Competencia Matemática Ernesto Paenza
Octava Realización — 1993

Problema 1. Probar que cualquier conjunto A de 55 elementos tomados entre los primeros 100 números naturales contiene, al menos, un par de números que difieren en 10 y un par de números que difieren en 12. ¿Es cierto que A debe contener también un par de números que difieren en 11?

Resolución (Solución de Sheldy J. Ombrosi y Gustavo Ramoscelli de Bahía Blanca)

a) Caso 10

Si ordenamos los números de la siguiente forma

$$\begin{array}{rrrrcr} 1 & 11 & 21 & 31 & \dots & 91 \\ 2 & 12 & 22 & 32 & \dots & 92 \\ \vdots & & & & & \\ 9 & 19 & 29 & 39 & \dots & 99 \\ 10 & 20 & 30 & 40 & \dots & 100 \end{array}$$

(de acuerdo a su resto módulo 10)

Se tienen 10 elementos en cada fila. Por lo tanto, de cada una de ellas se puede extraer -a lo sumo- 5 números si se quiere que ningún par difiera en 10. Como el conjunto tiene que tener 55 elementos, seguro que en alguna fila se han elegido al menos seis y esto concluye el caso.

b) Caso 12

Igual que en el caso anterior, los ordenamos de acuerdo a su resto módulo 12

$$\begin{array}{rrrrcrr} 1 & 13 & 25 & 37 & \dots & 85 & 97 \\ 2 & 14 & 26 & 38 & \dots & 86 & 98 \\ 3 & 15 & 27 & 39 & \dots & 87 & 99 \\ 4 & 16 & 28 & 40 & \dots & 88 & 100 \\ 5 & 17 & 29 & 41 & \dots & 89 & \\ \vdots & & & & & & \\ 12 & 24 & 36 & 48 & \dots & 96 & \end{array}$$

Las primeras 4 filas tienen 9 elementos y las restantes 8. Por lo tanto, de las primeras 4 líneas se pueden extraer a lo sumo 5 números y de las otras 8, como máximo 4. Esto da un total de $5 \cdot 4 + 8 \cdot 4 = 52$.
Como el conjunto tiene 55 elementos, listo.

c) Caso 11

Ordenándolos como en los casos anteriores de acuerdo con su resto módulo 11, se tiene:

$$
\begin{array}{rrrcrr}
1 & 12 & 23 & \ldots & 89 & 100 \\
2 & 13 & 24 & \ldots & 90 & \\
3 & 14 & 25 & \ldots & 91 & \\
\vdots & & & & & \\
11 & 23 & 33 & \ldots & 99 &
\end{array}
$$

Hay en total 11 líneas. Todas las filas tienen 9 elementos, salvo la primera que tiene 10. De todas, es posible extraer 5 números. Y esto prueba la factibilidad de elegir 55 elementos de manera tal que ningún par difiera en 11.

Por ejemplo, el conjunto $\{1, 23, 45, 67, 89, 2, 24, 46, 68, 90, 3, 25, 47, 69, 91, 4, 26, 48, 70, 92, 5, \cdots, 11, 33, 55, 77, 99\}$.

Problema 2. Sean p y q dos primos impares distintos y $n = p \cdot q$. Dar un procedimiento para hallar un número $k \in \{2, 3, \ldots, n-2\}$ que verifique que $k^2 - 1$ sea divisible por n. Exhibir k para el caso $p = 953$, $q = 317$.

Resolución (Solución de Pablo E. Coll y Pablo Funes, de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires)

Se utiliza el algoritmo de Euclides para encontrar enteros s_1, t_1 tales que $1 = ps_1 + qt_1$. Se toman $s_0 = -2s_1$ y $t_0 = -2t_1$. Se obtiene $-2 = ps_0 + qt_0$. Sea $s = s_0 \mod (q)$, $1 \leq s \leq q-1$. Será $s = s_0 + lq$. Sea $t = t_0 - lp$. Se mantiene la igualdad $-2 = ps + qt$, y además $1 \leq s \leq q-1$.

El número $k = ps + 1$ satisface lo pedido. En efecto, vale $2 \leq k \leq n - p + 1 \leq n - 2$ pues $p \geq 3$. Por otro lado: $-2 = ps + qt \Longrightarrow ps + 2 = -qt \Longrightarrow k + 1 = -qt$.

