Competencia Matemática E. Paenza

XIII REALIZACIÓN — RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Problema 1. Sea G un abierto del plano real y $f : G \to \mathbb{R}$ una función continua de manera que $\int_G f(x,y)dxdy = 0$.
Pruebe que existe al menos una recta que divide G en dos partes G_1 y G_2 de área no nula tal que $G = G_1 \cup G_2$ y

$$\int_{G_1} f(x,y)dxdy = \int_{G_2} f(x,y)dxdy = 0.$$

Resolución (realizada por el participante N°13019, *Juan Marcos Cerviño*, Fac. de Cs. Exactas y Naturales - Univ. Nac. de Mar del Plata)

Identifiquemos el plano real con $\mathbb{C}$ para comodidad de notación.
Sea $z_0 \in G$. Definimos

$$R(\theta) = \{z \in \mathbb{C} / \, \theta < \mathrm{Arg}(z - z_0) < \theta + \pi\} \quad (0 \le \mathrm{Arg}(z) \le 2\pi)$$

Sea $\psi : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ mandando

$$\theta \mapsto \int_{R(\theta)\cap G} f(x,y)dxdy$$

ψ es continua y como,

$$0 = \int_G f(x,y)dxdy = \int_{R(0)\cap G} f(x,y)dxdy + \int_{G-R(0)\cap G} f(x,y)dxdy =$$

$$= \psi(0) + \int_{R(\pi)\cap G} f(x,y)dxdy = \psi(0) + \psi(\pi) \implies \psi(\pi) = -\psi(0).$$

Por teorema del valor medio, se tiene un $t \in [0, \pi]$ tal que,

$$\psi(t) = 0 = \int_{R(t)\cap G} f(x,y)dxdy.$$

Luego la recta $L = \{z_0 + \lambda e^{it} \, : \, \lambda \in \mathbb{R}\}$ divide a G en $G_1 = R(t) \cap G$ y $G_2 = G - G_1$ cumpliendo que:

$$\int_{G_1} f(x,y)dxdy = \int_{G_2} f(x,y)dxdy = 0.$$

Además, como $z_0 \in G$ es abierto, existe $r > 0$ tal que $\{z \in \mathbb{C} : \|z - z_0\| < r\} \subseteq G$ y por lo tanto

$$\{z \in \mathbb{C} : \|z - z_0\| < r \quad \text{y} \quad t < \operatorname{Arg}(z - z_0) < t + \pi\} \subseteq G_1$$

$$\{z \in \mathbb{C} : \|z - z_0\| < r \quad \text{y} \quad t + \pi < \operatorname{Arg}(z - z_0) < t + 2\pi\} \subseteq G_2.$$

Por lo tanto ambos son de medida no nula.

Problema 2. a) Se dibujan n rectas en el plano, de forma tal que x_1 son paralelas entre sí en cierta dirección, x_2 paralelas entre sí en una segunda dirección, ..., y x_k paralelas entre sí en una $k-$ésima dirección, de manera tal que ninguna terna de rectas se corte en un punto. Encuentre una fórmula que calcule el número de intersecciones.
b) Dibuje 17 rectas en las condiciones anteriores tal que sus intersecciones sean exactamente 101 puntos.

Resolución (realizada por el participante N°13152; *Esteban Reinaldo Gelso*, Fac. de Ingeniería - Univ. Nac. del Centro)

La cantidad de puntos de intersección de i rectas paralelas en una dirección y j rectas paralelas en otra dirección es $i.j$.
Como ninguna terna de rectas se corta en un punto, el total de puntos de intersección se obtiene contando las intersecciones de cada par de grupos de rectas paralelas y sumando todo.
Si hay k grupos de rectas paralelas se tiene:

$$\text{N° de intersecciones} = x_1(x_2 + \ldots + x_k) + x_2(x_3 + \ldots + x_k) + \ldots + x_{k-1}x_k =$$
$$= \sum_{i=1}^{k-1} x_i(\sum_{j=i+1}^{k} x_j) = \frac{1}{2}(n^2 - \sum_{i=1}^{k} x_i^2)$$

