Competencia Matemática Ernesto Paenza

XIII Realización — Año 1998

Participante N^o:

Problemas

1. Sea G un abierto del plano real y $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua de manera que $\int_G f(x, y) dx dy = 0$.

Pruebe que existe al menos una recta que divide G en dos partes G_1 y G_2 de área no nula tal que $G = G_1 \cup G_2$ y

$$\int_{G_1} f(x, y) dx dy = \int_{G_2} f(x, y) dx dy = 0.$$

2. a) Se dibujan n rectas en el plano, de forma tal que x_1 son paralelas entre sí en cierta dirección, x_2 paralelas entre sí en una segunda dirección, $\dots$, y x_k paralelas entre sí en una k -ésima dirección, de manera tal que ninguna terna de rectas se corte en un punto. Encuentre una fórmula que calcule el número de intersecciones.

b) Dibuje 17 rectas en las condiciones anteriores tal que sus intersecciones sean exactamente 101 puntos.

3. Sea $A_n = \{0, 1, 2, \dots, 7^n - 1\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Una sucesión $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $a_n \in A_n$ se dice **coherente** si $a_{n+1} \equiv a_n \pmod{7^n}$. Por ejemplo $a = (5, 12, 61, \dots)$ es el comienzo de una. Dada una sucesión a se denota por a^2 a la sucesión

$$a^2 = (a_n^2 \pmod{7^n})_{n \in \mathbb{N}}$$

En el ejemplo $a^2 = (4, 46, 291, \dots)$.

Observe que si a es coherente, entonces a^2 también.

Convengamos en llamar 2 a la sucesión constante $2 = (2, 2, 2, \dots, 2, \dots)$.

a) Demuestre que existe una solución coherente a la ecuación $a^2 = 2$ y exhiba sus cuatro primeros términos.

b) Demuestre que existen sólo dos soluciones distintas de la misma ecuación.

4. Se tienen dos números enteros positivos a y b coprimos. Sean

$$x = \left[\frac{a}{b} \right] + \left[\frac{2a}{b} \right] + \left[\frac{3a}{b} \right] + \dots + \left[(b-1) \frac{a}{b} \right]$$

$$y = \left[\frac{b}{a} \right] + \left[\frac{2b}{a} \right] + \left[\frac{3b}{a} \right] + \dots + \left[(a-1) \frac{b}{a} \right]$$

donde $[\]$ indica la parte entera. Pruebe que $x + y = (a - 1)(b - 1)$.

5. Sean a y b dos números reales positivos. A partir de ellos se definen recursivamente las siguientes sucesiones:

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad y$$

$$b_1 = b, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n}$$

a) Probar que existen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ y que coinciden.

b) Sea ℓ el límite común a estas sucesiones. Probar que

$$\frac{\pi}{2\ell} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}}.$$

6. Sea σ una permutación de los n números $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Decimos que $k \in \{2, 3, \dots, n-1\}$

es un **máximo** si $\begin{cases} \sigma(k-1) < \sigma(k) \\ \sigma(k+1) < \sigma(k) \end{cases}$,

$k = 1$ es un **máximo** si $\sigma(2) < \sigma(1)$ y

$k = n$ es un **máximo** si $\sigma(n-1) < \sigma(n)$.

Similarmente se define cuando k es un **mínimo**.

Una **secuencia** es el intervalo entre un máximo y un mínimo (σ es decreciente) o entre un mínimo y un máximo (σ es creciente).

Ejemplo: 78125436 tiene tres máximos, 8, 5 y 6, tres mínimos, 7, 1 y 3 y cinco secuencias, 78, 81, 125, 543 y 36.

Sea $p_{n,s}$ el número de permutaciones de n elementos que tienen s secuencias. Calcular $p_{8,5}$, $p_{8,6}$ y $p_{8,7}$.

(Pista: Observar que $p_{n,1} = 2$ para todo n , y que $p_{n,n} = 0$ para todo n . Encontrar una recurrencia para $p_{n,s}$ y luego generar un triángulo similar al caso del triángulo de Pascal.)