COMPETENCIA MATEMATICA ERNESTO PAENZA
XVII Realización

Las soluciones que se encuentran a continuación fueron elegidas por el Comité Organizador entre las respuestas de los participantes. Son aquellas que más nos gustaron, además de ser correctas.
Los vectores luego del número del problema, considerando el total de participantes:
La primera coordenada, la cantidad que obtuvo 8, 9 o 10 puntos en el problema (esencialmente bien resuelto). La segunda coordenada, la cantidad que obtuvo 5, 6 o 7 puntos (esencialmente "la mitad o un poco más"del problema). La tercera coordenada, la cantidad que obtuvo 1, 2, 3 o 4 puntos (casos particulares o algo conducente a una posible solución). La cuarta coordenada, el complemento (aquellos que no hicieron nada).

<u>Ejercicio 1</u> (17, 11, 22, 15)
Encuentre el menor valor posible de $|12^m - 5^n|$ *, donde* m *y* n *son enteros positivos.*

<u>Resolución</u> (participantes 17162; Aronna, Maria S.- Biagioli, E.; Fac. de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura de Rosario):

Sean $m = n = 1$, entonces $|12^m - 5^n| = |12 - 5| = 7$.
A continuación, vamos a demostrar que la distancia entre 12^m y 5^n para todo $n, m \in \mathbb{N}$ nunca es menor que 7.
Como 12 es par, entonces 12^m es par. Como 5 es impar, 5^n es impar. Por lo tanto, la diferencia entre 12^m y 5^n siempre será impar.
Como siempre es impar, entonces nunca será 0.
Ahora vamos a analizar las congruencias de 5^n en módulo 12:

$$5 \equiv 5\ (12)\ ;\ 5^2 \equiv 1\ (12)\ ;\ 5^3 \equiv 5\ (12)$$

Una vez que se repite una congruencia, se repetirá todo el ciclo. Es decir, $5^4 \equiv 1\ (12)$, $5^5 \equiv 5\ (12)$.
En general, $5^{2k+1} \equiv 5\ (12)$ y $5^{2k} \equiv 1\ (12)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
Pueden ocurrir dos cosas:

1. $12^m - 5^n > 0 \Rightarrow |12^m - 5^n| = 12^m - 5^n$
2. $12^m - 5^n < 0 \Rightarrow |12^m - 5^n| = 5^n - 12^m$

En el primer caso, tenemos que $12^m \equiv 0\ (12)\ \forall m \in \mathbb{N}$ y, como $5^n \equiv 5\ o\ 1\ (12)$, entonces $-5^n \equiv 7\ o\ 11\ (12)$. Por lo tanto $12^m + (-5^n) \equiv 7\ o\ 11\ (12)$.
Entonces la distancia será un número natural que es congruente con 7 o con 11 módulo 12. Así, no podrá ser menor que 7.
Concluimos en este primer caso que:

$$12^m - 5^n > 0 \Rightarrow |12^m - 5^n| \geq 7.$$

Por un razonamiento similar para el segundo caso, llegamos a que $5^n - 12^m \equiv 1$ ó $5\ (12)$.
Supongo que $5^n - 12^m = 5$ (el único natural menor que 7 que es congruente con 5 módulo 12). Entonces $5^n - 5 = 12^m \iff 5(5^{n-1} - 1) = 12^m$. Pero, entonces 5 divide a 12^m y, como es primo, divide a 12, lo que resulta absurdo. Por lo tanto, $5^n - 12^m \neq 5$.
Entonces, supongo $5^n - 12^m = 1$. Así $5^n \equiv 1\ (12) \Rightarrow n = 2k$. Además, $5^n - 12^m = 1 \equiv 1\ (5) \Rightarrow -12^m \equiv 1\ (5) \Rightarrow 12^m \equiv 4\ (5)$.
Analizando las congruencias de 12^m módulo 5, se tiene:

$$12 \equiv 2\ (5),\ 12^2 \equiv 4\ (5),\ 12^3 \equiv 3\ (5),\ 12^4 \equiv 1\ (5),\ 12^5 \equiv 2\ (5),\ 12^6 \equiv 4\ (5)$$

