$\boxed{\textbf{Competencia Matemática E. Paenza}}$

DÉCIMA REALIZACIÓN — RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

**Problema 1.** ¿Cuáles son las primeras 6.000 cifras decimales de $\left(\frac{1000}{999}\right)^2$?

**Resolución.** Solución de *Diego Maldonado* y *Pablo Andrés Rey* de la Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba.

Notemos que

$$\left(\frac{1000}{999}\right)^2 = \left(1+\frac{1}{999}\right)^2 = 1+\frac{2}{999}+\left(\frac{1}{999}\right)^2. \tag{0}$$

Por un lado $\frac{2}{999} = \sum_1^\infty 2(1000)^{-n}$. (1)

Por otro lado, calculemos $\left(\frac{1}{999}\right)^2$. Consideremos la función $f(x) = \left(\frac{1}{1000-x}\right)^2$. Notando que $f^{(n)}(x) = (n+1)!(1000-x)^{-(n+2)}$, el desarrollo en serie de potencias de $f$, válido en $|x| < 1000$, es $f(x) = \sum_0^\infty (n+1)(1000)^{-(n+2)}x^n$.

En particular, para $x = 1$

$$f(1) = \left(\frac{1}{999}\right)^2 = \sum_1^\infty (n-1)(1000)^{-n}. \tag{2}$$

De (0), (1) y (2)

$$\left(\frac{1000}{999}\right)^2 = 1+\sum_1^\infty 2(1000)^{-n} + \sum_1^\infty (n-1)1000^{-n} = \sum_0^\infty (n+1)1000^{-n}.$$

Para calcular las primeras 6000 cifras decimales, basta sumar hasta $n = 2001$, pues la ´´cola´´

$$\sum_{2002}^\infty (n+1)1000^{-n} = \frac{1}{1000^{2002}}\sum_0^\infty (2002+n+1)1000^{-n} =$$
$$= \frac{1}{1000^{2002}}\left(2002\sum_0^\infty 1000^{-n} + \sum_0^\infty (n+1)1000^{-n}\right)$$
$$< \frac{2003}{1000^{2002}}\sum_0^\infty (n+1)(1000)^{-n} < \frac{4006}{1000^{2002}}.$$

Calculemos esa suma,

$$\sum_{0}^{2001}(n+1)1000^{-n} = 1+\sum_{1}^{998}(n+1)1000^{-n}+\sum_{999}^{1998}(n+1)1000^{-n}+\sum_{1999}^{2001}(n+1)1000^{-n} =$$

$$= 1+\sum_{1}^{998}(n+1)1000^{-n}+\sum_{0}^{999}(1000+n)1000^{-(999+n)}+\sum_{0}^{2}(2000+n)1000^{-(1999+n)} =$$

$$= 1+\sum_{1}^{998}(n+1)1000^{-n}+\sum_{0}^{999}n1000^{-(999+n)}+\sum_{0}^{2}n1000^{-(1999+n)}+$$

$$+\sum_{0}^{999}1000^{-(998+n)}+\sum_{0}^{2}1000^{-(1999+n)} =$$

$$= 1+\sum_{1}^{997}(n+1)1000^{-n}+[998+1+1]1000^{-998}+\sum_{0}^{998}(n+1)1000^{-(999+n)}+$$

$$+(999+2)1000^{-1998}+(0+2)1000^{-1999}+(1+2)1000^{-2000}+3\cdot 1000^{-2001} =$$

$$= 1+\sum_{1}^{997}(n+1)1000^{-n}+1000^{-997}+\sum_{0}^{997}(n+1)1000^{-(999+n)}+$$

$$+(998+1+1)1000^{-1997}+1\cdot 1000^{-1998}+2\cdot 1000^{-1999}+3\cdot 1000^{-2000}+3\cdot 1000^{-2001} =$$

$$= 1+\sum_{1}^{996}(n+1)1000^{-n}+(997+1+1)1000^{-997}+\sum_{0}^{996}(n+1)1000^{-(999+n)}+$$

$$+999\cdot 1000^{-1996}+0\cdot 1000^{-1997}+1\cdot 1000^{-1998}+2\cdot 1000^{-1999}+$$

$$+3\cdot 1000^{-2000}+3\cdot 1000^{-2001}.$$

Luego, el número $\left(\frac{1000}{999}\right)^2$ tiene como primeras 6000 cifras decimales a:

$$1,002\,003\,004\ \ldots 996\,997\,999\,000\,001 \ldots 996\,997\,999\,000\,001\,002\,003.$$

Solución de *Roberto M. Cautelier* y *Carlos Daniel Morán* de la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, Universidad Nacional de Tucumán.

