Competencia Matemática E. Paenza

Séptima Realización — 1992

Problema 1. Sea H el conjunto de vectores con coeficientes enteros, $H \subset \mathbb{Z}^{n+1}$,

$$H = \{(z_0, z_1, \ldots, z_n) \ : \ z_0 = 0, \ |z_{i+1} - z_i| = 1, \ i = 0, 1, \ldots, n-1\}$$

Dos puntos de H son *vecinos* si difieren en una única coordenada (por ejemplo $(0,1,2,3,2)$ y $(0,1,2,1,2)$). Dados dos puntos cualesquiera de H, demostrar que es posible ir de uno al otro moviéndose siempre de un punto a un punto vecino.

Resolución. Publicamos dos soluciones que tienen su interés. La solución a) o variantes de ella fue encontrada por muchos participantes. La solución b) es única.

Observemos primero que debido a que la relación de vecino es simétrica, basta con demostrar que fijando un punto particular $p \in H$, puede llegarse desde cualquier otro punto a p o viceversa. Hecha esta observación:

a) Solución de *Gabriel Kreiman* y *Alejandro Backer* de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires.

Sea $p = (0, -1, -2, \ldots, -n)$. $(P_i = -i)$. Dado un punto arbitrario $a = (z_0, z_1, \ldots, z_n)$, sea $k = \text{maximo}\,\{j \mid z_j \geq z_i \ \forall i\}$. Si $z_k = 0$, $k = 0$, entonces $a = p$ y ya hemos llegado. Si no, el punto $b = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $x_i = z_i$, $i \neq k$, $x_k = z_k - 2$, que es vecino de a , también está en H . En efecto, $z_{k-1} = z_{k+1} = z_k - 1$, de donde $x_{k-1} = x_{k+1} = x_k + 1$. Luego $|x_{i+1} - x_i| = 1$ para $i = k-1$, k (para los demás valores de i la condición se satisface pues las coordenadas de b son las mismas que las de a). Puedo pasar de a a b . Ahora pongo $a = b$ y repito el procedimiento. En cada paso se reduce el valor de una coordenada. Como las coordenadas no pueden decrecer indefinidamente, en un número finito de pasos el procedimiento debe trabarse. Es decir, se da el caso $z_k = 0$, $k = 0$, y hemos llegado a p .

b) Solución de *Miguel Barrio* del Instituto Balseiro de la Universidad Nacional de Cuyo.

Sea $a = (z_0, z_1, \ldots, z_n) \in H$. Entonces $z_{i+1} = z_i + x_i$ con $x_i = 1$ o $x_i = -1$. Esto define una biyección entre H y el conjunto $\widetilde{H} = \{\tilde{a} = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \mid x_i = 1 \text{ o } x_i = -1\}$. ¿Qué puntos son vecinos de a ? Si cambiamos x_{n-1} obtenemos un punto vecino porque el cambio sólo modifica la coordenada z_n de a . Otra forma de obtener un vecino es trasponer dos coordenadas adyacentes de $\tilde{a}$. En efecto, si $x'_k = x_{k+1}$, $x'_{k+1} = x_k$, se tiene

$z_i = z'_i$, $i \leq k$, $z'_{k+1} = z'_k + x'_k = z_k + x_{k+1}$, $z'_{k+2} = z'_{k+1} + x'_{k+1} = z_k + x_{k+1} + x_k = z_{k+1} + x_{k+1} = z_{k+2}$. Y después $z'_i = z_i$, $i \geq k+2$. Partamos de $p = (0, 1, \ldots, n)$, $(p_i = i)$. Se tiene $\tilde{p} = (1, 1, \ldots, 1)$. Para llegar a un a arbitrario, basta con crear un -1 en el último lugar de $\tilde{p}$, y llevarlo por transposiciones adyacentes sucesivas a la posición donde aparece el primer -1 de $\tilde{a}$, y así sucesivamente hasta colocar todos los -1 de $\tilde{a}$.

Problema 2. Determinar si la ecuación $\operatorname{sen}(x^2+x)=\operatorname{sen}x^2+\operatorname{sen}x$ tiene solución en el intervalo $[2,\,3]$.

Resolución. Publicamos dos soluciones. La solución a) nos gusta por su simpleza. La solución b) demuestra un poco más que lo pedido.

a) Solución de *Horacio Casini* del Instituto Balseiro de la Universidad Nacional de Cuyo.

