COMPETENCIA MATEMATICA ERNESTO PAENZA
XVIII Realización

Las soluciones que se encuentran a continuación fueron elegidas por el Comit Organizador entre las respuestas de los participantes. Son aquellas que más nos gustaron, además de ser correctas.
Los vectores luego del número del problema indican, considerando el total de participantes:

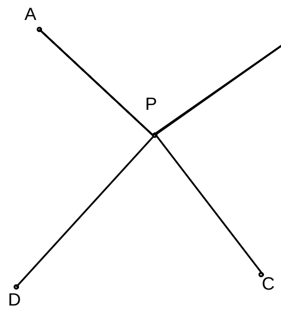
- la primera coordenada, la cantidad que obtuvo 8, 9 o 10 puntos en el problema (esencialmente bien resuelto)
- la segunda coordenada, la cantidad que obtuvo 5, 6 o 7 puntos (esencialmente "la mitad o un poco ms" del problema)
- la tercera coordenada, la cantidad que obtuvo 1, 2, 3 o 4 puntos (casos particulares o algo conducente a una posible solución)
- la cuarta coordenada, el complemento (aquellos que no hicieron nada).

Ejercicio 1 **(12, 6, 24, 25)**
Se quieren unir 4 ciudades con cables de manera que dos ciudades cualesquiera estén conectadas (no necesariamente de manera directa). Se pueden agregar postes auxiliares donde converjan tres o más cables, pero se quiere hacer de manera que el cable usado tenga la menor longitud posible.

i. Probar que en una configuración mínima, dos cables que convergen a un poste auxiliar forman ángulos de al menos 120 grados.

ii. Describir las posibles configuraciones mínimas cuando la ubicación de las 4 ciudades coincide con los 4 vértices de un rectángulo.

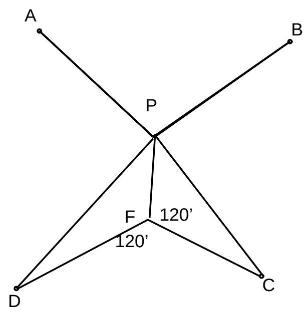
Resolución (Basada en la resolución de los participantes 18040: Alvarez, Nicolás - Grimoldi, Franco)
Demostremos primero que a lo sumo, de cada poste salen 3 cables.
Si hubiera un poste con 4 cables



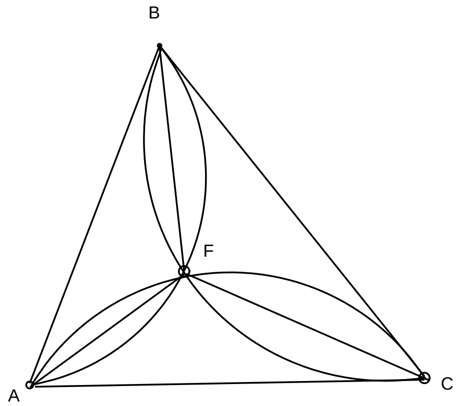
siendo P el poste y A, B, C y D postes o ciudades.
De los 4 ángulos $\widehat{APB}$, $\widehat{BPC}$, $\widehat{CPD}$ ó $\widehat{DPA}$ hay alguno que es menor a 120^o. Supongamos que sea el $\widehat{CPD}$.

Miremos ahora el triángulo $\overset{\triangle}{DPC}$: podría pasar que uno de los otros dos ángulos sea mayores a 120^o, por ejemplo el $\widehat{PDC}$. Pero en este caso, la forma más corta de unir las ciudades sería través de una poligonal uniendo PD y DC. Supongamos entonces que el triángulo $\overset{\triangle}{DPC}$ tiene todos sus ángulos menores a 120^o.

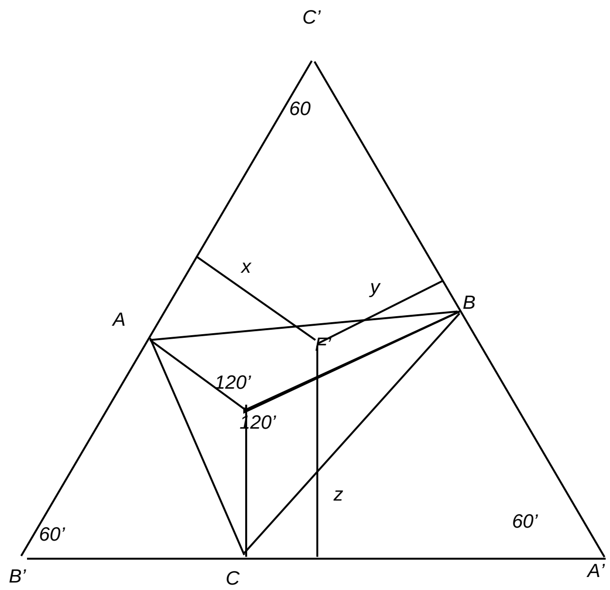
Tomando el punto de Fermat del triángulo $\overset{\triangle}{DPC}$ definido como el punto F tal que $\widehat{DFP} = \widehat{DFC} = \widehat{CFP} = 120^o$ y reemplazando los cables de la siguiente manera:



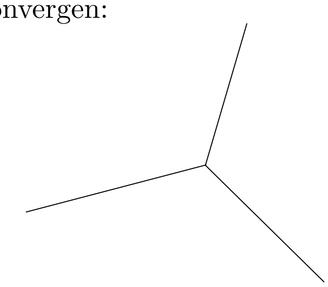
Vamos a mostrar que dado un triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ donde ninguno de sus ángulos es mayor o igual que 120^o el punto F minimiza la suma de distancias.
Primero veamos que F existe:



Tomando arcos capaces de 120^o para AC y BC obtenemos F.

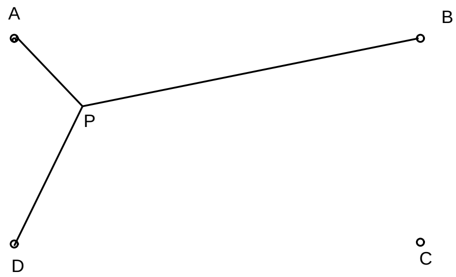


Trazando las perpendiculares por A, B y C a FA, FB y FC, obtenemos un triángulo equilátero, llamemos A', B' y C' a sus vértices y l a su lado. $(\overset{\triangle}{ABC})$ es el área de $\overset{\triangle}{ABC}$. Ahora $(\overset{\triangle}{ABC}) = l(FA+FB+FC)$. Como l y $(\overset{\triangle}{ABC})$ no varían según el punto considerado, en general para cualquier punto P interior a $A'B'C'$, si llamamos x, y, z a las distancias de P a cada lado de $A'B'C'$ sabemos que $(\overset{\triangle}{ABC}) = l(x+y+z)$. Luego $x+y+z$ es constante.
Si tomamos F' interior a ABC y llamamos $x'y'z'$ a las distancias a los lados de $A'B'C'$, sabemos que x, y, z son menores o iguales que $F'A, F'B$ y $F'C$ respectivamente. Además, si $F \neq F'$ la suma será estrictamente menor que $F'A + F'B + F'C$ ya que alguno de x, y, z será menor estricto que $F'A, F'B$ ó $F'C$.
Luego F minimiza la suma $FA + FB + FC$.
Con esto demostramos que en un poste no puede haber 4 cables que convergen. En general, la misma demostración vale para un número de cables mayor o igual a 4.
Además, si hay 3 cables que convergen:

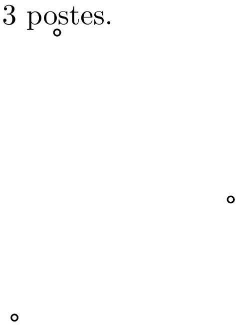


El poste debe ser el punto de Fermat del triángulo formado por los otros 3 vértices.

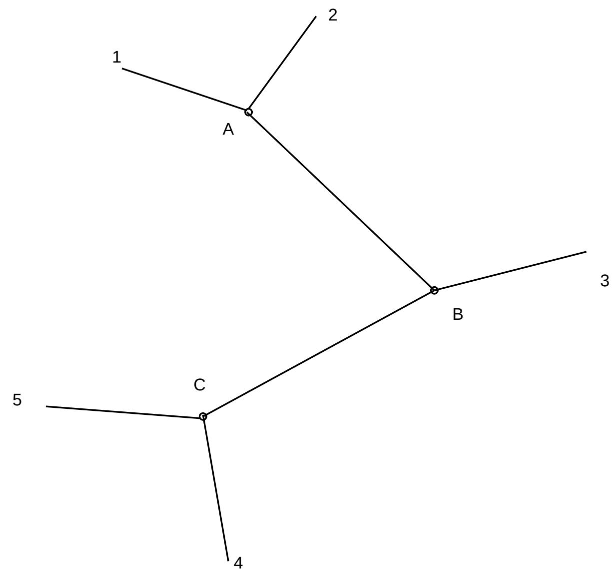
(b) Demostremos que hay al menos 2 postes.
Supongamos que hay uno. Entonces el poste se une a 3 ciudades así:



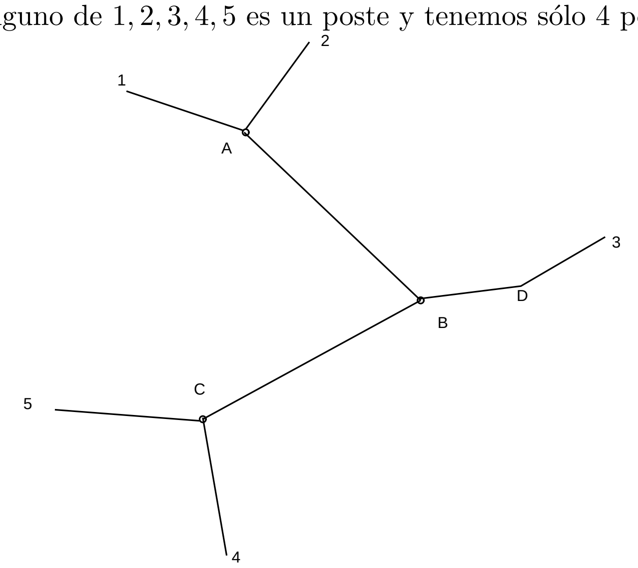
Suponemos $AB \leq BC$. Para llegar a la ciudad C lo más económico sería unir B con C. Pero esto no es solución porque poniendo un poste Q tal que $\widehat{PQB} = \widehat{PQC} = \widehat{CQB} = 120^o$ usamos menos cable.
Ahora demostremos que, como máximo, habrá 2 postes.
Supongamos que hay exactamente 3 postes.



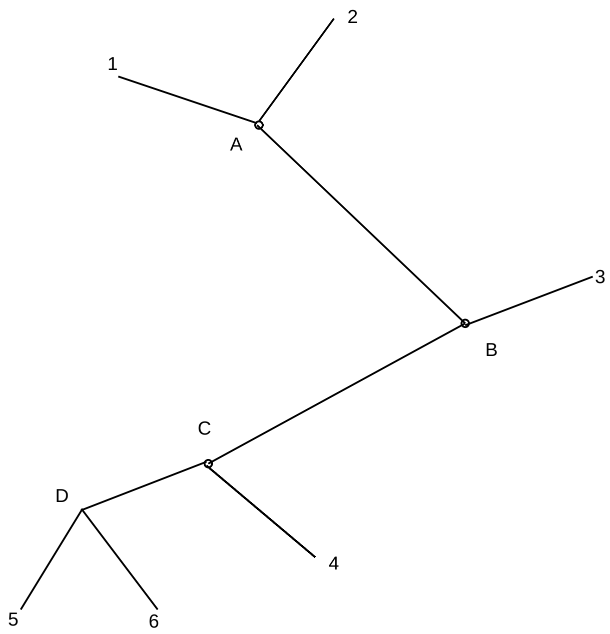
En cada poste deben converger 3 cables y además no pueden estar las 3 uniones AB, AC y BC porque suprimiendo una, las ciudades siguen conectadas y usamos menos cable.
Entonces el grafo nos queda



Habrá al menos 5 cables que no van a postes, por lo tanto van a ciudades. ABSURDO porque sólo hay 4 ciudades.
Supongamos que alguno de $1, 2, 3, 4, 5$ es un poste y tenemos sólo 4 postes. Nos quedará

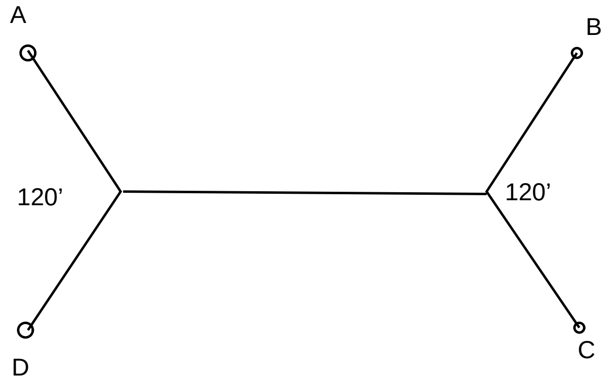


ó



Así que habrá más de 5 ciudades.

En general si hay más de 3 postes habrá más de 5 ciudades.
Si hay 2 postes, la solución será



Ejercicio 2 (2, 2, 25, 38)

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ una función derivable que satisface $f(0) = 1,\ f'(0) < 0,\ f'(x) \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Sea a_0 un número real positivo. A partir de a_0 se define la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la manera siguiente: $a_{n+1} := a_n f(a_n),\ n = 0, 1, ...$
Demostrar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ converge.

Resolución(Basada en la resolución de los participantes 18124: Cueto, María - Vicedo, Juan Pablo)

Veamos en primer lugar que $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$:

Sabemos que $f'(0) < 0$ o sea que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = f'(0) < 0$.
Veamos que $\exists\delta > 0 \,/\forall x : 0 < x < \delta \Rightarrow f(x) < f(0) = 1$.
Supongamos que no, entonces tenemos una sucesión $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $h_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\ h_n > 0\,\forall n$ y $f(h_n) \geq 1$.
Entonces

$$\frac{f(h_n) - f(0)}{h_n} \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \frac{f(h_n) - f(0)}{h_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f'(0) < 0. \qquad \text{ABS!}$$