Las sucesivas divisiones .

$$1000000 \;\; \underline{|998001}\,, \qquad 1999000 \;\; \underline{|998001}\,, \qquad 2998000 \;\; \underline{|998001}$$
$$1989 \qquad\;\; 1 \qquad\qquad\qquad 2998 \qquad 002 \qquad\qquad\qquad 3997 \qquad 003$$

etc., sugieren la siguiente fórmula que se verifica para todo $k \in \mathbb{Z}$

$$[1000 + 999000(k+1)] = (998001)(k+1) + [1 + (999)(k+2)]. \tag{I}$$

Si $k \leq 996$, resulta $1 + 999(k+2) < 998001$. Luego, de la fórmula $(I)$ se desprende que $[1 + (999)(k+2)]$ es el resto de la división de $[1000 + 999000(k+1)]$ por $(998001)$, donde $(k+1)$ es el cociente.

En cambio, si $k = 997$, la fórmula $(I)$ deviene en:

$$\begin{aligned}
[1000 + (999000)998] &= (998001)988 + [1 + (999)(999)] \\
&= (998001)(998) + [1 + 998001] \\
&= (998001)(999) + 1
\end{aligned}$$

con lo cual el resto es 1 y el cociente 999.

Luego, los sucesivos cocientes que se obtienen a medida que $k$ varía entre 0 y 996 son: $002, 003, 004, 005, \ldots, 996$, y 997.

En cambio, cuando $k = 997$, el cociente es 999 y por lo tanto el número 998 **no** aparece. Se obtuvieron ya 2994 cifras del desarrollo decimal.

En el siguiente paso, $k = 998$ y como el resto había sido 1, aparecen 3 ceros y ya se tienen 2997 cifras. El proceso se repite ya que se obtienen nuevamente las condiciones iniciales y las 6000 cifras decimales iniciales son:

$$002\ 003\ \ldots 996\ 997\ 999\ 000\ 001\ 002\ 003\ \ldots 996\ 997\ 999\ 000\ 001\ 002\ 003.$$

**Problema 2.** Para cada $k$ entero positivo, notemos por $\mathcal{P}_k$ al conjunto de polinomios con coeficientes racionales de grado menor o igual que $k$ que toman valores enteros en todos los números enteros (junto con el polinomio nulo).

Sea

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-k+1)}{k!}.$$

a) Demostrar que dado un polinomio $P \in \mathbb{Q}[x]$, $P \in \mathcal{P}_k$ si y sólo si $P$ admite una escritura de la forma

$$P(x) = a_o + a_1\binom{x}{1} + a_2\binom{x}{2} + \dots + a_k\binom{x}{k}, \quad a_j \in \mathbb{Z}.$$

b) Si $r_k = \text{mín}\{2^m / \, 2^m > k\}$ denota la menor potencia de 2 estrictamente mayor que $k$, probar que para todo polinomio $P \in \mathcal{P}_k$ la sucesión $\{(-1)^{P(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es periódica, con período a lo sumo $r_k$.

**Resolución.** (Solución de *Guillermo Alesandroni* y *Luis Dieulefait* de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario y *Federico Rodríguez Hertz* y *Mariano Suárez Alvarez* de la misma Universidad.)

a) Primero probemos que si $P(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j \binom{x}{j}$ con $a_j \in \mathbb{Z}$, entonces $P \in \mathcal{P}_k$. Basta ver que $\binom{x}{k}$ es entero para cualquier $x$ entero y $k \in \mathbb{N}$. Esto sucede ya que:

i) si $x \geq k$, es un número combinatorio.

ii) si $0 \leq x \leq k-1$, $\binom{x}{k} = 0$.

iii) si $x \leq -1 \Rightarrow x-k-1 \leq -k \Rightarrow |x-k+1| \geq k$, y salvo por el signo, $\binom{x}{k}$ es el número combinatorio $\binom{|x-k+1|}{k}$.

Probemos ahora la recíproca por reducción en $k$. Como $\binom{x}{1} = x$, el caso $k=1$ es obvio. Supongamos entonces que todo polinomio en $\mathcal{P}_{k-1}$ puede escribirse como combinación lineal con coeficientes enteros de los polinomios $1, \binom{x}{1}, \dots, \binom{x}{k-1}$. Sea $P \in \mathcal{P}_k$ y llamemos $\Delta P$ al polinomio definido como $(\Delta P)(x) = P(x+1) - P(x)$.

