

XII COMPETENCIA ERNESTO PAENZA

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Problema 1. Para cada número natural n , llamemos $S(n)$ a la suma de los cuadrados de los dígitos de n . Consideremos la sucesión

$$n, S(n), S^{(2)}(n), \dots, S^{(k)}(n), \dots$$

donde $S^{(j)} = \underbrace{S \circ S \dots \circ S}_{j \text{ veces}}$ indica composición. Encuentre todos los valores de n para los cuales existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $S^{(k)}(n) = n$.

Resolución.

Para cada número natural n , el conjunto $C(n) = \{S^{(k)}(n), k = 0, 1, \dots\}$ es un subconjunto de los enteros positivos, y por lo tanto tiene mínimo. Llamemos a este mínimo $m = m(n)$. Estimemos qué tan grande puede ser este mínimo. Escribimos $m = 10^N a_N + \dots + 10^2 a_2 + 10a_1 + a_0$, con $a_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$ y $a_N \neq 0$. Como $S(m)$ también pertenece al conjunto $C(n)$, resulta entonces que

$$10^N \leq m \leq S(m) = \sum_{i=0}^N a_i^2 \leq 9^2(N+1).$$

Se puede ver fácilmente (por inducción, por ejemplo) que $10^N \leq 81(N+1)$ se verifica solamente para $N = 0, 1, 2$. Y como debe cumplirse que $m \leq 81(N+1)$, encontramos nuestra primer cota para m que es $81(2+1) = 243$.

Ahora, es fácil ver que si $m \leq 243$, el máximo valor que puede tomar $S(m)$ es $S(199) = 1 + 9^2 + 9^2 = 163$. Como $m \leq S(m)$, resulta que $m \leq 163$. Por último, si m tiene tres dígitos y es menor o igual que 163, entonces $S(m) \leq S(159) = 1 + 25 + 81 = 107$. Luego, hemos acotado mejor el mínimo.

Con esta información podemos resolver el problema: si $S^{(k)}(n) = n$ para algún k , entonces la sucesión

$$n, S(n), S^{(2)}(n), \dots, S^{(j)}(n), \dots$$

es periódica, y tanto n como $S(n), S^{(2)}(n), \dots$ cumplen la propiedad que cumple n . Entre alguno de éstos está el mínimo de $C(n)$ que ya sabemos que es menor o igual que 107, así que alcanza con estudiar cuáles de las sucesiones que comienzan con m para $m = 1, 2, \dots, 107$ y para las cuales $S(m) \geq m$, son periódicas.

Obviamente que $S(m)$ depende solamente de los dígitos de m así que no hace falta verificar los 107 números. Por otro lado, si $S(m) = m'$, entonces la sucesión que comienza en m' está contenida en la sucesión que comienza en m .

Con estas observaciones, listamos las sucesiones comenzando desde $m = 1$ y terminando cuando aparece alguna periodicidad, o algún número que se encuentra (él o alguna permutación de sus cifras con eventualmente algún cero intercalado) en una sucesión previamente listada.

- $1 \rightarrow 1$. Periódica.
- $2 \rightarrow 4 \rightarrow 16 \rightarrow 37 \rightarrow 58 \rightarrow 89 \rightarrow 145 \rightarrow 42 \rightarrow 20 \rightarrow 4$. Periódica comenzando en 4.
- $3 \rightarrow 9 \rightarrow 81 \rightarrow 65 \rightarrow 61 \rightarrow \boxed{37}$.
- $5 \rightarrow 25 \rightarrow 29 \rightarrow 85 \rightarrow \boxed{89}$.
- $6 \rightarrow 36 \rightarrow 45 \rightarrow 41 \rightarrow 17 \rightarrow 50 \rightarrow \boxed{25}$.
- $7 \rightarrow 49 \rightarrow 97 \rightarrow 130 \rightarrow 10 \rightarrow \boxed{1}$.
- $8 \rightarrow 64 \rightarrow 52 \rightarrow \boxed{29}$.
- $11 \rightarrow \boxed{2}$.
- $12 \rightarrow \boxed{5}$.
- $15 \rightarrow 26 \rightarrow \boxed{40}$.
- $19 \rightarrow 82 \rightarrow 68 \rightarrow \boxed{100}$.
- $22 \rightarrow \boxed{8}$.
- $23 \rightarrow \boxed{13}$.
- $27 \rightarrow 53 \rightarrow 34 \rightarrow \boxed{25}$.
- $33 \rightarrow \boxed{18}$.
- $38 \rightarrow \boxed{73}$.
- $39 \rightarrow \boxed{90}$.
- $44 \rightarrow \boxed{32}$.
- $47 \rightarrow \boxed{65}$.
- $48 \rightarrow \boxed{80}$.
- $55 \rightarrow \boxed{50}$.
- $57 \rightarrow \boxed{74}$.

