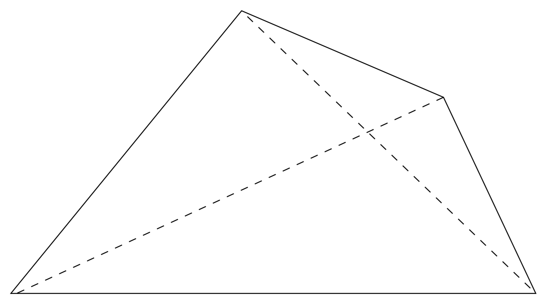
Competencia Matemática E. Paenza

Sexta Realización — 1991

Resolución de los problemas

Participante N ^{0} :

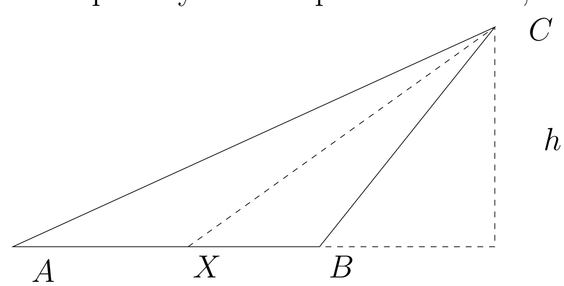
Problema 1. Sea C un cuadrilátero convexo.



Si el área del cada uno de los cuatro triángulos determinados por las dos diagonales de C es un número natural, pruebe que el área de C no es un número primo.

Resolución. (Solución de *Pablo E. Giambiagi*, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA)

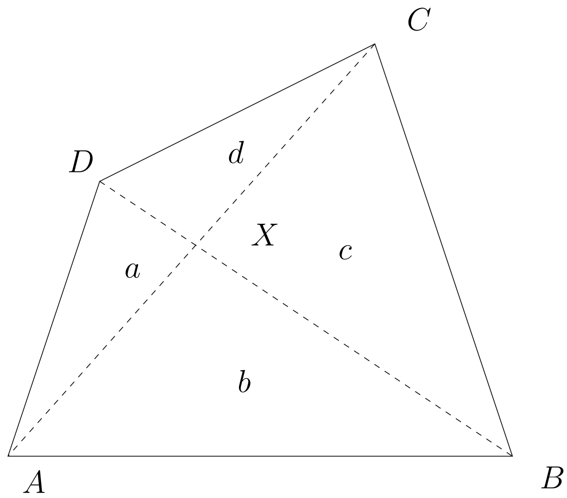
Si $A\overset{\triangle}{B}C$ es un triángulo cualquiera y X un punto en $\overline{AB}$, es tiene



$$\frac{\text{área } A\overset{\triangle}{X}C}{|\overline{AX}|} = \frac{\text{área } X\overset{\triangle}{B}C}{|\overline{XB}|} \ , \ \text{ pues ambos cocientes son iguales a } \ h/2 \ .$$

Sea ahora un cuadrilátero convexo. Llamemos

$$a = \text{área } A\overset{\triangle}{X}D \qquad\qquad b = \text{área } A\overset{\triangle}{X}B$$
$$d = \text{área } D\overset{\triangle}{X}C \qquad\qquad c = \text{área } C\overset{\triangle}{X}B$$



Obtenemos

$$(1) \quad \frac{a}{|\overline{AX}|} = \frac{d}{|\overline{XC}|} \qquad \text{y} \qquad (2) \quad \frac{b}{|\overline{AX}|} = \frac{c}{|\overline{XC}|}$$

(Notar que $|\overline{AX}|$ y $|\overline{XC}|$ son no nulos pues el cuadrilátero es convexo). De (1) y (2) $\frac{a}{d} = \frac{b}{c} = \lambda$. Sean p y q enteros tales que $\frac{p}{q} = \lambda$ y $(p : q) = 1$. Existen entonces κ_1 y κ_2 ambos mayores que 0 tales que

$$\begin{array}{ll} a = \kappa_1 \cdot p & b = \kappa_2 \cdot p, \\ d = \kappa_1 \cdot q & c = \kappa_2 \cdot q. \end{array}$$

Entonces el área total es $\kappa_1 p + \kappa_1 q + \kappa_2 p + \kappa_2 q = (\kappa_1 + \kappa_2)(p + q)$ con $\kappa_1 + \kappa_2 \geq 2$ y $p + q \geq 2$, y por lo tanto no es un número primo.