Llegamos a que $12^m \equiv 4\ (5) \Rightarrow m$ es par ($m = 2j$).
Entonces $5^{2k} - 12^{2j} = 1$. Por lo tanto $(5^k - 12^j)(5^k + 12^j) = 1$ donde ambos factores son enteros y $5^k + 12^j > 1$ porque es suma de dos naturales, lo que resulta absurdo. Entonces $5^n - 12^m \neq 1$.
Concluimos en este segundo y último caso que:

$$5^n - 12^m > 0 \Rightarrow |12^m - 5^n| > 7.$$

Del análisis de ambos casos llegamos a que $|12^m - 5^n| \geq 7,\ \forall m, n \in \mathbb{N}$. Por consiguiente, 7 es el menor valor que puede adoptar esa distancia.

Ejercicio 2 (15, 3, 14, 33)

Determinar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:
Sean α, β, γ números reales positivos tales que $\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma)$ son racionales y $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Entonces existe un triángulo de lados enteros cuyos ángulos interiores son α, β, γ.

Resolución (participantes 17015; Gaspoz Daniel - Koropecki, Andrés; Fac. de Ingeniería Química del Litoral):

Sean α, β, γ números reales positivos tales que $\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma)$ son racionales y $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.
Sabemos que para tales α, β, γ existe un triángulo que los tiene como ángulos interiores, cuyos lados son a, b y c, pero entonces sabemos que

$$\begin{array}{rcccc} a & = & b\cos\gamma & + & c\cos\beta \\ b & = & a\cos\gamma & + & c\cos\gamma \\ c & = & a\cos\beta & + & b\cos\alpha \end{array}$$

De donde obtenemos el sistema

$$\begin{pmatrix} -1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & -1 & \cos\gamma \\ \cos\beta & \cos\alpha & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matriz de este sistema es singular puesto que existe un triángulo de lados no nulos que satisface el sistema, pero entonces la matriz es singular también sobre el cuerpo de los racionales y, por lo tanto, tiene soluciones no nulas sobre el cuerpo de los racionales. Luego, tomando una solución tal y multiplicándola por el producto de los denominadores (esto es: si $(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3})$ es solución, entonces tomamos esta solución y la multiplicamos por $q_1 q_2 q_3$) obtenemos una solución entera. Luego, el triángulo cuyos lados son estas soluciones es el triángulo buscado.

Ejercicio 3 **(13, 3, 20, 29)**
Definimos la función $f : [0,1] \to [0,1]$ *de la siguiente manera:* $f(1) = 1$ *y si* $a = 0,a_1a_2a_3a_4...$ *es la representación decimal de* a *, definimos*

$$f(a) = 0,0a_10a_20a_30a_4...$$

En el caso en que haya dos posibles escrituras del mismo número por repetición de nueves, "elegimos"la que "termina"(por ejemplo, si $b = 0,09999..,9...$ *, lo tomamos como* $0,1$ *).*
Estudie la continuidad de f *en cada uno de los puntos del intervalo* $[0,1]$.

Resolución (participantes 17181; Alesandroni, Guillermo - Grin, Elisa; Fac. de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura de Rosario):

Esta claro que f es creciente.

- f es continua a derecha en todo su dominio:

  Sea $0,a_1a_2\dots a_n\dots \in [0,1]$.

  Sea $\epsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $10^{-n} < \epsilon$. Sea $m \in \mathbb{N}$, $m > n$ tal que $a_m \neq 9$ (tal m existe por que a no termina en cola de nueves). Luego si

  $$b \text{ tal que } a < b < a + 10^{-m} = 0,a_1\dots a_m + 1\dots = c$$

  entonces

  $$f(a) < f(b) < f(c) = f(a) + 10^{-2m)} < f(a) + \epsilon$$

- Si $a \in [0,1]$ es tal que su desarrollo decimal no termina entonces f es también continua a izquierda en a y por lo tanto f resulta continua en dichos puntos.