Como $\Delta P \in \mathcal{P}_{k-1}$, existen $b_0, \ldots, b_{k-1} \in \mathbb{Z}$ tales que $\Delta P(x) = \sum_{i=0}^{k-1} b_i \binom{x}{i}$. Por otro lado, como $\left\{1, \binom{x}{1}, \ldots, \binom{x}{k}\right\}$ es una $\mathbb{Q}$-base de los polinomios en $\mathbb{Q}[x]$ de grado $\leq k$, existen $a_0, \ldots a_k \in \mathbb{Q}$ tales que $P(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{k} a_i \binom{x}{i}$.

Queremos probar que todos los $a_i$ son enteros. Observemos que para todo $x$ se verifica:

$$\binom{x+1}{k} + \binom{x}{k} = \binom{x}{k-1} \qquad (*)$$

ya que ambos miembros de la igualdad son polinomios que coinciden sobre todos los naturales. Entonces

$$\Delta P(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i \left[\binom{x+1}{i} - \binom{x}{i}\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} a_i \binom{x}{i-1} = \sum_{i=0}^{k-1} a_{i+1} \binom{x}{i} = \sum_{i=0}^{k-1} b_i \binom{x}{i}$$

Como la escritura en una base es única, deducimos que $a_i \in \mathbb{Z}$ para todo $i \geq 1$. Pero además, $a_0 = P(0) \in \mathbb{Z}$.

b) Por a) es suficiente ver que:

$$\binom{n}{k} \equiv \binom{n+2^r}{k}$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, r$ tal que $2^r > k$, donde $\equiv$ denota congruencia módulo 2.

Para $k = 1$, $\binom{n}{1} = n \equiv n + 2^r = \binom{n+2^r}{1}$.

Si $2^r > k$, supongamos inductivamente que

$$\binom{m}{k-1} \equiv \binom{m+2^r}{k-1} \qquad \forall\, m \in \mathbb{N},$$

de donde, por $(*)$:

$$\binom{m+1}{k} - \binom{m}{k} \equiv \binom{m+1+2^r}{k} - \binom{m+2^r}{k} \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Luego,

$$\binom{m+1+2^r}{k} - \binom{m+1}{k} \equiv \binom{m+2^r}{k} - \binom{m}{k} \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Fijado $n \in \mathbb{N}$, queremos ver que $\binom{n}{k} \equiv \binom{n+2^r}{k}$.

Usando la hipótesis inductiva para $m = n-1, n-2, \ldots, 2, 1$, se sigue la siguiente cadena de congruencias:

$$\begin{aligned} \binom{n+2^r}{k} - \binom{n}{k} &\equiv \binom{n-1+2^r}{k} - \binom{n-1}{k} \equiv \ldots \\ &\equiv \binom{2^r+1}{k} - \binom{1}{k} \equiv \binom{2^r}{k} - \binom{0}{k} = \binom{2^r}{k}. \end{aligned}$$

Basta ver entonces que $\binom{2^r}{k}$ es par para $0 < k < 2^r$. En efecto:

$$\binom{2^r}{k} = \frac{2^r(2^r-1)(2^r-2)\ldots(2^r-(k-1))}{1\ 2\ \ldots\ (k-1)\ k}$$

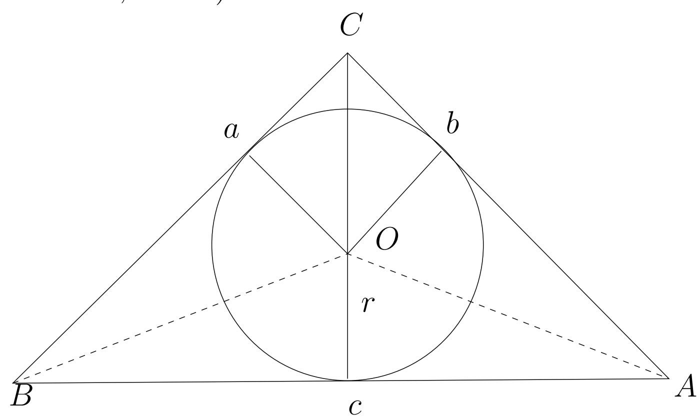
Claramente, $2^q/j \Leftrightarrow 2^q/2^r - j\ \forall j = 1, \ldots, k-1$. Además, $2^q/k \Rightarrow q \leq r-1$. Entonces "sobra" al menos un 2 en el numerador, es decir $\binom{2^r}{k}$ es par.

