Competencia Matemática E. Paenza

NOVENA REALIZACIÓN — RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Problema 1. Para cada $r > 0$ sea $B_r(m, n)$ la bola cerrada de radio r con centro en el punto del plano de coordenadas enteras (m, n), y llamamos

$$A_r = \bigcup_{(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} B_r(m, n)$$

a su unión.

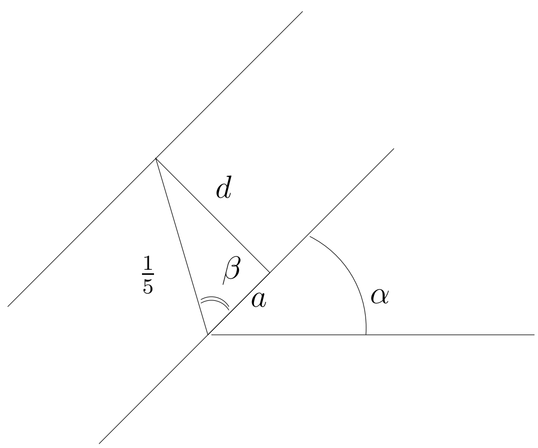
Se pide encontrar el mínimo r tal que cualquier recta con pendiente $2/5$ corte a A_r

Resolución. (Solución de *Hugo A. Antolini* y *Esteban D. Volentini* de la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología de la Universidad Nacional de Tucumán).

Si una recta de pendiente $2/5$ pasa por un punto de coordenadas enteras, entonces su ordenada al origen es $k/5$ con $k \in \mathbb{Z}$. En efecto: si $(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ satisface $n = \frac{2}{5}m + b$, entonces $5b \in \mathbb{Z}$. Queda determinada entonces una familia de rectas paralelas

$\{y = \frac{2}{5}x + \frac{k}{5}, \quad k \in \mathbb{Z}\}$, que están a una cierta distancia d. Si tomamos $r \geq \frac{d}{2}$, es claro que toda recta del plano de pendiente $2/5$ corta a A_r. Por otro lado, si $r < \frac{d}{2}$, las rectas $y = \frac{2}{5}x + \frac{a}{10}$ con a entero impar, no intersecan a A_r. Entonces el radio r buscado es $\frac{d}{2}$.

Calculemos d:



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{5} \quad ; \quad \operatorname{tg}\beta = \operatorname{cotg}\alpha \ \text{ ya que } \ \beta = \pi/2 - \alpha$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} = \frac{d}{a} \Longrightarrow \frac{d}{a} = \frac{5}{2} \Longrightarrow a = \frac{2}{5}d;$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^2 = a^2 + d^2 \quad \text{por Pitágoras}$$

Luego $\dfrac{1}{25} = \left(\dfrac{2}{5}d\right)^2 + d^2 = \dfrac{29}{25}d^2 \Longrightarrow d = \dfrac{1}{\sqrt{29}}$.

Por lo tanto, $r = \dfrac{1}{2\sqrt{29}}$.

Problema 2. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $x \in \mathbb{R}$, definamos

$$f_n(x) = \frac{\cos^2(x) + \cos^2(2x) + \cos^2(3x) + \ldots + \cos^2(nx)}{n}.$$

Investigar la existencia de $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$ fijo y, cuando el límite exista, calcularlo.

Resolución. (Solución de *Pablo Parrilo* y *Juan M. Heguiabehere*, de la Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires).

Como $\cos^2(x) = 1 - \operatorname{sen}^2(x)$ y $\operatorname{sen}^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= \frac{\sum_{k=1}^{n}\cos^2(kx)}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{n}(1-\operatorname{sen}^2(kx))}{n} = \frac{n - \sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen}^2(kx)}{n} \\
&= 1 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\cos(2kx)}{2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\cos(2kx) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Re}(e^{i2kx}) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{i2kx}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}(e^{i2x})^k\right).
\end{aligned}$$

Se verifica que $e^{i2x} = 1 \iff 2x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \iff z = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. En este caso, $\sum_{k=1}^{n}(e^{i2x})^k = n$ y $f_n(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$.

Si $x \neq k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, $e^{i2x} \neq 1$, y en este caso $\sum_{k=1}^{n}(e^{i2x})^k = \dfrac{(e^{i2x})^{n+1} - e^{i2x}}{e^{i2x}-1}$.