  Sea $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ tal que $10^{-n} < \epsilon$ sea $m \in \mathbb{N}$, $m > n$ tal que $a_m \neq 0$. Luego si

  $$b \text{ tal que } a > b > a - 10^{-m} = 0,a_1\dots a_m - 1\dots = c$$

  entonces

  $$f(a) > f(b) > f(a) - 10^{-2m} > f(a) - \epsilon$$

- Si $a \in [0,1]$ es tal que su desarrollo decimal termina entonces f no es continua a izquierda en a y por lo tanto f resulta discontinua en dichos puntos.

  Sea $a = 0,a_1\dots a_n$. Luego $\forall$ b tal que $a - 10^{-n} < b < a$, $b = 0,a_1\dots a_n - 1\dots$.
  Por lo tanto

  $$f(b) = 0,0\ a_1\dots 0\ a_{n-1}\ 0\ (a_n - 1)\ 0\dots < \ f(b) = 0,0\ a_1\dots 0\ a_{n-1}\ 0\ (a_n - 1)\ 1 = f(a) - 10^{-2n} + 10^{-2n-1} = f(a) - \frac{9}{10^{2n+1}}$$

  Por lo que $f(a) - f(b) > \dfrac{9}{10^{2n+1}}$

Ejercicio 4 **(5, 4, 10, 46)**
Sean $A \subset B$ convexos acotados en el plano, cuyos bordes son la imagen de una curva rectificable. Pruebe que la longitud del borde de A es menor o igual que la longitud del borde de B.

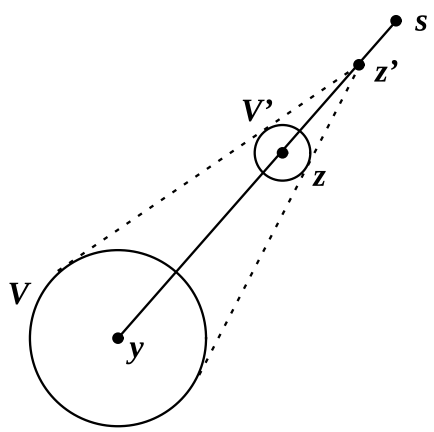
Resolución (participantes 17006; Qureschi, Claudio - Alonso, Juan ; Fac. de Ciencias de Uruguay):

- $A^\circ \neq \emptyset$

  Sea $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ parametrización de ∂A y $\beta : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ parametrización de ∂B.

  Tomo $x \in A^\circ$. Si $0 = a_1 < \ldots < a_n = 1$ es una partición de $[0,1]$, sean $c_1, \ldots, c_n \in [0,1]$ tales que la semirecta $\overrightarrow{x\alpha(a_i)} \cap \partial B = \{\beta(c_i)\}$.

  Estos c_i existen y son únicos ya que una semirrecta que parte del interior de un convexo acotado corta al borde del convexo en un solo punto:

  Si C es un convexo acotado, $y \in C^\circ$ y t es una semirrecta que parte de y, entonces, como C es acotado existe $p \in t$ tal que $t \cap C \subset \overline{yp}$ (donde $\overline{yp}$ es el segmento que une y y p). Si $q \in t$, entonces $q = y + \lambda(p - y)$ con $\lambda \leq 0$. Sea $\lambda_0 = \text{ínf}\{\lambda > 0 : \ t \cap \overline{yq}$ con $q = y + \lambda(p-y)\}$, y $s = y + \lambda_0(p - y)$. Como $y \in C\circ$, entonces $\lambda_0 > 0$. Por definición de λ_0 y convexidad de C, es claro que $[y, s) \subset C\circ$. Luego $\{s\} = \partial C \cap t$.

