Competencia Matemática E. Paenza

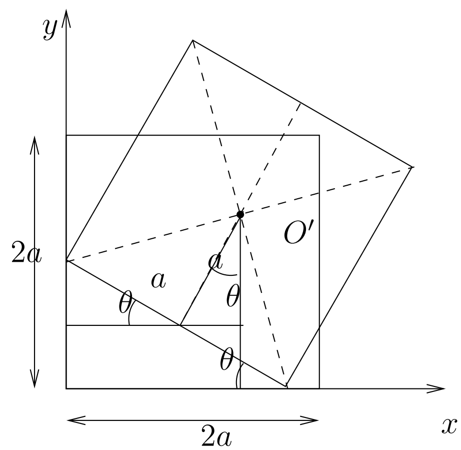
QUINTA REALIZACIÓN — 28 DE AGOSTO DE 1990

Participante N ^{0} :

Problema 1. Un cuadrado de lado $2a$ se mueve siempre dentro del primer cuadrante del plano (x, y) y de modo tal que tiene siempre dos vértices consecutivos sobre el eje x y el eje y respectivamente. Hallar, con demostración, la trayectoria que describe el centro del cuadrado.

Resolución (Solución de *Leandro Luis Blas*, de la *Facultad de Ingeniería de San Juan*)

Consideremos el siguiente dibujo:



Para cualquier cuadrado en las condiciones del problema, el ángulo θ indicado cumple

$$0 \leq \theta \leq \pi/2.$$

Las coordenadas del centro del cuadrado O' , satisfacen las siguientes igualdades en función de θ :

$$\begin{aligned} x &= a\cos\theta + a\operatorname{sen}\theta = a(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) \\ y &= a\cos\theta + a\operatorname{sen}\theta = a(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} x = y &= a(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta) \\ &= \sqrt{2}\,a\ \operatorname{sen}(\theta + \pi/4). \end{aligned} \tag{1}$$

El centro O' se desplaza entonces por la recta $y = x$. Mirando el gráfico de la función (1) para $\theta \in [0, \pi/2]$, se ve que la posición más cercana al origen de coordenadas se alcanza cuando

$$\theta = 0, \qquad x = y = \sqrt{2} \cdot a \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a, \qquad O' = (a, a);$$

la posición más alejada del origen de coordenadas se logra cuando

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \qquad x = y = \sqrt{2} \cdot a \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = \sqrt{2} \cdot a, \qquad O' = (\sqrt{2} \cdot a, \sqrt{2} \cdot a),$$

y O' retorna al punto (a, a) cuando $\theta = \pi/2$.

Problema 2. Sean A y E vértices opuestos de un octógono regular. Una rana está en el vértice A y comienza a saltar de vértice en vértice, con las siguientes dos reglas:

I) Desde un vértice cualquiera del octógono distinto de E, puede saltar a cualquiera de los dos vértices adyacentes.

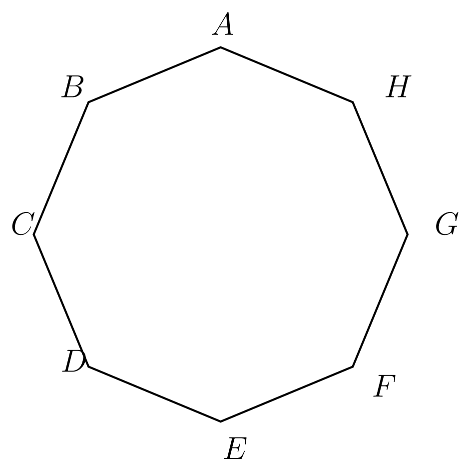
II) Cuando llega al vértice E, la rana deja de saltar y se queda allí.

Para cada número natural n, sea a_n el número de caminos distintos que puede seguir la rana, con *exactamente* n saltos, terminando en E.

Probar que: $a_{2n-1} = 0$ y $a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left((2+\sqrt{2})^{n-1} - (2-\sqrt{2})^{n-1}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Resolución. (Solución de *Pablo Alejandro Anigstein* de la *Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires*).

