

Participante N<sup>o</sup>:

Problemas

1. Para cada número natural  $n$ , llamemos  $S(n)$  a la suma de los cuadrados de los dígitos de  $n$ . Consideremos la sucesión

$$n, S(n), S^{(2)}(n), \dots, S^{(k)}(n), \dots$$

donde  $S^{(j)} = \underbrace{S \circ S \dots \circ S}_{j \text{ veces}}$  indica composición. Encuentre todos los valores de  $n$  para los cuales existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $S^{(k)}(n) = n$ .

---

2. Decida si existe

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} \sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k}.$$

En caso afirmativo, calcúlelo. Si no, explique su respuesta.

---

3. Sea  $f$  un polinomio con coeficientes enteros. Supongamos que existen números enteros distintos  $x_1, \dots, x_n$  tales que

$$\begin{cases} f(x_i) = x_{i+1} & i = 1, \dots, n-1 \\ f(x_n) = x_1 \end{cases}$$

Pruebe que  $n = 1$  o  $n = 2$ .

---

4. Sea  $f$  un polinomio con coeficientes complejos. Si  $P$  es un polígono convexo que contiene a todas las raíces de  $f$ , pruebe que  $P$  contiene también a todas las raíces de  $f'$ .

---

5.

- i. ¿Cuántos lados puede tener un polígono regular en  $\mathbb{R}^2$  si todos sus vértices tienen coordenadas enteras?
  - ii. Consideremos ahora polígonos en  $\mathbb{R}^3$ , es decir polígonos contenidos en un plano de  $\mathbb{R}^3$ . ¿Cuántos lados puede tener un polígono regular en  $\mathbb{R}^3$  si todos sus vértices tienen coordenadas enteras?
- 

6. Se tiene un rectángulo  $R$  en el plano subdividido en un número finito de subrectángulos. Cada uno de éstos tiene (por lo menos) un lado cuya longitud es entera. Pruebe entonces que  $R$  también tiene (por lo menos) un lado con longitud entera.