Luego $\exists\delta > 0 \,/\forall x : 0 < x < \delta \Rightarrow f(x) < f(0) = 1$.
<u>Afirmamos:</u> $f(x) < 1\ \forall x \in \mathbb{R}_{>0}$.
Supongamos que no: sea $a > 0$ tal que $f(a) \geq 1$. Por lo visto antes, tomando $x = \frac{\delta}{2}$; $f(\frac{\delta}{2}) < 1$.
Si $a < \delta$ entonces $f(a) < 1$ ABS!
Entonces tenemos $a > \delta > \frac{\delta}{2} > 0$.
Como $f(\frac{\delta}{2}) < 1 < f(a)$ y f es continua, por el Teorema del Valor Medio, existe $y : \frac{\delta}{2} < y < a$ y $f(y) = 1 \Rightarrow f(0) = f(y) = 1$.
Como f es derivable, existe $0 < w < y$ tal que $f'(w) = 0$. ABSURDO!
Sabemos que si $0 < x$, $0 < f(x) < 1$.
Veamos que a_n es decreciente y $a_n > 0\,\forall n \in \mathbb{N}_0$.
Por inducción en n: $a_0 > 0$ por construcción; $a_1 = a_0 f(a_0) \Rightarrow 0 < a_1 < a_0$.
Supongamos que $0 < a_n$, entonces $a_{n+1} = a_n f(a_n)$, entonces $0 < a_{n+1} < a_n$.
En consecuencia, tenemos una sucesión decreciente y acotada inferiormente. Por lo tanto, existe $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Además $0 \leq a$ (pues $0 < a_n \forall n \in \mathbb{N}$). Sabemos que f es continua por ser derivable, entonces

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & a_n f(a_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ a & & a f(a) \end{array}$$

Entonces, $a = af(a)$. Si $a > 0, f(a) < 1$ y $a = af(a) < a$ ABS. Entonces $a = 0$ y $f(a) = 1$.
Ahora, $a_{n+1} = a_n f(a_n)$ es el área del rectángulo de base a_n y altura $f(a_n)$. Sabemos que f es continua, luego es integrable.
Veamos que f es decreciente en $\mathbb{R}_{>0}$:
Sean $0 < x < y$. Por el Teorema del Valor Medio, existe $x < w < y$ tale que $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(w) < 0$, $f(y) < f(x)$.

Con esto, podemos tomar cualquier partición π del intervalo $[0, a_0]$ y sabemos que la suma inferior de Riemann, $s_\pi(f)$, es menor o igual que $\int_0^{a_0} f(t)dt$.
En particular, podemos considerar las particiones:

$$\pi_n \,:\, 0 \leq a_n < a_{n-1} < \cdots < a_0.$$

Entonces

$$s_{\pi_n} = \sum_{i=0}^{n-1}(-a_{i+1} + a_i)f(a_i) + a_n f(a_n).$$

$$\begin{array}{rl} \sum_{i=0}^{n-1} -(a_{i+1} - a_i)f(a_i) = & \sum_{i=0}^{n-1} -a_{i+1}f(a_i) + a_i f(a_i) = \\ = \sum_{i=0}^{n-1} -a_{i+1}f(a_i) + a_{i+1} = & \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}(1 - f(a_i)). \end{array}$$

Entonces

$$s_{\pi_n}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}(1 - f(a_i)) + a_n f(a_n).$$

Veamos que $1 - f(a_i) \geq \xi a_{i+1}$ $\forall i \geq i_0$ para un cierto $i_0 \in \mathbb{N}$ y $\xi \in \mathbb{R}_{>0}$.
Como $a_{i+1} < a_i$, veamos que $1 - f(a_i) \geq a_i \xi$ $\forall i \geq i_0$ o, equivalentemente $\frac{f(a_i)-1}{a_i} \leq -\xi$.
Ahora bien, $\frac{f(a_i)-1}{a_i} \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} f'(a) < 0$, ya que $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Tomando $\varepsilon = -\frac{f'(0)}{2}$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x| < \delta$, $\frac{f(x)-1}{x} < f'(0) + \varepsilon = \frac{f'(0)}{2}$.
Tomemos $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_i < \delta$, $\forall i \geq i_0$ (existe pues $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$). Entonces, si $0 < a_i < \delta$, $\frac{f(a_i)-1}{a_i} < \frac{f'(0)}{2}$. Basta entonces tomar $\xi = -\frac{f'(0)}{2} > 0$.
Sea $n \geq i_0 + 1$:

$$s_{\pi_n}(f) = \sum_{i=i_0}^{n-1} a_{i+1}(-f(a_i) + 1) + a_n f(a_n) + \sum_{i=0}^{i_0-1} a_{i+1}(1 - f(a_i)$$