Consideremos el octógono



Si V es uno de los vértices, indicaremos por V_n a la cantidad de caminos que pasan por V en el paso n. Se tiene $a_n = C_{n-2} + G_{n-2}$. Es obvio que el problema es simétrico. Luego, $G_{n-2} = C_{n-2}$, y se tiene

$$\frac{1}{2}a_n = C_{n-2}. \tag{1}$$

Por otro lado, $C_{n-2} = D_{n-3} + B_{n-3}$.

Por las mismas razones que (1) se tiene $\frac{1}{2}a_n = D_{n-1}$, de donde $\frac{1}{2}a_{n-2} = D_{n-3}$. Se obtiene por lo tanto

$$\frac{1}{2}a_n = \frac{1}{2}a_{n-2} + B_{n-3}. \tag{2}$$

Se trata ahora de encontrar B_{n-3} . Se tiene $B_{n-3} = C_{n-4} + A_{n-4}$, pero de (1) $C_{n-4} = \frac{1}{2}a_{n-2}$. Luego $B_{n-3} = \frac{1}{2}a_{n-2} + A_{n-4}$. Reemplazando en (2) queda

$$\frac{1}{2}a_n = a_{n-2} + A_{n-4}. \tag{3}$$

Se analiza ahora que pasa con A_{n-4} . Se tiene $A_{n-4} = B_{n-5} + H_{n-5}$, y como por simetría $B_{n-5} = H_{n-5}$, queda $A_{n-4} = 2B_{n-5}$. Pero $B_{n-5} = A_{n-6} + C_{n-6}$, luego $A_{n-4} = 2A_{n-6} + 2C_{n-6}$. Como C_{n-6} ya se tiene de (1), queda finalmente

$$A_{n-4} = 2A_{n-6} + a_{n-4}. \tag{4}$$

De (3) se obtienen $A_{n-4} = \frac{1}{2}a_n - a_{n-2}$ y $A_{n-6} = \frac{1}{2}a_{n-2} - a_{n-4}$, que reemplazados en (4) dan

$$a_n = 4a_{n-2} - 2a_{n-4}.$$

Esta ecuación en diferencias se resuelve usando las condiciones iniciales $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $a_4 = 2$. Se sigue que $a_{2n-1} = 0$ (ya que $a_1 = a_3 = 0$). Se puede reemplazar por lo tanto n por $2n$, y la ecuación queda :

$$a_{2n} = 4a_{2(n-1)} - 2a_{2(n-2)}.$$

Se demuestra fácilmente que la solución de esta ecuación en diferencias homogéneas es $a_{2n} = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$, donde $\lambda_1 = 2+\sqrt{2}$, $\lambda_2 = 2-\sqrt{2}$, son las raíces del polinomio $\lambda^2 - 4\lambda + 2$. Las constantes c_1 , c_2 , se obtienen de las condiciones iniciales $a_2 = 0$, $a_4 = 2$. Se tiene:

$$n = 1: \quad 0 = c_1(2+\sqrt{2}) + c_2(2-2\sqrt{2}),$$

$$n = 2: \quad 2 = c_1(2+\sqrt{2}) + c_2(2-2\sqrt{2}).$$

Resolviendo queda $c_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(2+\sqrt{2})$, $c_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}(2-\sqrt{2})$.

Luego, $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left((2+\sqrt{2})^{n-1} - (2-\sqrt{2})^{n-1}\right)$.

Problema 3. Un número natural n se dice *bueno* si y sólo si existen números naturales no necesariamente distintos $k_1, \ldots, k_s$ tales que $n = k_1 + \cdots + k_s$ y $\dfrac{1}{k_1} + \cdots + \dfrac{1}{k_s} = 1$, y un número se dice *malo* si no es *bueno*. Por ejemplo, 10 es *bueno* porque $10 = 4+4+2$ y $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} = 1$.

La lista completa de los números *malos* hasta 69 es: 2 , 3 , 5 , 6 , 7 , 8 , 12 , 13 , 14 , 15 , 19 , 21 , 23 . Demuestre que todos los números naturales mayores que 69 son buenos.