- $59 \rightarrow \boxed{106}$.
- $66 \rightarrow \boxed{72}$.
- $67 \rightarrow \boxed{85}$.
- $77 \rightarrow \boxed{98}$.
- $78 \rightarrow 113 \rightarrow 11 \rightarrow \boxed{2}$.
- $88 \rightarrow 128 \rightarrow \boxed{69}$.

Respuesta: Los números que verifican las condiciones del enunciado son 1, 4, 16, 37, 58, 89, 145, 42 y 20.

Problema 2. Decida si existe

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k}.$$

En caso afirmativo, calcúlelo. Si no, explique su respuesta.

Resolución.

Llamemos $a_n := \frac{n}{2^n} \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k}$. Entonces se tiene

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k} = \frac{1}{2} \frac{n}{2^n} \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k} + \frac{n}{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k} \\ &= \frac{1}{2} a_n + \frac{n}{n+1} + b_{n+1}, \end{aligned} \tag{1}$$

donde $b_n := \frac{a_n}{n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k}$.

Estudiemos la convergencia de $\{b_n\}_{n \geq 1}$. Se tiene $b_n \geq 0$, $\forall n$, y además

$$b_{n+1} - b_n = \frac{b_n}{2} + \frac{1}{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} - \frac{b_n}{2}.$$

Por otro lado, de la definición de b_n , se puede deducir la siguiente cota inferior:

$$b_n \geq \frac{1}{n2^n} (2 + 4 + \cdots + 2^n) = \frac{2(2^n - 1)}{n2^n} = \frac{2}{n} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Luego,

$$\frac{1}{n+1} - \frac{b_n}{2} \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n2^n} = \frac{n+1-2^n}{n(n+1)2^n} \leq 0$$

si $n \geq 1$. Esto dice que la sucesión $\{b_n\}_{n \geq 1}$ decrece, y como está acotada inferiormente por 0, tiene límite. Este límite es fácil de calcular, ya que se tiene $b_{n+1} = \frac{b_n}{2} + \frac{1}{n+1}$. Si $l := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, entonces debe valer $l = \frac{l}{2} + 0$, es decir $l = 0$.

Con esta información, y usando la relación dada en (1), ya podemos decir que, si existe ℓ , entonces tiene que verificarse la siguiente relación $\ell = \frac{\ell}{2} + 1 + 0$, es decir que ℓ tiene que valer 2.

Veamos que existe el límite. Como $\{a_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión de números positivos, alcanza con ver que es decreciente a partir de algún momento. Calculamos

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n}{n+1} + b_{n+1} - \frac{a_n}{2}.$$

Veamos que el miembro derecho de esta igualdad es negativo para n suficientemente grande. Esto es equivalente a probar que

$$\frac{n}{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k} \leq \frac{n}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k}.$$

Operamos elementalmente sobre esta última desigualdad, y tenemos las siguientes desigualdades equivalentes:

$$\begin{aligned}\frac{n2^{n+1}}{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k} &\leq \frac{n}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k} \\ \frac{n2^{n+1}}{n+1} + \frac{2^{n+1}}{n+1} &\leq (n-1) \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k} \\ 2^{n+1} &\leq (n-1) \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k}.\end{aligned}$$

Demostremos que esta última desigualdad es verdadera para $n \geq 4$, por inducción.

