# Competencia Matemática Ernesto Paenza

$15^0$ REALIZACIÓN — 29 DE AGOSTO DE 2000

---

**Problema 1.** Sea $D_r \subset \mathbb{R}^2$ un disco cerrado de radio $r$ . Probar que, cualquiera sea la circunferencia $C \subset \mathbb{R}^2$ , la longitud del arco $C \cap D_r$ es menor o igual que $2\pi r$.

**Resolución.** (Solución de *Fuxman Bass, Juan* y *Vicedo, Juan* de la Facultad de Cs. Exactas y Naturales - UBA).

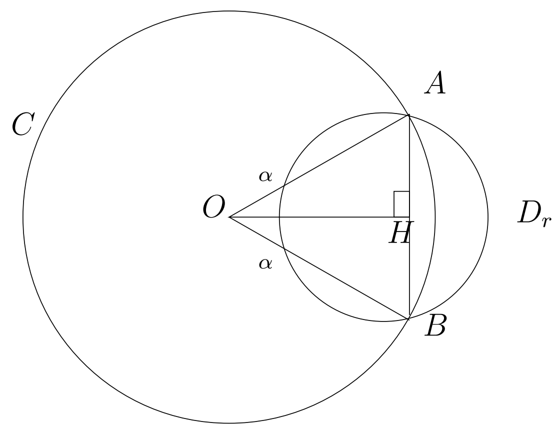
Llamemos $d$ al radio de la circunferencia $C$ .

Si $d \leq r$ entonces la longitud del arco $C \cap D_r$ es menor o igual que $2\pi d$ que es menor o igual que $2\pi r$ .

Si $d > r$ y $C \cap D_r \neq \emptyset$ tenemos dos posibilidades:

a) Si $C \cap \partial D_r =$ un punto. En este caso $C$ es tangente exterior a $\partial D_r$ pues si fuera interior $C$ estaría incluido en $D_r$ , lo cual es absurdo pues $\pi d^2 > \pi r^2$ .

b) Si $C \cap \partial D_r =$ dos puntos, llamemoslos $A$ y $B$ .




Como $\overline{AB} \subset D_r$ entonces $\overline{AB} \leq 2r$ . Si $H$ es el pie de la altura desde $O$ hasta $\overline{AB}$ , como $OA = OB$ entonces $AH = HB$ y $AB = HB = \alpha$ . Entonces $AH = OA \operatorname{sen}(\alpha) = d \operatorname{sen}(\alpha)$ , entonces $AB = 2d \operatorname{sen}(\alpha) \leq 2r$ . Es decir $\operatorname{sen}(\alpha) \leq \dfrac{r}{d}$ .

Además, el arco $\widehat{AB}$ ( $\widehat{AB} \subset D_r$ ) cumple que $\widehat{AB} = 2d\alpha$ .

Sea $f(\alpha) = \pi \operatorname{sen}(\alpha) - \alpha$ . Esta función es continua y derivable y $f'(\alpha) = \pi \cos(\alpha) - 1$ . Si tenemos un extremo entonces $f'(\alpha) = \pi \cos(\alpha) - 1 = 0$ . Hay un único $\alpha$ para el que se cumple que $\cos(\alpha) = \frac{1}{\pi}$ con $0 \leq \alpha \leq \pi$ . Además $f(0) = 0$ y $f(\pi) = -\pi$ .

Por otro lado, sabemos que $\alpha < \frac{\pi}{2}$ pues si el arco de $C$ interior a $D_r$ fuera mayor que $\pi$ , entonces habría un diámetro de $C$ en el interior de $D_r$ . Absurdo pues $d > r$ . Además,

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{2} > 0 \quad \text{y} \quad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi - \frac{\pi}{4} > 0.$$

Si $\cos(\alpha_1) = \dfrac{1}{\pi}$ , entonces $\operatorname{sen}^2(\alpha_1) = 1 - \dfrac{1}{\pi^2}$ .

Como en el intervalo $\operatorname{sen}(\alpha_1) > 0$ , entonces $\operatorname{sen}(\alpha_1) = \sqrt{1 - \dfrac{1}{\pi^2}}$ .