**Problema 3.** Si $h_1, h_2, h_3$ son las tres alturas de un triángulo y $r$ es el radio del círculo inscripto en el triángulo, probar la desigualdad:

$$9r \leq h_1 + h_2 + h_3$$

y verificar que la igualdad vale solamente para los triángulos equiláteros.

**Resolución.** ( Solución de *Damián Pinasco* y *Santiago Guaraglia* de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA.)




Considerando los tres triángulos que quedan determinados en la figura, podemos calcular la superficie del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ como:

$$\sup \overset{\triangle}{ABC} = \sup \overset{\triangle}{ABO} + \sup \overset{\triangle}{ACO} + \sup \overset{\triangle}{BCO} =$$

$$= \frac{a}{2}r + \frac{b}{2}r + \frac{c}{2}r$$

$$= (a + b + c)\frac{r}{2}$$

Por otro lado, $\sup \overset{\triangle}{ABC} = \dfrac{a \cdot h_a}{2} = \dfrac{b \cdot h_b}{2} = \dfrac{c \cdot h_c}{2}$, donde cada $h$ es la altura correspondiente a cada lado. Entonces se obtiene

$$h_a + h_b + h_c = (a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \cdot r.$$

Para obtener la desigualdad buscada, nos bastará probar que

$$9 \leq (a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \tag{1}$$

o, lo que es lo mismo luego de desarrollar este producto, que

$$6 \leq \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right). \tag{2}$$

Veamos entonces que cada paréntesis es $\geq 2$.

Consideramos la desigualdad $(x-y)^2 \geq 0$ (3), que es válida $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$. Esto implica que $x^2 + y^2 \geq 2xy \;\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, y entonces $\dfrac{x^2+y^2}{xy} \geq 2 \;\forall\, x \neq 0$, $y \neq 0$, pero esto último dice que $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} \geq 2 \;\forall\, x \neq 0$, $y \neq 0$, como bastaba probar.

Además, la igualdad del enunciado vale sii vale en (1) y esto vale sii cada paréntesis en (2) es igual a 2. Por lo que vimos recién, esto pasa sii vale la igualdad en (3), donde $x$ e $y$ son alternativamente cada uno de los tres lados. En consecuencia vale la igualdad sii $a = b = c$, y el triángulo resulta entonces equilátero.

**Problema 4.** Tres personas $a, b$ y $c$ deben recorrer 100 km y cuentan con una sola bicicleta. Mientras que $a$ y $b$ caminan a 1 km por hora y andan en bicicleta a 6 km por hora, $c$ camina a 2 km por hora y anda en bicicleta a 8 km por hora. Se sabe que:

i) salen los 3 juntos y nunca se paran

ii) $a$ y $b$ cambian de andar en bicicleta a andar a pie (o viceversa) una sola vez

iii) $a$ y $b$ llegan simultáneamente.

¿Cuál es el mínimo tiempo en el que los tres pueden recorrer el trayecto?

**Resolución.** (Solución casi textual de *Gabriela Jerónimo* y *Gustavo Murgida* de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA).

Según la condición ii), $a$ y $b$ cambian de andar en bicicleta a andar a pie (o viceversa) una sola vez, por lo que si uno de ellos comienza en bicicleta, y luego sigue caminando, deberá ir a pie hasta el final (o viceversa).

Como $a$ y $b$ salen y llegan juntos y nunca se paran, ambos deben recorrer la misma distancia en bicicleta (si no el que recorriera más en bicicleta llegaría antes).

Si $c$ recorre un trayecto en bicicleta, para luego dejarla a $a$ o $b$, ya no podría volver a usarla, pues por lo anterior $a$ o $b$ irá hasta el final con ella. Por lo tanto, $c$ puede usar a lo sumo una vez la bicicleta.

Veamos que no puede ser $c$ quien comience andando en bicicleta.

Si fuera este el caso, $a$ y $b$ empezarían ambos caminando. Si $c$ usa la bicicleta todo el trayecto, $a$ y $b$ no cambian ninguna vez de bicicleta a pie como se sabe por el punto ii) (igualmente si el cambio no fuera necesario tardarían 100 horas en llegar, y veremos que no es el mínimo tiempo).

