

Competencia Matemática Ernesto Paenza

19⁰ Realización.

Las soluciones que se encuentran a continuación fueron elegidas por el Comité Organizador entre las respuestas de los participantes. Son aquellas que más nos gustaron, además de ser correctas.

Los vectores luego del número del problema indican, considerando el total de participantes:

- la primera coordenada, la cantidad que obtuvo 8, 9 o 10 puntos en el problema (esencialmente bien resuelto)
- la segunda coordenada, la cantidad que obtuvo 5, 6 o 7 puntos (esencialmente "la mitad o un poco más" del problema)
- la tercera coordenada, la cantidad que obtuvo 1, 2, 3 o 4 puntos (casos particulares o algo conducente a una posible solución)
- la cuarta coordenada, el complemento (aquellos que no hicieron nada).

Ejercicio 1. (20, 7, 19, 5)

Sea n un entero positivo.

- i) ¿De cuántas maneras se puede escribir n como suma de números enteros consecutivos?
- ii) ¿De cuántas maneras se puede escribir n como suma de números enteros positivos consecutivos?

Resolución(Basada en la de los participantes 19037, Molla Giusti, Matías - Sainz, Ana - FAMAF)

- i) Si n se puede escribir como suma de k enteros consecutivos, entonces:

$$n = \sum_{i=p+1}^{p+k} i = \sum_{i=1}^k p + i = pk + \sum_{i=1}^k i = pk + \frac{k(k+1)}{2}.$$

Si k es par, entonces $n = \frac{k}{2}(2p + k + 1)$ con $\frac{k}{2} \in \mathbb{Z}$ y $2p + k + 1 \in \mathbb{Z}$.

Luego, $\frac{k}{2}$ divide a n y, por lo tanto, k divide a $2n$.

Si k es impar, entonces $n = k(p + \frac{k+1}{2})$ con $k \in \mathbb{Z}$ y $p + \frac{k+1}{2} \in \mathbb{Z}$.

Luego, k divide a n y, por lo tanto, k divide a $2n$.

Entonces si n se puede escribir como suma de k enteros consecutivos, se tiene que k divide a $2n$.

Inversamente, si q es un divisor impar de $2n$, entonces:

$$qa = 2n, \quad a \in \mathbb{Z}$$

$$q\frac{a}{2} = n$$

(como q es impar, a debe ser par).

$$n = q\frac{a}{2} = q\left(\frac{a}{2} - \frac{q+1}{2} + \frac{q+1}{2}\right) = q\left(\frac{a}{2} - \frac{q+1}{2}\right) + \frac{(q+1)q}{2}$$

$$n = q\left(\frac{a}{2} - \frac{q+1}{2}\right) + \sum_{i=1}^q i.$$

Llamemos $d = \left(\frac{a}{2} - \frac{q+1}{2}\right) \in \mathbb{Z}$.

Luego, $n = qd + \sum_{i=1}^q i = \sum_{i=1}^q d + i = \sum_{i=d+1}^{q+d} i$ y así, hemos expresado a n como suma de q números enteros consecutivos.

Entonces si q es un divisor impar de $2n$ se tiene que existen q enteros consecutivos cuya suma es igual a n .

Ahora, si $d \in \mathbb{Z}$ es un divisor impar de $2n$, tenemos que $da = 2n$ y como 2 no divide a d , pues d es impar, a debe ser un divisor par de $2n$.

Entonces, por cada divisor impar d de $2n$ hay un divisor par de $2n$, llamémosle $a = \frac{2n}{d}$.

Luego, si $ad = 2n$, entonces $\frac{a}{2}d = n$.

$$n = \frac{a}{2}(d - (a + 1) + (a + 1)) = \frac{a}{2}(d - (a + 1)) + \frac{a(a + 1)}{2}.$$

$$n = a\left(\frac{d - (a + 1)}{2}\right) \sum_{i=1}^a i$$

Es claro que $c = \frac{d-(a+1)}{2} \in \mathbb{Z}$ pues d y $a + 1$ son impares. Entonces

$$n = ac + \sum_{i=1}^a i = \sum_{i=1}^a c + i = \sum_{i=c+1}^{a+c} i$$

y así hemos escrito a n como suma de a enteros consecutivos.

Luego, para cada d divisor impar de $2n$, existe un divisor par de $2n$, llamémoslo a tal que $da = 2n$ y n se puede escribir como suma de a enteros consecutivos.