Ahora resulta $k^2 - 1 = (k+1)(k-1) = -qtps$ y por lo tanto n divide a $k^2 - 1$.

Aplicando el algoritmo de Euclides a $p = 317$, $q = 953$, se obtiene un resto 2 antes de llegar al resto 1. Luego se obtiene directamente $-2 = 953 \cdot (-1) + 317 \cdot 3$. Entonces es $s = 3$, $k = 317 \cdot 3 + 1 = 952$.

Problema 3. Sea p un número natural, $p \geq 2$, y $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1} \in \mathbb{R}$. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \pi^p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

y sea $A > 0$ tal que $f(x) > 0 \ \forall x \geq A$.

Para cada número natural $n \geq A$ definimos

$$x_n = \operatorname{sen} \sqrt[p]{f(n)}$$

Probar que (x_n) es convergente $\iff \dfrac{a_{p-1}}{p \cdot \pi^p} \in \mathbb{Z}$.

Resolución: (La solución es, esencialmente, de Andrés H. Fernández de Prado, de la Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires)

Como

$$\begin{aligned} f(x) &= \pi^p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = \\ &= \pi^p x^p \left(1 + \frac{a_{p-1}}{\pi^p x} + \ldots + \frac{a_0}{\pi^p x^p}\right), \end{aligned}$$

tomando la raíz $p-$ésima, para $x \geq A$, tenemos

$$\sqrt[p]{f(x)} = \pi \cdot x \cdot \sqrt[p]{1 + \frac{a_{p-1}}{\pi^p x} + \ldots + \frac{a_0}{\pi^p x^p}}.$$

Llamando ahora $\lambda(x) = \sqrt[p]{f(x)} - \pi x$, deseo hallar

$$\lim_{x \to +\infty} \lambda(x) = \lim_{u \to 0^+} \lambda\left(\frac{1}{u}\right) = \pi \cdot \lim_{u \to 0^+} \frac{\sqrt[p]{1 + \frac{a_{p-1}}{\pi^p}u + \ldots + \frac{a_0 u^p}{\pi^p}} - 1}{u}.$$

Pero esto es un cociente incremental, luego el límite será la derivada de $\sqrt[p]{1 + \frac{a_{p-1}}{\pi^p}u + \ldots + \frac{a_0}{\pi^p}u^p}$ evaluada en 0, es decir:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} \lambda(x) &= \pi \left[\frac{1}{p} \sqrt[p-1]{1 + \cdots + \frac{a_0}{\pi^p}u^p} \left(\frac{a_{p-1}}{\pi^p} + \frac{2a_{p-2}}{\pi^p} \cdot u + \ldots + p\frac{a_0}{\pi^p}u^{p-1}\right)\right]_{u=0} \\ &= \frac{a_{p-1}}{p \cdot \pi^{p-1}}. \end{aligned} \tag{1}$$

Por otro lado:

$$x_n = \operatorname{sen}(\sqrt[p]{f(n)}) = \operatorname{sen}(\lambda(n) + n\pi) = \operatorname{sen}(\lambda(n)) \cdot \cos(n\pi) + \cos(\lambda(n)) \cdot \operatorname{sen}(n\pi),$$

y como $\cos(n\pi) = (-1)^n$ y $\operatorname{sen}(n\pi) = 0$, se obtiene que

$$x_n = (-1)^n \operatorname{sen}(\lambda(n)). \tag{2}$$

Pero por (1), $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sen}(\lambda(n)) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{a_{p-1}}{p \cdot \pi^{p-1}}\right)$ (ya que $\operatorname{sen} x$ es una función continua) y por (2) x_n es convergente sii $\operatorname{sen}(\lambda(n)) \longrightarrow 0$ cuando $n \longrightarrow \infty$. Se obtiene entonces que debe ser $\operatorname{sen}\left(\dfrac{a_{p-1}}{p \cdot \pi^{p-1}}\right) = 0$, lo cual es equivalente a que $\dfrac{a_{p-1}}{p \cdot \pi^{p}} \in \mathbb{Z}$, como se quería probar.