Como $\left|\dfrac{(e^{i2x})^{n+1} - e^{i2x}}{e^{i2x}-1}\right| \leq \dfrac{2}{|e^{i2x}-1|}\quad \forall n \in \mathbb{N}$, $\quad \dfrac{1}{2n}\operatorname{Re}\left(\dfrac{(e^{i2x})^{n+1} - e^{i2x}}{e^{i2x}-1}\right)$ tiende a 0 cuando n tiende a infinito, y entonces $f_n(x)$ tiende a $1/2$ cuando n tiende a infinito.

En conclusión, para todo $x \in \mathbb{R}$ existe el límite, y vale:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 1/2 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Problema 3. Sea $X \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto infinito. Si la distancia entre cualquier par de elementos de X es un número entero, probar que todos los puntos de X están alineados.

Resolución. (Solución del Comité Organizador).

Sea X tal que la distancia entre cualquier par de elementos es un número entero. Supongamos además que X tiene tres puntos, A, B, C, no alineados. Veremos que X es finito.

En efecto, sea d la distancia entre A y B. Si P es un punto de X, debe ser entonces $|PA - PB| = i \leq d$, y por lo tanto $i = 0, 1, \ldots, d$. Si $i = 0$ o $i = d$, P se encuentra en el conjunto H_0 formado por: la recta determinada por A y B, y su perpendicular que pasa por el punto medio entre A y B (un par de ejes perpendiculares). Si $O < i < d$, P se encuentra en la hipérbola H_i de ecuación $|PA - PB| = i$. Haciendo el mismo análisis con los puntos A, C, se sigue que P debe estar también en alguno de los respectivos conjuntos, que denotamos K_j, $j = 0, 1, \cdots, s-1$ (donde s es la distancia entre A y C). Por lo tanto, P debe estar en alguna de las $d \cdot s$ intersecciones $H_i \cap K_j$, $0 \leq i < d-1$, $0 \leq j < s-1$. Como hay a lo sumo 4 puntos en cada una de éstas (cada H_i, K_j, está definido por una ecuación de grado 2, y ningún H_i coincide con ningún K_j), el conjunto X puede tener a lo sumo $4d \cdot s$ puntos.

Problema 4. A partir de la sucesión $A_1 = (1, 2, 3, \ldots, n, \ldots)$ formada con todos los números naturales, construimos otra sucesión A_2 que consiste en eliminar todos lo múltiplos de 4, e ir considerando las sumas parciales resultantes; es decir, $A_2 = (1, 3, 6, 11, 17, 24, 33, \ldots)$. Formamos ahora una nueva sucesión A_3 como resultado de eliminar todos los términos con índice múltiplo de 3 de A_2, y luego tomar la sucesión de sumas parciales resultantes; es decir, $A_3 = (1, 4, 15, \cdots)$. Finalmente, sea A_4 la sucesión resultante de eliminar todos los términos con índice par de A_3 y calcular luego la sucesión de sumas parciales. Encontrar una fórmula para el término general de A_4, y probarla.

Resolución. (Solución de *Carlos Antonio D'Andrea* de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura, Universidad Nacional del Nordeste).

Sea $A_2 = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Para "armar" esta sucesión puede pensarse que se sumaron todos los naturales hasta un cierto m y se restaron de allí todos los múltiplos de 4 menores o iguales que m; para cada $n \in \mathbb{N}$ si escribimos $n = 3k + r$, con $1 \leq r \leq 3$, tenemos que

$$\begin{aligned}
a_n = a_{3k+r} &= \sum_{j=o}^{4k+r} j - \sum_{j=0}^{k} 4 \cdot j \\
&= \frac{(4k+r)(4k+r+1)}{2} - \frac{4k(k+1)}{2} \\
&= 6k^2 + 4kr + \frac{r(r+1)}{2}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad 1 \leq r \leq 3.
\end{aligned}$$

Sea ahora $A_3 = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$; para obtener cada término, hay que tachar en A_2 los términos de la forma a_{3k+3} y sumar. Obtenemos entonces

$$\begin{aligned}
b_{2k+1} &= \sum_{j=0}^{k-1} (a_{3j+1} + a_{3j+2}) + a_{3k+1} \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} (6j^2 + 4j + 1) + (6j^2 + 8j + 3) + 6k^2 + 4k + 1 \\
&= 12 \sum_{j=0}^{k-1} j^2 + 12 \sum_{j=0}^{k-1} j + 6k^2 + 8k + 1 \\
&= 12 \frac{(k-1)k(2k-1)}{6} + 12 \frac{k(k-1)}{2} + 6k^2 + 8k + 1 \\
&= 4k^3 - 6k^2 + 4k + 1.
\end{aligned}$$

Por último, la sucesión $A_4 := (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se obtiene sumando los términos b_{2k+1} anteriores, o sea

$$
\begin{aligned}
c_k &= b_1 + b_3 + \ldots + b_{2(k-1)+1} \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} (4k^3 - 6k^2 + 4k + 1) \\
&= 4\left[\frac{k(k-1)}{2}\right]^2 - 6\frac{(k-1)k(2k-1)}{6} + 4\frac{k(k-1)}{2} + k = k^4.
\end{aligned}
$$

O sea que hemos demostrado que la sucesión A_4 es $(n^4)_{n\geq 1}$.