Como $4<2\pi<9$, se sigue que $\sqrt{2\pi}\in[2,3]$. Si $x=\sqrt{2\pi}$, la ecuación queda:

$$\operatorname{sen}(2\pi+\sqrt{2\pi})=\operatorname{sen}(2\pi)+\operatorname{sen}(\sqrt{2\pi}),$$

que se verifica pues $\operatorname{sen}(2\pi)=0$ y seno es una función periódica de período 2π .

b) Solución de *Rodolfo Romero* y *Luaciano Mota* de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura de la Universidad Nacional de Corrientes.

$$\operatorname{sen}(x^2+x)=\operatorname{sen}x^2+\operatorname{sen}x \quad\Leftrightarrow\quad (\text{usando } \operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cos\alpha\ )$$

$$\operatorname{sen}x^2\cos x+\cos x^2\operatorname{sen}x=\operatorname{sen}x^2+\operatorname{sen}x \quad\Leftrightarrow$$

$$\operatorname{sen}x^2(1-\cos x)+\operatorname{sen}x(1-\cos x^2)=0 \quad\Leftrightarrow\quad (\text{ usando que } 1-\cos\alpha=2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}\ )$$

$$2\operatorname{sen}x^2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}+2\operatorname{sen}x\operatorname{sen}^2\frac{x^2}{2}=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2}\left(\operatorname{sen}x^2\operatorname{sen}\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}\operatorname{sen}^2\frac{x^2}{2}\right)=0 \qquad \text{(a)}$$

Como $\operatorname{sen}\frac{x}{2}\neq 0$, $\forall x\in[2,3]$ la igualdad (a) se verifica si y sólo si

$$\operatorname{sen}x^2\operatorname{sen}\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}\operatorname{sen}^2\frac{x^2}{2}=0 \quad\Leftrightarrow\quad (\text{usando que } \operatorname{sen}\alpha=2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\ )$$

$$2\operatorname{sen}\frac{x^2}{2}\cos\frac{x^2}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}+2\cos\frac{x}{2}\operatorname{sen}^2\frac{x^2}{2}=0$$

$$2\operatorname{sen}\frac{x^2}{2}\left[\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x^2}{2}+\cos\frac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{x^2}{2}\right]=0$$

i) $\operatorname{sen}\frac{x^2}{2}=0$.

ii) $\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x^2}{2}+\cos\frac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{x^2}{2}=0$

i) $\dfrac{x^2}{2} = \pi \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{2\pi}$ (la solución encontrada por Horacio Casini)

ii) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{2} = n\pi \quad (\ n \in \mathbb{Z}\ )$

$$\Rightarrow \quad x^2 + x - 2n\pi = 0$$

Para $n = 0$, se tiene $x = 0$ o $x = -1$ que no pertenecen a $[2, 3]$.

Para $n = 1$, $x^2 + x - 2\pi = 0$ tiene como solución

$$x_0 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8\pi}}{2}$$

y como $3 < \pi < 6$

$$2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8 \cdot 3}}{2} < x_0 < \frac{-1 + \sqrt{1 + 8 \cdot 6}}{2} = 3$$

se sigue que $x_0 \in [2, 3]$ y satisface la ecuación.

Problema 3. Calcular $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\binom{n}{5}}$.

Resolución. Publicamos dos soluciones. La solución a) sirve para el caso general de un entero arbitrario " k " en lugar de " 5 ". La técnica de fracciones simples de la solución b) fue utilizada por varios participantes.

a) Solución de *Pablo Parrillo* y *Pablo Anigstein* de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\binom{n}{5}} &= 5!\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} = \\
&= 5!\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)} = \\
&= 5!\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{5}\left\{\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)}\right\} = \\
&= 5!\frac{\frac{1}{5}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

b) Solución de *Jorge Pellicer* y *José Luis Rodríguez* de la Facultad de Ingeniería d la Universidad de San Juan.

$$\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\binom{n}{5}} = 5!\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)} = 5!\sum_{n=5}^{\infty} f(n)$$

Descomponiendo en fracciones simples, se obtiene:

$$f(n) = \frac{1}{5!}\left(\frac{1}{n-4} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-3}\right) + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right)$$

(por ejemplo, el coeficiente de $\dfrac{1}{5!}$ de $\dfrac{1}{n-4}$ se puede calcular como el límite $\displaystyle\lim_{n\to 4}(n-4)f(n)$).

