**Competencia E. Paenza**

- **Problema 1** *Definir, si existe, una matriz "infinita"de números enteros positivos* $A := (a_{ij})_{1\leq i,j<\infty}$ *, que verifique la siguiente propiedad: todo entero positivo aparece exactamente una vez en cada "filaæn cada "columna"de* $A$ *.*

  **Resolución:** (Participante 14087; *Pablo Luisetti* y *Lisandro Parente* de la Fac. Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura; Rosario)

  Utilizaremos una construcción de tipo recurrente. Consideremos casos finitos. Si tenemos una matriz de $1 \times 1$ y queremos que no se repitan números. Como es trivial, tomamos el único elemento de la matriz igual a $1$ . Al considerar una matriz de $2\times 2$ , sigue siendo muy simple; tomamos $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

  Obviamente, para estos casos particulares podríamos utilizar números cualesquiera pero elegimos los primeros enteros positivos pues consideramos a estas matrices como ubicadas en el extremo superior izquierdo de nuestra matriz infinita.

  Las matrices consideradas a continuación serán conformadas a partir de las matrices dadas. Tenemos matrices del tipo $2^k \times 2^k$ con $k \in \mathbb{N}_0$ .

  Para una matriz de $2^2 \times 2^2$ , tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

  Es decir que repetimos la matriz anterior sobre la original y completamos los cuadrantes que quedan con dos matrices iguales de $2 \times 2$ que guardan la misma relación entre sus elementos que la matriz anterior pero con los números $3$ y $4$ .

  La siguiente matriz será entonces una matriz de $2^3 \times 2^3$ como sigue:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 5 & 8 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 7 & 8 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 7 & 8 & 5 & 6 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

O sea que, en general, construimos matrices de $2^k \times 2^k$, repitiendo sobre la diagonal las matrices de $2^{k-1} \times 2^{k-1}$ obtenidas anteriormente y completando los cuadrantes que quedan con matrices de $2^{k-1} \times 2^{k-1}$, formadas por los $2^{k-1}$ números enteros positivos que siguen dispuestos de la misma forma que en la matriz de $2^{k-1} \times 2^{k-1}$ obtenida en el paso anterior.

Podemos repetir este proceso en forma infinita obteniendo así una matriz infinita del tipo buscado.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ 2 & 1 & 4 & 3 & \dots \\ 3 & 4 & 1 & 2 & \dots \\ 4 & 3 & 2 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Podemos observar que en cada fila y en cada columna tendremos todos los enteros positivos (esto es obvio en la primera fila y la primera columna) y nunca se repetirán puesto que no se repiten en las filas y columnas de las sucesivas matrices de $2^k \times 2^k$, ya que en cada nueva iteración, los números que ya habían aparecido, aparecen en el cuadrante opuesto y los números nuevos, al tener la misma distribución que los anteriores, tampoco se repiten en cada fila y columna.

- **Problema 2** *Sea* $p$ *un entero,* $p > 1$ *. Consideramos la sucesión de números reales* $(x_n)_{n\geq 1}$ *definida como*

$$x_n := (\sum_{k=n+1}^{2n} \sqrt[p]{1+\frac{1}{k}}) - n.$$

*Estudiar la convergencia de esta sucesión. Si converge, calcular su límite.*

**Resolución:**(Participante 14122; *Matilde Lalin* y *Santiago Laplagne*, Fac. Cs. Exactas y Naturales; UBA)

$x_n = (\sum_{k=n+1}^{2n} \sqrt[p]{1+\frac{1}{k}}) - n = \sum_{k=n+1}^{2n} (\sqrt[p]{1+\frac{1}{k}} - 1)$ .

Notar que los términos de la suma son positivos.

Como $k \in \mathbb{N}$ ,

$$1 + \frac{1}{k} < (1 + \frac{1}{pk})^p = 1 + \binom{p}{1}\frac{1}{pk} + \text{cosas positivas}$$

Entonces $\sqrt[p]{1+\frac{1}{k}} - 1 \leq \frac{1}{pk}$ .

Luego, $x_n \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{pk} < \frac{1}{p}\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{p}\frac{n}{n+1}$ .

