Competencia Matemática Ernesto Paenza

21° realización – 2006

Las soluciones que se encuentran a continuación fueron elegidas por el Comité Organizador entre las respuestas de los participantes. Son aquellas que más nos gustaron, además de ser correctas. Los vectores luego del número del problema indican, considerando el total de participantes:

- la primera coordenada, la cantidad que obtuvo 8, 9 o 10 puntos en el problema (esencialmente bien resuelto),
- la segunda coordenada, la cantidad que obtuvo 5, 6 o 7 puntos (esencialmente "la mitad o un poco más" del problema),
- la tercera coordenada, la cantidad que obtuvo 1, 2, 3 o 4 puntos (casos particulares o algo conducente a una posible solución),
- la cuarta coordenada, el complemento (aquellos que no hicieron nada).

Problema 1 - $(10, 4, 6, 30)$

Sea $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un conjunto finito ordenado con $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Se consideran las palabras construidas con el alfabeto X ordenadas como en un diccionario de acuerdo al orden de X (por ejemplo, $a_1 < a_1a_1a_2 < a_1a_2 < a_2 < a_2a_1 < a_2a_1a_1$).

Una palabra es *linda* si tiene una sola letra o si al cortarla en dos partes en cualquier lugar, la palabra que queda a la derecha del corte es mayor que la palabra original. Por ejemplo, $a_1a_2a_1a_2a_3$ es linda, porque todas las palabras $a_2a_1a_2a_3, a_1a_2a_3, a_2a_3$ y a_3 son mayores que $a_1a_2a_1a_2a_3$; en cambio, $a_1a_2a_1a_2$ no es linda, porque $a_1a_2 < a_1a_2a_1a_2$.

Probar que toda palabra linda de longitud mayor que 1 se puede cortar de manera que tanto a la izquierda como a la derecha del corte queden dos palabras lindas. Por ejemplo, $a_1a_2a_1a_2a_3$ se puede cortar como $a_1a_2|a_1a_2a_3$ y tanto a_1a_2 como $a_1a_2a_3$ son lindas.

Solución (*Pablo Celayes - Sebastián Rodriguez, FAMAF, UNC, Córdoba*)

Sea $\alpha = \alpha_1 \ldots \alpha_m$ una palabra linda de longitud m sobre el alfabeto X. Para $1 \leq i \leq m$, sean $\beta_i = \alpha_i \ldots \alpha_m$. Como α es linda, sabemos que $\beta_1 < \beta_i$ para $2 \leq i \leq m$. Como entre las palabras $\beta_1, \ldots, \beta_m$ todas tienen longitud distinta, no hay dos iguales y por lo tanto podemos ordenar la lista de todas ellas de menor a mayor. Sabemos que el primer elemento será β_1 y supongamos que el segundo elemento es β_j. Vamos a probar que $\alpha_1 \ldots \alpha_{j-1}$ y β_j son lindas.

Sabemos que $\beta_j < \beta_k$ para $k = 2, \ldots, m; k \neq j$. Como para todo corte de β_j la palabra que queda a la derecha es β_k para algún $k > j$, resulta que β_j es linda.

Veamos que $\alpha_1 \ldots \alpha_{j-1}$ es linda. Tenemos que mostrar que para $2 \leq k \leq j-1$, $\alpha_1 \ldots \alpha_{j-1} < \alpha_k \ldots \alpha_{j-1}$. Como α es linda, sabemos que

$$\alpha_1 \ldots \alpha_{j-1}\beta_j < \alpha_k \ldots \alpha_{j-1}\beta_j.$$

Si

$$\alpha_1 \ldots \alpha_{j-1} > \alpha_k \ldots \alpha_{j-1},$$

por cómo está definido el orden entre las palabras, tenemos que $\alpha_1 = \alpha_k, \ldots, \alpha_{j-k} = \alpha_{j-1}$. Entonces,

$$\alpha_{j-k+1} \ldots \alpha_{j-1}\beta_j < \beta_j,$$

o, dicho de otro modo, $\beta_{j-k+1} < \beta_j$. Esto es imposible porque β_j era menor que todas las palabras β_k para $k = 2, \ldots, m; k \neq j$. Entonces tenemos que $\alpha_1 \ldots \alpha_{j-1} < \alpha_k \ldots \alpha_{j-1}$ y $\alpha_1 \ldots \alpha_{j-1}$ es linda, como queríamos demostrar.