Ahora si b es un divisor par de $2n$ y se tiene que $\frac{2n}{b}$ es también par; sea $r = \frac{2n}{b}$ y r es par. Entonces $\frac{rb}{2} = n$.

Luego, $n = \frac{b}{2}(r - (b + 1) + (b + 1))$.

Así, $n = \frac{b}{2}(r - (b + 1)) + \sum_{i=1}^b i = \sum_{i=1}^b \left(\frac{r-(b+1)}{2}\right) + i$ pero $m = \frac{r-(b+1)}{2} \notin \mathbb{Z}$ y ésta no es una suma de enteros.

Ahora supongamos que se puede escribir a n como suma de b enteros consecutivos:

$$n = \sum_{i=1}^b p + i = bp + \sum_{i=1}^b i.$$

Pero, teníamos que $n = mb + \sum_{i=1}^b i$, entonces, $bp = mb$ y, por lo tanto, $p = m$ no es entero.

Luego, si a es un divisor par de $2n$, se puede escribir n como suma de a enteros consecutivos si y sólo si $\frac{2n}{a}$ es impar.

Luego, se puede escribir n como suma de números enteros consecutivos de una cantidad de maneras igual al doble de la cantidad de divisores impares de $2n$ (que es igual al doble de la cantidad de divisores impares de n)

- ii) Separemos en dos conjuntos las maneras de sumar n con números enteros consecutivos. En el conjunto C_1 estarán las que contienen como sumandos sólo números positivos y en el conjunto C_2 las que contienen al menos un número negativo o cero.

Vemos que cada suma de C_1 la podemos hacer corresponder con una suma de C_2 de la siguiente forma:

Si $\sum_{i=p+1}^{p+k} i$ es una suma en C_1 , entonces, como $\sum_{i=-p}^p i = 0$ se tiene que

$$\sum_{i=p+1}^{p+k} i + \sum_{i=-p}^p i = \sum_{i=-p}^{p+k} i = \sum_{i=p+1}^{p+k} i = n.$$

Luego, $\sum_{i=-p}^{p+k} i$ es una suma de C_2 . Y si $\sum_{i=-q}^r i$ es una suma en C_2 , entonces

$$\sum_{i=-q}^r i - \sum_{i=-q}^q i = n - 0 = n.$$

Ahora, $\sum_{i=q+1}^r i$ es una suma en C_1 . Por lo tanto, a cada suma de C_1 le corresponde una suma en C_2 y $\#C_1 \geq \#C_2$. Además a cada suma en C_2 le corresponde una suma en C_1 , entonces $\#C_2 \geq \#C_1$. Esto implica que $\#C_1 = \#C_2$.

Luego, la cantidad de sumas total es el doble de la cantidad de sumas con sumandos positivos. Entonces n se puede escribir como suma de enteros positivos consecutivos de una cantidad de maneras igual a la cantidad de divisores impares de n .

Ejercicio 2 (4, 6, 26, 15)

Para cada $k \in \mathbb{N}$, consideremos el polinomio $f_k = \prod_{i=0}^{k-1} (x - i)$. Se definen los números $S(n, k)$ por la igualdad:

$$x^n = \sum_{k=1}^n S(n, k) f_k.$$

- i) Probar que $S(n, k)$ es un entero positivo $\forall n \in \mathbb{N}, \forall 1 \leq k \leq n$.
- ii) Probar que n es primo si y solo si $n/S(n, k) \forall k = 2, \dots, n-1$.

Resolución(Basada en la del participante 19016, Ottina, Enzo- UBA)

- i) Llamamos $F(n, k)$ a la cantidad de maneras de repartir n bolitas distintas en k cajas numeradas sin dejar cajas vacías, o sea la cantidad de funciones sobreyectivas de $\{1, 2, \dots, n\}$ en $\{1, 2, \dots, k\}$. Por otro lado, si queremos repartir n bolitas distintas en j cajas distintas (permitiendo que haya cajas vacías) hay j^n formas de hacerlo. Pero también podemos contarlas así: elijo entre las j cajas k para llenar y reparto las n bolitas en esas cajas sin dejar cajas vacías y sumo,

$$j^n = \sum_{k=1}^j F(n, k) \binom{j}{k} = \sum_{k=1}^n F(n, k) \binom{j}{k}$$

donde $\binom{j}{k} = 0$ si $k > j$.