Resolución. (Solución de *Eduardo Jagla* del *Instituto Balseiro, Universidad de Cuyo*).

Veamos primero que si a , b son *buenos*, entonces $x = 2(a+b)$ es *bueno*.

En efecto, si $a = \sum_{i=1}^{n} a_i$, $b = \sum_{i=1}^{m} b_i$ con $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{a_i} = 1$ y $\sum_{i=1}^{m} \dfrac{1}{b_i} = 1$, entonces $x = \sum_{i=1}^{n} 2a_i + \sum_{i=1}^{m} 2b_i$ y como $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{2a_i} + \sum_{i=1}^{m} \dfrac{1}{2b_i} = 1$, se sigue que x es *bueno*.

Sea ahora $x > 69$. Probemos por inducción que x es *bueno*.

a) Sea $x = 70 = 2(11+24)$. Luego x resulta *bueno* ya que 11 y 24 lo son.

b) Sea $x > 70$ cualquiera, y supongamos que todos los números mayores que 70 y menores que x son *buenos*. Probemos entonces que x resulta *bueno*.

   i) Si x es par, $x = 2\left(11 + \left(\dfrac{x-22}{2}\right)\right)$.

   Sabemos que 11 es bueno. Como $x > 70$, $11 + \left(\dfrac{x-22}{2}\right) > 35$. O sea, $\left(\dfrac{x-22}{2}\right) > 24$, y como $\left(\dfrac{x-22}{2}\right) < x$, resulta *bueno* por hipótesis inductiva. Por lo tanto x es *bueno*.

   ii) Si x es impar, $x = 9 + 2\left(\dfrac{x-9}{2}\right)$.

   Como $x > 70$, $\left(\dfrac{x-9}{2}\right) > 30$ y por lo tanto es *bueno* por hipótesis, ya que $\dfrac{x-9}{2} < x$.

Si $\left(\dfrac{x-9}{2}\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$ es la descomposición "buena", $x = 3 + 6 + 2\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i$.

Como $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{2a_i} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{a_i} = 1$, x es *bueno.*

Problema 4. Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales positivos.

a) Decidir la verdad o falsedad de cada una de las siguientes afirmaciones (con demostración o contraejemplo según corresponda):

i) Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ converge, entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = +\infty$.

ii) Si $\exists\, \kappa \in \mathbb{N} : (a_{n+1} - a_n) \leq \kappa$, $\forall n \geq 1$, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ diverge.

b) Dar un ejemplo donde

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \text{ diverja} \qquad \text{y} \qquad \lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = +\infty.$$

Resolución. (Solución *Pablo Eduardo Giambiaggi* de la *Escuela Superior Latinoamericana de Informática, Universidad Nacional de Luján*).

a) i) Es falso. Consideremos la sucesión $a_n = \begin{cases} n^2 & \text{si } n \text{ es par} \\ n^3 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

Entonces, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ y es por lo tanto convergente.

Si n es impar, $n \geq 3$, resulta $a_{n+1} - a_n < 0$; luego $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_{n+1} - a_n \neq +\infty$.

ii) Es válido. Podemos suponer $\kappa = 1$, pues si no trabajamos con la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{a_n}{\kappa}}$, que converge si y sólo si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ converge. Como $a_{n+1} - a_n \leq 1$ y los términos de la sucesión son positivos vale que $\displaystyle\frac{1}{a_{n+1}} \geq \frac{1}{a_n + 1}$. Sea ahora $m \in \mathbb{N}$ tal que $a_1 \leq m$. Entonces se ve por inducción que $\displaystyle\frac{1}{a_n} \geq \frac{1}{m+n-1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Luego $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \geq \sum_{n=m} \frac{1}{n}$, y por lo tanto diverge.

b) Sea $a_n = n \ln n$, $\forall\, n \geq 2$.

Como $(n+1)\ln(n+1) - n\ln n \geq (n+1)\ln n - n\ln n = \ln n$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} - a_n = +\infty$.

Como
$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{du}{u} = \ln u \,\Big|_{\ln 2}^{+\infty} = +\infty,$$
por el criterio de la integral, la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$ diverge.