Problema 2 - $(10, 3, 13, 24)$

Para $r = 1, \dots, n$ se define $M_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como sigue: si las coordenadas de $(x_1 \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se ordenan de manera no decreciente, $M_r(x_1, \dots, x_n)$ es el número que ocupa el r-ésimo lugar en este orden. Por ejemplo, $M_1(x_1, \dots, x_n) = \min\{x_1, \dots, x_n\}$ y $M_n(x_1, \dots, x_n) = \max\{x_1, \dots, x_n\}$ para todo $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Probar que

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 M_r(x_1, \dots, x_n)\ dx_1 \dots dx_n = \frac{r}{n+1}.$$

Solución (*Carlos Di Fiore, FCEN, UBA, Buenos Aires*)

Sea $\mathbb{S}_n$ el conjunto de las permutaciones de $\{1, \dots, n\}$. Para cada $\pi \in \mathbb{S}_n$, consideremos

$$R_\pi = \{(x_1, \dots, x_n) \in [0,1]^n \mid x_{\pi(1)} \leq x_{\pi(2)} \leq \dots \leq x_{\pi(n)}\}.$$

Como $[0,1]^n = \bigcup_{\pi \in \mathbb{S}_n} R_\pi$ y, si $\pi_1 \neq \pi_2$, el conjunto $R_{\pi_1} \cap R_{\pi_2}$ tiene medida cero,

$$\int_{[0,1]^n} M_r(x_1, \dots, x_n)\ dx_1 \dots dx_n = \sum_{\pi \in \mathbb{S}_n} \int_{R_\pi} M_r(x_1, \dots, x_n)\ dx_1 \dots dx_n.$$

Observando que $\int_{R_{\pi_1}} M_r(x_1, \dots, x_n)\ dx_1 \dots dx_n = \int_{R_{\pi_2}} M_r(x_1, \dots, x_n)\ dx_1 \dots dx_n$ para cualesquiera $\pi_1, \pi_2 \in \mathbb{S}_n$, concluimos que

$$\int_{[0,1]^n} M_r(x_1, \dots, x_n)\ dx_1 \dots dx_n = n! \int_{R_{id}} M_r(x_1, \dots, x_n)\ dx_1 \dots dx_n,$$

donde id es la permutación identidad. Ahora, si $(x_1, \dots, x_n) \in R_{id}$, vale $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ y, entonces $M_r(x_1, \dots, x_n) = x_r$. Luego

$$\int_{R_{id}} M_r(x_1, \dots, x_n)\ dx_1 \dots dx_n = \int_0^1 \int_0^{x_n} \cdots \int_0^{x_2} x_r\ dx_1 \dots dx_n.$$

Inductivamente, se prueba que, para $2 \leq i \leq r+1$,

$$\int_0^1 \int_0^{x_n} \cdots \int_0^{x_2} x_r\ dx_1 \dots dx_n = \int_0^1 \int_0^{x_n} \cdots \int_0^{x_i} \frac{x_{i-1}^{i-2}}{(i-2)!} x_r\ dx_{i-1} \dots dx_n.$$

En particular, para $i = r+1$, nos queda

$$\int_{R_{id}} x_r\ dx_1 \dots dx_n = r \int_0^1 \int_0^{x_n} \cdots \int_0^{x_{r+1}} \frac{x_r^r}{r!}\ dx_r \dots dx_n =$$

$$= r \int_0^1 \int_0^{x_n} \cdots \int_0^{x_{r+2}} \frac{x_{r+1}^{r+1}}{(r+1)!}\ dx_{r+1} \dots dx_n = \dots = r \int_0^1 \frac{x_n^n}{n!}\ dx_n = \frac{r}{(n+1)!}$$

Concluimos que

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 M_r(x_1, \dots, x_n)\ dx_1 \dots dx_n = n! \int_{R_{id}} M_r(x_1, \dots, x_n)\ dx_1 \dots dx_n = \frac{r}{n+1}.$$

Problema 3 - $(3, 3, 25, 19)$

Un *cuadrado ultrasimétrico* de suma n es una matriz $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq d} \in \mathbb{N}^{d\times d}$ tal que para cada permutación $\pi : \{1, \dots, d\} \to \{1, \dots, d\}$ vale $\sum_{1\leq i\leq d} m_{i,\pi(i)} = n$ (en otras palabras, para cualquier elección de d elementos de la matriz M tal que no contiene dos coeficientes de una misma fila o una misma columna, la suma es n).