Problema 5. A partir del intervalo $[0,1]$ se define $C_1 \subseteq [0,1]$, como $C_1 = [0,1/4] \cup [3/4,1]$, es decir, se divide el intervalo en cuatro partes iguales y se "guardan" la primera y la cuarta. (Esta construcción aplicada a un intervalo $[a,b]$ produce el conjunto: $[a, a+\frac{b-a}{4}] \cup [b-\frac{b-a}{4}, b]$). Luego se aplica esta construcción a cada uno de los intervalos de C_1 para obtener $C_2 \subseteq C_1$; $C_2 = [0,1/16] \cup [3/16,4/16] \cup [12/16,13/16] \cup [15/16,1]$.

Así sucesivamente, se define $C_i \subseteq C_{i-1}$, C_i = conjunto formado por los intervalos resultantes de aplicarle la construcción a cada uno de los intervalos de C_{i-1}.

Sea $C = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$. Demostrar que todo número real en el intervalo $[0,3]$ puede obtenerse como suma de 3 elementos de C. Es decir:

$$[0,3] = \{x / x = x_1 + x_2 + x_3, \ \text{ con } \ x_i \in C, \ i = 1, 2 \ \text{ y } \ 3\}.$$

Resolución. (Solución de *Ariel Lombardi* y *Virginia Naibo* de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura - Universidad Nacional de Rosario).

Sabemos que si $x \in [0,1]$, entonces existen $x_n \in \{0,1,2,3\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ tales que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{4^n}$, o sea, $0, x_1 x_2 \ldots x_n \ldots$ es la representación en base 4 de x.

Podemos ver que

$$C = \{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{4^n} \ / \ x_n = 0 \ \ o \ \ x_n = 3 \ \ \forall n \in \mathbb{N}\}$$

ya que $C_j = \{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{4^n} \ / \ x_n = 0 \quad o \quad x_n = 3 \quad \forall n \leq j\}$ (notemos que un número de la forma $0, x_1 \cdots x_n 10 \cdots 0 \cdots$ también puede escribirse como $0, x_1 \ldots x_n 033 \cdots 3 \cdots$). Sean $x_1, x_2, x_3 \in C$, $x_i = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^i}{4^n}$, $i = 1, 2, 3$: Entonces, sumando término a término las series convergentes que los representan,

$$x_1 + x_2 + x_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^1}{4^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2}{4^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^3}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^1 + x_n^2 + x_n^3}{4^n}.$$

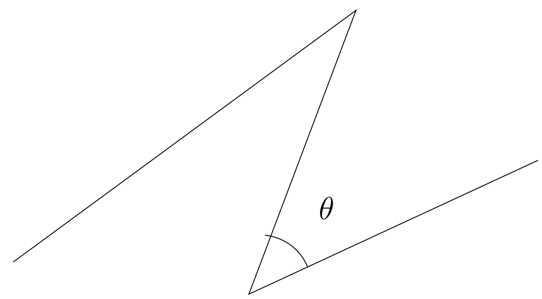
Como $x_n^i = 0$ o $x_n^i = 3$, $i = 1, 2, 3$, $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\sum_{n=1}^{3} x_n^i = 0, 3, 6$ ó 9. Luego $\sum_{n=1}^{3} x_n^i = 3 \cdot k_n$ con $k_n \in \{0,1,2,3\}$, y entonces $x_1 + x_2 + x_3 = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_n}{4^n}$.

Sea $y \in [0,3]$, $y = 3x$ con $x \in [0,1]$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{4^n}$.

Si $y_n = 0$, definimos $x_n^i = 0$, $i = 1, 2, 3$.
Si $y_n = 1$, definimos $x_n^1 = 3$, $x_n^2 = x_n^3 = 0$.
Si $y_n = 2$, definimos $x_n^1 = x_n^2 = 3$, $x_n^3 = 0$.
Si $y_n = 3$, definimos $x_n^i = 3$, $i = 1, 2, 3$.