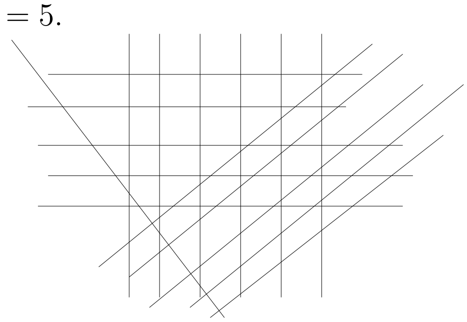
y siendo el número total de rectas:

$$x_1 + \ldots + x_k = n.$$

b) Para calcular cuántos grupos de letras necesito y cuántas rectas debe haber en cada grupo, hay que encontrar un k de tal forma que el sistema con k incógnitas:

$$\sum_{i=1}^{k-1} x_i(\sum_{j=i+1}^{k} x_j) = 101$$
$$x_1 + \ldots + x_k = 17$$

tenga solución en $\mathbb{N}$.
Si $k = 4$, $x_1 = 1$, $x_2 = 6$ obtenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que tiene solución en $\mathbb{N}$: $x_3 = x_4 = 5$.



Problema 3. Sea $A_n = \{0, 1, 2, \ldots, 7^n - 1\}$, $n \in \mathbb{N}$.
Una sucesión $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \in A_n$ se dice **coherente** si $a_{n+1} \equiv a_n \pmod{7^n}$. Por ejemplo $a = (5, 12, 61, \ldots)$ es el comienzo de una. Dada una sucesión a se denota por a^2 a la sucesión

$$a^2 = (a_n^2 (\text{mód}\, 7^n))_{n\in\mathbb{N}}.$$

En el ejemplo $a^2 = (4, 46, 291, \ldots)$.
Observe que si a es coherente, entonces a^2 también.
Convengamos en llamar 2 a la sucesión constante $2 = (2, 2, 2, \ldots, 2, \ldots)$.
a) Demuestre que existe una solución coherente a la ecuación $a^2 = 2$ y exhiba sus cuatro primeros términos.
b) Demuestre que existen sólo dos soluciones distintas de la misma ecuación.

Resolución (realizada por el participante N°13059; *Sonia Lowenthal* y *Tal Morgenstern*, Fac. de Cs. Económicas - UBA)

Sea $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ la solución buscada. Luego

$$a^2 = (a_1^2 \,\text{mód}\, 7, a^2 \,\text{mód}\, (49), \ldots) = 2.$$

Cálculo de a_1:

$$a_1 \in A_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \text{y} \quad a_1^2 \equiv 2 \,\text{mód}\, 7 \Longrightarrow 2 + 7x_1 = a_1^2.$$

El máximo valor de a_1^2 es 36, por lo que $0 \leq x_1 \leq [\frac{36-2}{7}] = 4$.
Analizando caso por caso se tiene que únicamente para $x_1 = 1$ ó $x_1 = 2$ tenemos solución entera $a_1 = 3$ ó $a_1 = 4$.
Una vez establecido a_1 se tiene que $a_2 \equiv 1(7)$ ya que la solución debe ser coherente. Luego

$$a_2 = a_1 + 7y_1 \Longrightarrow a_2^2 = a_1^2 + 49y_1 + 14a_1y_1.$$

A su vez:

$$a_2^2 = 2 + 49x_2 \quad (a_2^2 \,\text{mód}\, 7^2 = 2).$$

Igualo:

$$2 + 49x_2 = a_1^2 + 49y_1^2 + 14a_1y_1$$
$$49x_2 = a_1^2 - 2 + 49y_1^2 + 14a_1y_1.$$

Como $a_1^2 - 2 \equiv 0(7) \Longrightarrow 7x_2 = \frac{a_1^2-2}{7} + 7y_1^2 + 2a_1y_1 \Longrightarrow \frac{a_1^2-2}{7} + 2a_1y_1 \equiv 0(7)$.
Como $a_1 \leq 6$, $a_1^2 \leq 36 \Longrightarrow \frac{a_1^2-2}{7} < 4,857 < 5 < 7$. Luego $2a_1y_1 \equiv 7 - \frac{a_1^2-2}{7}(7)$.
Como $a_2 \in A_2 \Longrightarrow a_2 = a_1 + 7y_1 \leq 48$. Como $a_1 > 0 \Longrightarrow 7y_1 \leq 48 \Longrightarrow y_1 \leq 6,857 < 7$.
Puede entonces determinarse y_1

$$a_1 = 3 \Longrightarrow 6y_1 \equiv 6(7) \Longrightarrow y_1 = 1 \Longrightarrow a_2 = 10.$$

$$a_1 = 4 \Longrightarrow 8y_1 \equiv 5(7) \Longrightarrow y_1 = 5 \Longrightarrow a_2 = 39.$$