Problema 4. Una terna (x_1, x_2, x_3) de números irracionales positivos con $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ se dice "balanceada" si cada x_i es menor que $1/2$. Si una terna no está balanceada, supongamos por ejemplo que $x_1 > 1/2$, se efectúa el siguiente procedimiento:

$$(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (2x_1 - 1, 2x_2, 2x_3)$$

(similarmente si $x_2 > 1/2$ o $x_3 > 1/2$).

Si la nueva terna no resulta balanceada, se reitera el procedimiento. ¿Es cierto que en un número finito de pasos se llega siempre a una terna balanceada?

Resolución (Solución de Roberto Marcelo Cautelier y Carlos Daniel Morán de la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad de Tucumán.)

Es evidente que x_1, x_2 y x_3 son menores que 1. Entonces si escribo los números x_1, x_2 y x_3 en base 2, la condición de "balanceo" se traduce en: una terna es balanceada si la primera cifra después de la coma es un 0, en cada número de la terna. Además, los siguientes procedimientos

$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (2x_1 - 1, 2x_2, 2x_3)$$
$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (2x_1, 2x_2 - 1, 2x_3)$$
$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (2x_1, 2x_2, 2x_3 - 1)$$

consisten en tachar el primer dígito después de la coma de todos los números de la terna.

El problema consiste entonces en determinar si para toda terna existe un $n \in \mathbb{N}$ (que depende de la terna) tal que después de tachar los primeros n dígitos después de la coma en cada número, los tres resultan con un cero después de la coma. La respuesta en general es negativa, como lo prueba este ejemplo:

$$\begin{array}{lcl}
x_1 & = & 0,100 \quad 110000 \quad 111000000 \quad 111100000000 \quad 111110000000000 \\
x_2 & = & 0,010 \quad 001100 \quad 000111000 \quad 000011110000 \quad 000001111100000 \\
x_3 & = & 0,001 \quad 000011 \quad 000000111 \quad 000000001111 \quad 000000000011111
\end{array}$$

cuya suma es $0,1111\ldots$ (se utiliza la base binaria).

La ley de formación para cada número es la siguiente:

Para x_1 pongo un 1 después de la coma, y dos ceros; luego 2 unos y 4 ceros; 3 unos y 6 ceros, ..., n unos y $2n$ ceros,..., etc.

Para x_2 pongo un cero después de la coma, luego un uno y 3 ceros; 2 unos y 5 ceros; 3 unos y 7 ceros,..., n unos y $2n + 1$ ceros.

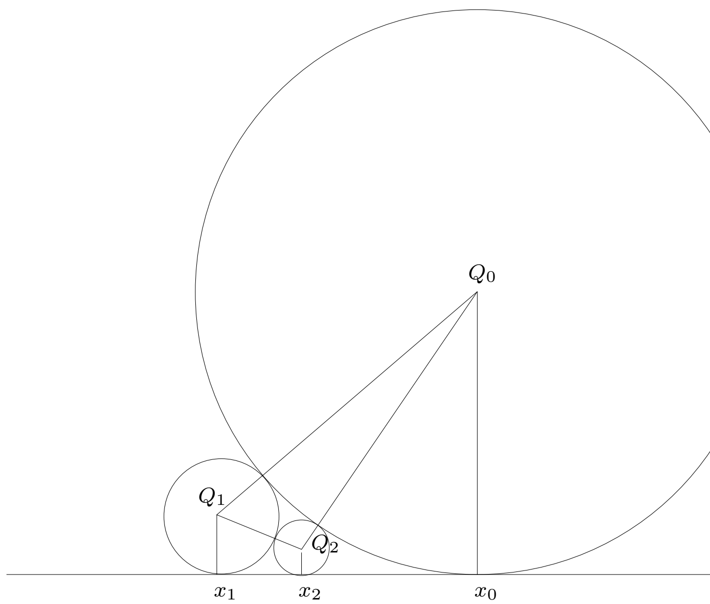
Para x_3 pongo dos ceros después de la coma y un uno; luego 4 ceros y 2 unos; luego 6 ceros y 3 unos,..., $2n$ ceros y n unos.

Los tres son irracionales y su suma es 1.