$f(\alpha_1) = \sqrt{\pi^2 - 1} - \alpha_1$ que podemos ver que es positivo pues como $\cos(\alpha_1) = \dfrac{1}{\pi}$ entonces $\alpha_1 \leq \dfrac{\pi}{2}$ por lo que $f(\alpha_1) \geq 2 - \dfrac{\pi}{2} > 0$ .

Si existiera $\beta$ tal que $f(\beta) < 0$ con $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ entonces, por Bolzano, habría un cero en $(0, \beta)$ y tendríamos, por Rolle, a lo sumo un mínimo (y sería negativo) en ese intervalo. Pero ya vimos que hay un solo extremo en el intervalo $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ y éste es positivo. Entonces $f(\alpha) \geq 0$ , $\forall\, \alpha \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ .

Entonces $\pi \operatorname{sen}(\alpha) \geq \alpha$ implica que $2d\pi \operatorname{sen}(\alpha) \geq 2d\alpha$ . Pero, como $d \operatorname{sen}(\alpha) \leq r$ , entonces $2\pi d \operatorname{sen}(\alpha) \leq r2\pi$ , luego $2\pi r \geq 2d\alpha = \widehat{AB}$ como queríamos probar.

**Problema 2.** Decidir si es posible cargar dos dados (no necesariamente ambos de la misma manera) de forma tal que, al arrojarlos, todos los números desde el 2 hasta el 12 tengan la misma probabilidad de ser la suma de las dos caras superiores.

Cargar los dados significa asignar números $p_1, \ldots, p_6, q_1, \ldots, q_6$ , uno para cada cara, con $0 \le p_i, q_i \le 1$ y $\sum p_i = \sum q_1 = 1$ , que indican la probabilidad con que sale esa cara cuando se arroja el dado respectivo.

**Resolución.** (Solución de *Marcu, Alejandro* de la Facultad de Ingeniería - UBA).

Para formar el $2$ :

$$p_1 q_1 = \frac{1}{11} \quad \Rightarrow \quad p_1 \neq 0, \; q_1 \neq 0.$$

Para el $12$ :

$$p_6 q_6 = \frac{1}{11} \quad \Rightarrow \quad p_6 \neq 0, \; q_6 \neq 0.$$

Para el $7$ :

$$p_1 q_6 + p_2 q_5 + p_3 q_4 + p_4 q_3 + p_5 q_2 + p_6 q_1 = \frac{1}{11}$$

donde el primero y el último término son positivos y el resto son no negativos.

$$p_1 q_6 + p_6 q_1 \le \frac{1}{11} \quad \Rightarrow \quad p_1 q_6 < \frac{1}{11} = p_1 q_1 \quad \Rightarrow \quad q_6 < q_1.$$

Además, con el mismo razonamiento,

$$p_6 q_1 < \frac{1}{11} = p_1 q_1 \quad \Rightarrow \quad p_6 < p_1.$$

Por lo tanto, $p_6 q_6 < p_1 q_1 = \dfrac{1}{11}$ .

Se llegó a una contradicción que demuestra que no es posible cargar los dados como se pidió.

**Problema 3.** Estudiar la convergencia de la serie

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{4}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{6}\cdots$$

Si converge, calcular el valor de la suma.

**Resolución.** (Solución de *Méndez, Fernando* y *Méndez, Julián* del Instituto Balseiro).

Las sumas parciales de orden $4n$ responden a la siguiente forma:

$$S_4=\left(1+\cdots+\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}(1)$$

$$S_8=\left(1+\cdots+\frac{1}{12}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\cdots+\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

$$S_{12}=\left(1+\cdots+\frac{1}{18}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\cdots+\frac{1}{12}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right).$$

En general

$$S_{4n}=\left(1+\cdots+\frac{1}{6n}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\cdots+\frac{1}{3n}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\cdots+\frac{1}{n}\right).$$

Además, $S_{4n}<S_{4n+1}<S_{4n+2}<S_{4n+3}<S_{4n}+\dfrac{3}{6n}$ (las fracciones que se suman son menores que $\frac{1}{3n}$ ), entonces si $S_{4n}$ converge, $S_{4n+1}$ , $S_{4n+2}$ y $S_{4n+3}$ convergen al mismo límite ya que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3n}=0$ y $S_k$ convergería.

$$S_{4n}=\left(1+\cdots+\frac{1}{6n}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\cdots+\frac{1}{3n}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\cdots+\frac{1}{n}\right),$$

$$S_{4n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{3n}\right)+\left(\frac{1}{3n+1}+\cdots+\frac{1}{6n}\right).$$

Ahora probemos que $S_{4n}$ converge.