Además, $a_n f(a_n)$ es acotado (pues $a_n f(a_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$) y $\sum_{i=0}^{i_0-1} a_{i+1}(1 - f(a_i)) = A$ (A depende de δ). Entonces

$$s_{\pi_n} \geq \sum_{i=i_0}^{n-1} \xi a_{i+1}^2 + \text{algo acotado} + A.$$

Tenemos entonces, para todo $n \geq i_0 + 1$

$$\xi \sum_{i=i_0}^{n-1} a_{i+1}^2 \leq \xi \sum_{i=i_0}^{n-1} a_{i+1}^2 + a_{n+1} + A \leq s_{\pi_n}(f) \leq \int_0^{a_0} f(t)dt < \infty.$$

Entonces, para todo $n \geq i_0 + 1$:

$$\sum_{i=i_0}^{n-1} a_{i+1}^2 \leq (\xi)^{-1} \int_0^{a_0} f(t)dt.$$

y esto demuestra que la serie converge.

Ejercicio 3 (1, 9, 38, 19)
Encontrar todas las funciones $f : \mathbb{N}_{\geq 0} \to \mathbb{N}_{\geq 0}$ *que satisfacen*

$$f(m^2+n^2) = f(n)^2 + f(m)^2, \; \forall m,n \in \mathbb{N}_{\geq 0}.$$

Resolución(Basada en la resolución de los participantes 18128: Barmak, Jonathan - Mereb Martín)

Calculemos:
$f(0) = f(0^2+0^2) = f(0)^2 + f(0)^2 \Rightarrow f(0) = 2f(0)^2 \Rightarrow f(0) = 0$ ó $f(0) = \frac{1}{2}$. El segundo caso no puede ser pues $\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}_{\geq 0}$.
$f(1) = f(1^2+0^2) = f(1)^2 + f(0)^2 \Rightarrow f(1) = f(1)^2 \Rightarrow f(1) = 0$ ó $f(1) = 1$.
Probemos que las únicas f's que cumplen lo pedido son $f(n) \equiv 0$ y $f(n) = n$.
Para ello, necesitamos un pequeño resultado:
Si $a \geq 15$ entonces existen $c, d, b < a$ enteros no negativos tales que $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$.
Esto es porque si $a > 15$, $5(a-3) \geq 4a$.
Entre los números $a-1, a-2$ y $a-3$ existe algún c tal que $3/a+c$, entonces $a^2 - c^2 = (a-c)(a+c) = 3(a-c)\frac{(a+c)}{3}$.
Poniendo $b = \frac{\frac{(a+c)}{3} - 3(a-c)}{2}$ y $d = \frac{\frac{(a+c)}{3}+3(a-c)}{2}$ obtenemos el resultado deseado, ya que ambos son enteros y

$$0 \leq b = \frac{\frac{(a+c)}{3} - 3(a-c)}{2} \Leftrightarrow a + c - 9(a-c) \geq 0 \Leftrightarrow 10c \geq 8a \Leftrightarrow 5c \geq 4a$$

y esto se cumple ya que $5c \geq 5(a-3) \geq 4a$, y

$$d \leq a \Leftrightarrow \frac{\frac{(a+c)}{3} + 3(a-c)}{2} \leq a \Leftrightarrow a+c+9(a-c) \leq 6a \Leftrightarrow 10a - 8c \leq 6a \Leftrightarrow 4a \leq 8c \Leftrightarrow a \leq 2c$$

que también se cumple pues $2c \geq 2(a-3) = 2a - 6 > a$.
La hipótesis $a \geq 15$ no es necesaria, ya que:

$$\begin{array}{rclcrcl} 14^2 - 13^2 & = & 6^2 - 3^2 & \quad & 11^2 - 10^2 & = & 5^2 - 2^2 \\ 13^2 - 12^2 & = & 5^2 - 0^2 & & 10^2 - 8^2 & = & 6^2 - 0^2 \\ 12^2 - 9^2 & = & 8^2 - 1^2 & & 7^2 - 5^2 & = & 5^2 - 1^2 \end{array}$$

Podemos suponer, entonces $a \geq 10$.
Si

$$f(1) = 1 \Rightarrow f(2) = f(1^2+1^2) = 2f(1)^2 = 2 \Rightarrow f(4) = f(2^2+0^2) = f(2)^2 + f(0)^2 = 4$$
$$\Rightarrow f(8) = f(4+4) = 2f(2)^2 = 8$$

$$f(5) = f(2^2+1^2) = f(2)^2 + f(1)^2 = 5$$

$$f(3)^2 + f(4)^2 = f(3^2+4^2) = f(25) = f(5^2+0^2) = f(5)^2 = 25 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(3)^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow f(3) = 3 \Rightarrow f(9) = f(3)^2 = 9$$

$$f(10) = f(3^2 + 1^2) = f(3)^2 + f(1)^2 = 10, \quad f(100) = f(10^2 + 0^2) = 100$$

pero

$$f(100) = f(8^2 + 6^2) = f(8)^2 + f(6)^2 = 8^2 + f(6)^2 \Rightarrow f(6) = 6$$

Como

$$7^2 - 5^2 = 5^2 - 1^2 \Rightarrow f(7)^2 + f(1)^2 = f(7^2 + 1^2) = f(5^2 + 5^2) = 2f(5^2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(7)^2 = 2f(5)^2 - 1 = 49 \Rightarrow f(7) = 7.$$