Problema 5. Se define una sucesión de circunferencias del siguiente modo:
C_0 es la circunferencia de radio 1 con centro en $P_0 = (0, 1)$
C_1 es la circunferencia de radio 1 con centro en $P_1 = (2, 1)$
y a partir de éstas
C_{i+1} es la circunferencia tangente a C_i, a C_{i-1} y al eje x.
Si llamamos P_n al punto centro de la circunferencia C_n, se pide hallar $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$.

Solución (Ningún participante pudo resolver completamente este problema. Aún así, varios de ellos lograron determinar que el límite pedido era el punto $(\sqrt{5}-1, 0)$. Sin embargo, las demostraciones contenían serias lagunas. Usando las ideas propuestas por los participantes, el Comité Organizador construyó la solución que damos a continuación.)

Sean A_0, A_1 y A_2 tres circunferencias consecutivas cualesquiera en las circunstancias descriptas, con centros en los puntos $Q_0 = (x_0, y_0)$, $Q_1 = (x_1, y_1)$ y $Q_2 = (x_2, y_2)$. Está claro que los respectivos radios son iguales a la coordenada y.



La condición de tangencia dice que la distancia entre los centros es igual a la suma de los radios. De donde:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (y_2 + y_1)^2$$
$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 = (y_1 + y_0)^2$$
$$(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2 = (y_2 + y_0)^2$$

Desarrollando los cuadrados y simplificando queda:

1) $(x_2 - x_1)^2 = 4y_2y_1, \qquad |x_2 - x_1| = 2\sqrt{y_2y_1}$

2) $(x_1 - x_0)^2 = 4y_1y_0, \qquad |x_1 - x_0| = 2\sqrt{y_1y_0}$

3) $(x_2-x_0)^2 = 4y_2y_0, \qquad |x_2-x_0| = 2\sqrt{y_2y_0}$

Como $|x_1-x_0| = |x_2-x_1| + |x_2-x_0|$ se tiene:

$$2\sqrt{y_1y_0} = 2\sqrt{y_2y_1} + 2\sqrt{y_2y_0}, \qquad \frac{\sqrt{y_1y_0}}{\sqrt{y_1}+\sqrt{y_0}} = \sqrt{y_2}$$

4) $\dfrac{1}{\sqrt{y_2}} = \dfrac{\sqrt{y_1}+\sqrt{y_0}}{\sqrt{y_1y_0}} = \dfrac{1}{\sqrt{y_0}} + \dfrac{1}{\sqrt{y_1}}.$

Por otro lado, de 1) y 3) se obtiene

$$\frac{|x_2-x_0|}{\sqrt{y_0}} - \frac{|x_2-x_1|}{\sqrt{y_1}} = 0.$$

Como x_2 está (siempre) entre x_0 y x_1, se sigue que x_2-x_1 tiene distinto signo que x_2-x_0. Luego, sin el valor absoluto, la ecuación anterior queda:

$$\frac{x_2-x_0}{\sqrt{y_0}} + \frac{x_2-x_1}{\sqrt{y_1}} = 0, \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{y_0}} + \frac{1}{\sqrt{y_1}}\right)x_2 - \left(\frac{x_0}{\sqrt{y_0}} + \frac{x_1}{\sqrt{y_1}}\right) = 0$$

5) $\dfrac{x_2}{\sqrt{y_2}} = \dfrac{x_0}{\sqrt{y_0}} + \dfrac{x_1}{\sqrt{y_1}}.$

Sea ahora $P_i = (x_i, y_i)$ el centro de la circunferencia C_i. Se tiene $x_0 = 0$, $x_1 = 2$, $y_0 = 1$, $y_1 = 1$. Las ecuaciones 4) y 5) dicen que se tienen dos sucesiones de Fibonacci, $h_i = \dfrac{1}{\sqrt{y_i}}$ y $l_i = \dfrac{x_i}{\sqrt{y_i}}$:

$$h_{i+1} = h_i + h_{i-1}, \qquad h_0 = 1, \qquad h_1 = 1$$
$$l_{i+1} = l_i + l_{i-1}, \qquad l_0 = 0, \qquad l_1 = 2$$

Se sigue inmediatamente que $l_{i+1} = 2h_i$, de donde $2h_i = x_{i+1}h_{i+1}$. Luego $x_{i+1} = \dfrac{2h_i}{h_{i+1}}$.