O sea

$$j^n = \sum_{k=1}^n \frac{F(n, k)}{k!} j \dots (j-1) \dots (j-(k-1))$$

y esto vale $\forall j \in \mathbb{N}$. Por lo tanto los polinomios x^n y $\sum_{k=1}^n \frac{F(n, k)}{k!} x \dots (x-1) \dots (x-(k-1))$

son iguales ya que su resta tiene por raíz a todos los naturales y por lo tanto debe ser el polinomio nulo.

Es decir:

$$x^n = \sum_{k=1}^n \frac{F(n, k)}{k!} x \dots (x-1) \dots (x-(k-1)) = \sum_{k=1}^n \frac{F(n, k)}{k!} f_k$$

Por lo tanto, por la definición de los $S(n, k)$ se tiene que

$$S(n, k) = \frac{F(n, k)}{k!}.$$

Ahora bien, llamemos $\tilde{S}(n, k)$ a la cantidad de particiones de un conjunto de n elementos en k partes (no vacías). Se tiene que:

$$\tilde{S}(n, k) \cdot k! = F(n, k)$$

pues para repartir n bolitas distintas en k cajas distintas sin dejar cajas vacías puedo partir primero el conjunto en k partes y luego ordenar estas partes de modo que la parte numero i representaría a la caja i (notar que las k partes son distinguibles pues son no vacías y las n bolitas son distintas por lo que cada parte queda determinada por sus elementos).

Se tiene entonces que:

$$\tilde{S}(n, k) = \frac{F(n, k)}{k!} = S(n, k)$$

y por lo tanto resulta que $S(n, k)$ es la cantidad de particiones de un conjunto de n elementos en k partes no vacías y por eso es un número natural.

ii) Tenemos que $x^n = \sum_{k=1}^n S(n, k)x(x-1)\dots(x-(k-1))$. Dividiendo por x se tiene:

$$x^{n-1} = S(n, 1) + \sum_{k=2}^n S(n, k)(x-1)\dots(x-(k-1)). \quad (1)$$

Notar que $S(n, n) = S(n, 1) = 1$ pues como vimos en el ítem anterior, $S(n, k)$ es la cantidad de particiones de un conjunto de n elementos en k partes no vacías.

Supongamos que n divide a $S(n, k) \quad \forall \quad 2 \leq k \leq n-1$.

Evaluando (1) en $x = n$ y tomando congruencia módulo n queda:

$$\begin{aligned} 0 &\equiv n^{n-1} = S(n, 1) + S(n, 2)(n-1) + \dots + S(n, n-1)(n-1)\dots 2 + S(n, n)(n-1)! \\ &\equiv 1 + (n-1)!(\text{mod } n). \end{aligned}$$

Luego, $(n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$ y por el teorema de Wilson, n debe ser primo.

Supongamos ahora que n es primo, $n \neq 2$. Evaluando (1) en $x = 2$ y tomando congruencia módulo n , por el teorema de Fermat se tiene que:

$$2^{n-1} = 1 + S(n, 2) \cdot 1 + 0 \equiv 1 \pmod{n}$$

y por lo tanto $S(n, 2) \equiv 0 \pmod{n}$.

Si ahora evaluamos (1) en $x = 3$ y tomamos congruencia modulo n se tiene que

$$1 \equiv 3^{n-1} = 1 + S(n, 2) \cdot 2 + S(n, 3)2 \cdot 1 + 0 \equiv 1 + S(n, 3)2! \pmod{n}$$

por lo cual $S(n, 3) \equiv 0 \pmod{n}$, ya que 2 es inversible módulo n .

Ahora se sigue por inducción global:

Supongamos que $k < n - 1$ y n divide a $S(n, 2), \dots, S(n, k)$. Evaluando (1) en $x = k + 1 \leq n - 1$ y tomando congruencia módulo n se tiene, por el teorema de Fermat:

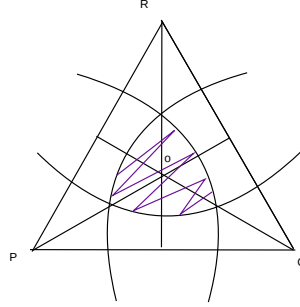
$$\begin{aligned} 1 &\equiv (1 + k)^{n-1} = 1 + S(n, 2)k + S(n, 3)k(k-1) + \dots + S(n, k)k \dots 2 + S(n, k+1)k! \\ &\equiv 1 + S(n, k+1)k! \pmod{n}. \end{aligned}$$

Como $k!$ es inversible módulo n , se sigue que $S(n, k+1) \equiv 0 \pmod{n}$, como queríamos ver.