Ahora veamos que, para $k$ grande,

$$\sqrt[p]{1+\frac{1}{k}} - 1 \geq \frac{1}{p(k+1)}$$

es lo mismo que ver que

$$1 + \frac{1}{k} \geq (1 + \frac{1}{p(k+1)})^p = 1 + \binom{p}{1}\frac{1}{p(k+1)} + \binom{p}{2}\frac{1}{(p(k+1))^2} + O(\frac{1}{(k+1)^2}).$$

Hay que ver que

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \geq \binom{p}{2}\frac{1}{(p(k+1))^2} + O(\frac{1}{(k+1)^2})$$

$$\frac{1}{k(k+1)} \geq \frac{p-1}{2p}\frac{1}{(k+1)^2} + O(\frac{1}{(k+1)^2}).$$

Para cada $\epsilon$ , existe $k_0$ tal que si $k \geq k_0$ ,

$$O(\frac{1}{(k+1)^2}) \leq \frac{\epsilon}{(k+1)^2}.$$

Entonces,

$$\frac{1}{k(k+1)} - \frac{\epsilon}{(k+1)^2} \geq \frac{p-1}{2p}\frac{1}{(k+1)^2}$$

$$\frac{k+1}{k} - \epsilon \geq \frac{p-1}{2p}.$$

Como $\frac{p-1}{2p} \leq \frac{1}{2}$ podemos tomar $\epsilon = \frac{1}{2}$ y entonces $\frac{k+1}{k} \geq \epsilon + \frac{p-1}{2p}$ .
Entonces

$$\sqrt[p]{1+\frac{1}{k}} - 1 \geq \frac{1}{p(k+1)}$$

para $k$ grande.
O sea, para $n$ grande,

$$x_n = \sum_{k=n+1}^{2n} (\sqrt[p]{1+\frac{1}{k}} - 1) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{p(k+1)} \geq \frac{1}{p} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{(2n+1)} = \frac{1}{p}\frac{n}{2n+1}$$

Estas cotas no aportan mucho pero escribimos dos pasos intermedios.

$$\frac{1}{p}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} \geq x_n \geq \frac{1}{p}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k+1}.$$

Hay que ver cómo es el límite de $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.
Acotando, por el criterio de la integral para una función decreciente:

$$\int_{n+2}^{2n+1} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leq \int_{n+1}^{2n} \frac{1}{x} dx.$$

Entonces

$$ln(2n+1) - ln(n+2) \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leq ln(2n) - ln(n+1)$$

$$ln(\frac{2n+1}{n+2}) \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leq ln(\frac{2n}{n+1})$$

Entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = ln(2).$$

Análogamente $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k+1} = ln(2)$ .

Por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{ln(2)}{p}$ y converge siempre por el criterio del sandwich.

- **Problema 3** *Probar que, cualquiera sea* $l > 0$ *, hay un par de números enteros coprimos* $(a, b)$ *tal que ningún punto entero del interior del cuadrado con vértices* $(a, b)$, $(a + l, b)$, $(a, b + l)$, $(a + l, b + l)$ *tiene coordenadas coprimas.*

  **Resolución:**(Participante 14046; *Franco Grimoldi* y *Juan A. Cappa*, Dpto. Matemática; Universidad del Sur, Bahía Blanca)

  El problema equivale a demostrar que $\forall l > 0$ entero, existen enteros coprimos $a$ , $b$ tales que:

$$(a + i\, ,\, b + j) \neq 1, \ \ \forall i, j \ :\ 1 \leq i, j \leq l.$$

  Sean $p_1, p_2, \ldots p_{l^2}$ primos distintos. Consideremos el siguiente sistema lineal de congruencias:

$$\begin{array}{rcl} x+1 & \equiv & 0 \ \ (p_1 p_2 \ldots p_l) \\ x+2 & \equiv & 0 \ \ (p_{l+1} p_{l+2} \ldots p_{2l}) \\ \vdots & & \\ x+l & \equiv & 0 \ \ (p_{l^2-l+1} \ldots p_{l^2}) \end{array}$$

  Como los $p_i$ son primos, los módulos del sistema son coprimos dos a dos. Luego, por el teorema chino del resto, el sistema tiene una única solución módulo $\prod_{i=1}^{l^2} p_i = m$ . Sea $a$ esta solución con $0 \leq a \leq m - 1$ .

  Ahora, consideramos el sistema lineal de congruencias siguiente:

$$\begin{array}{rcl} x+1 & \equiv & 0 \ \ (\prod_{i=0}^{l-1} p_{il+1}) \\ x+2 & \equiv & 0 \ \ (\prod_{i=0}^{l-1} p_{il+2}) \\ \vdots & & \\ x+l & \equiv & 0 \ \ (\prod_{i=0}^{l-1} p_{il+l}) \end{array}$$

  De nuevo, los módulos son coprimos dos a dos porque son productos de conjuntos disjuntos de primos. Sea $b' \in \{0, 1, \ldots m - 1\}$ solución de este sistema. Entonces todas las soluciones son de la forma $b' + mt$ con $t$ entero.