Claramente $S_n>0$ , para todo $n$ . Empleamos el criterio de la integral para convergencia de series:

$$\frac{1}{2}\int_{n+1}^{3n+1}\frac{1}{x}dx+\int_{3n+1}^{6n+1}\frac{1}{x}dx<S_{4n}<\frac{1}{2}\int_{n}^{3n}\frac{1}{x}dx+\int_{3n}^{6n}\frac{1}{x}dx.$$

Entonces,

$$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3n+1}{n+1}\right)+\ln\left(\frac{6n+1}{3n+1}\right) < S_{4n} < \frac{1}{2}\ln 3+\ln 2$$

y

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3n+1}{n+1}\right)+\ln\left(\frac{6n+1}{3n+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\ln 3+\ln 2$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} S_{4n}=\frac{1}{2}\ln 3+\ln 2.$$

Por lo que se dijo antes

$$\lim_{n\to\infty} S_{n}=\frac{1}{2}\ln 3+\ln 2.$$

Entonces la serie es convergente y converge a $\frac{1}{2}\ln 3+\ln 2$ .

**Problema 4.** El polinomio $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ verifica: $p(t) > 0$ si $t \geq 0$ . Probar que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(1+x)^m p(x)$ tiene todos sus coeficientes no negativos. [1]

**Resolución.** (Solución Oficial)

Factorizando el polinomio en $\mathbb{R}[x]$ , se puede ver que, la condición $p(t) > 0$ si $t \geq 0$ implica que el polinomio se escribe de la manera siguiente:

$$p(x) = a\left(\prod_{i=1}^{M}(x+a_i)\right)\left(\prod_{i=j}^{N}(x-b_j)^2+c_j\right),$$

con $M$ , $N \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ , $b_j \in \mathbb{R}$ , $a_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y $a$ , $c_j \in \mathbb{R}_{>0}$ .

Como el producto de dos polinomios con coeficientes no negativos da como resultado otro polinomio con coeficientes no negativos, el problema estará resuelto si probamos que, si $b$ y $c$ son números reales positivo cualesquiera, hay un entero positivo $m$ tal que

$$g(x) := (1+x)^m\left((x-b)^2+c\right)$$

tiene todos sus coeficientes no negativos.

Fijado $m$ , el polinomio $g(x)$ tiene grado $m+2$ , y dado que $(1+x)^m = \sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}x^i$ , se tiene:

$$\text{coeficientes de grado } j \text{ de } g = (b^2+c)\binom{m}{j} + \binom{m}{j-2} - 2b\binom{m}{j-1}, \tag{1}$$

con $\binom{m}{k} = 0$ , si $k \notin \{0,1,\ldots,m\}$ .

El coeficiente independiente de $g(x)$ es igual a $b^2+c$ , que es siempre positivo. Por otro lado, el coeficiente que acompaña a $x$ en $g(x)$ es $(b^2+c)m - 2b$ , que será positivo si $m > \frac{2b}{b^2+c}$ . Análogamente, el coeficiente de $x^{m+2}$ es siempre $1$ , y el de $x^{m+1}$ es $m-2b$ que será positivo si $m > 2b$ .

Supondremos a partir de ahora que $m > \text{máx}\{2b,\ 2b/(b^2+c)\}$ , y $2 \leq j \leq m$ . Escribiendo los números combinatorios que hay en (1), hay que probar que existe un $m$ suficientemente grande tal que

$$(b^2+c)\frac{m!}{j!(m-j)!} + \frac{m!}{(j-2)!(m-j+2)!} - 2b\frac{m!}{(j-1)!(m-j+1)!} > 0, \tag{2}$$

[1] Por un error de redacción, en el enunciado de la prueba figuraba como hipótesis $p(t) \geq 0$ si $t \geq 0$ , que no es condición suficiente para lo que se afirma. Se ha otorgado puntaje máximo a aquellos participantes que se dieron cuenta del error.