Para $n = 4$, ambos miembros dan 32, así que la desigualdad es verdadera. Supongamos válida la desigualdad para $n > 4$, y demostremos que vale también para $n + 1$. Se tiene

$$n \sum_{k=1}^{n+1} \frac{2^k}{k} = (n-1) \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k} + \frac{n2^{n+1}}{n+1} \geq 2^{n+1} + \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k} + \frac{n2^{n+1}}{n+1},$$

donde la última desigualdad vale por hipótesis inductiva. El paso inductivo estará terminado si conseguimos probar que vale $\sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k} + \frac{n2^{n+1}}{n+1} \geq 2^{n+1}$, que es equivalente a $\sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k} \geq \frac{2^{n+1}}{n+1}$. Acotamos el extremo izquierdo de esta desigualdad de la manera siguiente:

$$\sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k} \geq \frac{2 + 4 + \cdots + 2^n}{n} = \frac{2^{n+1} - 2}{n}.$$

De aquí es fácil concluir, ya que $\frac{2^{n+1}-2}{n} \geq \frac{2^{n+1}}{n+1}$ es equivalente a $2^{n+1} \geq 2(n+1)$, desigualdad que es trivialmente verdadera para todo entero positivo n .

Luego, hemos probado que la sucesión $\{a_n\}_{n \geq 1}$ es decreciente a partir de $n = 4$, y por tratarse de una sucesión de números positivos, debe tener límite.

Respuesta: Existe ℓ y es igual a 2.

Problema 3. Sea f un polinomio con coeficientes enteros. Supongamos que existen números enteros distintos $x_1, \dots, x_n$ tales que

$$\begin{cases} f(x_i) = x_{i+1} & i = 1, \dots, n-1 \\ f(x_n) = x_1 \end{cases}$$

Pruebe que $n = 1$ o $n = 2$.

Resolución.

Para $n = 1$ tomamos $f(x) = x$ y la propiedad vale para todo entero x_1 . Para $n = 2$, sea $f(x) = x^2 + x - 2$. Entonces se tiene $f(0) = -2$ y $f(-2) = 0$. Así que n puede valer 1 o 2.

Veamos que n no puede ser mayor que 2. Haciendo el desarrollo de Taylor de $f(x)$ alrededor de y , vale la siguiente identidad:

$$f(x) - f(y) = (x - y)Q(x, y), \forall x, \forall y,$$

donde $Q(x, y)$ es un polinomio en dos variables con coeficientes enteros. De acuerdo con las hipótesis del enunciado, y como $n \geq 3$, se tienen las siguientes n identidades:

$$\begin{aligned} x_2 - x_3 &= f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)Q(x_1, x_2) \\ x_3 - x_4 &= f(x_2) - f(x_3) = (x_2 - x_3)Q(x_2, x_3) \\ \dots &\dots \dots \\ x_n - x_1 &= f(x_{n-1}) - f(x_n) = (x_{n-1} - x_n)Q(x_{n-1}, x_n) \\ x_1 - x_2 &= f(x_n) - f(x_1) = (x_n - x_1)Q(x_n, x_1). \end{aligned} \tag{2}$$

Multiplicando todas las expresiones que se encuentran a la izquierda e igualando con el producto de todas las expresiones que se encuentran a la derecha, se concluye que

$$Q(x_1, x_2)Q(x_2, x_3) \dots Q(x_{n-1}, x_n)Q(x_n, x_1) = 1.$$

Como Q es un polinomio con coeficientes enteros, y los x_i son números enteros, entonces cada uno de estos factores es igual a ± 1 . Si $Q(x_i, x_{i+1}) = -1$, para $i \leq n-2$, entonces se tendría $x_{i+1} - x_{i+2} = x_{i+1} - x_i$, o sea $x_{i+2} = x_i$, lo cual no puede ser ya que supusimos que todos los x_i son distintos. Con el mismo razonamiento se ve que $Q(x_{n-1}, x_n)$ y $Q(x_n, x_1)$ valen 1.