  Es claro que $(a + i, b' + mt + j) \neq 1$ porque tanto $a + i$ como $b' + mt + j$ son divisibles por $p_{(i-1)l+j}$ . Luego, sólo nos falta hallar $t$ tal que $(a, b' + mt) = 1$ . Sea, entonces, la ecuación en $t$ :

  $b' + mt \equiv 1 \ (\bmod\ a)$ .

  Esta ecuación tiene solución si y sólo si $(a, m) = 1$ . Para que esta condición se cumpla, basta con elegir a todos los $p_i$ de modo que sean mayores que $l$ , ya que $a + i \equiv 0 \ (p_{(i-1)l+1} \ldots p_{il})$ para todo $i = 1, \ldots, l$ . De donde $a$ no es divisible por ninguno de los $p_i$ . Por lo tanto $(a, m) = 1$ .

  Sean, entonces, $p_1, \ldots, p_{l^2}$ primos distintos mayores que $l$ y sean $m$ , $a$ y $b'$ como antes. Sea $t_0$ la solución de la ecuación:

$b' + mt \equiv 1 \pmod{a}$ .

Sea $b = b' + mt_0$ . Entonces el par $(a, b)$ satisface lo pedido.

- **Problema 4** *¿Existe un polinomio* $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ *con más de un término tal que la cantidad de términos de* $p^2(x)$ *sea menor o igual que la cantidad de términos de* $p(x)$ *?*

  **Resolución:** (Participante 14055; *Alan Hampton* y *Rodrigo Sánchez*, Instituto Balseiro; Cuyo)

  Polinomios con dos términos:

  $p(x) = c_i x^i + c_j x^j$ con $c_i \neq 0$ y $c_j \neq 0$ .

  $p^2(x) = c_i^2 x^{2i} + c_j^2 x^{2j} + 2c_i c_j x^{i+j}$ tiene 3 términos no nulos, entonces con dos términos no se puede.

  Polinomios con tres términos:

  $p(x) = c_i x^i + c_j x^j + c_l x^l$ con $c_i \neq 0$ , $c_j \neq 0$ y $c_l \neq 0$ .

  $p^2(x) = c_i^2 x^{2i} + c_j^2 x^{2j} + c_l^2 x^{2l} + 2c_i c_j x^{i+j} + 2c_i c_l x^{i+l} + 2c_l c_j x^{l+j}$ tiene 6 términos no nulos, entonces con tres términos no se puede.

  Haciendo las cuentas se ve que tampoco se puede con polinomios del tipo $p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$ , ni con polinomios del tipo $p(x) = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4$ .

  Probamos, ahora, con polinomios del tipo $p(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4$ .

  Entonces se debe verificar el sistema que sigue o cuatro ecuaciones cualesquiera de él:

  $$\begin{aligned} c_1^2 + 2c_1 c_0 &= 0 \\ c_0 c_3 + c_1 c_2 &= 0 \\ c_2^2 + 2c_0 c_4 + 2c_1 c_3 &= 0 \\ c_1 c_4 + c_2 c_3 &= 0 \\ c_3^2 + 2c_2 c_4 &= 0 \end{aligned}$$

  Nos queda:

  $$\begin{aligned} c_1^2 &= -2c_0 c_2 \\ c_4 &= -\tfrac{c_2 c_3}{c_1} \\ c_3 &= -\tfrac{c_1 c_2}{c_0} \\ c_3^2 &= -2c_4 c_2 \\ c_2^2 &= -2c_0 c_4 - 2c_1 c_3 \end{aligned}$$

  Operando, obtenemos $c_2^2 = \frac{2c_0 c_2 c_3}{c_1} + \frac{2c_1^2 c_2}{c_0}$ .

  Podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $c_0 = 1$ y podemos no considerar la tercer ecuación.

  Haciendo cuentas, obtenemos una solución:

  $$p(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4$$

Se tiene que

$$p^2(x) = 1 + 2x + \frac{7}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^7 + \frac{1}{16}x^8$$

que tiene igual cantidad de términos que $p(x)$ .

