**Competencia Matemática E. Paenza**

DÉCIMA REALIZACIÓN — 24 DE AGOSTO DE 1995

Participante N$^0$:

---

1 - ¿Cuáles son las primeras 6.000 cifras decimales de $\left(\frac{1000}{999}\right)^2$?

---

2 - Para cada $k$ entero positivo, notemos por $\mathcal{P}_k$ al conjunto de polinomios con coeficientes racionales de grado menor o igual que $k$ que toman valores enteros en todos los números enteros (junto con el polinomio nulo).
Sea

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)}{k!}.$$

a) Demostrar que dado un polinomio $P \in \mathbb{Q}[x]$, $P \in \mathcal{P}_k$ si y sólo si $P$ admite una escritura de la forma

$$P(x) = a_o + a_1\binom{x}{1} + a_2\binom{x}{2} + \dots + a_k\binom{x}{k}, \quad a_j \in \mathbb{Z}.$$

b) Si $r_k = \text{mín}\{2^m / \, 2^m > k\}$ denota la menor potencia de 2 estrictamente mayor que $k$, probar que para todo polinomio $P \in \mathcal{P}_k$ la sucesión $\{(-1)^{P(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es periódica, con período a lo sumo $r_k$.

---

3 - Si $h_1, h_2, h_3$ son las tres alturas de un triángulo y $r$ es el radio del círculo inscripto en el triángulo, probar la desigualdad:

$$9r \leq h_1 + h_2 + h_3$$

y verificar que la igualdad vale solamente para los triángulos equiláteros.

---

4 - Tres personas $a, b$ y $c$ deben recorrer 100 km y cuentan con una sola bicicleta. Mientras que $a$ y $b$ caminan a 1 km por hora y andan en bicicleta a 6 km por hora, $c$ camina a 2 km por hora y anda en bicicleta a 8 km por hora. Se sabe que:
i) salen los 3 juntos y nunca se paran
ii) $a$ y $b$ cambian de andar en bicicleta a andar a pie (o viceversa) una sola vez
iii) $a$ y $b$ llegan simultáneamente.
¿Cuál es el mínimo tiempo en el que los tres pueden recorrer el trayecto?

---

5 - Para cada ángulo $\varphi$, $0 < \varphi < \pi$, llamemos $z_0$ y $z_1$ a las soluciones de la ecuación

$$z + \frac{1}{z} = 2(\cos\varphi + i\,\text{sen}\,\varphi).$$

a) Demostrar

i) $|z_0 - i| = |z_1 - i|$

ii) $z_0, z_1$ y $-i$ están alineados.

b) Describir las trayectorias en el plano complejo de $z_0$ y $z_1$ a medida que $\varphi$ varía entre 0 y $\pi$.

---

6 - Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definimos la sucesión:

$$x_0 = 1, \qquad x_{n+1} = f(x_n).$$

Sea ahora $f$ tres veces diferenciable y tal que $\lim\limits_{n\to\infty} (n.x_n^2) = 1$. Está claro que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, de donde se sigue que $f(0) = 0$ para cualquier tal $f$.

a) Demostrar que $f'(0)$ está determinado y calcularlo.

b) (más difícil) Demostrar que $f''(0)$ está determinado y calcularlo,

c) (mucho más difícil) Demostrar que $f'''(0)$ está determinado y calcularlo.

---

Nota: Se asigna puntaje no nulo a argumentos conducentes a una solución, casos particulares, respuestas correctas no justificadas, etc. Por otro lado, para obtener el máximo puntaje en un ejercicio, es necesario justificar apropiadamente la respuesta.