Cuando ya obtuve a_{n-1}:

$$a_n \equiv a_{n-1}(7^{n-1}) \Longrightarrow a_n = a_{n-1} + 7^{n-1}y_{n-1} \Longrightarrow a_n^2 = a_{n-1}^2 + (7^{n-1})^2 y_{n-2}^2 + 2a_{n-1}7^{n-1}y_{n-1}$$

También a_n^2 (mód $7^n) = 2 \Longrightarrow a_n^2 = 2 + 7^n x_n$.
Igualo:

$$2 + 7^n x = a_{n-1}^2 + (7^{n-1})^2 y_{n-2}^2 + 2a_{n-1}7^{n-1}y_{n-1}$$
$$7^n x = a_{n-1}^2 - 2 + (7^{n-1})^2 y_{n-1}^2 + 2a_{n-1}7^{n-1}y_{n-1}.$$

Como $a_{n-1}^2 - 2 \equiv 0(7^{n-1})$, dividiendo por 7^{n-1}

$$7x = \frac{a_{n-1}^2 - 2}{7^{n-1}} + (7^{n-1})y_{n-1}^2 + 2a_{n-1}y_{n-1}$$
$$\frac{a_{n-1}^2 - 2}{7^{n-1}} + 2a_{n-1}y_{n-1} \equiv 0(7).$$

De aquí determino y_{n-1}, con la condición $a_n \leq 7^n - 1 \Longrightarrow a_{n-1} + 7^{n-1}y_{n-1} \leq 7^n - 1$.
Como $a_1 > 0 \Longrightarrow 7^{n-1}y_{n-1} \leq 7^n - 1 \Longrightarrow y_{n-1} \leq 7 - \frac{1}{7^{n-1}} < 7$.
Teniendo en cuenta que $a_i \not\equiv 0(7)$, habrá una y sólo una ecuación de y_{n-1} verificando:

$$2a_{n-1}y_{n-1} \not\equiv -\frac{a_{n-1}^2 - 2}{7^{n-1}}.$$

Luego puedo calcular $a_n = a_{n-1} + 7^{n-1}y_{n-1}$.
Como parto de sólo dos valores para a_1, habrá solo 2 soluciones distintas para esta ecuación.
Primeros términos: ya se calculó $a_1 = 3$, $a_2 = 10$

$$a_3 = 10 + 49y_2 \quad \text{y} \quad a_3^2 = 2 + 343x_3$$
$$a_2^3 = 100 + 49^2 y_2^2 + 980y_2 = 2 + 343x_3$$
$$2 + 49y_2^2 + 20y_2 = 7x_3$$
$$2 + 20y_2 \equiv 0(7) \Longrightarrow y_2 = 2 \Longrightarrow a_3 = 10 + 49 \times 2 = 108$$
$$a_4 = 108 + 343y_3 \quad \text{y} \quad a_4^2 = 2 + 7^4 x_4$$
$$a_4^2 = 108^2 + 343^2 y_3^2 + 2 \times 108y_3 = 2 + 7^4 x_4$$
$$34 + 343y_3^2 + 216y_3 = 7x_4$$
$$34 + 216y_3 \equiv 0(7) \Longrightarrow 216y_3 \equiv 1 \Longrightarrow y_3 = 6 \Longrightarrow a_3 = 108 + 6 \times 343 = 2166$$

Soluciones: $(3, 10, 108, 2166, \ldots)$ y $(4, 39, \ldots)$.

Problema 4. Se tienen dos números enteros positivos a y b coprimos. Sean

$$x = \left[\frac{a}{b}\right] + \left[\frac{2a}{b}\right] + \left[\frac{3a}{b}\right] + \cdots + \left[(b-1)\frac{a}{b}\right]$$

$$y = \left[\frac{b}{a}\right] + \left[\frac{2b}{a}\right] + \left[\frac{3b}{a}\right] + \cdots + \left[(a-1)\frac{b}{a}\right]$$

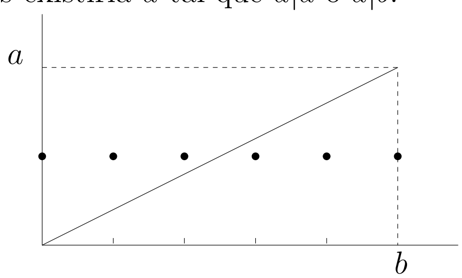
donde [ ] indica la parte entera. Pruebe que $x + y = (a-1)(b-1)$.