1. ¿Para qué valores de $d \in \mathbb{N}$ existe un cuadrado ultrasimétrico en $\mathbb{N}^{d\times d}$ cuyas entradas son $1, 2, \dots, d^2$?

2. Calcular cuántos cuadrados ultrasimétricos de suma n hay en $\mathbb{N}^{d\times d}$.

Solución (*Juan Pablo Vicedo - Leandro Groisman, FCEN, UBA, Buenos Aires*)

1. Veamos que para todo $d \in \mathbb{N}$ existe tal cuadrado ultrasimétrico.

   Sea $M_d = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq d} \in \mathbb{N}^{d\times d}$ la matriz cuyas entradas son $m_{ij} = (i-1)d + j$ para $1 \leq i, j \leq d$. Para cada permutación $\pi : \{1, \dots, d\} \to \{1, \dots, d\}$ tenemos que

   $$\sum_{1\leq i\leq d} m_{i,\pi(i)} = \sum_{1\leq i\leq d} (i-1)d+\pi(i) = d \sum_{1\leq i\leq d} (i-1)+ \sum_{1\leq i\leq d} \pi(i) = d\frac{(d-1)d}{2} + \sum_{1\leq i\leq d} \pi(i).$$

   Como π es una permutación, $\sum_{1\leq i\leq d} \pi(i) = \sum_{1\leq j\leq d} j = \frac{d(d+1)}{2}$, y entonces

   $$\sum_{1\leq i\leq d} m_{i,\pi(i)} = \frac{d^3 - d^2}{2} + \frac{d^2 + d}{2} = \frac{d^3 + d}{2},$$

   con lo cual M_d es un cuadrado ultrasimétrico.

2. Sea $M \in \mathbb{N}^{d\times d}$ un cuadrado ultrasimétrico de suma n.

   Afirmación: Para $1 \leq i_1, i_2, j_1, j_2 \leq d$, vale $m_{i_1j_1} - m_{i_1j_2} = m_{i_2j_1} - m_{i_2j_2}$.

   La igualdad es evidente si $i_1 = i_2$ o $j_1 = j_2$. Supongamos entonces que $i_1 \neq i_2$ y $j_1 \neq j_2$. Sea π una permutación de $\{1, \dots, d\}$ tal que $\pi(i_1) = j_1$ y $\pi(i_2) = j_2$, y sea $\widetilde{\pi}$ la permutación tal que $\widetilde{\pi}(i_1) = j_2$, $\widetilde{\pi}(i_2) = j_1$ y $\widetilde{\pi}(i) = \pi(i)$ para todo $i \neq i_1, i_2$. Como M es un cuadrado ultrasimétrico, $\sum_{1\leq i\leq d} m_{i,\pi(i)} = \sum_{1\leq i\leq d} m_{i,\widetilde{\pi}(i)}$, de donde $m_{i_1j_1} + m_{i_2j_2} = m_{i_1j_2} + m_{i_2j_1}$ o, equivalentemente, $m_{i_1j_1} - m_{i_1j_2} = m_{i_2j_1} - m_{i_2j_2}$.

   Sea $m_{i_0j_0} = \min_{1\leq i,j\leq d}\{m_{ij}\}$. Asignamos a cada fila y a cada columna de M números enteros no negativos, f_i y c_j respectivamente, de la siguiente manera:

   - $\forall\, 1 \leq j \leq d$, $c_j = m_{i_0j} - m_{i_0j_0}$,
   - $\forall\, 1 \leq i \leq d$, $f_i = m_{ij_0}$.

Es fácil ver que si el mínimo se alcanza en más de una entrada de M, los valores c_j y f_i definidos a partir de cualquiera de ellas coinciden.

