

Competencia Matemática Ernesto Paenza

19⁰ REALIZACIÓN — 26 DE AGOSTO DE 2004

Participante N^o:

1 - Sea n un entero positivo.

i) ¿De cuántas maneras se puede escribir n como suma de números enteros consecutivos?

Ejemplo: si $n = 3$, las maneras son cuatro: $3, 1+2, 0+1+2, (-2)+(-1)+0+1+2+3$.

ii) ¿De cuántas maneras se puede escribir n como suma de números enteros positivos consecutivos?

2 - Para cada $k \in \mathbb{N}$, consideremos el polinomio $f_k = \prod_{i=0}^{k-1} (x - i)$. Se definen los números $S(n, k)$ por la igualdad:

$$x^n = \sum_{k=1}^n S(n, k) f_k.$$

i) Probar que $S(n, k)$ es un entero positivo $\forall n \in \mathbb{N}, \forall 1 \leq k \leq n$.

ii) Probar que n es primo si y solo si $n/S(n, k) \forall k = 2, \dots, n-1$.

3 - Sean T un triángulo equilátero cuyos lados miden 1, o el centro de T y C el conjunto de todos los puntos de T que están más cerca de o que del borde de T . Calcular el área de C .

4 -

i) Dados $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{R}^2$, consideremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & 0 & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 \end{pmatrix}$$

donde $d_{ij} = \|p_i - p_j\|^2$. Probar que si $p_1, \dots, p_4$ no están alineados, los cuatro puntos están en una circunferencia si y solo si $\det(A) = 0$.

ii) Sean ahora $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 \in \mathbb{R}^3$ y se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} \\ d_{21} & 0 & d_{23} & d_{24} & d_{25} \\ d_{31} & d_{32} & 0 & d_{34} & d_{35} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 & d_{45} \\ d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} & 0 \end{pmatrix}$$

donde, como antes, $d_{ij} = \|p_i - p_j\|^2$. Probar que si $p_1, \dots, p_5$ no están en un mismo plano, los cinco puntos están en una esfera si y solo si $\det(A) = 0$.

5 - Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y estrictamente creciente, tal que $f(0) < 0$ y $f(1) > 0$. Supongamos que la única raíz r de f en $[0, 1]$ es un número irracional. Sea x_n la sucesión generada por el método de bisección para hallar r , o sea $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{4}$ si $f(\frac{1}{2}) > 0$ ó $x_2 = \frac{3}{4}$ si $f(\frac{1}{2}) < 0$, etc. Sea $e_n := |x_n - r|$. Hallar el radio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} e_n X^n$.

6 - Decidir si existen o no polinomios de dos variables $p(x, y), q(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ tales que si se considera la función $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, F(x, y) = (p(x, y), q(x, y))$, la imagen de F es $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Nota: Se asigna puntaje no nulo a argumentos conducentes a una solución, casos particulares, respuestas correctas no justificadas, etc. Por otro lado, para obtener el máximo puntaje en un ejercicio, es necesario justificar apropiadamente la respuesta.