Si $c$ deja la bicicleta, y la usan $a$ o $b$, el que siga en ella llegará antes que el que camine y no se cumplirá iii). Si ni $a$ ni $b$ la usaran sería como el caso anterior.

Tomemos entonces que el que comienza en bicicleta es $a$ (lo mismo daría que fuera $b$, intercambiándolos). Si $a$ hace más de 50 km en bicicleta, digamos $50 + x$ ($x > 0$), $c$ deberá retroceder en bicicleta para dejársela a $b$ a $50 - x$ km de la salida, pues dijimos que $a$ y $b$ recorren la misma distancia en ella y que cuando $b$ suba debe seguir en la bicicleta hasta el final. Por lo tanto, tenemos que $a$ y $b$ recorren $50 + x$ km en bicicleta y $50 - x$ km caminando. En consecuencia tardarán $\dfrac{50 + x}{6} + 50 - x$ en llegar al final; $c$ deberá recorrer $50 + x$ caminando hasta alcanzar la bicicleta, $2x$ en ella para llevarla hasta el $50 - x$, y nuevamente $50 + x$ para llegar caminando. Luego tardará $\dfrac{50 + x}{2} + \dfrac{2x}{8} + \dfrac{50 + x}{2} = 50 + x + \dfrac{x}{4}$.

¿Para qué valor de $x$ es mínimo el $\max\left\{\dfrac{50 + x}{6} + 50 - x, 50 + \dfrac{5}{4}x\right\}$?

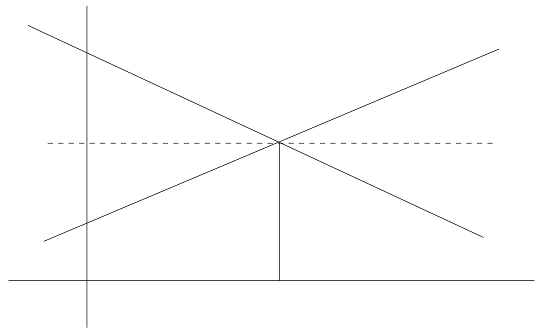
Exactamente en la abscisa del punto de intersección de las rectas

$$L_1 : y = \frac{50 + x}{6} + 50 - x$$

y

$$L_2 : y = 50 + \frac{5}{4}x$$

y ésta es $x = 4$.



En consecuencia, si $a$ recorre $50 + x$ $(x > 0)$ km en bicicleta, el mínimo tiempo en el que los tres pueden recorrer el trayecto es 55 horas y se da cuando $x = 4$.

Si $a$ recorre menos de 50 km o 50 km en bicicleta, digamos $50 - k$ $(k > 0)$, deberá hacer $50 + k$ km a pie, y en consecuencia tardará $\frac{50-k}{6} + 50 + k = 50 + \frac{50}{6} + \frac{5k}{6} \geq 50 + \frac{50}{6} > 58$ horas.

Por lo tanto, el mínimo tiempo en que los tres pueden recorrer el trayecto es 55 horas.

En resumen el viaje lo harían así: parte $a$ en bicicleta y los demás caminando; $a$ sigue hasta el km 54 y deja allí la bicicleta (9 horas); $c$, que viene caminando, luego de 27 horas llega, toma la bicicleta y va en ella hasta el km 46 (retrocede) (tarda 1 hora). Han pasado 28 horas y está en el km 46; $c$ deja la bicicleta y va hasta el final caminando (27 horas). A las 46 horas de salir, $b$ llega adonde está la bicicleta, la toma y sigue en ella hasta el final (9 horas).

$a$ y $b$ tardan $46 + 9 = 55$ horas.

$c$ tarda $27 + 1 + 27 = 55$ horas.