Para todo $1 \leq i, j \leq d$, vale que $f_i + c_j = m_{ij_0} + (m_{i_0 j} - m_{i_0 j_0}) = m_{ij_0} + (m_{ij} - m_{ij_0}) = m_{ij}$, es decir, el número ubicado en la fila i, columna j de M es la suma de los asignados a la fila i y la columna j.

Observamos que $f_i \geq 1$ para todo $1 \leq i \leq d$, $c_j \geq 0$ para todo $1 \leq j \leq d$, $c_{j_0} = 0$, y se cumple $\sum_{1 \leq i \leq d} f_i + \sum_{1 \leq j \leq d} c_j = \sum_{1 \leq i \leq d} f_i + c_i = \sum_{1 \leq i \leq d} m_{ii} = n$.

De esta manera, a cada cuadrado ultrasimétrico $M \in \mathbb{N}^{d \times d}$ de suma n, le asignamos una $2d$-upla $(c_1, \ldots, c_d, f_1, \ldots, f_d)$ que verifica:

(a) $c_j \in \mathbb{N}_0 \ \forall\, 1 \leq j \leq d$ y $f_i \in \mathbb{N} \ \forall\, 1 \leq i \leq d$,

(b) $\exists\, j$ tal que $c_j = 0$,

(c) $\sum_{1 \leq i \leq d} f_i + \sum_{1 \leq j \leq d} c_j = n$.

Recíprocamente, cada $2d$-upla que satisface las condiciones anteriores da lugar a un cuadrado ultrasimétrico $M = (m_{ij}) \in \mathbb{N}^{d \times d}$ de suma n definiendo $m_{ij} := f_i + c_j$ para todo $1 \leq i, j \leq d$, puesto que $f_i + c_j \geq 1$ para todo $1 \leq i, j \leq d$ y, para cada permutación π de $\{1, \ldots, d\}$ vale $\sum_{1 \leq i \leq d} m_{i,\pi(i)} = \sum_{1 \leq i \leq d} f_i + c_{\pi(i)} = \sum_{1 \leq i \leq d} f_i + \sum_{1 \leq j \leq d} c_j = n$.

Más aún, ambas asignaciones son mutuamente inversas. Luego, la cantidad de cuadrados ultrasimétricos en $\mathbb{N}^{d \times d}$ de suma n es igual a la cantidad de $2d$-uplas $(c_1, \ldots, c_d, f_1, \ldots, f_d)$ que satisfacen las condiciones (a), (b) y (c).

Restando 1 a cada uno de los f_i, $1 \leq i \leq d$, en cada una de estas $2d$-uplas, resulta que esta cantidad es igual a la cantidad de $2d$-uplas $(c_1, \ldots, c_d, f_1, \ldots, f_d)$ de enteros no negativos con $c_j = 0$ para algún j, y tales que la suma de sus coordenadas es $n - d$. Contamos esta cantidad como la diferencia entre la cantidad de $2d$-uplas en $\mathbb{N}_0^{2d}$ que suman $n - d$ y la de aquéllas con sus d primeras coordenadas no nulas:

$$\binom{n+d-1}{2d-1} - \binom{n-1}{2d-1}.$$

Problema 4 - $(3, 0, 11, 36)$

Sea $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ una transformación $\mathbb{C}$-lineal y sea $\hat{\varphi}$ la misma función φ pero considerada como transformación $\mathbb{R}$-lineal de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales de dimensión $2n$. Demostrar que $\det(\hat{\varphi})$ es un número real no negativo, donde por $\det(\hat{\varphi})$ entendemos el determinante de la matriz de $\hat{\varphi}$ en cualquier base de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Solución (*Iván Angiono - Laura Bolognini, UNLP, La Plata, Buenos Aires*):

Como $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado, existe una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{C}^n$ tal que la matriz $A = (a_{jk})_{1 \leq j,k \leq n}$ que representa a φ en dicha base es triangular superior; por ejemplo, una base de Jordan. Entonces $a_{jk} = 0$ si $j > k$ y $\varphi(v_k) = \sum_{j=1}^{k} a_{jk} v_j$.