Luego, de (2) se tiene que $x_1, x_2, \dots, x_n$ satisfacen el siguiente sistema lineal homogéneo de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \\ \dots &\dots \\ x_{n-1} - 2x_n + x_1 &= 0 \\ x_n - 2x_1 + x_2 &= 0, \end{cases}$$

es decir, cada x_i es el promedio de otros dos x_j distintos. Sea j_0 tal que $x_{j_0} = \max\{x_j, j = 1, \dots, n\}$. Claramente, $x_{j_0} > x_j$ si $j \neq j_0$, luego es imposible que sea el promedio de dos x_j distintos. Esto demuestra que es imposible que sea $n > 2$.

Problema 4. Sea f un polinomio con coeficientes complejos. Si P es un polígono convexo que contiene a todas las raíces de f , pruebe que P contiene también a todas las raíces de f' .

Resolución.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que f es mónico. Sean $z_1, z_2, \dots, z_r$ las raíces complejas de f . Entonces, existen enteros positivos $a_1, \dots, a_r$ tales que

$$f(z) = (z - z_1)^{a_1} \dots (z - z_r)^{a_r}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Sea z_0 un punto que no se encuentra en P . Como P es un conjunto convexo, existe una recta que llamaremos L que pasa por z_0 y que no corta a P . Sea $v_L = (a_L, b_L) \in \mathbb{R}^2$ el vector unitario que es normal a la dirección de L y que “apunta” para el semiplano donde se encuentra P .

Demostremos ahora que z_0 no puede ser una raíz de f' . Como $z_1, z_2, \dots, z_r$ se encuentran en P , entonces el producto interno $\langle z_i - z_0, v_L \rangle$ tiene que ser estrictamente positivo para todo $i = 1, \dots, r$. Claramente z_0 no es una raíz de f (ya que no se encuentra en P), así que tiene sentido calcular la derivada de $\log(f)$ y evaluarla en z_0 :

$$\frac{f'(z_0)}{f(z_0)} = \sum_{j=1}^r \frac{a_j}{z_0 - z_j} = \sum_{j=1}^r \frac{a_j}{|z_0 - z_j|^2} \overline{(z_0 - z_j)} = \sum_{j=1}^r -\frac{a_j}{|z_0 - z_j|^2} \overline{(z_j - z_0)}.$$

Si $f'(z_0)$ fuera cero, entonces la suma del miembro derecho sería también cero, y el producto escalar de este número complejo contra cualquier otro vector de $\mathbb{R}^2$ tiene que dar idénticamente cero. Pero como $\langle z_i - z_0, (a_L, b_L) \rangle = \langle \overline{z_i - z_0}, (a_L, -b_L) \rangle$ es estrictamente positivo, entonces

$$\left\langle \frac{f'(z_0)}{f(z_0)}, (a_L, -b_L) \right\rangle = \sum_{j=1}^r -\frac{a_j}{|z_0 - z_j|^2} \langle \overline{(z_j - z_0)}, (a_L, -b_L) \rangle.$$

Se ve claramente que el miembro derecho es una suma de números reales estrictamente negativos, así que nunca puede dar cero. La contradicción provino de suponer que $f'(z_0) = 0$, así que afuera de P no hay raíces de f' .

Problema 5.

- i. ¿Cuántos lados puede tener un polígono regular en $\mathbb{R}^2$ si todos sus vértices tienen coordenadas enteras?
- ii. Consideremos ahora polígonos en $\mathbb{R}^3$, es decir polígonos contenidos en un plano de $\mathbb{R}^3$. ¿Cuántos lados puede tener un polígono regular en $\mathbb{R}^3$ si todos sus vértices tienen coordenadas enteras?

Resolución.

- i. Sea n el número de lados del polígono regular (o sea, el número que estamos queriendo calcular), y $p_1, p_2, \dots, p_n$ los vértices del mismo ordenados en el sentido contrario a las agujas del reloj.

Sea O El promedio de todos los vértices, es decir $O = \frac{p_1 + \dots + p_n}{n}$. Se puede comprobar fácilmente que O , por ser el centro de gravedad de un polígono regular, es además el centro de la circunferencia que pasa por todos los vértices. De la definición de O se desprende que $O \in \mathbb{Q}^2$. Si trasladamos O al origen nos queda un polígono con vértices racionales y centro en $(0, 0)$.