**Problema 5.** Para cada ángulo $\varphi$, $0 < \varphi < \pi$, llamemos $z_0$ y $z_1$ a las soluciones de la ecuación

$$z + \frac{1}{z} = 2(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi).$$

a) Demostrar

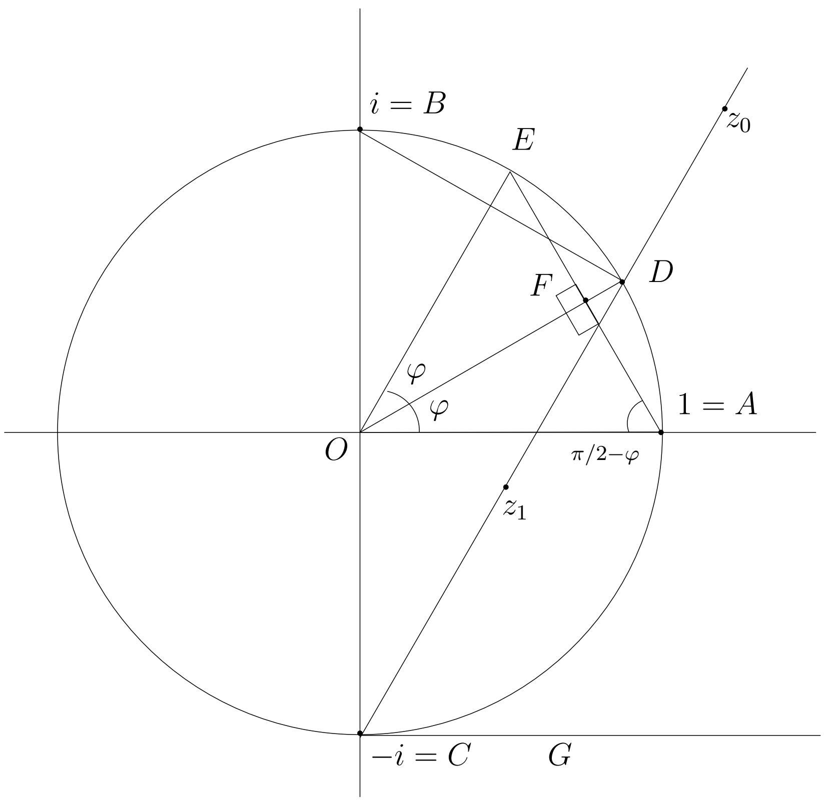
i) $|z_0 - i| = |z_1 - i|$

ii) $z_0, z_1$ y $-i$ están alineados.

b) Describir las trayectorias en el plano complejo de $z_0$ y $z_1$ a medida que $\varphi$ varía entre 0 y $\pi$.

**Resolución.** (Solución de *Pablo Milrud* y *Gustavo Massaccesi* de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA).

Como $z_0$ y $z_1$ son soluciones de la ecuación $z + \dfrac{1}{z} = 2e^{i\varphi}$, entonces

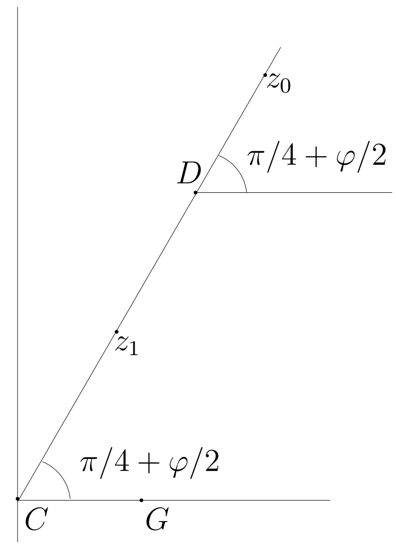



$$z^2 + 1 = 2ze^{i\varphi}$$
$$z^2 - 2ze^{i\varphi} + 1 = 0$$
$$z = \frac{2e^{i\varphi} \pm \sqrt{4e^{i2\varphi} - 4}}{2}$$
$$z = e^{i\varphi} \pm \sqrt{e^{2i\varphi} - 1}$$

Llamemos, como en el dibujo, $D = e^{i\varphi}$, $E = e^{2i\varphi}$, $A = 1$, $C = -i$, $O = 0$, $B = i$, $F =$ punto de intersección de $\overline{OD}$ y $\overline{EA}$, $G =$ algún punto con parte real positiva y parte imaginaria $-1$.

Entonces $z_0 = D + \sqrt{E - A}$, $z_1 = D - \sqrt{E - A}$, donde $\sqrt{E - A}$ denota una de las raíces cuadradas de $E - A$.

Observemos que $z_0, z_1$ y $D$ están alineados. En el triángulo $\overset{\triangle}{FAO}$, $\widehat{F} = \pi/2 \Rightarrow \widehat{FAO} = \pi/2 - \varphi \Rightarrow \arg(E - A) = \pi/2 + \varphi$. Elijamos $\sqrt{E - A}$ de tal modo que $\arg(\sqrt{E - A}) = \pi/4 + \varphi/2$.