Problema 2. Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \arctan\left(\frac{n}{n^2+k(k-1)}\right).$$

Resolución. (Solución de *Andrés H. Fernández del Prado*, Facultad de Ingeniería, UBA)

I. Si $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ es una función continua, creciente y positiva, verifica para cada n natural
$$\sum_{k=0}^{n} f(k) \leq \int_0^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n+1} f(k). \tag{1}$$
Usaremos las desigualdades (1) cuando $f(x) = \dfrac{x}{n^2+x^2-x}$ para $x \in [0,n]$, n natural.

II. Notemos que si $x \geq 0$, resulta $x \geq \arctan x$. Entonces
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \arctan\left(\frac{n}{n^2+k(k-1)}\right) \leq \int_0^n \frac{x}{n^2+x^2-x}dx. \tag{2}$$

III. Como $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan x}{x} = 1$, dado un número real positivo ε cualquiera, es posible encontrar otro, δ , también positivo, tal que si $0 < x < \delta$ se verifique que $\dfrac{\arctan x}{x} \geq (1-c)$. O sea, $\arctan x \geq (1-c)x$ para todo $0 < x < \delta$.

Por lo tanto, como $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2+k(k-1)}\right) = 0$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$ fijo, es posible encontrar un natural n_0 tal que para todo $n \geq n_0$
$$(1-c)\left(\frac{n}{n^2+k(k-1)}\right) \leq \arctan\left(\frac{n}{n^2+k(k-1)}\right). \tag{3}$$
Usando ahora las desigualdades (1) y (3), resulta, para cada $n \geq n_0$
$$(1-c)\int_0^n \frac{x}{n^2+x^2-x}dx \leq (1-c)\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k(k-1)} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \arctan\left(\frac{n}{n^2+k(k-1)}\right). \tag{4}$$

IV. Se calcula sin dificultad

$$\int_0^n \frac{x}{n^2+x^2-x}dx =$$
$$\frac{1}{2}\ln\left(2-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2\sqrt{n^2-1/4}}\left[\arctan\left(\frac{n-1/2}{\sqrt{n^2-1/4}}\right)+\arctan\left(\frac{1}{2\sqrt{n^2-1/4}}\right)\right].$$

Por lo tanto, la integral impropia $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{n^2+x^2-x}dx$ converge y se verifica

$$\int_0^\infty \frac{x}{n^2+x^2-x}dx = \frac{1}{2}\ln 2. \tag{5}$$

V. Resumiendo, de acuerdo con las desigualdades (2) y (4), se tiene:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}\arctan\left(\frac{n}{n^2+k(k-1)}\right)\leq\int_0^n \frac{x}{n^2+x^2-x}dx$,

b) $\displaystyle(1-c)\int_0^n \frac{x}{n^2+x^2-x}dx\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\arctan\left(\frac{n}{n^2+k(k-1)}\right)$, si $n\geq n_0$.

Tomando límite cuando n tiende a infinito, y usando (5) se deduce

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\arctan\left(\frac{n}{n^2+k(k-1)}\right)=\frac{\ln 2}{2}.$$

Problema 3. Dado un polinomio $P \neq 0$ con coeficientes complejos, se define el número entero $n_0(P)$ como el número de raíces distintas de P .

Sean P , Q , R tres polinomios con coeficientes complejos tales que

$$P + Q + R = 0 \qquad \text{y} \qquad \text{máximo común divisor}(P, Q, R) = 1.$$

Demuestre: $\text{máx}\{\text{grado } P,\ \text{grado } Q,\ \text{grado } R\} \leq n_0(P \cdot Q \cdot R) - 1$.

Resolución. (Solución del Comité Organizador, ver nota abajo)

Como $P + Q + R = 0$, dos de entre ellos tienen el mismo grado. Supongamos $\text{grado}(R) \leq \text{grado}(P) = \text{grado}(Q)$. Veremos que $\text{grado}(Q) \leq n_0(P \cdot Q \cdot R) - 1$.

Sean $P = \prod(x - \alpha_i)^{r_i}$, $Q = \prod(x - \beta_j)^{s_j}$ y $R = \prod(x - \gamma_k)^{t_k}$, con los α_i , β_j y γ_k todos distintos (pues de las hipótesis del problema se sigue que P , Q y R deben ser coprimos dos a dos). Consideremos la función racional $F = P/R$. Tomando la derivada de $\log F$ queda:

$$\frac{F'}{F} = \sum \frac{r_i}{x - \alpha_i} - \sum \frac{t_k}{x - \gamma_k}.$$

Sea $S = \prod(x - \alpha_i) \prod(x - \beta_j) \prod(x - \gamma_k)$. Entonces SF'/F es un polinomio de grado a lo sumo $n_0(P \cdot Q \cdot R) - 1$. Veremos que Q divide a SF'/F , y por lo tanto $\text{grado}(Q) \leq n_0(P \cdot Q \cdot R) - 1$.