Supongamos entonces sin pérdida de generalidad que nuestro polígono tiene vértices racionales y está centrado en $(0, 0)$. Escribiendo a los vectores como números complejos, resulta que $p_j = a_j + ib_j \in \mathbb{Q}[i]$, $j = 1, 2, \dots, n$ y además $p_j e^{\frac{2\pi i}{n}} = p_{j+1}$, $j = 1, \dots, n-1$. Como p_j y p_{j+1} son elementos de $\mathbb{Q}[i]$, resulta que entonces $e^{\frac{2\pi i}{n}} \in \mathbb{Q}[i]$.

Este número complejo es además una solución de la ecuación $X^n - 1 = 0$, y además es una fracción de elementos de $\mathbb{Z}[i]$, que es un dominio de factorización única. Podemos entonces aplicar el lema de Gauss para detectar las raíces “racionales” del polinomio $X^n - 1$. Escribiendo $e^{\frac{2\pi i}{n}} = \frac{a}{b}$, con $a, b \in \mathbb{Z}[i]$ coprimos, resulta que tanto a como b tienen que ser divisores de ± 1 . Los únicos divisores de ± 1 en $\mathbb{Z}[i]$ son $\pm 1, \pm i$. Así que las posibilidades son cuatro:

- (i) $e^{\frac{2\pi i}{n}} = \pm 1$. Esto solo puede pasar si $n = 1, 2$ y no hay polígonos con menos de dos lados.
- (ii) $e^{\frac{2\pi i}{n}} = i$. Esto ocurre cuando $n = 4$, y el cuadrado unitario $[0, 1] \times [0, 1]$ es un ejemplo de tal polígono.
- (iii) $e^{\frac{2\pi i}{n}} = -1$. Esto ocurre cuando $n = \frac{4}{3}$, por lo tanto no hay aquí polígono posible.

Respuesta: El único valor posible para n es 4.

- ii. Como antes, supongamos sin pérdida de generalidad que el centro de gravedad del polígono está centrado en $(0,0,0)$ y que los vértices tienen coordenadas racionales y están ordenados de acuerdo a alguna orientación dentro del plano que los contiene. Entonces, se tiene que $\cos(\frac{2\pi}{n}) = \frac{\langle p_j, p_{j+1} \rangle}{\|p_i\|^2} \in \mathbb{Q}$, cualquiera sea $j = 1, 2, \dots, n-1$. Sea $z = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Luego, $\cos(\frac{2\pi}{n}) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$, y $z^n + \frac{1}{z^n} = 2$.

Los siguientes resultados nos serán de utilidad más adelante:

- **Proposición 1:** Si $n = qr$, con $p, q \in \mathbb{N}_{>1}$ y existe un polígono regular de n lados cumpliendo la propiedad del enunciado, entonces también existe un polígono regular de q lados cumpliendo la propiedad del enunciado.

Prueba: En efecto, si $p_1, \dots, p_{qr}$ son los vértices orientados del polígono regular, entonces se puede ver fácilmente que $p_r, p_{2r}, \dots, p_{qr}$ son los vértices de un polígono regular de q lados. $\square$

- **Proposición 2:** Para todo n entero no negativo, existe un polinomio $P_n(X)$ mónico, de grado n y con coeficientes enteros tal que $P(Z + \frac{1}{Z}) = Z^n + \frac{1}{Z^n}$.