Por lo tanto,

$$\sum_{n=5}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\binom{n}{5}}=\sum_{n=5}^{\infty}\left(\frac{1}{n-4}-\frac{1}{n+1}\right)-5\sum_{n=5}^{\infty}\left(\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n}\right)+10\sum_{n=5}^{\infty}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)=$$
$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-5\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\frac{10}{3}=\frac{1}{5}.$$

Problema 4. Sean $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua no decreciente (si $x \le y$ entonces $f(x) \le f(y)$) y $\{c_n\}_{n\ge 0}$ una sucesión de números reales estrictamente positivos. Sea $a \in \mathbb{R}$ cualquiera y $\{x_n\}_{n\ge 0}$ una sucesión que satisface la relación: $x_0 = a$, $x_n = x_{n+1} + c_n \cdot f(x_{n+1})$.

Demuestre:

a) Si f tiene algún cero, entonces x_n es convergente.

b) Si además la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ diverge, entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ es un cero de f .

Resolución. (Solución de *Maximiliano Benedectti* y *Máximo Carreras* de la Facultad de Matemática, Astronomía y Física de la Universidad de Córdoba).

a) Sea ξ tal que $f(\xi) = 0$.

Supongamos que para algún n , $x_n > x_{n+1}$ entonces,

$$c_n - f(x_{n+1}) > 0 \ \Rightarrow\ f(x_{n+1}) > 0 \ \Rightarrow\ x_{n+1} > \xi \ \text{(pues } f \text{ es no decreciente)}$$

luego,

$$x_n > x_{n+1} > \xi.$$

Ahora, si consideramos $x_{n-1} = x_n + c_{n-1} f(x_n)$, como $x_n > \xi$, tenemos $f(x_n) \ge 0$ y luego $x_{n-1} \ge x_n$. Siguiendo este razonamiento resulta

$$a_0 = x_0 \ge x_1 \ge x_2 \ge \cdots \ge x_n > x_{n+1} > \xi.$$

Por el mismo razonamiento si, para algún n , $x_n < x_{n+1}$ se llegaría a que

$$a_0 = x_0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n < x_{n+1} < \xi.$$

Observación. $\{x_n\}$ es monótona.

Prueba. Si no, existen n y k tales que $x_n < x_{n+1}$ y $x_k > x_{k+1}$, pero, por lo probado anteriormente resultaría $x_0 < \xi$ y $x_0 > \xi$; absurdo.

Uniendo la afirmación con lo demostrado anteriormente se tiene “ $\{x_n\}$ es monótona y acotada”, entonces $\{x_n\}$ es convergente.

b) Si $\{x_n\}$ es constante, $x_{n-1} = x_n + c_{n-1} f(x_n)$ implica que $f(x_n) = 0$ y entonces $f(\lim_{n\to\infty} x_n) = 0$.

Sabemos por lo anterior que $\{x_n\}$ es monótona. Supongamos que es monótona creciente (no constante). Entonces $x_n < \xi \Rightarrow f(x_n) = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Además,

$$x_n = x_{n+1} + c_n f(x_{n+1}), \forall n \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n} x_{i+1} + \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_{i+1})$$

luego

$$x_{n+1} - x_0 = \sum_{i=0}^{n} c_i (-f)(x_{i+1}) \geq (-f)(x_{n+1}) \sum_{i=0}^{n} c_i,$$

pues $-f$ es decreciente y entonces

$$(-f)(x_i) \geq (-f)(x_{n+1}),\ i = 0, 1, \ldots, n.$$

Notemos que $-f(x_n) \geq 0$, $\forall n$ y $(-f)$ continua. Sea $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, tenemos

$$-f(x_{n+1}) \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \right) \leq x_{n+1} - x_0 \leq \ell - x_0$$

y entonces

$$0 \leq -f(x_{n+1}) \leq \frac{\ell - x_0}{\sum_{i=1}^{n} c_i} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} (-f)(x_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-f)(\ell) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(\ell) = 0.$$

Problema 5. Dos números racionales x , y se dicen *ligados* si

$$x \cdot y = -1 \qquad \text{o bien si} \qquad |x - y| = 2.$$

Demuestre que para todo número racional q , existen $n \in \mathbb{N}$ y números racionales $q_0, \ldots, q_n$ tales que

$$\begin{cases} q_0 = 0 \quad \text{o} \quad q_0 = 1 \\ q_i \ \text{ y } \ q_{i+1} \ \text{ están ligados para todo } i = 0, 1, \ldots, n-1 \\ q_n = q \end{cases}$$

Resolución. (Solución de *Marcelo Coutelier* y *Carlos Morán* de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad de Tucumán).