La recurrencia de Fibonacci h_i tiene como solución:

$$h_{i+1} = \frac{\lambda_1^i - \lambda_2^i}{\sqrt{5}}, \quad \text{con } \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

De aquí resulta fácil calcular el límite de la sucesión x_i. En efecto,

$$x_{i+1} = \frac{2(\lambda_1^{i-1} - \lambda_2^{i-1})}{(\lambda_1^i - \lambda_2^i)} = \frac{2(1-(\lambda_2/\lambda_1)^{i-1})}{\lambda_1(1-(\lambda_2/\lambda_1)^i)}.$$

Como $|\lambda_1/\lambda_1| < 1$, el límite vale $2/\lambda_1$. Es decir, $\dfrac{4}{1+\sqrt{5}} = \sqrt{5}-1$. Como está claro que el límite de las coordenadas y_i es cero, el límite pedido es el punto $(\sqrt{5}-1, 0)$.

Problema 6. Sea $a > 0$. Determinar todos los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que

$$\left(\int_0^a f(t)\,dt\right)^2 \geq \lambda \int_0^a f^3(t)\,dt$$

para toda función $f : [a, b] \to [0, +\infty)$ derivable tal que $f(0) = 0$ y $f'(x) \leq 1$ $\forall x \in [0, a]$.

Resolución (Solución de Guillermo Matera y Gabriel Acosta de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires.)

Como $f(t) = t$ verifica las condiciones, si λ sirve se debe cumplir que

$$\left(\int_0^a tdt\right)^2 = \frac{a^4}{4} \geq \lambda \cdot \int_0^a t^3 dt = \lambda \cdot \frac{a^4}{4}.$$

Luego, $\lambda \leq 1$. Conjeturamos que todos los $\lambda \leq 1$ sirven. Observemos primero que si $\lambda \leq 0$ la desigualdad es evidente (ya que como $f(t) \geq 0$ en $[a, b] \Rightarrow f^3(t) \geq 0$ en $[0, a] \Rightarrow \int_0^a f^3(t)dt \geq 0 \Rightarrow \lambda \int_0^a f^3(t)dt \leq 0 \leq \left(\int_0^a f(t)dt\right)^2$).

Por otro lado, si $0 < \lambda_0 < \lambda$ y λ verifica la desigualdad para toda f con las condiciones pedidas, λ_0 también (ya que $\left(\int_0^a f(t)dt\right)^2 \geq \lambda \cdot \int_0^a f^3(t)dt \geq \lambda_0 \cdot \int_0^a f^3(t)dt$, dado que $\int_0^a f^3(t)dt \geq 0$).

Bastaría demostrar entonces que $\lambda = 1$ verifica la desigualdad para todo $a > 0$. Sea f tal que $f(0) = 0$ y $f'(x) \leq 1$ $\forall\, x \in [0, a]$. Hay que ver que $\left(\int_0^a f(t)dt\right)^2 - \int_0^a f^3(t)dt \geq 0$.

Consideremos $F(b) = \left(\int_0^b f(t)dt\right)^2 - \int_0^b f^3(t)dt$ para $b \in [0, a]$. Como $F(0) = 0$ y F es derivable, si vemos que $F'(b) \leq 0$ $\forall\, b \in [0, a]$ resultará que $F(a) \geq 0$ para todo $a > 0$, como se quería.

Ya que $F'(b) = 2f(b) \int_0^b f(t)dt - f^3(b) = f(b)\left(2\int_0^b f(t)dt - f^2(b)\right)$, para ver que $F'(b) \geq 0$ en $[0, a]$ es suficiente demostrar que $G(b) := 2\int_0^b f(t)dt - f^2(b) \geq 0$ en $[0, a]$.

Otra vez, como $G(0) = 0$ y G es derivable, basta ver que $G'(b) \geq 0$ en $[0, a]$. Esto es cierto ya que $G'(b) = 2f(b) - 2f(b) \cdot f'(b) = 2f(b)(1 - f'(b))$, y sabemos que $f(b) \geq 0$ y $1 - f'(b) \geq 0$. Luego $F'(b) \geq 0$ $\forall\, b \in [0, a]$, con lo que $F(a) \geq 0 \forall a > 0$.

Hemos demostrado entonces que los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ buscados son todos los números reales menores o iguales que 1.