Mirando a $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial, una base es $\{v_1, iv_1 \ldots, v_n, iv_n\}$. Veamos cómo es la matriz que representa a $\hat{\varphi}$ en esta base:

$$\hat{\varphi}(v_k) = \sum_{j=1}^{k} a_{jk} v_j = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Re}(a_{jk}) v_j + \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Im}(a_{jk}) i v_j,$$

$$\hat{\varphi}(iv_k) = i \sum_{j=1}^{k} a_{jk} v_j = \sum_{j=1}^{k} -\mathrm{Im}(a_{jk}) v_j + \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Re}(a_{jk}) i v_j;$$

entonces esta matriz es

$$\begin{pmatrix}
\mathrm{Re}(a_{11}) & -\mathrm{Im}(a_{11}) & \mathrm{Re}(a_{12}) & -\mathrm{Im}(a_{12}) & \cdots & \cdots & & & \mathrm{Re}(a_{1n}) & -\mathrm{Im}(a_{1n}) \\
\mathrm{Im}(a_{11}) & \mathrm{Re}(a_{11}) & \mathrm{Im}(a_{12}) & \mathrm{Re}(a_{12}) & \cdots & \cdots & & & \mathrm{Im}(a_{1n}) & \mathrm{Re}(a_{1n}) \\
0 & 0 & \mathrm{Re}(a_{22}) & -\mathrm{Im}(a_{22}) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \mathrm{Im}(a_{22}) & \mathrm{Re}(a_{22}) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots & \vdots \\
 & & \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & & \\
 & & \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \mathrm{Re}(a_{nn}) & -\mathrm{Im}(a_{nn}) \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \mathrm{Im}(a_{nn}) & \mathrm{Re}(a_{nn})
\end{pmatrix}.$$

Es fácil ver que el determinante de esta matriz es el producto de los determinantes de los bloques de 2×2 que tiene en su diagonal. Por lo tanto,

$$\det(\hat{\varphi}) = \prod_{j=1}^{n} \det \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(a_{jj}) & -\mathrm{Im}(a_{jj}) \\ \mathrm{Im}(a_{jj}) & \mathrm{Re}(a_{jj}) \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^{n} |a_{jj}|^2,$$

que es un número real no negativo.

Problema 5 - $(3, 1, 1, 45)$

Sean $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{N}$ y sea $f \in \mathbb{Z}[x]$ el polinomio $f = (1-x)^{r_1}(1-x^2)^{r_2}(1-x^3)^{r_3}$. Probar que la suma de los valores absolutos de los coeficientes de f es mayor o igual que $2^{r_3}\sqrt{3}^{r_2}$.

Solución (*Julián Haddad - Quimey Vivas, FCEN, UBA, Buenos Aires*)

Supongamos que

$$f = (1-x)^{r_1}(1-x^2)^{r_2}(1-x)^{r_3} = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i.$$

Observamos que para cada $z \in \mathbb{C}$ se tiene que $|f(z)| = |\sum_{i=0}^{d} a_i z^i| \leq \sum_{i=0}^{d} |a_i z^i| = \sum_{i=0}^{d} |a_i||z|^i$; en particular,

$$|f(z)| \leq \sum_{i=0}^{d} |a_i| \qquad \forall\, z \in \mathbb{C} \text{ con } |z| = 1. \tag{1}$$

Sea $z_0 = \cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Vale que $|z_0| = 1$. Además:

- $|1 - z_0| = |-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}| = 1$.
- $|1 - z_0^2| = |1 - (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})| = \left|\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \sqrt{3}$.
- $|1 - z_0^3| = |1 - (-1)| = 2$.

Entonces

$$|f(z_0)| = |1 - z_0|^{r_1}|1 - z_0^2|^{r_2}|1 - z_0^3|^{r_3} = 1^{r_1}\sqrt{3}^{r_2}2^{r_3} = 2^{r_3}\sqrt{3}^{r_2}. \tag{2}$$

De (1) y (2) concluimos que la suma de los valores absolutos de los coeficientes de f es al menos $2^{r_3}\sqrt{3}^{r_2}$.

Problema 6 - $(0,1,3,46)$

Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\prod_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1+x^{n+1}}{1+x^n}\Big)^{x^n}$.