Entonces, $f(n) = n$ para todo $n \leq 10$, como por lo visto antes, si $a \geq 10$ existen c, d y $b < a$ tales que $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, resulta por inducción que $f(n) = n\ \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 0}$.
En efecto, supongamos que $f(n) = n\ \forall n \leq m$, con $m \geq 10$, veamos que vale para $n = m+1$. Como $m + 1 \geq 10$, existen c, d y $b < m + 1$ tal que $b^2 + (m + 1)^2 = c^2 + d^2$, entonces

$$f(m+1)^2 + f(b)^2 = f((m+1)^2 + b^2) = f(c^2 + d^2) = f(c)^2 + f(d)^2 \Rightarrow$$
$$\underset{\text{H.I.}}{\Rightarrow} f(m+1)^2 = c^2 + d^2 - b^2 = (m+1)^2 \Rightarrow f(m+1) = m + 1.$$

Si $f(1) = 0$, de la misma forma llegamos a que $f \equiv 0$.

Ejercicio 4 (6, 0, 3, 58)
Consideremos la siguiente matriz infinita de números reales

$$H := \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & \dots \\ h_2 & h_3 & h_4 & \dots \\ h_3 & h_4 & h_5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Demostrar que el $\mathbb{R}-$espacio vectorial generado por las filas de H tiene dimensión finita si y solo si existen polinomios P, Q tales que $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} h_j x^j = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Resolución (Basada en la resolución del participante 18115: Rodriguez, Juan)

Supongamos que el espacio generado por las filas de H es finito, y que tiene dimensión n. Sean las filas $k_1, \dots, k_n$ una base de este espacio y sea $k = \max\{k_i : i = 1, \dots, n\}$, entonces las filas $1, 2, \dots, k$ también generan este mismo espacio. Si llamamos v_r al vector que representa la fila r tenemos que: existen $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, n)$ tal que $v_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i$ y fijándonos coordenada a coordenanda vemos que

$$\begin{gathered} h_{k+1} = \lambda_k h_k + \cdots + \lambda_1 h_1 \\ h_{k+2} = \lambda_k h_{k+1} + \cdots + \lambda_1 h_2 \\ \vdots \\ h_{k+j} = \lambda_k h_{k+j-1} + \cdots + \lambda_1 h_j \quad (j \in \mathbb{N}) \end{gathered}$$

equivalentemente $h_{k+j} - \lambda_k h_{k+j-1} - \cdots - \lambda_1 h_j = 0 \quad \forall j \in \mathbb{N}$.
Sea $H(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} h_j x^j$ entonces tenemos que:

$$\begin{array}{rcc} P(x) & = & H(x)(1 - \lambda_k x - \lambda_{k-1} x^2 - \cdots - \lambda_1 x^n) \\ & = & H(x) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^{k+1-i} H(x) \\ & = & \sum_{j=1}^{\infty} (h_{k+j} - \lambda_k h_{k+j-1} - \cdots - \lambda_1 h_j) x^{k+j} + R(x) \\ & = & \sum_{j=1}^{\infty} 0 x^{k+j} + R(x) = R(x). \end{array}$$

donde $R(x)$ es la suma de los términos de grado menor o igual que k en la suma de polinomios.
Sea $Q(x) = 1 - \lambda_k x - \cdots - \lambda_1 x^k$. Entonces $P(x) = H(x)Q(x) \Rightarrow H(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$.

Recíprocamente, si $H(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} h_j x^j = \frac{P(x)}{Q(x)}$ y $Q(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i x^i$ entonces tenemos que:

$$P(x) = H(x)Q(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} h_j \lambda_i x^{i+j} = R(x) + \sum_{j=m}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i h_{j-i} \right) x^j$$

donde $\mathrm{gr}(R(x)) \leq m - 1$.