En efecto, sea $G = Q/R$, es $F + G = -1$, luego $F' + G' = 0$, de donde $FF'/F + GG'/G = 0$. Entonces $(F'/F)/G'/G = -G/F = -Q/P$, y por lo tanto $(F'/F)P = (-G'/G)Q$. Multiplicando por S se tiene $(SF'/F)P = (-SG'/G)Q$. De la misma forma que para SF'/F , se observa que $-SG'/G$ es un polinomio, y como P y Q son coprimos, Q debe dividir a SF'/F .

Nota. Este problema fue tomado del artículo "Old and New Conjectured Diophantine Inequalities", *Bull. of the A.M.S.*, Vol. 23, Number 1 (1990). Su inclusión en la Competencia se debió a un error del Comité Organizador. En efecto, sucedió que obtuvimos una demostración posible de ser encontrada (a nuestro entender) en las condiciones de la prueba. Ahora, al tener que redactarla (con cuidado) para este resumen, descubrimos que tenía un agujero imposible de ser reparado. Queda entonces sólo la demostración aquí presentada (que es la del artículo arriba mencionado), que si bien es relativamente simple, no es como para ser encontrada en 5 horas durante las cuales hay que pensar también otros problemas.

Problema 4. Determine los números naturales n para los cuales es posible encontrar números reales *positivos* x_1 , x_2 , ... , $x_{n!}$ que verifique el sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_{n!} = n \\ \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_{n!}} = n^n. \end{cases}$$

Resolución. (Solución de *Juan Martín Maldacena*, Instituto Balseiro)

Notemos primero que si encontramos $x_1, \ldots, x_{n!}$ reales positivos tales que:

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_{n!} = n \\ \dfrac{1}{x_1} + \cdots + \dfrac{1}{x_{n!}} \leq n^n, \end{cases}$$

entonces podemos hallar la solución buscada. En efecto, fijando $x_3, \ldots, x_{n!}$ y variando x_1 y x_2 , de manera tal que $(x_1 + x_2)$ se mantenga constante y $x_1 \to 0$, $\left(\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}\right) \to +\infty$. Luego, para algún par x_1 , x_2 se tiene $\dfrac{1}{x_1} + \cdots + \dfrac{1}{x_{n!}} = n^n$.

Luego el problema es equivalente a pedir que $f \colon \mathbb{R}^{n!} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x_1} + \cdots + \dfrac{1}{x_{n!}}$ tenga mínimo $\leq n^n$ sobre la superficie $S = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n!} \ : \ \sum_{k=1}^{n!} x_k = n, \ x_k > 0 \right\}$.

La superficie $\overline{S} = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n!} \ : \ \sum_{k=1}^{n!} x_k = n, \ x_k \geq 0 \right\}$ es compacta y si $x \to$ borde, $f(x) \to +\infty$; luego el mínimo se alcanza en algún punto de S .

Aplicamos el método de Multiplicadores de Lagrange, para hallar extremos de f ligados por la condición $g = \sum x_k - n = 0$. Como

$$\nabla f(x) = \left(-\frac{1}{x_1^2}, \ldots, -\frac{1}{x_{n!}^2} \right) \qquad \text{y} \qquad \nabla g = (1, \ldots, 1)$$

el único extremo en S se alcanza en $x^0 = \left(\dfrac{n}{n!}, \ldots, \dfrac{n}{n!} \right)$, que por lo anterior es un mínimo.

Como $f(x^0) = n! \left(\dfrac{n!}{n} \right) = n!(n-1)!$, el sistema dado tiene solución si y sólo si $n!(n-1)! \leq n^n$, o sea, si y sólo si se verifica $(n-1)!^2 \leq n^{n-1}$. Se tiene:

$$n = 1, \ 1 \leq 1; \quad n = 2, \ 1 \leq 2; \quad n = 3, \ 4 \leq 9; \quad n = 4, \ 36 \leq 64; \quad n = 5, \ 24^2 \leq 25^2.$$

Por lo tanto, se tiene solución para $n = 1$, 2 , 3 , 4 y 5 .

Ahora veremos que no hay solución para ningún $n \geq 6$. Demostraremos por inducción que para todo $n \geq 6$, $(n-1)!^2 > n^{n-1}$.

