Competencia Matemática E. Paenza

14^0 REALIZACIÓN — 26 DE AGOSTO DE 1999

Participante N^0:

---

1 - Decidir si existe o no una matriz "infinita" de números enteros positivos $A := (a_{i,j})_{1\leq i,j<\infty}$, que verifique la siguiente propiedad: todo entero positivo aparece exactamente una vez en cada "fila" y en cada "columna" de A.

---

2 - Sea p un entero, $p > 1$. Consideramos la sucesión de números reales $(x_n)_{n\geq 1}$ definida como

$$x_n := \left(\sum_{k=n+1}^{2n} \sqrt[p]{1+\frac{1}{k}} \right) - n$$

Estudiar la convergencia de esta sucesión. Si converge, calcular su límite.

---

3 - Probar que, cualquiera sea $l > 0$, hay un par de números enteros coprimos (a, b) tal que ningún punto entero del interior del cuadrado con vértices (a, b), $(a+l, b)$, $(a, b+l)$, $(a+l, b+l)$ tiene coordenadas coprimas.

---

4 - ¿Existe un polinomio $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ con más de un término tal que la cantidad de términos de $p(x)^2$ sea menor o igual que la cantidad de términos de $p(x)$?

---

5 - Sea C un conjunto cerrado de $\mathbb{R}^2$ tal que, cualquiera sea $x \in \mathbb{R}^2$, existe un único $y \in C$ tal que

$$\|x - y\| = dist(x, C).$$

Probar que C es un conjunto convexo.

Nota:Un conjunto K se dice convexo si para cada par de puntos $k_1, k_2 \in K$, el segmento $\overline{k_1k_2}$ está contenido en K.

---

6 - Dados $n+1$ polinomios de grado n $P_0(x), P_1(x), \dots P_n(x) \in \mathbb{R}[x]$, se sabe que existen intervalos disjuntos $I_0, I_1, \cdots I_n \subset \mathbb{R}$ tal que cada $P_j(x)$ tiene exactamente n raíces distintas en I_j, $j = 0, 1, \cdots, n$. Probar que entonces

$$\det \begin{pmatrix} P_0(x) & P_1(x) & \cdots & P_n(x) \\ P_0'(x) & P_1'(x) & \cdots & P_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_0^{(n)}(x) & P_1^{(n)}(x) & \cdots & P_n^{(n)}(x) \end{pmatrix}$$

es un número real distinto de 0.

Nota: $P^j(x)$ es la derivada $j-$ésima del polinomio $P(x)$.

Nota: Se asigna puntaje no nulo a argumentos conducentes a una solución, casos particulares, respuestas correctas no justificadas, etc. Por otro lado, para obtener el máximo puntaje en un ejercicio, es necesario justificar apropiadamente la respuesta.