Competencia Matemática E. Paenza

QUINTA REALIZACIÓN — 28 DE AGOSTO DE 1990

Participante N ^{0} :

Problema 1. Un cuadrado de lado $2a$ se mueve siempre dentro del primer cuadrante del plano (x, y) y de modo tal que tiene siempre dos vértices consecutivos sobre el eje x y el eje y respectivamente. Hallar, con demostración, la trayectoria que describe el centro del cuadrado.

Problema 2. Sean A y E vértices opuestos de un octógono regular. Una rana está en el vértice A y comienza a saltar de vértice en vértice, con las siguientes dos reglas:

I) Desde un vértice cualquiera del octógono distinto de E, puede saltar a cualquiera de los dos vértices adyacentes.

II) Cuando llega al vértice E, la rana deja de saltar y se queda allí.

Para cada número natural n, sea a_n el número de caminos distintos que puede seguir la rana, con *exactamente* n saltos, terminando en E.
Probar que: $a_{2n-1} = 0$ y $a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left((2+\sqrt{2})^{n-1} - (2-\sqrt{2})^{n-1}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Problema 3. Un número natural n se dice *bueno* si y sólo si existen números naturales no necesariamente distintos $k_1, \ldots, k_s$ tales que $n = k_1 + \cdots k_s$ y $\frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_s} = 1$, y un número se dice *malo* si no es bueno.
Por ejemplo, 10 es bueno porque $10 = 4+4+2$ y $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2} = 1$.
La lista completa de los números malos hasta 69 es: 2, 3, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 14, 15, 19, 21, 23.
Demuestre que todos los números naturales mayores que 69 son buenos.

Problema 4. Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales positivos.

a) Decidir la verdad o falsedad de cada una de las siguientes afirmaciones (con demostración o contraejemplo según corresponda):

i) Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ converge, entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = +\infty$.

ii) Si $\exists\, \kappa \in \mathbb{N} : (a_{n+1} - a_n) \leq \kappa$, $\forall n \geq 1$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ diverge.

b) Dar un ejemplo donde

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \text{ diverja y } \lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = +\infty.$$

Problema 5. Sea $p(z) = z^2 + az + b$ $(a, b \in \mathbb{C})$ tal que

$$|p(z)| = 1, \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \text{ con } |z| = 1.$$

Demostrar que $p(z) = z^2$ (es decir, $a = b = 0$).

Problema 6. Encontrar todas las funciones continuas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que
$f(x+y)\cdot f(x-y) = f(x)^2 - f(y)^2$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.