- **Problema 5** *Sea* $C$ *un conjunto cerrado de* $\mathbb{R}^2$ *tal que, cualquiera sea* $x \in \mathbb{R}^2$ *, existe un único* $y \in C$ *tal que*

$$||x-y|| = \ dist\ (x, C).$$

*Probar que* $C$ *es un conjunto convexo.*

**Resolución:**(Basada en lo escrito por el participante 14038; *Luis Silvestre*, Fac. Cs. Exactas; La Plata)

Sea $f(x)$ la función que a cada $x \in \mathbb{R}^2$ la asigna el $y \in C$ que realiza $\mathrm{dist(x, C)} = \mathrm{||x-y||}$ .

La función $f$ es continua ya que, dado $x \in \mathbb{R}^2$ , si $x_n \to x$ ,

$$||f(x_n) - x|| \leq ||f(x_n) - x_n|| + ||x_n - x|| \to \mathrm{dist(x, C)}.$$

Entonces $f(x_n)$ está acotada. Por lo tanto, si $f(x_n)$ no tiende a $f(x)$ , hay una subsucesión $f(x_{n_k}) \to y' \neq f(x)$. Pero en ese caso $||y'-x|| = \mathrm{dist(x, C)} = \mathrm{||f(x)-x||}$ y el punto $y$ que realiza la distancia no sería único.

Tenemos entonces que $f: \mathbb{R}^2 \to C$ es continua y $f(x) = x \ \forall x \in C$ . Por medio de $f$ , $C$ resulta un retracto por deformación fuerte de $\mathbb{R}^2$ y, por lo tanto, simplemente conexo.

Sea $B$ la cápsula convexa de $C$ . Queremos ver que $C = \bar{B}$ .

Como $C$ es simplemente conexo, basta probar que $\delta(B) \subset C$ , donde $\delta(B)$ es el borde de $B$ .

Supongamos que existe $x_0 \in \delta(B) - C$ .

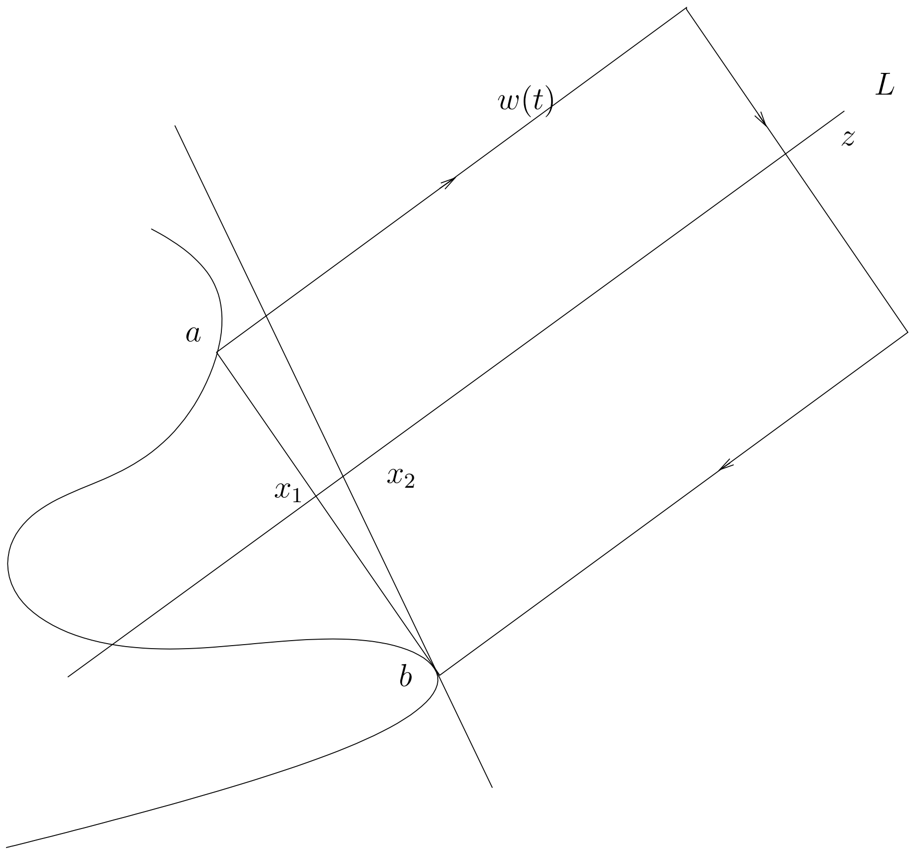
Como $C$ es cerrado, existe $\epsilon > 0$ tal que la bola de centro $x_0$ y radio $\epsilon$ , $B(x_0, \epsilon)$ , no contiene puntos de $C$ . Sea $x_1 \in B(x_0, \epsilon) \cap (B - C)$ . Se puede ver que existen $a, b \in C$ tal que $x_1 \in \bar{ab}$ y $\bar{ab} \cap C = \{a, b\}$ (donde $\bar{ab}$ denota al segmento que une $a$ con $b$ ).