para todo $j$ , $2 \leq j \leq m$ . Simplificando los factores comunes, y realizando la suma de fracciones, se tiene que la inecuación (2) es equivalente a

$$(b^2+c)(m-j+2)(m-j+1)+j(j-1)-2b(j-1)(m-j+2)>0,$$

y de aquí se deduce:

$$2b<(b^2+c)\frac{m-j+1}{j-1}+\frac{j}{m-j+2},$$

o, equivalentemente,

$$2b+b^2+c<(b^2+c)\frac{m}{j-1}+\frac{j}{m-j+2}. \tag{3}$$

Para cada $m$ positivo, consideramos la función $f_m\colon [2,m]\to\mathbb{R}$ dada por

$$f_m(x):=(b^2+c)\frac{m}{x-1}+\frac{x}{m-x+2}.$$

$f_m$ es diferenciable en todo el intervalo, y se tiene

$$f_m'(x)=\frac{2+m}{(m+2-x)^2}-\frac{(b^2+c)m}{(x-1)^2}.$$

Sea $s:=b^2+c$ . Al plantear $f_m'=0$ para encontrar los puntos críticos, hallamos:

$$x_{1,m}:=1+\frac{(m+1)\sqrt{sm}}{\sqrt{sm}-\sqrt{m+2}}$$

y

$$x_{2,m}:=1+\frac{(m+1)\sqrt{sm}}{\sqrt{sm}+\sqrt{m+2}}.$$

Como $\sqrt{sm}>\sqrt{sm}-\sqrt{m+2}$ , se tiene que,

- Si $s\leq 1$ , $x_{1,m}$ será menor que $2$ , así que $x_{1,m}\notin[2,m]$ ;
- Si $s>1$ , entonces $x_{1,m}\geq 1+(m+1)$ para valores grandes de $m$ , así que $x_{1,m}$ tampoco pertenece a este intervalo.

Por otro lado, debido a la continuidad de $f_m'$ , y dado que $f_m'(2)=-\frac{sm^3-m-2}{m^2}$ será negativo para valores grandes de $m$ , y que $f_m'(m)=\frac{-4sm-3m+2+m^3}{4(m-1)^2}$ , será positivo para valores grandes de $m$ , concluimos que el otro punto crítico, $x_{2,m}$ , está en el intervalo $[2,m]$ para valores grandes de $m$ . Es más, este análisis nos dice que $f_m$ decrece en el intervalo $[2,x_{2,m}]$ , y crece en el intervalo $[x_{2,m},m]$ . Luego, la inecuación (3) quedará probada para todo

$j \in \{2, 3, \ldots, m\}$ , si encontramos algún $m$ tal que $2b + b^2 + c < f_m(x_{2,m})$ . Para ello, alcanza con ver que $2b + b^2 + c < \lim_{m\to\infty} f_m(x_{2,m})$ . Calculemos

$$f_m(x_{2,m}) = \frac{\sqrt{sm(m+2)}(sm+1) + 2sm^2 + 4sm}{\sqrt{sm(m+2)}(m+1)}$$

de lo cual se deduce que $\lim_{m\to\infty} f_m(x_{2,m}) = s + 2\sqrt{s}$ , o sea que hay que verificar que

$$2b + b^2 + c < s + 2\sqrt{s} = b^2 + c + 2\sqrt{b^2 + c},$$

lo cual es inmediato.

**Problema 5.** ¿Para qué valores de $n \in \mathbb{N}$ se cumple que el volumen $n$ - dimensional de

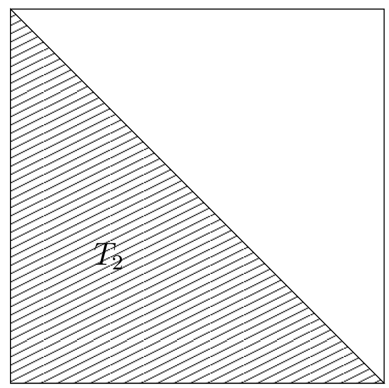
$$T_n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n \ : \ x_i + x_{i+1} < 1, \ i = 1, \ldots, n-1\}$$

es igual a $\frac{1}{n}$ ?

**Resolución.** (Solución de *Shmerkin, Pablo* de la Fac. de Cs. Exactas y Naturales - UBA).

Sea $V(n)$ el volumen de $T_n$ . Es obvio que $V(1) = 1$ .

