overset{o}{F}{}^{p,o}$.

Proposición (4.2.3). (Trivialidad local). Si $U \subset V$ es diferenciablemente contractible en sí mismo, y $\alpha \in \overset{o}{F}{}^{p}_{hol}(U)$, entonces existe $\beta \in F^{p-1}_{hol}(U)$ tal que $d\beta = d'\beta = \alpha$.

Demostración.

Puesto que $d\alpha = 0$, entonces -por (1.7.6)- existe $\beta \in F^{p-1}(U)$ tal que $d\beta = \alpha$. Como $\alpha \in F^{p,o}$, deberá ser $\beta \in F^{p-1,o}$, pues $F^{p,-1} = \emptyset$. Esto significa que $d''\beta = 0$, es decir, β es holomorfa,y además $d\beta = d'\beta$. ///

-o-

§4.3. Métricas hermitianas y variedades kählerianas.

Sea $V = V^{2m}$ una variedad casi compleja, y $T = \{h^{i}_{j}\}$ su correspondiente campo tensorial. La convertiremos en un espacio de Riemann introduciendo la métrica especial siguiente -lo cual se prueba es siempre posible- :

Definición (4.3.1). Una métrica de Riemann g_{ij} en una variedad casi compleja V es <u>hermitiana</u> cuando $g_{jk}h^j_q h^k_p = g_{qp}$. La variedad casi compleja V con tal métrica g_{ij} se llama una <u>variedad hermitiana</u>.

El sentido de la definición es que el campo tensorial T deja invariante la métrica.

Si g_{ij} es una métrica hermitiana, entonces $h_{rk} = g_{jk}h^j_r = -g_{rp}h^p_k$, y por lo tanto h_{rk} es covariante antisimétrico. Entonces $\sum h_{rk}\, dx^r \wedge dx^k$ es la representación local de una 2-forma (por ejemplo, en E_2 y en coordenadas cartesianas ortogonales x, y, se trata de la forma $2\, dx \wedge dy$).

<u>Definición</u> (4.3.2). $\omega = \sum h_{rk}\, dx^r \wedge dx^k$ es la <u>forma fundamental</u> de la variedad casi compleja V, con métrica hermitiana g_{ij}.

Téngase en cuenta que la definición de ω depende no sólo de V sino también de la métrica introducida.

La siguiente proposición aclarará el sentido de la definición de métrica hermitiana en el caso de variedades complejas, mostrando que en tal caso en el elemento de arco ds^2 aparecen solamente términos en $dz^i d\bar{z}^j$, pero no del tipo $dz^i dz^j$ o $d\bar{z}^i d\bar{z}^j$. En particular, en $E_2 = C$, será $ds^2 = dz\, d\bar{z}$.

<u>Proposición</u> (4.3.3). Sea V^{2m} una variedad compleja, con coordenadas locales $z^1, \dots z^m, \bar{z}^1, \dots, \bar{z}^m$, y g_{ij} una métrica hermitiana. Entonces

$$ds^2 = H_{\mu\nu}\, dz^\mu d\bar{z}^\nu \quad \text{con} \quad H_{\mu\nu} = \bar{H}_{\nu\mu}\ , \text{ y}$$

$$\omega = i\, H_{\mu\nu}\, dz^\mu \wedge d\bar{z}^\nu.$$

Demostración.

El elemento de arco siempre se puede escribir

$$ds^2 = G_{\mu\nu}\, dz^\mu dz^\nu + H_{\mu\nu}\, dz^\mu d\bar{z}^\nu + K_{\mu\nu}\, d\bar{z}^\mu d\bar{z}^\nu,$$

esto es,

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} G_{\mu\nu} & H_{\mu\nu} \\ H_{\nu\mu} & K_{\mu\nu} \end{pmatrix}.$$

En el sistema de coordenadas complejas se cumple

$$h^j_k = \begin{pmatrix} +i & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & +i & & & \\ & & & -i & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & -i \end{pmatrix},$$

de manera que el hecho de ser g_{ij} hermitiana significa que

$$G_{\mu\nu} = i^2\, G_{\mu\nu}\ , \quad K_{\mu\nu} = (-i)^2\, K_{\mu\nu}\ , \quad H_{\mu\nu} = i(-i)\, H_{\mu\nu}\ ,$$

es decir,

$$G_{\mu\nu} = 0, \quad K_{\mu\nu} = 0,$$

de donde

$$ds^2 = H_{\mu\nu}\, dz^\mu d\bar{z}^\nu\ ,$$

y como ds es real, resulta también $H_{\mu\nu} = \bar{H}_{\nu\mu}$.