Sea $L$ la recta perpendicular al segmento $\bar{ab}$ que pasa por $x_1$ y sean $y_1 \in \delta(C)$ el punto de intersección de $L$ con $C$ que está más cerca de $x_1$ e $y_2$ el punto de intersección de $L$ con $\delta(B)$ . Como estamos considerando la cápsula convexa de $C$ , la semirrecta de $L$ que empieza en $y_2$ y no contiene a $y_1$ no corta nunca a $C$ (pues, si hubiera un punto $x_2$ de en esa semirrecta que pertenece a $C$ , todo el segmento $\bar{y_2 x_2}$ estaría contenido en $B$ e $y_2$ no estaría en el borde).

Entonces, existe un punto $z \in L$ tal que $||z-a|| < ||z-y_1||$ y $||z-b|| < ||z-y_1||$ .

Sea $w : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ el camino $w(0) = a$ , $w(t)$ es paralelo a $L$ en la dirección de $z$ , para todo $0 \leq t \leq 1/3$ , $w(t)$ es perpendicular a $L$ para todo $1/3 \leq t \leq 2/3$ , $w(1/2) = z$ y $w(t)$ es paralelo a $L$ en la dirección opuesta a $z$ y $w(1) = b$ .

Para ilustrar:




Entonces, $f(w(t))$ es una curva continua que une $a$ y $b$ dentro de $C$ pero que no corta a la recta $L$ . Esto es un absurdo que proviene de suponer que $x_0 \notin C$ .

- **Problema 6** *Dados* $n+1$ *polinomios de grado* $n$ $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x) \in \mathbb{R}[x]$ *, se sabe que existen intervalos disjuntos* $I_0, I_1, \ldots, I_n \subset \mathbb{R}$ *tal que cada* $P_j(x)$ *tiene exactamente* $n$ *raíces distintas en* $I_j$ *,* $j = 0, 1, \ldots, n$ *.*

  *Probar que entonces*

$$\det \begin{pmatrix} P_0(x) & P_1(x) & \ldots & P_n(x) \\ P_0'(x) & P_1'(x) & \ldots & P_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_0^{(n)}(x) & P_1^{(n)}(x) & \ldots & P_n^{(n)}(x) \end{pmatrix}$$

  *es un número real distinto de cero.*

  **Resolución:**(Solución oficial)

  Denotamos por

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n) := \det \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

  donde $f_1, \ldots, f_n$ son funciones $C^\infty$ , con la convención $W() = 1$ y $W(f_1) = f_1$ .

  Es fácil ver que:

- **a)** $W(1, f_1, \ldots, f_n) = W(f_1', \ldots, f_n')$
- **b)** $W(ff_1, \ldots, ff_n) = f^n W(f_1, \ldots, f_n) \ \forall f \in C^\infty$
- **c)** $W(W(f_1, f_2), W(f_1, f_3), \ldots, W(f_1, f_n)) = f_1^{n-2} W(f_1, \ldots, f_n)$.

  Para resolver el problema, debemos probar el siguiente resultado más general:

  *Supongamos que* $P_0, P_1, \ldots, P_n$ *son polinomios de grado* $n + k$ *, para algún* $k \geq 0$ *, y que todas sus raíces son reales y distintas. Supongamos, además, que* $I(P_0)$ *,* $I(P_1), \ldots,$ $I(P_n)$ *son intervalos disjuntos dos a dos tales que las raíces de* $P_i$ *están incluidas en* $I(P_i)$ *para cada* $i = 0, 1, \ldots, n$ *. Entonces* $W(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ *es un polinomio* **no nulo** *de grado* $k(n+1)$ *, con exactamente* $k$ *raíces en cada* $I(P_i)$ *.*

  Tomando $k = 0,$ se obtiene el enunciado del problema.

  Primero veamos algunos resultados intermedios que vamos a necesitar.