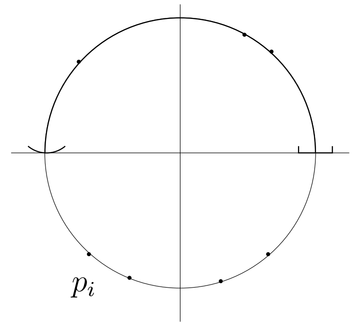
Para cada racional q , sea $\{u_i\}$ la sucesión definida por:

$$u_0 = q, \qquad u_{i+1} = \begin{cases} (1) \ : \ u_i - 2 & \text{si } 1 < u_i < +\infty \\ (2) \ : \ -\dfrac{1}{u_i} & \text{si } -1 < u_i < 1,\ u_i \neq 0 \\ (3) \ : \ u_i + 2 & \text{si } -\infty < u_i < -1 \\ (4) \ : \ u_i & \text{si } u_i = 0 \ \text{ o } \ u_i = 1 \end{cases}$$

Es evidente que u_i y u_{i+1} o están ligados o son iguales ($= 0$ o a 1). Si $u_i \neq 0$ o 1 , sean $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ tales que $u_i = \dfrac{a_i}{b_i} = 1$ (fracción irreducible) y $b_i > 0$. Sea $c_i = |a_i| + |b_i|$. Puede verse fácilmente que en los casos (2) y (3) $|a_i|$ decrece y $|b_i|$ se mantiene igual. Pero en el término siguiente ya no estamos en este caso, y se pasa a los casos (1) o (3). Entonces c_i decrece *al menos* una vez cada dos términos. Si u_i fuese siempre distinto de 0 o 1 , se obtendría una (sub)sucesión estrictamente decreciente de números naturales, lo cual es absurdo. Sea entonces k el primer índice tal que $u_k = 0$ o $u_k = 1$. Invirtiendo la sucesión $\{u_0 u_1 \ldots u_k\}$ se tiene la sucesión cuya existencia se quiere demostrar.

Problema 6. Se tienen n puntos p_1 , $p_2, \ldots, p_n$ en la circunferencia unidad C y n enteros no nulos $k_1, \ldots, k_n$.

Demuestre que existe un número real $\theta \geq 0$ tal que si cada punto p_i gira un ángulo $k_i \cdot \theta$, entonces al menos la mitad de los puntos (es decir $n/2$ si n es par o $(n+1)/2$ si n es impar), cae en la semicircunferencia superior $C^+ = \{p \in C \ : \ 0 \leq \arg(p) < \pi\}$.



Resolución. (Solución de *Germán Muller* y *Guillermo Muller* de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad de Rosario).

Fijemos P_i sobre la circunferencia unidad, $1 \leq i \leq n$.

Para cada $\theta \in [0, 2\pi]$ rotamos P_i en un ángulo $\theta_i + k_i\theta$.

Definimos:

$$f_i(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si el resultante cae en } C^+ \text{ (semicircunferencia superior)} \\ -1 & \text{si no.} \end{cases}$$

Haciendo variar θ desde 0 hasta 2π se observa que cada P_i ha girado un ángulo $k_i 2\pi$; esto es: ha girando un número entero de vueltas. Por lo tanto ha estado el mismo tiempo en C^+ que en C^- , lo que implica que

$$\int_0^{2\pi} f_i(\theta)\, d\theta = 0$$

(1) Llamemos $g(\theta) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\theta)$.

Observemos que $g(\theta) = \{\text{nro. de puntos en } C^+ \} - \{\text{nro. de puntos en } C^- \}$.

Por otro lado,

(2) $\int_0^{2\pi} g(\theta)\, d\theta = 0$.

Demostremos ahora lo que queremos: sino existiera θ con la propiedad pedida, para todo θ hay más puntos en C^- que en C^+ . Luego $g(\theta) < 0$, pero como g toma valores enteros, resulta $g(\theta) \leq -1$. Entonces se tendría

$$0 = \int_0^{2\pi} g(\theta)\, d\theta \leq \int_0^{2\pi} (-1)\, d\theta = -2\pi.$$