Ejercicio 3 (23, 7, 7, 14)

Sean T un triángulo equilátero cuyos lados miden 1, o el centro de T y C el conjunto de todos los puntos de T que están más cerca de o que del borde de T . Calcular el área de C .

Resolución (Basada en la de los participantes 19079, Della Vecchia, Eugenia - Sbergamo, Gerardo. UN Rosario)



Supongamos tener un sistema de coordenadas cartesianas en el plano, donde el eje x contiene al lado PQ y el origen del sistema es el punto medio de dicho lado.

Calculemos primero la altura H del triángulo: $(\frac{1}{2})^2 + H^2 = 1 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Las rectas que contienen a los lados del triángulo son

$$L_1 : y = 0 \quad L_2 : y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}x \quad L_3 : y = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}x$$

y el lugar geométrico buscado es el conjunto acotado por tres parábolas.

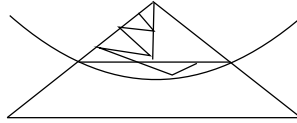
Buscamos la ecuación de una de las parábolas:

$$\text{dist}(p, \mathbf{o}) = \text{dist}(p, \text{eje } x)$$

$$\text{dist}(p, \mathbf{o}) = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = |y| = y = \text{dist}(p, \text{eje } x)$$

$$x^2 + y^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}y + \frac{1}{12} = y^2 \Rightarrow x^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}y = -\frac{1}{12} \Rightarrow y = \sqrt{3}\left(x^2 + \frac{1}{12}\right)$$

Por simetría, buscamos el área del triángulo y la figura sombreada



Buscamos la intersección de la parábola con la recta $y = \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3}x$;

$$\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{3}x = \sqrt{3}\left(x^2 + \frac{1}{12}\right) \Rightarrow x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{12} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \text{ o } x = -\frac{1}{6}.$$

El punto buscado tiene coordenadas $x = -\frac{1}{6}, y = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

La altura del triángulo es entonces $h = \frac{\sqrt{3}}{18}$ y el área resulta $B_0 = \frac{\sqrt{3}}{18} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{216}$.

El área de la otra figura la planteamos como la resta entre las áreas del rectángulo de vértices $(-\frac{1}{6}, 0), (-\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{3}}{9}), (\frac{1}{6}, \frac{\sqrt{3}}{9})$ y $(\frac{1}{6}, 0)$ y el área bajo la parábola entre $x = -\frac{1}{6}$ y $x = \frac{1}{6}$.

El área del rectángulo, $A_1 = \frac{2}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{9} = \frac{\sqrt{3}}{27}$.

El área debajo de la parábola es:

$$A_2 = \int_{-\frac{1}{6}}^{\frac{1}{6}} \sqrt{3}(x^2 + \frac{1}{12})dx = \sqrt{3} \cdot 2 \cdot \left[\left(\frac{1}{6}\right)^3 \frac{1}{3} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{6} \right] = \frac{5\sqrt{3}}{162}.$$

Luego, el área de la figura es $A_1 - A_2 = \frac{\sqrt{3}}{162} = B_1$.

Finalmente, el área requerida es

$$A = 6B_0 + 3B_1 = \sqrt{3} \left(\frac{6}{216} + \frac{3}{162} \right) = \frac{5\sqrt{3}}{108}.$$

Ejercicio 4 (2, 1, 11, 37)

i) Dados $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{R}^2$, consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & 0 & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 \end{pmatrix}$$

donde $d_{ij} = \|p_i - p_j\|^2$. Probar que si $p_1, \dots, p_4$ no están alineados, los cuatro puntos están en una circunferencia si y solo si $\det(A) = 0$.

ii) Sean ahora $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 \in \mathbb{R}^3$ y se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} \\ d_{21} & 0 & d_{23} & d_{24} & d_{25} \\ d_{31} & d_{32} & 0 & d_{34} & d_{35} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 & d_{45} \\ d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} & 0 \end{pmatrix}$$

donde, como antes, $d_{ij} = \|p_i - p_j\|^2$. Probar que si $p_1, \dots, p_5$ no están en un mismo plano, los cinco puntos están en una esfera si y solo si $\det(A) = 0$.