En lo que respecta a la forma fundamental ω , tenemos:

$$h_{pk} = - g_{jp} h^j_k = - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & H_{\mu\nu} \\ H_{\nu\mu} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & iH_{\mu\nu} \\ -iH_{\nu\mu} & 0 \end{pmatrix},$$

y entonces

$$\omega = h_{pk}\, dx^p \wedge dx^k =$$

$$= \frac{i}{2}\left(0\, dz^\mu \wedge dz^\nu + H_{\mu\nu}\, dz^\mu \wedge d\bar{z}^\nu - H_{\nu\mu}\, d\bar{z}^\nu \wedge dz^\mu + 0\, d\bar{z}^\mu \wedge d\bar{z}^\nu \right) =$$

$$= i\, H_{\mu\nu}\, dz^\mu \wedge d\bar{z}^\nu \text{ . ///}$$

Utilizaremos ahora la notación

$$\overbrace{\omega \wedge \ldots \wedge \omega}^{k} = \omega^k ;$$

evidentemente, si $k > m$, entonces $\omega^k = 0$.

Designaremos además con $|H_{\mu\nu}|$ al determinante de $H_{\mu\nu}$.

Proposición (4.3.4). En una variedad compleja V^{2m} con forma fundamental ω generada por la métrica hermitiana g_{ij}, se cumple:

$$\omega^m = i^m\, m!\, |H_{\mu\nu}|\, dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^m \wedge d\bar{z}^1 \wedge \ldots \wedge d\bar{z}^m .$$

En particular, $\displaystyle\int_{V^{2m}} \omega^m \neq 0.$

Demostración.

$$\omega^m = \left(i\, H_{\mu\nu}\, dz^\mu \wedge d\bar{z}^\nu \right)^m =$$

$$= i^m H_{\mu_1\nu_1} \ldots H_{\mu_m\nu_m}\, dz^{\mu_1} \wedge d\bar{z}^{\nu_1} \wedge \ldots \wedge dz^{\mu_m} \wedge d\bar{z}^{\nu_m} =$$

$$= i^m\, m!\, |H_{\mu\nu}|\, dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^m \wedge d\bar{z}^1 \wedge \ldots \wedge d\bar{z}^m .$$

Además $|H_{\mu\nu}| > 0$, pues la métrica es definida positiva.///

Definición (4.3.5). Una variedad compleja V con métrica hermitiana g_{ij} es una <u>variedad kähleriana</u> cuando su forma fundamental es cerrada, es decir, $d\omega = 0$.

Por ejemplo, C^m y $P_m(C)$ son variedades kählerianas, y puesto que toda subvariedad analítica de una kähleriana es kähleriana, resulta que las variedades algebraicas no singulares son kählerianas.

<u>Proposición</u> (4.3.6). Si $k=0,..,m$ y V^{2m} es una variedad kähleriana compacta, entonces ω^k es cerrada pero no exacta. En particular, $R^{2k} \neq 0$.

Demostración.

De $d\omega = 0$ resulta $d\omega^k = 0$.

Por otra parte, si para algún $k=0,\ldots,m$ fuera $\omega^k = d\gamma$, entonces

$$d(\omega^{m-k} \wedge \gamma) = d\omega^{m-k} \wedge \gamma + (-1)^{2(m-k)} \omega^{m-k} \wedge d\gamma = 0 + \omega^{m-k} \wedge \omega^k =$$
$$= \omega^m.$$

Puesto que $\omega^{m-k} \wedge \gamma \in F^{2m-1}$, usando (3.1.9) resulta

$$\int_V \omega^m = \int_V d(\omega^{m-k} \wedge \gamma) = 0,$$

lo cual contradice (4.3.4). ///

-o-

§4.4. <u>Formas armónicas</u>.

Una variedad hermitiana es en particular un espacio de Riemann, y por lo tanto, como en (3.1.2) se define el operador de adjunción:

$$* : F^p \longrightarrow F^{2m-p}.$$

En el caso en que la variedad es también compleja conviene modificar un tanto la definición de $*$.

Definición (4.4.1). Si V^{2m} es una variedad compleja hermitiana y $\alpha \in F(V^{2m})$, entonces $\bar{*}: F^p \longrightarrow F^{2m-p}$ está definido mediante $\bar{*}\alpha = *\bar{\alpha}$.

Proposición (4.4.2). $\bar{*}: F^{r,s} \longrightarrow F^{m-r,m-s}$.

La demostración se hace por un cálculo directo, utilizando coordenadas complejas locales.

La definición del operador codiferencial δ no es necesario modificarla, pues el que se obtendría usando $\bar{*}$ en lugar de $*$ coincide con el primitivo, puesto que:

Proposición (4.4.3). $\delta = (-1)^{2m(p+1)+1}\, \bar{*}\, d\, \bar{*} : \; F^p \longrightarrow F^{p-1}$.

Demostración.