Resolución (realizada por el participante N°13025; *Alejandro Kocsard* y *Mariano Suárez Alvarez* Fac. de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura - Univ. Nac. de Rosario).

Consideramos el rectángulo A en el plano xy de vértices $(0,0)$;$(b,0)$;(b,a);$(0,a)$.
Al ser a y b coprimos no habrá ningún punto de coordenadas enteras sobre la diagonal que une $(0,0)$ con (b,a), ya que si hubiese alguno (de coordenadas (x_1, y_1)), por semejanza de triángulos tendríamos

$$\frac{a}{b} = \frac{y_1}{x_1}$$

con $x_1 < a$ y $y_1 < b$. Entonces existiría d tal que $d|a$ ó $d|b$.



Ahora bien, la cantidad de puntos de coordenadas enteras que hay bajo la diagonal, con la coordenada x fija ($x \in \mathbb{N}$), es claramente $[\frac{xa}{b}]$ ya que la coordenada hasta la diagonal es $\frac{xa}{b}$.
De esta forma, la cantidad de puntos enteros dentro del rectángulo, y por debajo de la diagonal, será

$$\sum_{k=1}^{b-1} [k\frac{a}{b}] = x$$

Esto es sin incluir los puntos sobre los lados.
Análogamente, si deseamos contar cuántos puntos con coordenadas enteras hay por encima de la diagonal (excluyendo los que están sobre los lados), tomamos la ordenada y fija ($y \in \mathbb{N}$). Con esta ordenada y tendremos $[y\frac{b}{a}]$ puntos enteros sobre la diagonal, ya que la distancia desde el punto $(0,y)$ a la diagonal paralelamente al eje x es $y\frac{b}{a}$.

De esta forma, la cantidad de puntos por encima de la diagonal será

$$\sum_{k=1}^{a-1}[k\frac{b}{a}] = y.$$

Luego, $x+y$ será la cantidad de puntos enteros dentro del rectángulo A (sin contar lo de los bordes). Y esta cantidad es $(a-1)(b-1)$.
Por lo tanto, $x+y=(a-1)(b-1)$.

Problema 5. Sean a y b dos números reales positivos. A partir de ellos se definen recursivamente las siguientes sucesiones:

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{y}$$

$$b_1 = b, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n}$$

a) Probar que existen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ y que coinciden.

b) Sea ℓ el límite común a estas sucesiones. Probar que

$$\frac{\pi}{2\ell} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t}}.$$

Resolución (realizada por el participante N°13215; *Yanina Fumero* y *Manuela Busaniche*; Fac. de Ingeniería Química - Univ. Nac. del Litoral).

Notemos que $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. En efecto:

$$0 \leq \frac{(a-b)^2}{4} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} = \frac{a^2 - 2ab + b^2 + 4ab - 4ab}{4}$$

$$\Longrightarrow \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \geq \frac{4ab}{4} \Longrightarrow \frac{(a+b)^2}{4} \geq ab$$

$$\Longrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Luego

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \geq \sqrt{a_n . b_n} = b_{n+1} \quad (*)$$

Además, a partir de $n = 2$ las sucesiones a_n y b_n son monótonas decreciente y creciente respectivamente ya que por $(*)$:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{a_n + a_n}{2} = a_n$$

$$b_{n+1} = \sqrt{a_n . b_n} \geq \sqrt{b_n . b_n} = \sqrt{b_n^2} = b_n.$$

Por lo tanto tenemos $\forall\ n \geq 2$:

$$a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq b_{n+1} \geq b_n \geq \ldots \geq b_3 \geq b_2$$

Luego existen los límites y verifican:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf a_n \geq \sup b_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

Ahora veamos que los límites son iguales,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{1}{2}(\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n)$$

$$\Longrightarrow 2\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

Resolución

Sea

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 t + b_n^2 \operatorname{sen}^2 t}}$$

Bastará ver que $I_{n+1} = I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pues:

$$\frac{\pi}{2a_n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 t + a_n^2 \operatorname{sen}^2 t}} \leq I_n \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{b_n^2 \cos^2 t + b_n^2 \operatorname{sen}^2 t}} = \frac{\pi}{2b_n},$$

y tomando límite, se obtiene

$$\frac{\pi}{2l} = \lim_{n\to\infty} I_n = I_1.$$

Para ver que $I_{n+1} = I_n$ sólo hay que demostrar que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 t + b_n^2 \operatorname{sen}^2 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{(\frac{a+b}{2})^2 \cos^2 u + (ab) \operatorname{sen}^2 u}}. \qquad (*)$$