Sea $h = \mathrm{gr}(P)$, entonces se debe tener que si $P(X) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i x^i$, para $i > h$, $p_i = 0$, entonces existe k' tal que $\forall m \geq k'$, $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i h_{m-i} = 0$, o sea $\lambda_0 h_m + \cdots + \lambda_k h_{m-k} = 0$. Como $Q(x) \neq 0$, existe $i \leq k$ tal que $\lambda_j = 0$ si $j < i$ y $\lambda_i \neq 0$.
Entonces tenemos que

$$\lambda_i h_{m-i} + \cdots + \lambda_k h_{m-k} = 0 \Rightarrow h_{m-i} = -\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} h_{m-i-1} - \cdots - \frac{\lambda_k}{\lambda_i} h_{m-k} \qquad \forall m \geq k'.$$

De esto vemos que

$$v_{m-i} = -\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} v_{m-i-1} - \cdots - \frac{\lambda_k}{\lambda_i} v_{m-k} \qquad \forall m \geq k'.$$

Así v_{m-i} pertenece al espacio generado por $\{v_{m-i-1}, \ldots, v_{m-k}\}$.
Sea $z = k'$, entonces el espacio generado por la filas de H es el generado por las filas $\{v_1, \ldots, v_z\}$. Lo demostramos por inducción:

$$v_{z+1} = -\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} v_z - \cdots - \frac{\lambda_k}{\lambda_i} v_{z+i+1-k}$$

por lo tanto, $v_{z+1} \in \langle v_1, \ldots, v_z \rangle$.
Si $v_h \in \langle v_1, \ldots, v_z \rangle$ con $h \geq k$ demostraremos que $v_{h+1} \in \langle z_1, \ldots, v_z \rangle$:

$$v_{h+1} = -\frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} v_h - \cdots - \frac{\lambda_k}{\lambda_i} v_{h+i+1-k}.$$

Entonces $v_{h+1} \in \langle v_h, \ldots, v_{h+i+1-k} \rangle \subset \langle v_1, \ldots, v_z \rangle$, por hipótesis inductiva.

Ejercicio 5 (9, 3, 10, 45)
Sean α y β dos números reales positivos. Demostrar que se tiene la siguiente unión disjunta

$$\mathbb{N} = \{[m\alpha], m \in \mathbb{N}\} \overset{\circ}{\bigcup} \{[n\beta], n \in \mathbb{N}\}$$

si, y solamente si, α y β son irracionales y $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ ($[x]$ denota la parte entera de x).

Resolución (Basada en la resolución de los participantes 18040: Alvarez, Nicolás - Grimoldi, Franco)

Demostramos primero que si α y β son irracionales y $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ entonces se tiene la unión disjunta igual a $\mathbb{N}$.
Veamos cuántos términos entre 0 y $x \in \mathbb{N}$ hay, de la forma $m\alpha$ y $n\beta$:

$$\begin{array}{ll} 0 < \alpha < 2\alpha < \cdots < \left[\frac{x}{\alpha}\right]\alpha < x & \quad \text{y} \\ 0 < \beta < 2\beta < \cdots < \left[\frac{x}{\beta}\right]\beta < x & \end{array}$$

Luego, hay $\left[\frac{x}{\alpha}\right] + \left[\frac{x}{\beta}\right]$ de la forma $m\alpha$ ó $m\beta$ entre 0 y x. Pero $\frac{x}{\alpha}$ y $\frac{x}{\beta}$ son irracionales, entonces

$$\begin{array}{ll} \frac{x}{\alpha} - 1 < \left[\frac{x}{\alpha}\right] < \frac{x}{\alpha} & \quad \text{y} \\ \frac{x}{\beta} - 1 < \left[\frac{x}{\beta}\right] < \frac{x}{\beta} & \end{array}$$

Sumando miembro a miembro:

$$x\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) - 2 < \left[\frac{x}{\alpha}\right] + \left[\frac{x}{\beta}\right] < x\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)$$

como $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ ($\Rightarrow \alpha, \beta > 1$):

$$x - 2 < \left[\frac{x}{\alpha}\right] + \left[\frac{x}{\beta}\right] < x \Rightarrow \left[\frac{x}{\alpha}\right] + \left[\frac{x}{\beta}\right] = x - 1.$$

Luego, entre 0 y x hay $x - 1$ términos y entre 0 y $x + 1$ hay x elementos. Además, al ser $m\alpha$ y $n\beta$ irracionales, nunca serán enteros. Por lo tanto en el intervalo $(x, x + 1)$ hay exactamente un término.
Por consiguiente, entre las sucesiones $[m\alpha]$ y $[n\beta]$ cada natural aparece exactamente una vez.
Ahora demostremos que si se tiene la unión disjunta igual a $\mathbb{N}$ entonces α y β son irracionales y $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.
Supongamos que $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$. Luego $\alpha = \frac{a_1}{a_2}$ y $\beta = \frac{b_1}{b_2}$ con a_1, a_2, b_1, b_2 enteros positivos. Si tomamos $m = a_2 b_1$ y $n = b_2 a_1$ obtenemos $m\alpha = a_1 b_1 = n\beta$ y entonces la unión no es disjunta.
Ahora supongamos que $\alpha \in \mathbb{Q}$ y $\beta \notin \mathbb{Q}$. Ahora $\alpha = \frac{a_1}{a_2}$ con a_1 y a_2 enteros positivos.
Los números de la forma ka_1 aparecen en $\{[m\alpha], m \in \mathbb{N}\}$. Veamos que alguno también aparece en $\{[n\beta], n \in \mathbb{N}\}$.
Tomemos $\frac{\beta}{a_1}$ que es claramente irracional.
Sabemos que dado un irracional r existe un natural n tal que rn difiere de algún entero en un número arbitrariamente pequeño. Hacemos que ese número sea menor que $\frac{1}{a_1}$ y que