Basta ver que $\bar{*}\, d\, \bar{*} = *\, d\, *$, en virtud de (3.1.10). Si $\alpha \in F^p$, se tiene:

$$\bar{*}\, d\, \bar{*}\, \alpha = \bar{*}\, d * \bar{\bar{\alpha}} = *\,\overline{(d * \bar{\alpha})} = *\, d\overline{(* \bar{\alpha})} = *\, d * \alpha ,$$

por ser $*\bar{\alpha} = \overline{*\alpha}$. ///

De la manera usual, podemos descomponer

$$\delta = \delta' + \delta'',$$

donde

$$\delta' : F^{r,s} \longrightarrow F^{r-1,s}, \qquad \delta'' : F^{r,s} \longrightarrow F^{r,s-1},$$

para lo cual basta tomar, en F^p:

$$\delta' = (-1)^{2m(p+1)+1}\ \bar{*}\, d'\, \bar{*}, \qquad \delta'' = (-1)^{2m(p+1)+1}\ \bar{*}\, d''\, \bar{*}.$$

Análogamente se define

$$\Delta' = \delta' d' + d'\delta' \ , \qquad \Delta'' = \delta'' d'' + d''\delta'' ,$$

y se cumple evidentemente

$$\Delta', \Delta'' : \ F^{r,s} \longrightarrow F^{r,s}.$$

Veremos un poco más adelante ((4.4.11)) que Δ tiene esta misma propiedad en variedades kählerianas.

Ahora, en el caso complejo, el producto escalar (α, β) se define con una modificación -que con la notación de (3.1.6) resulta ser $(\alpha, \bar{\beta})$- :

Definición (4.4.4). Si $\alpha, \beta \in F$, entonces

$$(\alpha, \beta) = \int_V \alpha \wedge \bar{*} \beta.$$

En el caso en que V es compacta, (α, β) está bien definido y cumple efectivamente las propiedades de un producto escalar (complejo):

a) $(\alpha, \beta) = \overline{(\beta, \alpha)}$;
b) $(\alpha, \alpha) \geq 0$;
c) $(\alpha, \alpha) = 0$ si y sólo si $\alpha = 0$; y
d) (α, β) es lineal en α y antilineal en β.

Además vale, como antes, que $(\alpha, d\beta) = (\delta\alpha, \beta)$.

Proposición (4.4.5). $(\alpha, \beta) \neq 0$ sólo si α y β tienen el mismo bigrado.

Demostración.

Sea $\alpha \in F^{r,s}$ y $\beta \in F^{r',s'}$. Entonces $\bar{*}\beta = F^{m-r',m-s'}$.

Seá $r+s=r'+s'$; de lo contrario $\alpha \wedge \bar{*}\beta \notin F^{2m}$ y la integral en V^{2m} se ánula.

En tal caso $\alpha \wedge \bar{*}\beta = 0$ salvo tal vez que $r = r'$, $s = s'$, pues de lo contrario aparecerían productos del tipo $dz^i \wedge dz^i$ y $d\bar{z}^j \wedge d\bar{z}^j$. ///

Lo acabado de demostrar significa que $F^{p,o}$, $F^{p-1,1}, \ldots,$ $F^{o,p}$ son subespacios perpendiculares de F^p.

<u>Proposición</u> (4.4.6). $(d'\alpha, \beta) = (\alpha, \delta'\beta)$; $(d''\alpha, \beta) = (\alpha, \delta''\beta)$.

Demostración.

Consideremos el caso ". Sea $\alpha \in F^{r,s}$ y $\beta \in F^{r,s+1}$. Entonces, usando la última proposición:

$$(d''\alpha, \beta) = (d\alpha, \beta) = (\alpha, \delta\beta) = (\alpha, \delta''\beta).$$

Si $\beta \notin F^{r,s+1}$, ambos miembros son nulos.

Para ' el argumento es similar. ///

<u>Proposición</u> (4.4.7). $d'\delta'\beta = 0 \Rightarrow \delta'\beta = 0$; $d''\delta''\beta = 0 \Rightarrow \delta''\beta = 0$; $\delta'd'\beta = 0 \Rightarrow d'\beta = 0$; $\delta''d''\beta = 0 \Rightarrow d''\beta = 0$.

Demostración.

En el primer caso, se cumple:

$$d'\delta'\beta = 0 \Rightarrow 0 = (d'\delta'\beta, \beta) = (\delta'\beta, \delta'\beta) = 0 \Rightarrow \delta'\beta = 0.$$

En los demás casos el argumento es similar. ///

Proposición (4.4.8). Δ es un operador real, es decir, $\Delta\alpha = 0$ si y sólo si $\Delta\bar{\alpha} = 0$.

La prueba sugge en forma inmediata del hecho que d y δ son reales, y δ lo es porque $\bar{*}\, d\, \bar{*} = *\, d\, *$.