El dibujo muestra que $V(2) = \dfrac{1}{2}$ .

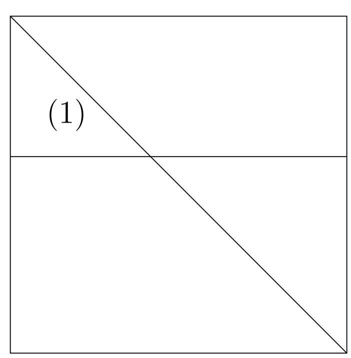



Calculo $V(3)$ usando Fubini (más precisamente el principio de Cavalieri).

$$V(3) = \int_0^1 \text{Area}(T_3 \cap \{x_3 = t\}) dt$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} T_3 \cap \{x_3 = t\} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x, y \leq 1, \ x + y < 1, \ y + t < 1\} = \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq 1, \ x + y < 1, \ 0 \leq y < 1 - t\right\} \end{aligned}$$




(1) = triangulito

Luego,

$$\text{Area}(T_3 \cap \{x_3 = t\}) = \text{Area}(T_2) - \text{Area}(\text{triangulito}) = \frac{1}{2} - \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2}(1-t^2).$$

Entonces,

$$V(3) = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-t^2)dt = \frac{1}{3}.$$

Paso, ahora, a acotar $V(4)$ .

Sea $U := \{(x_1, \ldots, x_4) \in [0,1]^4 \ : \ x_1 + x_2 < 1, \ x_3 + x_4 < 1\}$ .

Ahora bien, $U$ es el producto cartesiano de dos conjuntos iguales. A saber,

$$\big\{(x,y) \in [0,1]^2 \ : \ x + y < 1\big\} = T_2.$$

Luego, el volumen de $U$ es menor o igual que $V(2) \cdot V(2) = V(2)^2 = \dfrac{1}{4}$ .

Además, el volumen de $U \setminus T_4$ es mayor que $0$ . En efecto, si

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x, y \leq 1, \ x + y < 1, \ y > \frac{1}{2}\right\},$$

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x, y \leq 1, \ x + y < 1, \ x > \frac{1}{2}\right\} \quad \text{y}$$

$$C = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in [0,1]^4 \ : \ x_1 + x_2 < 1, \ x_3 + x_4 < 1, \ x_2 > \frac{1}{2}, \ x_3 > \frac{1}{2}\right\},$$

es claro que:

- $C \subset U \setminus T_4$ .
- $C = A \times B$ .

Luego, $\text{Vol}(U \setminus T_4) \geq \text{Vol}(C) = \text{Vol}(A)\text{Vol}(B) > 0$ .

Entonces $V(4) < \frac{1}{4}$ .

Paso, ahora, al caso $n = 5$ .

Sean

$$U = \big\{(x_1, x_2) \in [0,1]^2 \ : \ x_1 + x_2 < 1\big\} = T_2$$

y

$$U' = \big\{(x_3, x_4, x_5) \in [0,1]^3 \ : \ x_3 + x_4 < 1, \ x_4 + x_5 < 1\big\} = T_3.$$

Es claro que $T_5 \subset U \times U'$ . Luego, $V(5) \leq \mathrm{Vol}(U)\mathrm{Vol}(U') = V(2)V(3) = \frac{1}{6}$ . Es decir, $V(5) \leq \frac{1}{6} < \frac{1}{5}$ .

Finalmente, sea $n \geq 6$ . Pruebo por inducción que $V(n) < \frac{1}{n}$ .

Si $n$ es par, entonces, razonando como antes, $T_n \subset U \times U'$ , con $U$ y $U'$ congruentes a $T_{\frac{n}{2}}$ . De donde, $V(n) \leq V\left(\frac{n}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{2}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}\frac{4}{n} < \frac{1}{n}$ , utilizando los cálculos hechos para $n \leq 5$ e inducción.

Si $n$ es impar, digamos $n = 2k+1$ , se hace como en el caso $n = 5$ .