$r = \frac{\beta}{a_1}$. A partir de ese rn, formamos la sucesión $rn, 2rn, \ldots, krn, \ldots$ y podemos asegurar que alguno de los términos es tal que existe un entero e tal que $e < krn < e + \frac{1}{a_1}$. Es decir que existe un x tal que $e < x\frac{\beta}{a_1} < e + \frac{1}{a_1}$ y por lo tanto $ea_1 < x\beta < ea_1 + 1$, entonces $[x\beta] = ea_1$. Es decir, que la unión no es disjunta.
Ahora, sabemos que α y β son irracionales.
Supongamos que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} < 1$. Entonces $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 - \varepsilon \quad \varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$.
Tomando $x \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, obtenemos que

$$\left[\frac{x}{\alpha}\right] + \left[\frac{x}{\beta}\right] < x\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) < x - 1$$

y por lo tanto no habrá $x - 1$ términos en $(0, x)$ y por consiguiente la unión no dará igual a $\mathbb{N}$.
Si fuera $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} > 1$, entonces $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1 + \varepsilon$.
Tomando $x \in \mathbb{N}$ suficientemente grande será:
Como $[\theta] + 1 > \theta$,

$$\left[\frac{x}{\alpha}\right] + \left[\frac{x}{\beta}\right] > x\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) - 2 > x - 1$$

y por lo tanto en $(0, x)$ habrá más de $x - 1$ términos y la unión no será disjunta.

Ejercicio 6 (1, 6, 22, 38)

Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable que verifica lo siguiente: $f(x) \geq 0$, $f''(x) < 0, \forall x \in (0,1)$, $\int_0^1 f(t)dt = 1$. Probar que para todo $x \in (0,1)$ vale que

$$\left(\int_0^x f(t)dt\right)\left(\int_x^1 f(t)dt\right) \leq \frac{1}{4}f(x).$$

Resolución(Basada en la resolución de los participantes 18128: Barmak, Jonathan - Mereb Martín)

Como $f''(x) < 0 \; \forall x \in (0,1)$, la función es cóncava hacia abajo y la desigualdad de Jensen nos dice que : $\forall a, b \in (0,1), \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$

$$\frac{\lambda_1 f(a) + \lambda_2 f(b)}{\lambda_1 + \lambda_2} \leq f\left(\frac{\lambda_1 a + \lambda_2 b}{\lambda_1 + \lambda_2}\right).$$

Primero reparametricemos ambas integrales:

$$A = \int_0^x f(t)dt = x\int_0^1 f(x(1-s))ds$$

$$B = \int_x^1 f(t)dt = (1-x)\int_0^1 f(x(1-s)+s)ds.$$

Entonces

$$x\int_0^1 f(x(1-s)+s)ds + (1-x)\int_0^1 f(x(1-s))ds = \int_0^1 xf(x(1-s)+s) + (1-x)f(x(1-s))ds$$

y por Jensen

$$xf(x(1-s)+s) + (1-x)f(x(1-s)) \leq f\left(\frac{x^2(1-s) + xs + (1-s)x(1-x)}{x+1-x}\right) = f(x).$$

Es decir

$$x\int_0^1 f(x(1-s)+s)ds + (1-x)\int_0^1 f(x(1-s))ds \leq \int_0^1 f(x)ds = f(x).$$

Entonces, por la desigualdad aritmético-geométrica, queda

$$\begin{aligned}
\sqrt{\left(\int_0^x f(t)dt\right)\left(\int_x^1 f(t)dt\right)} &= \sqrt{x\int_0^1 f(x(1-s))ds(1-x)\int_0^1 f(x(1-s)+s)ds} = \\
&= \sqrt{(1-x)\left(\int_0^1 f(x(1-s))ds\right)x\left(\int_0^1 f(x(1-s)+s)ds\right)} \\
&\leq \tfrac{1}{2}\left(x\int_0^1 f(x(1-s)+s)ds + (1-x)\int_0^1 f(x(1-s))ds\right) \leq \tfrac{f(x)}{2}.
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\sqrt{\left(\int_0^x f(t)dt\right)\left(\int_x^1 f(t)dt\right)} \leq \frac{\int_0^x f(t)dt + \int_x^1 f(t)dt}{2} = \frac{1}{2}.$$

Multiplicando ambas desigualdades, y obtenemos

$$\left(\int_0^x f(t)dt\right)\left(\int_x^1 f(t)dt\right) \leq \frac{f(x)}{2 \cdot 2} = \frac{f(x)}{4}.$$