Designaremos con $W^{r,s}$ el espacio de formas armónicas que pertenecen a $F^{r,s}$, es decir $\alpha \in W^{r,s}$ si y sólo si $\alpha \in F^{r,s}$ y $\Delta\alpha = 0$.

Observando el hecho que $\alpha \in F^{r,s}$ implica $\bar{\alpha} \in F^{s,r}$, puesto que cada dz^i se transforma en $d\bar{z}^i$, y usando (4.4.8) obtenemos:

Proposición (4.4.9). $W^{r,s} \cong W^{s,r}$.

Terminaremos este párrafo mencionando algunas propiedades especiales de las variedades kählerianas.

Proposición (4.4.10). Si V es una variedad kähleriana, entonces $\Delta = 2 \cdot \Delta' = 2 \cdot \Delta''$.

La demostración se efectúa por un cálculo directo, en un sistema de coordenadas locales.

Como corolario, podemos enunciar:

Proposición (4.4.11). Si V es una variedad kähleriana, entonces:

a) $\Delta : F^{r,s} \longrightarrow F^{r,s}$;

b) Si $\alpha = \sum_{r,s} \alpha^{r,s}$ es armónica, entonces es armónica cada $\alpha^{r,s}$; es decir, $W^p = \sum_{r+s=p} W^{r,s}$;

c) $G: F^{r,s} \longrightarrow F^{r,s}$;

d) $R^{r,s}_{d''} \cong W^{r,s}$;

e) $R^p_{d''} = R^p$;

f) Si p es impar, entonces R^p es un espacio vectorial de dimensión par.

Demostración.

a) Sale de Δ' (o Δ''): $F^{r,s} \longrightarrow F^{r,s}$ y de (4.4.10).

b) Inmediato, de a) y la linealidad de Δ.

c) Recordamos (§3.3) que G está definido por $\alpha = \pi\alpha + \Delta G\alpha$.

En virtud de b), si $\alpha = \sum \alpha^{r,s}$, la proyección $\pi_{r,s}: F \longrightarrow F^{r,s}$ definida por $\pi_{r,s}\alpha = \alpha^{r,s}$, conmuta con Δ. Entonces, por (3.4.3), $\pi_{r,s}$ conmuta también con G.

d) Sea $\alpha = \alpha^{r,s} \in F^{r,s}$. Entonces:

$$\alpha = \pi\alpha + \Delta G\alpha = \pi\alpha + 2\,\Delta'' G\alpha = \pi\alpha + 2d''\delta'' G\alpha + 2\delta'' d'' G\alpha .$$

Supongamos que α es una forma d"-cerrada, es decir, $d''\alpha = 0$. Entonces, si aplicamos d'' a la última fórmula y tenemos en cuenta que $\Delta\pi\alpha = 0$ y por consiguiente $d\pi\alpha = 0$, lo cual implica $d''\pi\alpha = 0$, obtenemos

$$d''\delta'' d'' G\alpha = 0,$$

de donde se deduce, por (4.4.7), que

$$\delta'' d'' G\alpha = 0.$$

Es decir,

$$\alpha = \pi\alpha + d''\beta ,$$

donde

$$\beta = 2\,\delta''\,G\alpha.$$

Si α_1 es otra forma d"-cerrada que pertenece a la misma clase de cohomología, $\alpha_1 - \alpha = d''\mu$, entonces

$$\alpha_1 = \pi\alpha + d''(\beta + \mu),$$

lo cual muestra que la componente armónica $\pi\alpha$ es la misma.

Entonces $\alpha \to \pi\alpha$ induce un homomorfismo $R^{r,s}_{d''} \longrightarrow W^{r,s}$ (que $\pi\alpha \in W^{r,s}$ surge del hecho que $\Delta, G : F^{r,s} \longrightarrow F^{r,s}$ y $\pi\alpha = \alpha - \Delta G\alpha$.).

Sea ahora α_2 otra forma d"-cerrada de $F^{r,s}$ perteneciente a una clase de cohomología diferente de la de α. Entonces $\alpha_2 = \pi\alpha_2 + d''\beta_2$ y $\alpha_2 - \alpha = (\pi\alpha_2 - \pi\alpha) + d''(\beta_2 - \beta)$, lo cual implica

$$\pi\alpha_2 \neq \pi\alpha.$$

En consecuencia, el homomorfismo en cuestión $R^{r,s}_{d''} \longrightarrow W^{r,s}$ es un monomorfismo. Además es un epimorfismo, porque cada $\alpha_0 \in W^{r,s}$ pertenece a alguna clase de $R^{r,s}_{d''}$.

e) Por b) es $\sum_{r+s=p} W^{r,s} = W^p$, y además (§4.2) se cumple $\sum_{r+s=p} R^{r,s}_{d''} = R^p_{d''}$. Si aplicamos ahora d) resulta $W^p \cong R^p_{d''}$. De esta relación y el teorema de Hodge se obtiene $R^p \cong R^p_{d''}$.

f) Sabemos ((4.4.9)) que $W^{r,s} \cong W^{s,r}$. Entonces, si p es impar,

$$\dim R^p = \dim W^p = \dim \sum_{r+s=p} W^{r,s} = \sum_{r+s=p} \dim W^{r,s} =$$

$$= \sum_{r=0}^{p} \dim W^{r,p-r} = 2 \sum_{r=0}^{\frac{1}{2}(p+1)} \dim W^{r,p-r}. \quad ///$$

-o-

§4.5. Teorema de Dolbeault.

