Competencia Matemática Ernesto Paenza

23° REALIZACIÓN — 28 DE AGOSTO DE 2008

Participante N°:

---

1 - Sea $f \in \mathbb{R}[x,y,z]$ un polinomio de grado menor o igual que 2 que toma valores enteros en los vértices del cubo unitario $0 \leq x,y,z \leq 1$. Probar que f toma valores impares en una cantidad par de vértices del cubo.

Nota: Un polinomio en $\mathbb{R}[x,y,z]$ de grado menor o igual que 2 es de la forma $a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7x^2 + a_8y^2 + a_9z^2$, con $a_0, \ldots, a_9 \in \mathbb{R}$.

---

2 - Determinar el límite de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$x_n = \frac{n\pi}{4} - \sum_{j=1}^{n} \frac{n^2}{n^2+j^2}.$$

---

3 - Sea $\mathcal{S}$ una colección de n intervalos cerrados en la recta real. Llamamos *altura en* $\mathcal{S}$ a una función biyectiva $a : \mathcal{S} \to \{1,2,\ldots,n\}$. Dada una altura en $\mathcal{S}$, decimos que $s \in \mathcal{S}$ *puede ver a* $s' \in \mathcal{S}$ si $a(s) < a(s')$ y existe un punto $p \in s \cap s'$ tal que $p \notin t$ para todo $t \in \mathcal{S}$ con $a(s) < a(t) < a(s')$. Probar que existe una altura en $\mathcal{S}$ para la cual cada intervalo en $\mathcal{S}$ puede ver a lo sumo a otros tres.

---

4 - Probar que para cada $r \in \mathbb{N}$ existe una potencia de 2 tal que cada uno de los últimos r dígitos de su representación decimal es o bien un 1 o bien un 2.

---

5 - Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ y γ números complejos de módulo 1. Probar que existen dos matrices unitarias(1) $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con autovalores $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y $\beta_1, \ldots, \beta_n$ respectivamente, y tales que γ es un autovalor de BA si y sólo si, en el plano complejo, la cápsula convexa(2) de los puntos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ y la cápsula convexa de los puntos $\gamma\overline{\beta}_1, \ldots, \gamma\overline{\beta}_n$ tienen al menos un punto en común.

(1) $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se dice *unitaria* si $UU^* = U^*U = I$, donde U^* denota la transpuesta conjugada.
(2) La *cápsula convexa* de $\xi_1, \ldots, \xi_n$ es el conjunto $\{\sum_{i=1}^n \lambda_i\xi_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}\ \forall i \ \text{ y } \ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\}$.

---

6 - Dados $d \in \mathbb{N}$ y $b \in \mathbb{Z}$, se define $A(d,b) = \{dx + b \mid x \in \mathbb{Z}\}$. Probar que:

(1) Si $\mathbb{Z}$ es la unión disjunta de los conjuntos $A(d_1,b_1), A(d_2,b_2), \ldots, A(d_k,b_k)$, entonces $\sum_{j=1}^k \frac{1}{d_j} = 1$.

(2) Si $\mathbb{Z}$ es la unión disjunta de $k > 1$ conjuntos $A(d_1,b_1), A(d_2,b_2), \ldots, A(d_k,b_k)$ tales que $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_k$ y $d_i = d_{i+1}$ para un único i $(1 \leq i \leq k-1)$, entonces $d_j = 2^j$ para todo $1 \leq j \leq k-1$ y $d_k = 2^{k-1}$.

Nota: Se asigna puntaje no nulo a argumentos conducentes a una solución, casos particulares, respuestas correctas no justificadas, etc. Por otro lado, para obtener el máximo puntaje en un ejercicio, es necesario justificar apropiadamente la respuesta.