Si $n = 6$, $(n-1)!^2 = 6^2 \cdot 100 \cdot 4$ y $n^{n-1} = 6^2 \cdot 54 \cdot 4$.

$$(n-1)!^2 = (n-1)^2(n-2)!^2 > (n-1)^2(n-1)^{n-2} =$$
$$= (n-1)(n-1)^{n-1} = (n-1)\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1} \cdot n^{n-1}. \quad (1)$$

Pero $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1} > \frac{1}{2}$ pues es creciente y en $n = 2$ vale $\frac{1}{2}$.

Luego $(n-1)\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1} > 1$ para todo $n \geq 3$, y entonces, usando (1), $(n-1)!^2 > n^{n-1}$ para todo $n \geq 6$.

Problema 5. Sea P un polinomio mónico con coeficientes reales tal que, para el número complejo i ($i^2 = -1$) se verifica $|P(i)| < 1$.

Pruebe que existen número reales a y b tales que

$$P(a + ib) = 0 \qquad \text{y} \qquad (a^2 + b^2 + 1)^2 < 4b^2 + 1.$$

Resolución. (Solución de *Pablo A. Parrillo*, Facultad de Ingeniería, UBA)

Si P es un polinomio con coeficientes reales mónico, tengo

$$P(z) = (z - x_1)^{m_1}(z - x_2)^{m_2} \dots (z^2 + \alpha_1 z + \beta_1)^{n_1}(z^2 + \alpha_2 z + \beta_2)^{n_2} \dots$$

donde los x_k , los α_k y los β_k son reales (y ${\alpha_k}^2 - 4\beta_k < 0$).

Como $|P(i)| = |i - x_1|^{m_1}|i - x_2|^{m_2} \dots |-1 + \alpha_1 i + \beta_1|^{n_1}|-1 + \alpha_2 i + \beta_2|^{n_2} \dots < 1$, alguno de los factores tiene que ser menor que 1 . Pero para todos los primeros términos (los que corresponden a raíces reales) se verifica que $|i - x_k|^2 = 1 + x_k^2 \geq 1$. Por lo tanto, alguno de los últimos términos es menor que 1 . Supongamos que es el correspondiente a α_1 y β_1 :

$$|\beta_1 - 1 + \alpha_1 i| < 1 \quad \Rightarrow \quad (\beta_1 - 1)^2 + \alpha_1^2 < 1 \quad \Rightarrow \quad \beta_1^2 + 1 + \alpha_1^2 - 2\beta_1 < 1 \quad \Rightarrow$$

$$\beta_1^2 + 1 + \alpha_1^2 + 2\beta_1 < 1 + 4\beta_1 \quad \Rightarrow \quad (\beta_1 + 1)^2 < 1 + 4\beta_1 - \alpha_1^2. \tag{1}$$

Ahora, $z^2 + \alpha_1 z + \beta_1 = (z - (a + b\,i))(z - (a - b\,i))$ donde $a \pm b\,i = -\dfrac{\alpha_1}{2} \pm \sqrt{\beta_1 - \left(\dfrac{\alpha_1}{2}\right)^2}$. Luego, $\alpha_1 = -2a$, y $\beta_1 = a^2 + b^2$. Entonces, la desigualdad (1) se reescribe

$$(1 + a^2 + b^2)^2 < 1 + 4a^2 + 4b^2 - 4a^2 = 1 + 4b^2 \qquad (\text{ y } \; P(a + b\,i) = 0).$$

Problema 6. Sea p un número primo. Si para algún número natural n , $(2^n - 1)$ es divisible por p pero no por p^2 , demuestre que $(2^{p-1} - 1)$ no es divisible por p^2 .

Resolución. (Solución de *Horacio Casini,* Instituto Balseiro)

Sea α el mínimo entero positivo tal que $2^\alpha \equiv 1\ (p)$. Si β es cualquier entero tal que $2^\beta \equiv 1\ (p)$, entonces α divide a β . En efecto: $\beta = k\alpha + r$, con $0 \leq r < \alpha$. Como $1 \equiv 2^\beta = 2^{k\alpha} 2^r \equiv 2^r\ (p)$ se deduce que $r = 0$.

Debe ser $2^\alpha = kp + 1$, con k tal que p no divide a k (pues si p divide a k , sería $2^\alpha \equiv 1\ (p^2)$, y como α divide a n , sería $2^n \equiv 1\ (p^2)$ contradiciendo la hipótesis). Por otro lado, por Fermat, $2^{p-1} \equiv 1\ (p)$, luego α divide a $p - 1$ y se tiene $p - 1 = \ell\alpha$. Entonces $2^{p-1} = (2^\alpha)^\ell = (kp+1)^\ell = 1 + \ell kp + mp^2$. Como $\ell < p - 1$, p tampoco divide a ℓ , y se tiene $2^{p-1} \not\equiv 1\ (p^2)$.