El teorema de Dolbeault, así como su demostración, tiene bastante similitud con el de De Rham. Así como hemos hecho con este último, comenzaremos probando un teorema de trivialidad local, cuya demostración es similar a la segunda demostración de (1.7.6).

Supondremos que $V = V^{2m}$ es una variedad compleja y $U \subset V$ un abierto.

Proposición (4.5.1). (Trivialidad local). Sea $\alpha \in \overset{o}{F}{}^{r,s}_{d''}(U)$, $s > 0$ y $x \in U$. Entonces existe un abierto $W \subset U$ tal que $x \in W$ y una forma $\beta \in F^{r,s-1}(W)$ tal que $d''\beta = \eta_{W,U}\alpha$, donde $\eta_{W,U}$ es la restricción de U a W.

Demostración.

Supongamos que $U = \{ |z^\mu| < r_\mu \ ; \mu = 1,\dots,m \}$ es un policilindro en una carta de V. Si no fuera así, elegimos un policilindro contenido en U y que contenga a x.

Cualquier forma α se puede escribir de manera única

$$\alpha = d\bar{z}^1 \wedge \omega + \alpha_o ,$$

donde ω y α_o son independientes de $d\bar{z}^1$.

Veamos que también puede descomponerse de la manera

$$\alpha = d''\beta_1 + \alpha_1 ,$$

donde β_1 no depende de $d\bar{z}^1$ y α_1 no depende de $\bar{z}^1$ ni de $d\bar{z}^1$.

En efecto, si

$$\omega = \sum g_{i_1 \ldots i_r, j_2 \ldots j_s} \, dz^{i_1} \wedge \ldots \wedge dz^{i_r} \wedge d\bar{z}^{j_2} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}^{j_s},$$

con $j_k \neq 1$, $k=2,\ldots,s$, elegimos

$$\beta_1 = \sum f_{i_1 \ldots i_r, j_2 \ldots j_s} \, dz^{i_1} \wedge \ldots \wedge dz^{i_r} \wedge d\bar{z}^{j_2} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}^{j_s}$$

con la misma salvedad sobre j_k, y tal que las f satisfacen:

$$\frac{\partial f_{i_1 \ldots i_r, j_2 \ldots j_s}}{\partial \bar{z}^1} = g_{i_1 \ldots i_r, j_2 \ldots j_s}.$$

Entonces $d''\beta_1 = d\bar{z}^1 \wedge \omega + \gamma_1$, con γ_1 independiente de $d\bar{z}^1$. Si tomamos $\alpha_1 = \alpha_o - \gamma_1$, obtenemos

$$\alpha = d''\beta_1 + \alpha_1,$$

con β_1 y α_1 independientes de $d\bar{z}^1$.

Ahora veremos que α_1 tampoco depende de $\bar{z}^1$, usando el hecho que α es d"-cerrada. En efecto, $d''\alpha = 0$ implica $d''\alpha_1 = 0$, y puesto que α_1 no depende de $d\bar{z}^1$, resulta que $\frac{\partial a}{\partial \bar{z}^1} = 0$ para cada coeficiente a de α_1.

Así obtenemos la descomposición querida.

Usando el mismo argumento para α_1 en lugar de α, obtenemos:

$$\alpha_1 = d''\beta_2 + \alpha_2,$$

con β_2 independiente de $d\bar{z}^2$ y α_2 independiente de $\bar{z}^2$ y

$d\bar{z}^2$. Además, por ser α_1 independiente de $\bar{z}^1$ y $d\bar{z}^1$, lo mismo vale para β_2 y α_2.

Repitiendo el mismo proceso se llega a

$$\alpha = d''(\beta_1 + \ldots + \beta_m) + \alpha_m,$$

donde β_i es independiente de $\bar{z}^1,\ldots,\bar{z}^{i-1}, d\bar{z}^1,\ldots, d\bar{z}^i$, y α_m es independiente de $\bar{z}^1,\ldots,\bar{z}^m$, $d\bar{z}^1,\ldots, d\bar{z}^m$.