Problema 5. Sea $p(z) = z^2 + az + b \quad (a, b \in \mathbb{C})$ tal que

$$|p(z)| = 1, \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \text{ con } |z| = 1.$$

Demostrar que $p(z) = z^2$ (es decir, $a = b = 0$).

Resolución. Para este problema elegimos dos soluciones muy diferentes que consideramos que merecen ser publicadas.

(Solución *Horacio Casini* del *Instituto Balseiro, Universidad de Cuyo*).

Para todo z con $|z| = 1$,

$$|p(z)| = 1 \Rightarrow p(z) \cdot \overline{p(z)} = 1 \Rightarrow (az^2 + bz + c)(\overline{z}^2 + \overline{az} + \overline{b}) = 1.$$

Como además $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$, se tiene que $(z^2 + az + b)\left(\dfrac{1}{z^2} + \dfrac{\overline{a}}{z} + \overline{b}\right) = 1$. Luego

$$(z^2 + az + b)(1 + \overline{a}z + \overline{b}z^2) - z^2 = 0,$$

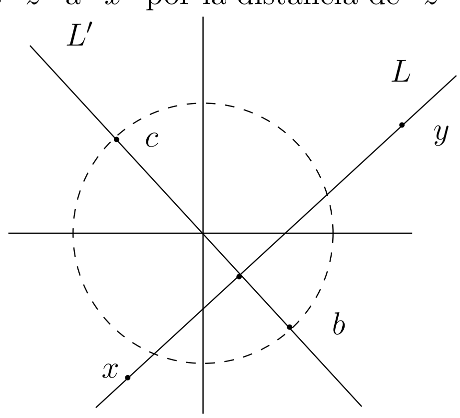
pero esto es un polinomio en z de grado ≤ 4 : sólo puede tener 4 (o menos) raíces; como es nulo en todo el círculo $|z| = 1$, lo es en todo el plano complejo y se tiene:

$$\overline{b}z^4 + (\overline{b}a + \overline{a})z^3 + bz^2 + (a + \overline{a}b)z + b \equiv 0$$

entonces $\begin{cases} \overline{b} = 0 \Rightarrow b = 0 \\ \overline{b}a + \overline{a} = 0 \Rightarrow \overline{a} = 0 \Rightarrow a = 0 \end{cases}$

(Solución de *Guillermo Goldsztein* de la *Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires*).

Como $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado, existen x , $y \in \mathbb{C}$ tal que $p(z) = z^2 + az + b = (z - x)(z - y)$. Probaremos que $x = y = 0$. $|p(z)| = |z - x||z - y|$, cuyo significado geométrico es la distancia de z a x por la distancia de z a y .



Supongamos que $x \neq y$. Dados x e y , trazo L la recta que une x con y , luego L' tal que $L \perp L'$ y $0 \in L'$. Sea $A = L \cap L'$. Sean b y c los puntos de intersección de L' con $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Como $2 = |b - c| = |b - A| + |c - A|$, entonces $|c - A| \geq 1$ o $|b - A| \geq 1$.

Supongamos que $|c - A| \geq 1$, como $L \perp L'$ tenemos que

$$|c - y| \geq |c - A| \qquad \text{y} \qquad |c - x| \geq |c - A|,$$

pero como por hipótesis $|c - y||c - x| = 1$, debe ser $|c - A| = 1$, es decir $A = 0$ y $|c - y| = |c| = |c - x|$. Pero como $L \perp L'$ esto sólo pasa si $x = y = 0$.

Si fuera $x = y \neq 0$, sea $z_0 = -\dfrac{x}{|x|}$, será $|z_0| = 1$ y $(z_0 - x)^2 = \left(-\dfrac{x}{|x|} - x\right)^2 = x^2\left(1 + \dfrac{1}{|x|}\right)^2$. Pero entonces $|z_0 - x|^2 = |x|^2\left(1 + \dfrac{1}{|x|}\right)^2 = (|x| + 1)^2 > 1$, absurdo; luego $x = y = 0$ como queríamos probar.

Problema 6. Encontrar todas las funciones continuas $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$f(x+y)\cdot f(x-y) = f(x)^2 - f(y)^2$, $\quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}$.