Resolución(Basada en la de los participantes 19036, Celayes, Pablo y Pastawski, Fernando - FAMAF)

Sean $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{R}^2$ no alineados. Entre ellos existen 3 no alineados, supongamos p_1, p_2, p_3 . Existe entonces una circunferencia que pasa por p_1, p_2, p_3 de centro $\vec{o}$ y radio $r > 0$. Luego existen x_1, x_2, x_3 con $\|x_i\| = 1$ tales que $p_i = \vec{o} + rx_i$ para $i = 1, 2, 3$.

Como trasladar los p_i según una constante no altera los d_{ij} , asumimos que $\vec{o} = 0$. Luego $p_i = rx_i$ ($i = 1, 2, 3$). Dividir los p_i ($i = 1, 2, 3, 4$) por una constante $c > 0$ solo multiplica los d_{ij} por c^2 y por lo tanto no altera la condición de nulidad del $\det(A)$. Por lo tanto, tomando $x_i = \frac{p_i}{r}$, $i = 1, 2, 3, 4$, el problema es equivalente al siguiente:

Dados $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}^2$ distintos entre sí, con $\|x_1\| = \|x_2\| = \|x_3\| = 1$, y construyendo A como en el enunciado para los x_i ,

$$\|x_4\| = 1 \Leftrightarrow \det(A) = 0.$$

Si escribimos cada $x_i = (x_{ix}, x_{iy})$ para cada $i = 1, 2, 3, 4$ se puede verificar sin dificultad que

$$A = A_L \cdot A_R = \begin{pmatrix} \|x_1\|^2 & 2x_{1x} & 2x_{1y} & 1 \\ \|x_2\|^2 & 2x_{2x} & 2x_{2y} & 1 \\ \|x_3\|^2 & 2x_{3x} & 2x_{3y} & 1 \\ \|x_4\|^2 & 2x_{4x} & 2x_{4y} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -x_{1x} & -x_{2x} & -x_{3x} & -x_{4x} \\ -x_{1y} & -x_{2y} & -x_{3y} & -x_{4y} \\ \|x_1\|^2 & \|x_2\|^2 & \|x_3\|^2 & \|x_4\|^2 \end{pmatrix}.$$

Tenemos entonces que $\det(A_L) = 4 \det(A_R)$ y entonces

$$\det(A) = 0 \Leftrightarrow \det(A_L) = \det(A_R) = 0.$$

Si $\|x_4\| = 1$ la matrices son claramente singulares.

Si $\|x_4\| \neq 1$, entonces podemos restar la última columna de unos a la primera en A_L y nos queda

$$\begin{pmatrix} 0 & 2x_{1x} & 2x_{1y} & 1 \\ 0 & 2x_{2x} & 2x_{2y} & 1 \\ 0 & 2x_{3x} & 2x_{3y} & 1 \\ \|x_4\|^2 - 1 & 2x_{4x} & 2x_{4y} & 1 \end{pmatrix}.$$

El determinante de esta matriz es

$$(\|x_4\|^2 - 1) \cdot \det \begin{pmatrix} 2x_{1x} & 2x_{1y} & 1 \\ 2x_{2x} & 2x_{2y} & 1 \\ 2x_{3x} & 2x_{3y} & 1 \end{pmatrix}.$$

El determinante de esta última matriz es cero si y solo si existen α, β tales que $\alpha x_1 + \beta x_2 = x_3$ y $\alpha + \beta = 1$, que es equivalente a decir que x_3 está en la recta definida por x_1 y x_2 . Pero esto no es así ya que habíamos tomado x_1, x_2 y x_3 no alineados, por lo tanto el determinante es distinto de cero.

Análogamente a la primer parte, tomando 4 puntos no coplanares, su esfera circunscrita y aplicando una traslación y una homotecia apropiadas, el problema se reduce a:

Sean $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}^3$ distintos entre sí tales que $\|x_1\| = \|x_2\| = \|x_3\| = \|x_4\| = 1$ y $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ la matriz dada por $A_{ij} = \|x_i - x_j\|^2$, entonces

$$\|x_5\| = 1 \Leftrightarrow \det(A) = 0.$$

Si $x_i = (x_{ix}, x_{iy}, x_{iz})$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ podemos escribir matrices A_L y A_R de 5 filas y 5 columnas