Pero $\alpha_m \in F^{r,s}$, $s > 0$, lo cual implica $\alpha_m = 0$. Si llamamos $\beta_1 + \ldots + \beta_m = \beta$ obtenemos la tesis. ///

Llamemos ahora $\mathfrak{F}^{r,s} = \{F^{r,s}(U); \eta_{U,U'}\}$ al prehaz de formas de bigrado (r,s) de la variedad compleja $V = V^{2m}$, siendo $\eta_{U,U'}$ la restricción de U' a $U \subset U'$.

Análogamente, sea $\Omega^r = \mathfrak{F}^r_{hol} = \mathfrak{F}^{r,o}_{hol} = \{F^r_{hol}(U); \eta_{U,U'}\}$ el prehaz de r-formas holomorfas de V.

En virtud del teorema (4.5.1) de trivialidad local y de (4.2.2) podemos afirmar que la sucesión

$$0 \longrightarrow \Omega^r \xrightarrow{i} \mathfrak{F}^{r,o} \xrightarrow{d''} \mathfrak{F}^{r,1} \xrightarrow{d''} \mathfrak{F}^{r,2} \longrightarrow \ldots,$$

donde i es la inyección, es localmente exacta (cf.(2.9.1)).

Usando exactamente el mismo argumento que usamos en la proposición (2.5.2) de trivialidad global, obtenemos:

$$\mathcal{H}^p(N; \mathfrak{F}^{r,q}) = 0, \quad p > 0,$$

siendo N el nervio del cubrimiento $\mathfrak{U}$ de V, y en consecuencia (cf. (2.9.2)):

$$\mathcal{H}^p(V;\ \mathcal{F}^{r,q}) = \varinjlim \mathcal{H}^p(N;\ \mathcal{F}^{r,q}) = 0, \quad p>0.$$

Entonces, de la misma manera que en la demostración del teorema de De Rham, resulta

$$\mathcal{H}^q(V;\ \Omega^r) \cong \overset{\circ}{F}{}^{r,q}_{d''}(V) \ /\ d''F^{r,q-1}(V),$$

con lo cual hemos demostrado:

<u>Proposición</u> (4.5.2). (Teorema de Dolbeault) Si $V = V^{2m}$ es una variedad compleja, entonces $\mathcal{H}^s(V;\ \Omega^r) \cong R^{r,s}_{d''}$.

En el caso s=0 también es (4.5.2) verdadera, pues se transforma en $F^r_{hol} \cong R^{r,0}_{d''}$, circunstancia ya conocida ((4.2.2)).

Dejamos a cargo del lector probar que en el espacio proyectivo complejo $P_m(C)$ se cumple

$$R^{r,s}_{d''} = 0, \quad \text{para} \quad r \neq s.$$

Dando tal afirmación por supuesta, obtenemos

$$\mathcal{H}^q(P_m(C);\Omega^r) = 0 \quad \text{para} \quad q \neq r,$$

y en particular

$$\mathcal{H}^q(P_m(C);\Omega) = 0 \quad \text{para} \quad q>0,$$

donde $\Omega = \Omega^0$ es el prehaz de funciones holomorfas.

En el caso de una variedad kähleriana podemos extraer otras conclusiones. Puesto que, según (4.4.11) y (4.4.9), es

$$R^{r,q}_{d''} \cong W^{r,q} \cong W^{q,r} \cong R^{q,r}_{d''},$$

resulta

$$\mathcal{H}^q(V;\Omega^r) \cong \mathcal{H}^r(V;\Omega^q),$$

y si $q=0$, obtenemos:

Proposición (4.5.3). Si V es ~~una~~ variedad kählleriana, entonces $F^r_{hol}(V) = W^{r,o}$.

Una última observación: aceptemos la siguiente:

Definición (4.5.4). El género aritmético de una variedad compleja V^{2m} es el número

$$\sum_{q=0}^{m} (-1)^q \dim \mathcal{H}^q(V^{2m};\Omega).$$

Entonces, si V^{2m} es kähleriana, resulta por (4.5.3) que su género aritmético es

$$\sum_{q=0}^{m} (-1)^q \dim F^q_{hol}(V^{2m}).$$

-o-

§4.6. El teorema de Riemann-Roch para superficies de Riemann compactas.

Definición (4.6.1). Una superficie de Riemann es una variedad compleja de dimensión (compleja) uno.

Designaremos con V a una variedad tal. Puesto que tiene dimensión real dos, si se define en ella una métrica hermitiana, entonces resulta V kähleriana puesto que la forma fundamental tiene grado dos.

Definición (4.6.2). Una función meromorfa f en V es una función holomorfa con valores en $P_1(C)$.

Notemos de paso que el plano proyectivo complejo $P_1(C)$ no es más que el plano complejo C compactificado con un punto; $P_1(C)$ no tiene recta impropia, sino solamente un punto impropio.