Si vemos que $\widehat{DCG} = \pi/4 + \varphi/2$, resultará que $C$, $x_0$, $D$ y $z_1$ están alineados. En efecto, notemos primero que $\widehat{BCD} = \pi/2$ por estar inscripto en una semicircunferencia y que por lo mismo $\widehat{BCD} = 1/2\widehat{BOD}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \widehat{DCG} &= \frac{\pi}{2} - \widehat{BCD} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\widehat{BOD} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}. \end{aligned}$$

Como $|z_0 - D| = |\sqrt{E - A}| = |z_1 - D|$ y $BD$ es perpendicular a $DC$, los triángulos $\overset{\triangle}{BDz_0}$ y $\overset{\triangle}{BDz_1}$ son congruentes y por lo tanto $\overline{Bz_0} = \overline{Bz_1}$, o sea $|z_0 - i| = |z_1 - i|$, lo cual prueba a) i).

Calculemos esa distancia, que llamamos $d$. Será $d^2 = \overline{BD}^2 + \overline{Dz_0}^2$. Entonces:

$$\overline{BD} = 2\,\mathrm{sen}(\widehat{BCD}) = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \Longrightarrow \overline{BD}^2 = 4\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\overline{Dz_0^2} = |\sqrt{E - A}|^2 = |E - A| = 2\overline{FA} = 2\,\mathrm{sen}(\widehat{FOA}) = 2\,\mathrm{sen}(\varphi).$$

Por otro lado,

$$\mathrm{sen}(\varphi) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) - \mathrm{sen}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right),$$

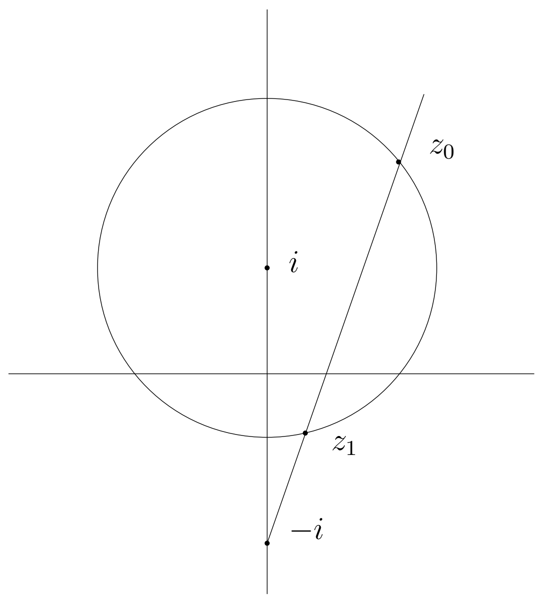
de donde

$$\operatorname{sen}(\varphi) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Sumando $\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$ a ambos miembros y multiplicando por 2, resulta:

$$2\operatorname{sen}(\varphi) + 4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = 2 \Longrightarrow d^2 = 2 \Longrightarrow d = \sqrt{2}.$$

Resulta que la distancia es independiente de $\varphi$, por lo que $z_0$ y $z_1$ se mueven sobre la circunferencia $|z-i| = \sqrt{2}$. Asimismo, por moverse $D$ continuamente sobre $\{e^{i\varphi}/0 < \varphi < \pi\}$, una de las raíces se moverá en forma continua sobre $|z - i| = \sqrt{2}$ en el semiplano superior recorriendo los argumentos de 0 a $\pi$ (o sea de 1 a $-1$) y la otra irá por "abajo", recorriendo los puntos de la circunferencia en el semiplano inferior, también de 1 a $-1$.



**Problema 6.** Dada una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definimos la sucesión:

$$x_0 = 1, \qquad x_{n+1} = f(x_n).$$

Sea ahora $f$ tres veces diferenciable y tal que $\lim\limits_{n\to\infty}(n.x_n^2) = 1$. Está claro que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, de donde se sigue que $f(0) = 0$ para cualquier tal $f$.

a) Demostrar que $f'(0)$ está determinado y calcularlo.

b) (más difícil) Demostrar que $f''(0)$ está determinado y calcularlo,

c) (mucho más difícil) Demostrar que $f'''(0)$ está determinado y calcularlo.