$$A_L = \begin{pmatrix} \|x_1\|^2 & 2x_{1x} & 2x_{1y} & 2x_{1z} & 1 \\ \|x_2\|^2 & 2x_{2x} & 2x_{2y} & 2x_{2z} & 1 \\ \|x_3\|^2 & 2x_{3x} & 2x_{3y} & 2x_{3z} & 1 \\ \|x_4\|^2 & 2x_{4x} & 2x_{4y} & x_{4z} & 1 \\ \|x_5\|^2 & 2x_{5x} & 2x_{5y} & 2x_{5z} & 1 \end{pmatrix} \quad A_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -x_{1x} & -x_{2x} & -x_{3x} & -x_{4x} & x_{5x} \\ -x_{1y} & -x_{2y} & -x_{3y} & -x_{4y} & x_{5y} \\ -x_{1z} & -x_{2z} & -x_{3z} & -x_{4z} & x_{5z} \\ \|x_1\|^2 & \|x_2\|^2 & \|x_3\|^2 & \|x_4\|^2 & \|x_5\|^2 \end{pmatrix}$$

y la condición del determinante 0 para A se deduce de la misma forma a la condición de los primeros 4 puntos.

Ejercicio 5 (10, 11, 2, 28)

Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y estrictamente creciente, tal que $f(0) < 0$ y $f(1) > 0$. Supongamos que la única raíz r de f en $[0, 1]$ es un número irracional. Sea x_n la sucesión generada por el método de bisección para hallar r , o sea $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{4}$ si $f(\frac{1}{2}) > 0$ ó $x_2 = \frac{3}{4}$ si $f(\frac{1}{2}) < 0$, etc. Sea $e_n := |x_n - r|$. Hallar el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} e_n X^n$.

Resolución(Basada en la del participante 19019, Mereb, Martín - UBA)

Como $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}$ y $r \notin \mathbb{Q}$, el método no termina nunca pues $x_n \neq r, \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $|x_n - x_{n+1}| = \frac{1}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Ahora bien, como $e_n = |x_n - r| \leq \frac{1}{2^n}$ se tiene $\limsup \sqrt[n]{e_n} \leq \frac{1}{2}$, por lo que el radio de convergencia R de $f(x) = \sum e_n x^n$ es mayor o igual que 2.

Por otro lado,

$$e_{n+1} = |x_{n+1} - r| = |x_{n+1} - x_n + x_n - r| \geq |x_{n+1} - x_n| - |x_n - r| = |x_{n+1} - x_n| - e_n$$

$$\Rightarrow e_{n+1} + e_n \geq |x_{n+1} - x_n| = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

El radio de convergencia de $f(x)$ coincide con el de $xf(x)$ por lo que R será menor o igual que el radio de convergencia de $f + xf$ pero

$$f + xf = \sum (e_n + e_{n+1})x^{n+1}$$

y

$$\limsup \sqrt[n+1]{e_n + e_{n+1}} \geq \limsup \sqrt[n+1]{\frac{1}{2^{n+1}}} = \frac{1}{2}$$

de donde $R \leq 2$.

Entonces el radio de convergencia es igual a 2.

Ejercicio 6 (0, 0, 1, 50)

Decidir si existen o no polinomios de dos variables $p(x, y), q(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ tales que si se considera la función $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, F(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$, la imagen de F es $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Resolución(oficial)

Los polinomios $p(x, y) = xy - 1$ y $q(x, y) = (xy - 1)x^2 - y$ verifican lo pedido.

En efecto, sea $F(x, y) = (xy - 1, (xy - 1)x^2 - y)$.

Veamos primero que $(0, 0) \notin \text{Im}(F)$. Si $F(x, y) = (0, 0)$ entonces $xy - 1 = 0$ y $(xy - 1)x^2 - y = 0$ de lo que se obtiene una contradicción.

Sean ahora $a \neq 0, -1$ y b cualquiera, busquemos (x, y) tal que $F(x, y) = (a, b)$. Sea r alguna raíz real del polinomio $X^3 + bX^2 - a(a + 1)^2$ (que existe pues tiene grado impar). Como $a \neq 0, 1, r \neq 0$. Entonces

$$F\left(\frac{a+1}{r}, r\right) = \left(\frac{a+1}{r} \cdot r - 1, \left(\frac{a+1}{r} \cdot r - 1\right)\left(\frac{a+1}{r}\right)^2 - r\right) = \left(a, \frac{a(a+1) - r^3}{r^2}\right) = (a, b).$$

Si $a = 0$, como b tiene que ser distinto de 0, entonces se tiene $F\left(\frac{-1}{b}, -b\right) = (0, b)$.

Por último $F(0, b) = (-1, b)$.