Un <u>divisor</u> es una 0- cadena en V, de manera que se lo puede escribir $D = \sum_{i=1}^{k} n_i P_i$, con $n_i \in Z$ y $P_i \in V$. Su <u>grado</u> es el número $\deg D = \sum_{i=1}^{k} n_i$. Diremos que D es <u>no negativo</u>, $D \geqslant 0$, cuando $n_i \geqslant 0$, $i=1,\dots,k$, y $D \geqslant D'$, donde D' es otro divisor, cuando $D - D' \geqslant 0$.

Un divisor $D = \sum_{i=1}^{k} n_i P_i$ se llama <u>divisor principal</u> cuando existe una función meromorfa f que tiene en P_i un cero de orden n_i, $i=1,\dots,k$, y esos son todos sus ceros (Si $n_i < 0$, llamamos cero de orden n_i a un polo de orden $-n_i$). Designamos con $D(f)$ a un tal divisor principal.

Es nuestro propósito investigar cuándo un divisor es divisor principal, o sea, dar información sobre la existencia de funciones meromorfas en V. Para ello sirve el teorema de Riemann-Roch.

Para cada $U \subset V$, designamos $M(U)$ al conjunto de funciones meromorfas en U, $\eta_{U,U'}$ a la restricción de U' en U en el caso $U \subset U'$, y

$$\mathcal{M} = \{M(U); \eta_{U,U'}\}$$

al prehaz de funciones meromorfas definidas en V.

Como toda función holomorfa (con rango en C) es meromorfa, se cumple $\Omega \subset \mathcal{M}$, es decir, para cada $U \subset V$ es $F^0_{hol}(U) \subset M(U)$.

Dado un divisor no negativo $D = \sum_{i=1}^{k} n_i P_i \geq 0$, sea $\Omega(D)$ el prehaz de funciones meromorfas f tales que $D(f) + D \geq 0$. En particular, si f es holomorfa es $D(f) \geq 0$ y por lo tanto $f \in \Omega(D)$.

Si ahora definimos $S = \Omega(D)/\Omega$, entonces la sucesión

$$(4.6.3) \qquad 0 \longrightarrow \Omega \longrightarrow \Omega(D) \longrightarrow S \longrightarrow 0$$

es exacta.

Probaremos que $\mathcal{H}^p(V;S) = 0$ para $p > 0$, donde tales $\mathcal{H}^p$ son los grupos de cohomología de Čech. Para ello consideramos un cubrimiento $\mathcal{U}$ de V suficientemente fino como para que cada P_i de D esté en un solo abierto de $\mathcal{U}$. Si N es el nervio de $\mathcal{U}$ y $f \in \overset{\circ}{C}{}^p(N;S)$, entonces $f(j_o \ldots j_p) \in S(U_{j_o \ldots j_p})$. Pero $U_{j_o \ldots j_p}$ no contiene ningún P_i y por lo tanto $f(j_o \ldots j_p) = 0$, es decir $f=0$ y por consiguiente es un coborde. Entonces $\mathcal{H}^p(N;S) = 0$.

En el caso $p=0$, de la misma definición de S se obtiene $\dim_C \mathcal{H}^o(V;S) = \deg D$, donde $\dim_C$ indica la dimensión compleja. Más aún, se puede probar que $\mathcal{H}^o(V;S) = C^{\deg D}$.

Con el siguiente lema sencillo probaremos el teorema de Riemann-Roch.

<u>Proposición</u> (4.6.4). Si $\ldots \longrightarrow A_{i-1} \xrightarrow{h_{i-1}} A_i \xrightarrow{h_i} A_{i+1} \longrightarrow \ldots$ es una sucesión exacta, entonces

$$\sum_{i=m}^{n} (-1)^i \dim A_i = (-1)^m \dim(\operatorname{Ker} h_m) + (-1)^n \dim(\operatorname{Im} h_n).$$

En particular, si $0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow A_n \longrightarrow 0$ es exacta, entonces $\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \dim A_i = 0$.

Demostración.

En virtud de la exactitud es

$$\dim A_i = \dim(\mathrm{Ker}\, h_i) + \dim(\mathrm{Ker}\, h_{i+1}),$$

y entonces

$$\sum_{i=m}^{n}(-1)^i \dim A_i = \sum_{i=m}^{n}(-1)^i \dim(\mathrm{Ker}\, h_i) - \sum_{i=m+1}^{n+1}(-1)^i \dim(\mathrm{Ker}\, h_i) =$$

$$= (-1)^m \dim(\mathrm{Ker}\, h_m) + (-1)^n \dim(\mathrm{Ker}\, h_{n+1}). \quad ///$$

Llamaremos

$$g = \dim_C \mathcal{H}^1(V;\Omega)$$

al <u>género</u> de V, que coincide con el género aritmético de V definido en (4.5.4); g **es el número de "manijas" de** V.