Prueba: Por inducción en n . Para $n = 0$ $P_1(X) = 1$ sirve. Tomemos ahora $Z^{n+1} + \frac{1}{Z^{n+1}}$, y escribamos

$$\begin{aligned} Z^{n+1} + \frac{1}{Z^{n+1}} &= Z^{n+1} + \frac{1}{Z^{n+1}} - \left(Z + \frac{1}{Z}\right)^{n+1} + \left(Z + \frac{1}{Z}\right)^{n+1} = \\ &= \left(Z + \frac{1}{Z}\right)^{n+1} - \sum_{j=1}^n \binom{n+1}{j} Z^j \frac{1}{Z^{n+1-j}} = \\ &= \left(Z + \frac{1}{Z}\right)^{n+1} - \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n+1}{j} \left(Z^{n+1-2j} + \frac{1}{Z^{n+1-2j}}\right) = \\ &= \left(Z + \frac{1}{Z}\right)^{n+1} - \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n+1}{j} P_{n+1-2j}\left(Z + \frac{1}{Z}\right), \end{aligned}$$

donde la última igualdad vale por hipótesis inductiva, ya que $n+1-2j < n+1$ si $j \geq 1$. Luego, $P_n(X) = X^{n+1} - \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n+1}{j} P_{n+1-2j}(X)$ cumple con lo pedido. $\square$

Calculemos el término independiente de $P_n(X)$. Como $P_n(Z + \frac{1}{Z}) = Z^n + \frac{1}{Z^n}$, entonces

$$P_n(0) = P_n\left(i + \frac{1}{i}\right) = i^n + \frac{1}{i^n} = i^n + (-i)^n = \begin{cases} 2 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \\ 0 & \text{si } n \equiv 1 \pmod{2} \\ -2 & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \end{cases}$$

Con toda esta información, evaluamos P_n en z , y resulta que $P_n(2X) - 2$ es una ecuación polinomial con coeficientes enteros, una de cuyas raíces es $\cos(\frac{2\pi}{n})$. Como P_n es mónico, entonces el coeficiente principal de $P_n(2X) - 2$ es 2^n . Por otro lado, el término independiente de este polinomio es $0, -2, -4$ dependiendo de la congruencia de n módulo 4. Consideremos dos casos:

- (i) Si $n \not\equiv 0 \pmod{4}$, entonces el término independiente de $P_n(2X) - 2$ también es una potencia de 2. Luego, aplicando el lema de Gauss a $\cos(\frac{2\pi}{n})$ resulta que, si este número es racional, debe ser igual a $\pm \frac{1}{2^j}$ para algún $j = 0, 1, \dots$. Como $\cos(\frac{2\pi}{n})_{n \rightarrow \infty} \nearrow 1$, hay finitos casos por verificar, y se puede ver que los únicos

valores de $n \not\equiv 0 \pmod{4}$ posibles son 1, 2, 3 y 6. Los dos primeros valores no son soluciones posibles de nuestro problema.

- Los vectores canónicos de $\mathbb{R}^3$ son vértices de un triángulo equilátero, así que $n = 3$ es posible.
- Calculando el baricentro del triángulo equilátero del caso anterior, y agregando los vértices opuestos con respecto a este baricentro se puede conseguir un hexágono regular con coordenadas racionales. Reescalando este hexágono es posible que todas sus coordenadas sean enteras. En nuestro caso, obtenemos los siguientes puntos

$$(3, 0, 0), (2, 2, -1), (0, 3, 0), (-1, 2, 2), (0, 0, 3), (2, -1, 2),$$

que están en el plano $x + y + z = 3$ y son los vértices de un hexágono regular. Así que $n = 6$ es posible.

(ii) Si $n = 4k$, con $k \in \mathbb{N}$, hay varios casos por considerar:

- $k = 1$ es un caso posible, ya que los puntos $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(1, 1, 0)$ son los vértices de un cuadrado.
- Si $k > 1$ y tiene algún divisor impar distinto de 3, entonces por la Proposición 1 este valor de n no puede ser posible.
- Si $k > 1$ y tiene algún divisor par, entonces por la Proposición 1 debería poder construirse un polígono regular de 8 lados con vértices racionales. Pero eso implicaría que $\cos(\frac{2\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \in \mathbb{Q}$. Absurdo.
- Solo resta considerar el caso $k = 3$, es decir $n = 12$. Pero como antes, si el polígono de 12 lados pudiera construirse, entonces $\cos(\frac{2\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{Q}$. Absurdo

Respuesta: En este caso, los valores posibles para n son 3, 4 y 6.