$T_n \subset U \times U'$ con $U$ congruente a $T_k$ y $U'$ a $T_{k+1}$ . Luego:

$$V(n) \leq V(k)V(k+1) \leq \frac{1}{k}\frac{1}{k+1} = \frac{1}{2k+1}\frac{2k+1}{k^2+k} < \frac{1}{2k+1}$$

si $k \geq 2$ .

En conclusión, $V(n) = \frac{1}{n}$ si $n = 1$ , $2$ , $3$ y $V(n) < \frac{1}{n}$ si $n > 3$ . Por lo tanto, $\{1,2,3\}$ es el conjunto buscado.

**Problema 6.** Una acción $\phi$ de un grupo $G$ en un conjunto $S$, es un morfismo de grupos $\phi : G \to S!$, donde $S!$ es el grupo de biyecciones de $S$. Si $x \in G$, $s \in S$, denotamos $\phi(x) = \phi_x \in S!$, es decir $\phi_x : S \to S$ es una biyección.

Dada una acción $\phi$ de $G$ en $S$, queda determinada también una acción $(\phi, \phi)$ de $G$ en $S \times S$ definida por $\phi_x(s,t) := (\phi_x(s), \phi_x(t))$.

Si $s_0 \in S$, la *órbita* de $s_0$ es el conjunto $\Gamma_{s_0} := \{s \in S / \exists x \in G : s = \phi_x(s_0)\}$. Se sabe que las órbitas de distintos elementos resultan iguales o disjuntas. Una acción con una sola órbita se llama *transitiva*.

(a) Dar un ejemplo de una acción transitiva $\phi$ en un conjunto infinito $S$ tal que la acción $(\phi, \phi)$ en $S \times S$ tenga un número infinito de órbitas.

(b) Dar un ejemplo de una acción transitiva $\phi$ en un conjunto infinito $S$ tal que la acción $(\phi, \phi)$ en $S \times S$ tenga solo un número finito de órbitas.

**Resolución.** (Solución de *Baragatti, Esteban* y *Ruiz, Mariano* de la Fac. de Cs. Exactas - UNLP).

(a) Sean $S = \mathbb{Z}$ y $G = \mathbb{Z}$, los números enteros.

Para cada $z \in \mathbb{Z}$, sea $\phi_z \colon S \to S$ tal que $\phi_z(t) = t + z$. $\phi$ es una biyección.

Por lo tanto, $\phi \colon \mathbb{Z} \to S!$ es una acción. (Es un morfismo de grupos: $\phi_{z_1+z_2} = \phi_{z_1} \circ \phi_{z_2}$ .)

Es transitiva porque $\Gamma_0 = S$ pero en $S \times S$ hay infinitas órbitas porque si $n \neq m$, $\Gamma_{(1,n)} \neq \Gamma_{(1,m)}$ ya que, si no son distintas, tienen que ser iguales, es decir $(1,n) \in \Gamma_{(1,m)}$ y, entonces, $(1,n) = (1+z, n+z)$ para algún $z \in \mathbb{Z}$ y esto implica que $z = 0$.

(b) Sean $S = [0,1]$, el intervalo de números reales, y $G = S!$ las biyecciones.

Para cada $f \in G$, $\phi_f = f$.

La acción es la identidad y es transitiva porque $\Gamma_0 = S$ pues:

dado $s \in S$, tomamos $f_s(x) = \begin{cases} x & x \neq 0 \text{ y } x \neq s \\ s & x = 0 \\ 0 & x = s \end{cases}$

$\phi_{f_s}(0) = s \quad \Longrightarrow \quad s \in \Gamma_0$.

Resulta que en $S \times S$ hay sólo dos órbitas:

$$\Gamma_{(0,1)} = \{(x,y) \ : \ x = f(0) \ \wedge \ y = f(1)\},$$

$$\Gamma_{(0,0)} = \{(x,y) \ : \ x = f(0) \ \wedge \ y = f(0)\}.$$

$$\text{O sea, si } \ s = t \quad \implies \quad f_{(s,t)}(x) = \begin{cases} x & s \neq x \\ s & x = 0 \\ 0 & x = s \end{cases}$$

$$\text{y si } \ s \neq t \quad \implies \quad f_{(s,t)}(x) = \begin{cases} x & x \neq s \text{ y } x \neq t \\ s & x = 0 \\ t & x = 1 \\ 0 & x = s \\ 1 & x = t \end{cases}$$