Resolución. (Solución del Comité Organizador)

Las funciones f que satisfacen lo pedido resultan indefinidamente derivables. Pospongamos por un momento la demostración de este hecho y busquemos las $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos veces derivables que satisfacen:

$$f(x+y)\cdot f(x-y) = f(x)^2 - f(y)^2, \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Derivando la igualdad anterior respecto de x :

$$f'(x+y)\cdot f(x-y) + f(x+y)\cdot f'(x-y) = 2f(x)f'(x).$$

Ahora, derivando respecto de y :

$$f''(x+y)\cdot f(x-y) - f'(x+y)\cdot f'(x-y) + f'(x+y)\cdot f'(x-y) - f(x+y)f''(x-y) = 0, \quad \text{es decir}$$

$$f''(x+y)\cdot f(x-y) - f(x+y)\cdot f''(x-y) = 0, \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}.$$

Llamando $u = x+y$, $v = x-y$ resulta:

$$f''(u)f(v) = f(u)f''(v), \qquad \forall\, u,v \in \mathbb{R}.$$

Si $f \not\equiv 0$, existe algún $v_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(v_0) \neq 0$. Entonces

$$f''(u) = k\cdot f(u), \qquad \forall\, u \in \mathbb{R}, \quad \text{donde} \;\; k = \frac{f''(v_0)}{f(v_0)}.$$

Es decir que f satisface la ecuación diferencial con coeficientes constantes $f'' - kf = 0$.

Las soluciones de esta ecuación son:

i) $f(x) = ax + b$, $\forall\, a,b \in \mathbb{R}$, si $k = 0$.

ii) $f(x) = ae^{\sqrt{k}x} + be^{-\sqrt{k}x}$, $\forall\, a,b \in \mathbb{R}$, si $k > 0$.

iii) $f(x) = a\,\mathrm{sen}(\sqrt{-k}x) + b\cos(\sqrt{-k}x)$, $\forall\, a,b \in \mathbb{R}$, si $k < 0$.

Poniendo $x = y = 0$ en (1), resulta que debe ser $f(0) = 0$. Las soluciones anteriores que verifican además esta condición son:

i) $f(x) = ax$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$, si $k = 0$.

ii) $f(x) = a\left(e^{\sqrt{k}x} - e^{-\sqrt{k}x}\right) = 2a\,\mathrm{sh}(\sqrt{k}x)$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$, si $k > 0$.

iii) $f(x) = a\,\mathrm{sen}(\sqrt{-k}x)$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$, si $k < 0$.

Es sencillo verificar que todas estas funciones satisfacen la condición (1). Luego, quedará probado que éstas son todas las funciones buscadas si probamos, como prometimos, que cualquier solución de (1) debe ser dos veces derivable.

En efecto, llamando $u = x + y$, $v = x - y$, la igualdad (1) se traduce en:

$$f(u) \cdot f(v) = f^2\left(\frac{u+v}{2}\right) - f^2\left(\frac{u-v}{2}\right) \qquad \forall\, u, v \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Como f es continua, es integrable en cualquier intervalo acotado, y si $f \not\equiv 0$ debe existir $a \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha = \displaystyle\int_0^a f(v)dv \neq 0$.

Entonces, integrando (2) respecto de v ,

$$\int_0^a f(u)f(v)dv = f(u)\int_0^a f(v)dv = \int_0^a f^2\left(\frac{u+v}{2}\right)dv - \int_0^a f^2\left(\frac{u-v}{2}\right)dv.$$

Cambiando de variable $t = \dfrac{u+v}{2}$ en la primera integral de la derecha y $t = \dfrac{u-v}{2}$ en la segunda, resulta:

$$f(u) = \frac{1}{\alpha}\left(\int_{u/2}^{(u+a)/2} f^2(t)dt - \int_{(u-a)/2}^{u/2} f^2(t)dt\right), \qquad \forall\, u \in \mathbb{R}.$$

De esta expresión para f (y por el Teorema Fundamental del Cálculo), se sigue directamente que f es derivable, y que f' también es derivable.