Para ver esto hacemos la sustitución

$$\operatorname{sen} t = \frac{2a \operatorname{sen} u}{(a+b) + (a-b)\operatorname{sen}^2 u}$$

en la primer integral. Con este cambio resulta

$$dt = \frac{2a((a+b) - (a-b)\operatorname{sen}^2 u)}{((a+b) + (a-b)\operatorname{sen}^2 u)\sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2 \operatorname{sen}^2 u}} du$$

y

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + (b^2 - a^2)\operatorname{sen}^2 t}} = \frac{(a+b) + (a-b)\operatorname{sen}^2 u}{a((a+b) - (a-b)\operatorname{sen}^2 u)}.$$

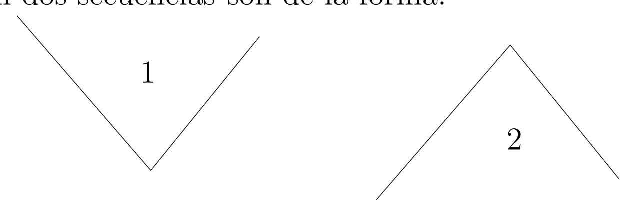
Operando en la integral se obtiene la igualdad $(*)$.

Problema 6. Sea σ una permutación de los n números $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Decimos que

$$k \in \{2, 3, \ldots, n-1\} \text{ es un } \textbf{máximo} \text{ si } \begin{cases} \sigma(k-1) < \sigma(k) \\ \sigma(k+1) < \sigma(k) \end{cases}$$

$k = 1$ es un **máximo** si $\sigma(2) < \sigma(1)$ y
$k = n$ es un **máximo** si $\sigma(n-1) < \sigma(n)$.
Similarmente se define cuando k es un **mínimo**.
Una **secuencia** es el intervalo entre un máximo y un mínimo (σ es decreciente) o entre un mínimo y un máximo (σ es creciente).
Ejemplo: 78125436 tiene tres máximos, 8, 5 y 6, tres mínimos, 7, 1 y 3 y cinco secuencias, 78, 81, 125, 543 y 36.
Sea $p_{n,s}$ el número de permutaciones de n elementos que tienen s secuencias. Calcular $p_{8,5}$, $p_{8,6}$ y $p_{8,7}$.
(Pista: Observar que $p_{n,1} = 2$ para todo n, y que $p_{n,n} = 0$ para todo n. Encontrar una recurrencia para $p_{n,s}$ y luego generar un triángulo similar al caso del triángulo de Pascal.)

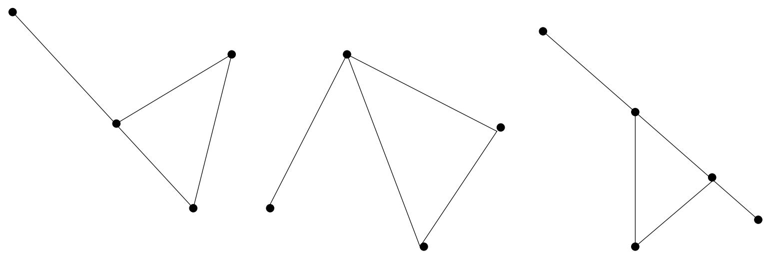
Resolución (realizada por el participante N°13148; *Juan Angel Cappa*; Depto. de Matemática - Univ. Nac. del Sur)
Las permutaciones con dos secuencias son de la forma:



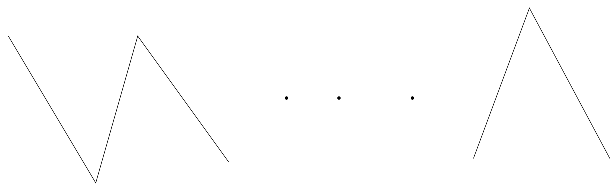
Si es de la forma 1, el vértice inferior debe ser el número 1, luego, para construir una permutación de 2 secuencias hay que elegir un subconjunto propio de $\{2, 3, \cdots, n\}$ no vacío y colocarlo a la izquierda de 1 ordenándolo de manera decreciente. Seguidamente, hay que colocar los números restantes a la derecha de 1 ordenadas de forma creciente.
Luego, $p_{n,2}$ equivale a dos veces la cantidad de subconjuntos propios de un conjunto de $n-1$ elementos (dos veces porque se razona en forma análoga con las permutaciones de la forma 2 y el número n). Esto es que $p_{n,2} = 2[\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} + \cdots + \binom{n-1}{n-2}] = 4(2^{n-2} - 1)$.
Veamos ahora que:

$$p_{n,s} = s p_{n-1,s} + 2 p_{n-1,s-1} + (n-s) p_{n-1,s-2}.$$

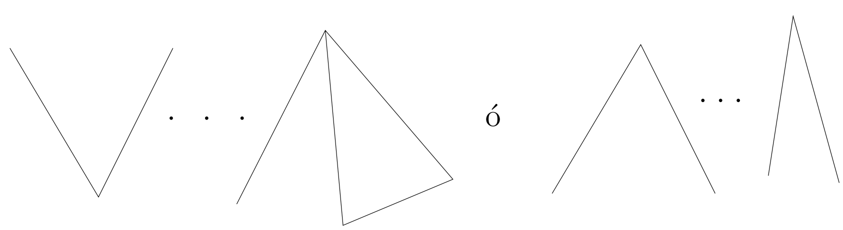
Observemos, primero, que dada una permutación de $n-1$ elementos y k secuencias, al ubicar al 1 en alguna de las n posiciones posibles, se agregarán $0, 1$ ó 2 secuencias. Los ejemplos son:



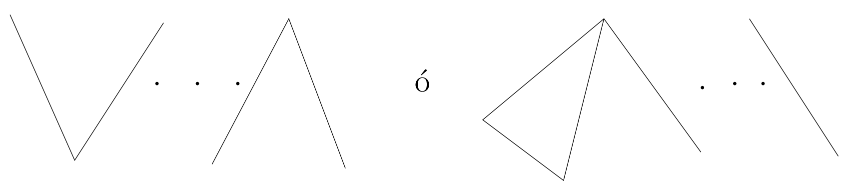
Sea



una permutación arbitraria de $n-1$ elementos y s secuencias, con s impar (consideramos el conjunto de $n-1$ elementos $\{2,\ldots,n\}$).
En la permutación, uno de los extremos es mínimo y, hay además, $\frac{s-1}{2}$ vértices inferiores que también son mínimos. Colocando el 1 en el extremo que tiene un mínimo, se obtiene una permutación de n elementos y s secuencias. Lo mismo ocurre si colocamos el 1 contiguo a cualquiera de los $\frac{s-1}{2}$ vértices inferiores y de cualquiera de los dos lados.
Luego, de cada una de las permutaciones de $n-1$ elementos con s secuencias, se obtienen $2\frac{s-1}{2}+1=s$ permutaciones de n elementos y s secuencias.
Si s es par, o bien, hay dos extremos mínimos y $\frac{s}{2}-1$ vértices inferiores, o bien, no hay extremos mínimos pero hay $\frac{s}{2}$ vértices inferiores. En ambos casos, se obtienen s permutaciones de n elementos y s secuencias por cada permutación de $n-1$ elementos y s secuencias.
Ahora consideremos una permutación de $n-1$ elementos y $s-1$ secuencias.
Si s es par, para construir una permutación de n elementos y s secuencias agregando un 1, hay que ponerlo como indica el esquema, según sea el primer intervalo creciente o decreciente.



Si s es impar, también hay exactamente 2 posibilidades:



Con esto hemos justificado el coeficiente 2 en la fórmula.
El coeficiente $(n-s)$ se justifica observando que, según lo anterior, en una permutación de $n-1$ elementos y $s-2$ secuencias hay $s-2$ posiciones donde ubicar el 1 que no agregan secuencias, 2 posiciones que agregan una secuencia y, por lo tanto, las restantes $n-(s-2)-2=n-s$ posiciones agregarán dos secuencias.
Con esto queda demostrada la fórmula propuesta.
Los cálculos nos dan el siguiente triángulo

$$
\begin{array}{c}
1 \\
2\ 0 \\
2\ 4\ 0 \\
2\ 12\ 10\ 0 \\
2\ 28\ 58\ 32\ 0 \\
2\ 60\ 236\ 300\ 122\ 0 \\
2\ 124\ 836\ 1852\ 1682\ 544\ 0 \\
2\ \ \ldots\ \ 14622\ 10332\ 2770\ \ 0
\end{array}
$$