Llamaremos $i(D) = \dim_C \mathcal{H}^1(V;\Omega(D))$ el <u>índice de especialidad</u> del divisor D.

<u>Proposición</u> (4.6.5). (Teorema de Riemann-Roch) Si D es un divisor en la superficie de Riemann compacta V, entonces se cumple

$$\dim_C \mathcal{H}^0(V;\Omega(D)) = 1 + \deg D - g + i(D).$$

Demostración.

Sabemos que la sucesión de Bockstein de (4.6.3) es exacta. Teniendo en cuenta que, según hemos visto, $\mathcal{H}^1(V;S) = 0$, podemos escribir:

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}^{0}(V;\Omega) \longrightarrow \mathcal{H}^{0}(V;\Omega(D)) \longrightarrow \mathcal{H}^{0}(V;S) \longrightarrow \mathcal{H}^{1}(V;\Omega)$$

$$\longrightarrow \mathcal{H}^{1}(V;\Omega(D)) \longrightarrow 0,$$

y afirmar que esta sucesión es exacta. Aplicando ahora (4.6.4) obtenemos

$$\dim_C \mathcal{H}^{0}(V;\Omega(D)) = \dim_C \mathcal{H}^{0}(V;\Omega) + \dim_C \mathcal{H}^{0}(V;S) -$$

$$- \dim_C \mathcal{H}^{1}(V;\Omega) + \dim_C \mathcal{H}^{1}(V;\Omega(D)).$$

Teniendo en cuenta que $\mathcal{H}^{0}(V;\Omega) \cong \Omega(V) \cong C$ por ser V compacta, se obtiene la tesis. ///

El número $\dim_C \mathcal{H}^{0}(V;\Omega(D))$ que aparece en el teorema de Riemann-Roch es precisamente la dimensión del espacio de funciones meromorfas f definidas en todo V tales que $D(f) + D \geqslant 0$. El teorema implica que si D tiene un grado suficientemente grande, por ejemplo, si $\deg D \geqslant g$, entonces existen funciones meromorfas f tales que $D(f) + D \geqslant 0$.

Daremos ahora una consecuencia sencilla de la teoría de háces en superficies de Riemann.

<u>Proposición</u> (4.6.6). (Teorema de Laurent) $H^1(P_1(C);\Omega) = 0$.

Demostración.

La tesis no es más que el enunciado del teorema clásico del desarrollo en serie de Laurent, que suponemos conocido, expresada en otro lenguaje.

Sea $0 < r < R$. En $P_1(C)$ consideremos el cubrimiento constituído por los dos abiertos

$$U_0 = \{ z \mid |z| < R \} \quad \text{y} \quad U_1 = \{ z \mid |z| > r \}.$$

Entonces $U_{o,1} = U_o \cap U_1 = \{z \mid r < |z| < R\}$ es un anillo circular. El nervio $N(\mathfrak{U})$ es 1-dimensional.

Sea f un 1-cociclo en $N(\mathfrak{U})$ con coeficientes en Ω (toda 1-cocadena es un 1-cociclo, por ser $N(\mathfrak{U})$ 1-dimensional). Esto significa que $f(o,1)$ es una función holomorfa en $U_{o,1}$.

El teorema de Laurent clásico dice que $f = g_1 - g_o$, donde $g_1(1)$ es holomorfa en U_1 y $g_o(o)$ holomorfa en U_o. Esto significa precisamente que f es un coborde, y por lo tanto

$$\mathcal{H}^1(N;\Omega) = 0,$$

y como $\mathcal{H}^1 \cong H^1$ (cf. (2.6.5)), obtenemos la tesis. ///

-----oOo-----

(Fin Cap. IV)

BIBLIOGRAFIA

[1].- S.S. CHERN. Complex manifolds (Textos de matemática, nº 5, Instituto de Física e Matemática, Universidade do Recife, 1959) (en inglés)

[2].- S.S. CHERN. Differentiable manifolds (Special notes, Department of Mathematics, University of Chicago, Winter Quarter 1959).

[3].- G. DE RHAM. Variétés différentiables (Actualités scientifiques et industrielles, Hermann, Paris, 1955).

[4].- M. HERRERA. Regularización de corrientes (A publicarse por la Universidad de La Plata).

[5].- L. PONTRJAGIN. Foundations of combinatorial topology (Rochester, 1952).

[6].- L. A. SANTALO. Sobre geometría diferencial (fascículo a publicarse en esta misma colección).

[7].- G. SPRINGER. Introduction to Riemann Surfaces (Addison Wesley Publ. Co., Massachusetts, USA, 1957).

[8].- A. E. TAYLOR. Introduction to Functional Analysis (J. Wiley & Sons, New York, USA, 1958).

[9].- R. GODEMENT. Topologie algébrique et théorie des faisceaux (Actualités scientifiques et industrielles, Hermann, Paris, 1958).

-.-