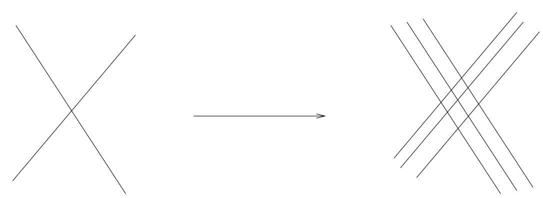
En todos los casos, $\sum_{i=n}^{3} x_n^i = 3 \cdot y_n$. Obviamente, si $x_i = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^i}{4^n}$, $i = 1, 2, 3$, se tiene que $x_i \in C$, $i = 1, 2, 3$ y $x_1 + x_2 + x_3 = y$. En efecto, $x_1 + x_2 + x_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^1 + x_n^2 + x_n^3}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot y_n}{4^n} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{4^n} = 3 \cdot x = y$.

Problema 6. Un zigzag en $\mathbb{R}^2$ está compuesto por 2 semirrectas paralelas con direcciones opuestas, y un segmento que une sus orígenes, de manera tal que el ángulo θ determinado sea agudo. Probar que es posible encontrar 100 zigzags que dividan al plano en por lo menos 44.651 regiones conexas.



Resolución. (Solución combinada de las propuestas por *Roberto M. Cautelier* y *Carlos D. Morán* de la Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, Universidad Nacional de Tucumán y de *Gustavo Massaccesi* y *Pablo Milrud* de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA).

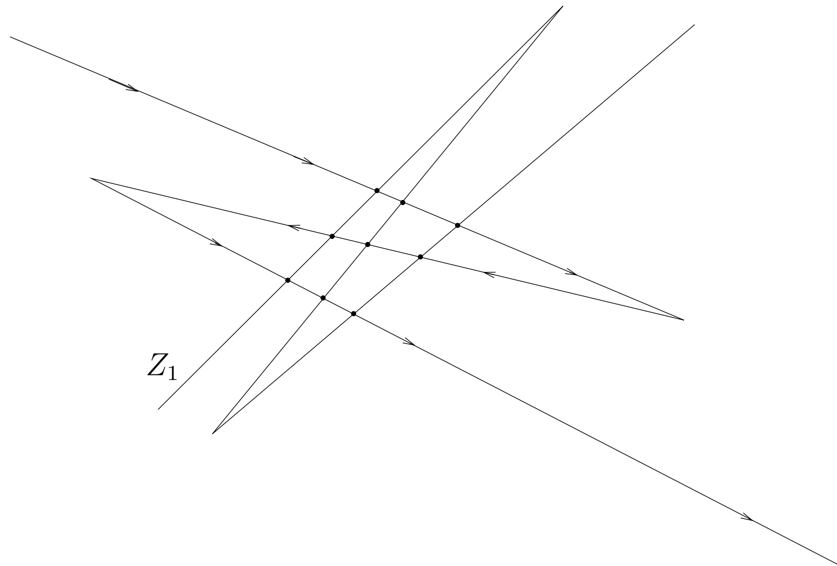
Veamos primero que se puede ubicar un número arbitrario de zigzags de forma tal que dos cualesquiera de entre ellos siempre se corten en 9 puntos, y que todos estos puntos sean distintos. En efecto, tomemos el correspondiente número de rectas en forma tal que dos cualesquiera de entre ellas se corten, y que todos los puntos así determinados sean distintos. Desdoblando cada una de estas rectas en tres paralelas suficientemente cercanas, se obtienen 9 intersecciones por cada punto.



Está claro que se puede inclinar la recta del medio, para formar el zig y el zag lo suficientemente lejos, de manera de obtener los zigzags en las condiciones buscadas.

Diremos que los zigzags así ubicados están en "posición general".

Sea Z_1 un zigzag ya en el plano. Dibujemos otro, avanzando en el sentido indicado por las $\longrightarrow$, viniendo del infinito, y yéndose al final al infinito.



Cada vez que se cruza Z_1 se agrega una región (al dividirse en dos una región que ya estaba). Como hay 9 intersecciones, a las 2 regiones originales se le agregan 9, y una más al llegar al infinito. Se tienen entonces $2+9+1$ regiones para 2 zigzags.

Sea $f(n)$ el número de regiones determinadas por n zigzags, $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ en posición general. Pensemos que se tienen $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n-1}$ ya en el plano. Cuando se dibuje Z_n, el análisis anterior sigue válido para Z_n con cada uno de los Z_i anteriores. Se tiene entonces

$$f(1) = 2, \quad f(n) = f(n-1) + 9(n-1) + 1.$$

Resolviendo esta recurrencia, resulta $f(n) = 9n(n-1)/2 + n + 1$ y $f(100) =$44.651.