- **(1)** Sean $f_1, \ldots, f_n, f_{n+1}$ polinomios de grado $n+k$, con $k \geq 0$. Entonces $W(f_1, \ldots, f_n, f_{n+1})$ es un polinomio de grado, a lo sumo, $(n+1)k$.

  *Dem:* Podemos encontrar inductivamente polinomios $q_i$ de grado $n+2-i$ tales que $f_i$ es una combinación lineal de $q_1, q_2, \ldots, q_i$. Entonces $W(f_1, \ldots, f_n, f_{n+1})$ es un múltiplo escalar de $W(q_1, q_2, \ldots, q_{n+1})$, que, obviamente tiene grado a lo sumo $(n+1)k$.

- **(2)** Sea $I = [a, b]$, con $a \leq b$. Sean $P_1, P_2, \ldots, P_n$ y $Q$ polinomios. Supongamos que para cada subconjunto $\{P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_k}\}$ de $\{P_1, \ldots, P_n\}$,
  $W(P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_k})$ no se anula en $I$. Supongamos también que $Q$ tiene $n+k$ raíces distintas en $I$, donde $k \geq 0$, y que $Q$ no es idénticamente nulo. Entonces $W(P_1, \ldots, P_n, Q)$ tiene, por lo menos, $k$ raíces distintas en $I$, pero no es idénticamente nulo.

  *Dem:* Inducción en $n$. El caso $n = 0$ es trivial.

  Supongamos que $n \geq 1$. En $I$, $W(P_1) = P_1$ no se anula. La función $Q/P_1$ tiene $n+k$ ceros distintos en $I$ (la misma cantidad de ceros que $Q$), y no es idénticamente nula. Como tiene por lo menos un cero, $Q/P_1$ no es constante. Por lo tanto, $P_1^2(Q/P_1)'$ tiene, por lo menos, $n+k-1$ ceros distintos en $I$, y $P_1^2(Q/P_1)'$ no es idénticamente cero. Aplicando **c)** se tiene

  $$W(W(P_1, P_{i_1}), W(P_1, P_{i_2}), \ldots, W(P_1, P_{i_k})) = P_1^{k-2} W(P_1, P_{i_1} \ldots, P_{i_k}).$$

  Por hipótesis, para toda subfamilia $\{P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_k}\}$ de $\{P_2, \ldots, P_n\}$, esta última expresión no se anula. Por lo tanto,

  $$W(W(P_1, P_2), W(P_1, P_3), \ldots, W(P_1, P_n), P_1^2(Q/P_1)')$$

  tiene, por lo menos, $k$ ceros distintos en $I$ y no es idénticamente cero.

  Además

  $$W(W(P_1, P_2), W(P_1, P_3), \ldots, W(P_1, P_n), P_1^2(Q/P_1)') = P_1^{n-1} W(P_1, \ldots, P_n, Q),$$

  y $P_1$ no tiene ceros en $I$, así $W(P_1, \ldots, P_n, Q)$ tiene $k$ ceros distintos en $I$, y no es idénticamente cero.

  *Dem del resultado general:* Nuevamente hacemos inducción en $n$. El caso $n = 0$ es trivial.

  Supongamos que $n \geq 1$. Consideremos $W := W(P_1, P_2, \ldots, P_m)$ para algún $m \leq n$. La hipótesis inductiva aplicada $m$ veces a $W$, tomando cada $P_i$ como $Q$, implica que $W$ tiene exactamente $n+k+1-m$ ceros en cada $I(P_i)$, y que $W$ no es idénticamente cero. Por otro lado, vimos que el grado de $W$ es, a lo sumo,

$m(n+k+1-m)$ , así que vale la igualdad, las raíces son reales, distintas, y están en $I(P_0) \cup I(P_1) \cup \ldots \cup I(P_m)$ . En particular, $W$ no se anula en $I(P_n)$ . De forma similar, se ve que, aplicando $W$ a cualquier subconjunto de $\{P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}\}$, este no se anula en $I(P_n)$ . Aplicando **(2)** a $W(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ , con $Q = P_n$ , se tiene que $W(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ no se anula y que tiene, por lo menos, $k$ ceros distintos en $I(P_n)$ . Análogamente, se ve que $W(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ tiene, por lo menos, $k$ raíces en cada $I(P_i)$ . Por **(1),** el grado es a lo sumo $k(n+1)$ y, contando raíces, vemos que la igualdad vale en todos lados.