Competencia Matemática Ernesto Paenza

21^0 REALIZACIÓN — 30 DE AGOSTO DE 2006

Participante N^0:

---

1 - Sea $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$ un conjunto finito ordenado con $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Se consideran las palabras construidas con el alfabeto X ordenadas como en un diccionario de acuerdo al orden de X (por ejemplo, $a_1 < a_1a_1a_2 < a_1a_2 < a_2 < a_2a_1 < a_2a_1a_1$).

Una palabra es *linda* si tiene una sola letra o si al cortarla en dos partes en cualquier lugar, la palabra que queda a la derecha del corte es mayor que la palabra original. Por ejemplo, $a_1a_2a_1a_2a_3$ es linda, porque todas las palabras $a_2a_1a_2a_3$, $a_1a_2a_3$, a_2a_3 y a_3 son mayores que $a_1a_2a_1a_2a_3$; en cambio, $a_1a_2a_1a_2$ no es linda, porque $a_1a_2 < a_1a_2a_1a_2$.

Probar que toda palabra linda de longitud mayor que 1 se puede cortar de manera que tanto a la izquierda como a la derecha del corte queden dos palabras lindas. Por ejemplo, $a_1a_2a_1a_2a_3$ se puede cortar como $a_1a_2|a_1a_2a_3$ y tanto a_1a_2 como $a_1a_2a_3$ son lindas.

---

2 - Para $r = 1, \ldots, n$ se define $M_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como sigue: si las coordenadas de $(x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n$ se ordenan de manera no decreciente, $M_r(x_1, \ldots x_n)$ es el número que ocupa el r-ésimo lugar en este orden. Por ejemplo, $M_1(x_1, \ldots, x_n) = \min\{x_1, \ldots, x_n\}$ y $M_n(x_1, \ldots, x_n) = \max\{x_1, \ldots, x_n\}$ para todo $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Probar que

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 M_r(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n = \frac{r}{n+1}.$$

---

3 - Un *cuadrado ultrasimétrico* de suma n es una matriz $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq d} \in \mathbb{N}^{d \times d}$ tal que para cada permutación $\pi : \{1, \ldots, d\} \to \{1, \ldots, d\}$ vale $\sum_{1 \leq i \leq d} m_{i,\pi(i)} = n$ (en otras palabras, para cualquier elección de d elementos de la matriz M tal que no contiene dos coeficientes de una misma fila o una misma columna, la suma es n).

1. ¿Para qué valores de $d \in \mathbb{N}$ existe un cuadrado ultrasimétrico en $\mathbb{N}^{dxd}$ cuyas entradas son $1, 2, \ldots, d^2$?
2. Calcular cuántos cuadrados ultrasimétricos de suma n hay en $\mathbb{N}^{d \times d}$.

---

4 - Sea $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ una transformación $\mathbb{C}-$lineal, y sea $\widehat{\varphi}$ la misma función φ pero considerada como transformación $\mathbb{R}$-lineal de $\mathbb{R}$-espacios vectoriales de dimensión $2n$. Demostrar que $\det(\widehat{\varphi})$ es un número real no negativo, donde por $\det(\widehat{\varphi})$ entendemos el determinante de la matriz de $\widehat{\varphi}$ en cualquier base de $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

---

5 - Sean r_1, r_2, $r_3 \in \mathbb{N}$ y sea $f \in \mathbb{Z}[x]$ el polinomio $f = (1-x)^{r_1}(1-x^2)^{r_2}(1-x^3)^{r_3}$. Probar que la suma de los valores absolutos de los coeficientes de f es mayor o igual que $2^{r_3}\sqrt{3^{r_2}}$.

---

6 - Calcular $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + x^{n+1}}{1 + x^n} \right)^{x^n}$.

Nota: Se asigna puntaje no nulo a argumentos conducentes a una solución, casos particulares, respuestas correctas no justificadas, etc. Por otro lado, para obtener el máximo puntaje en un ejercicio, es necesario justificar apropiadamente la respuesta.