Solución del Comité Organizador:

Probaremos que

$$\lim_{x\to 1^-}\prod_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1+x^{n+1}}{1+x^n}\Big)^{x^n}=\frac{2}{e}.$$

Para empezar, veamos que es suficiente con demostrar que

$$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=1}^{\infty}x^n\big(\log(1+x^{n+1})-\log(1+x^n)\big)=\log(2)-1. \tag{1}$$

Para $x\in(0,1)$ y $k\in\mathbb{N}$ definimos $g(x,k)=\sum_{n=1}^{k}x^n\big(\log(1+x^{n+1})-\log(1+x^n)\big)$. Dado $x\in(0,1)$, existe el límite $g(x):=\lim_{k\to\infty}g(x,k)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n\big(\log(1+x^{n+1})-\log(1+x^n)\big)$, pues la sucesión $\{g(x,k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ es decreciente y acotada inferiormente: en efecto, $g(x,k)>\sum_{n=1}^{k}\big(\log(1+x^{n+1})-\log(1+x^n)\big)=\log(1+x^{k+1})-\log(1+x)>-\log(1+x)$.

Por continuidad de la función exponencial,

$$e^{g(x)}=e^{\lim_{k\to\infty}g(x,k)}=\lim_{k\to\infty}e^{g(x,k)}=\lim_{k\to\infty}\prod_{n=1}^{k}\Big(\frac{1+x^{n+1}}{1+x^n}\Big)^{x^n}=\prod_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{1+x^{n+1}}{1+x^n}\Big)^{x^n},$$

y, si $\lim_{x\to 1^-}g(x)=\log(2)-1$, nuevamente por continuidad, $\lim_{x\to 1^-}e^{g(x)}=\frac{2}{e}$.

Demostremos ahora la validez de (1).

Sea $\varepsilon>0$. Queremos ver que existe $\delta>0$ tal que si $1-\delta<x<1$, entonces $\log(2)-1-\varepsilon<g(x)<\log(2)-1+\varepsilon$.

Para cualquier partición Π del intervalo $[0,1]$ dada por puntos $0=y_m<y_{m-1}<\ldots<y_1<y_0=1$, sea

$$S_\Pi=\sum_{n=0}^{m-1}y_n(\log(1+y_n)-\log(1+y_{n+1})).$$

Como la función $f(x)=\log(1+x)$ es creciente y diferenciable en el intervalo $[0,1]$, sabemos que cuando la norma de la partición Π (definida como la longitud del mayor subintervalo definido por los puntos de Π) tiende a 0, S_Π tiende al valor de la integral de Riemann-Stieltjes

$$\int_0^1 x\ df(x)=\int_0^1 xf'(x)\ dx=\int_0^1\frac{x}{1+x}\ dx=1-\log(2).$$

Sea $\delta > 0$ tal que si la norma de una partición Π es menor que δ entonces $-\frac{\varepsilon}{4} < S_\Pi - (1 - \log(2)) < \frac{\varepsilon}{4}$. Cambiando δ por un valor más pequeño si es necesario, podemos suponer que $\log(2) - \log(1 + x) < \frac{\varepsilon}{4}$ para todo x con $1 - \delta < x < 1$.

Tomemos x tal que $1-\delta < x < 1$. Para tal x, sea $k(x) \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq k(x)$ entonces $x^k < \delta$. Esto implica que la norma de $\Pi(x, k) = \max\{x^k, 1-x\}$ es menor que δ. A su vez, aumentando $k(x)$ si es necesario, podemos suponer también que $x^{k+1}\log(1 + x^{k+1}) < \frac{\varepsilon}{4}$ para todo $k \geq k(x)$. Luego, para tales valores de k, podemos concluir que

$$1 - \log(2) - \frac{3}{4}\varepsilon < -g(x, k) < 1 - \log(2) + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Haciendo tender k a infinito, concluímos que $1 - \log(2) - \frac{3}{4}\varepsilon \leq -g(x) \leq 1 - \log(2) + \frac{\varepsilon}{4}$.

Esto implica que, si $1 - \delta < x < 1$,

$$\log(2) - 1 + \varepsilon > g(x) > \log(2) - 1 - \varepsilon,$$

que es lo que queríamos demostrar.