**Resolución.** (Solución del Comité Organizador).

Por un error, se omitió en el enunciado la hipótesis que la función $f$ toma valores positivos para valores positivos de la variable. Sin esta hipótesis, el problema resulta mucho más complicado y no hay unicidad para los valores de $f'(0)$ y $f'''(0)$. Sin embargo, como la dificultad esencial del problema sigue siendo la misma, redactamos aquí la demostración suponiendo $''x > 0 \Longrightarrow f(x) > 0''$. Tenemos entonces que $x_n > 0$ para todo $n$. Se sigue que $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{1/\sqrt{n}} = 1$.

a) Como $f(0) = 0$, para todo $x$ existe $\xi$, con $|\xi| < |x|$ tal que $f(x) = f'(\xi)\cdot x$. Luego para todo $n$ existe $\xi_n$ tal que:

$$x_{n+1} = f'(\xi_n)x_n, \quad |\xi_n| < |x_n|$$
$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = f'(\xi_n)$$

Como $x_n \to 0$, también $\xi_n \to 0$. Por lo tanto:

$$f'(0) = \lim_{n\to\infty} f'(\xi_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1$$

b) Por la fórmula de Taylor, para todo $x$ existe $\xi$, con $|\xi| < |x|$, tal que $f(x) = x + 1/2 f''(\xi)x^2$. Luego, para todo $n$ existe $\xi_n$ tal que

$$x_{n+1} - x_n = 1/2\, f''(\xi_n)x_n^2 \quad |\xi_n| < |x|,$$

de donde

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}(x_{n+1} - x_n) &= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} f''(\xi_n)x_n^2 \\ -x_1 &= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} f''(\xi_n)x_n^2\end{aligned}$$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2}{1/n} = 1$ y $\sum_{n\geq 1} 1/n$ diverge, se sigue que necesariamente $\lim_{n\to\infty} f''(\xi_n) = 0$.

Esto puede deducirse fácilmente, por ejemplo, del siguiente hecho que conviene establecer en vistas de la parte c) del ejercicio.

<u>LEMA</u>. Sean $a_n, b_n$ sucesiones cualesquiera tales que $b_n > 0$, y $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = L$, $-\infty \leq L \leq +\infty$. Entonces, si $A_k = \sum_{n\geq k} a_n$ y $B_k = \sum_{n\geq k} b_n$, se tiene también $\lim_{n\to\infty} A_k/B_k = L$.

<u>Pista para la demostración:</u> Usar que $\lim_{n\to\infty} a_n/b_n = L$ (en el caso $L \neq \pm\infty$) significa que $\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, N$ tal que $\forall\, n \geq N$, $(L-\epsilon)b_n < a_n < (L+\epsilon)b_n$. El caso infinito se trata similarmente sin problemas.

Volviendo al argumento, como $\lim_{n\to\infty} \xi_n = 0$, se tiene que $f''(0) = 0$.

c) Nuevamente, usando Taylor:

$$f(x) = x + \frac{1}{6} f'''(\xi)x^3, \qquad |\xi| < |x|,$$

con lo cual para todo $n$ existe $\xi_n$ tal que

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{6} f'''(\xi_n)x_n^3, \qquad |\xi_n| < |x_n|.$$

Sean

$$a_n = x_{n+1} - x_n = \frac{1}{6} f'''(\xi_n)x_n^3$$

$$b_n = \frac{1}{(\sqrt{n})^3}$$

Estamos en las condiciones del lema anterior, con $L = 1/6 f'''(0)$. Además, en este caso $A_k = -x_k$ y $B_k = \sum_{n\geq k} 1/(\sqrt{n})^3$.

Es fácil ver (hacer el dibujo) que se tiene:

$$\int_k^\infty \frac{1}{(\sqrt{x})^3} dx \leq \sum_{n\geq k} \frac{1}{(\sqrt{x})^3} \leq \int_{k-1}^\infty \frac{1}{(\sqrt{x})^3} dx.$$

Luego $\frac{2}{\sqrt{k}} \leq \sum_{n\geq k} \frac{1}{(\sqrt{x})^3} \leq \frac{2}{(\sqrt{k-1})}$, $\quad 2 \leq \sqrt{k} \sum_{n\geq k} \frac{1}{(\sqrt{n})^3} \leq 2\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k-1}}$.

De aquí tenemos $\lim_{k\to\infty} \left( \frac{\sum_{n\geq k} \frac{1}{(\sqrt{x})^3}}{2/\sqrt{k}} \right) = 1$. Luego $\lim_{k\to\infty} \frac{A_k}{B_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{-1/\sqrt{k}}{2/\sqrt{k}} = -\frac{1}{2}$.

Como por el lema, $\lim\limits_{k\to\infty} A_k/B_k = 1/6 f'''(0)$, tenemos finalmente que $f'''(0) = -3$.