  Entonces, basta probar que $\sum ||\alpha(a_i) - \alpha(a_{i-1})|| \leq ||\beta(c_i) - \beta(c_{i-1})|| \leq l(\beta) =$ longitud de β. Como $a_1 \ldots a_n$ es una partición cualquiera, se tiene que $l(\alpha) \leq l(\beta)$

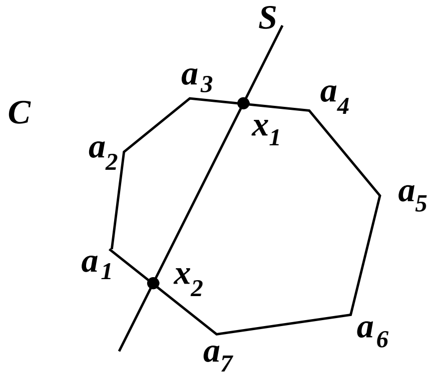
  Observemos además que si C convexo y $\{c_1, \ldots, c_n\} \subset \partial C$, el polígono determinado por estos puntos resulta convexo.

  Por lo tanto, alcanza con demostrar la desigualdad para A y B polígonos convexos. Como B es un polígono convexo, $B = S_1 \cap \ldots \cap S_m$ con S_i semiplanos para $i = 1, \ldots, m$. Basta probar que si C es un polígono y S un semiplano, el perímetro de C es mayor o igual que el de $C \cap S$ ya que si esto vale: $A \supset B \Longrightarrow B = B \cap A \Longrightarrow B = S_1 \cap \ldots \cap S_m \cap A \Longrightarrow$. Luego

$$p(B) \leq p(S_1 \cap \ldots \cap S_m \cap A) \leq \ldots \leq p(S_m \cap A) \leq p(A)$$

donde $p(C)$ es el perímetro del polígono C.

Sean ahora C un polígono y S un semiplano. Sean $\{a_1, \ldots, a_n\}$ los vértices de C y $\{x_1, x_2\} = \partial S \cap \partial C$.



Sea $I = \{i \in \{1, \ldots, n\} : \ a_i \in S\}$.
Se puede suponer que $I = \{a_k, \ldots a_n\}$. Entonces,

$$p(c \cap S) = ||x_1 - a_k|| + \sum_{l=k}^{n-1} ||a_{l+1} - a_l|| + ||a_n - x_2|| + ||x_1 - x_2||$$

pero

$$||x_1 - x_2|| = ||x_1 - x_2 + \sum_{j=1}^{k-1} a_j - \sum_{j=1}^{k-1} a_j|| \leq ||x_1 - a_{k-1}|| + ||a_1 - x_2|| + \sum_{j=1}^{k-2} ||a_{j+1} - a_j||.$$

Entonces,

$$p(C \cap S) \leq \sum_{j=1}^{n-1} ||a_{j+1} - a_j|| - \|a_k - a_{k-1}\| + ||x_1 - a_k|| + ||x_2 - a_n|| + ||x_1 - a_{k-1}|| + ||x_2 - a_1||$$

pero como $x_1 \in \overline{a_{k-1}a_k}$ y $x_2 \in \overline{a_1 a_n}$, se tiene $||a_1 - a_n|| = ||a_1 - x_2|| + ||a_n - x_2||$ y $||a_{k-1} - x_1|| + ||a_k - x_1|| = ||a_{k-1} - a_k||$.
Por lo tanto,

$$p(C \cap S) \leq \sum_{j=1}^{n-1} ||a_{j+1} - a_j|| + ||a_1 - a_n|| = p(C).$$

- $A^\circ = \emptyset$

  En este caso A es un segmento (ya que si A tiene 3 puntos no alineados, entonces contiene el triángulo que éstos determinan, que tiene interior no vacío). Sea $A = \overline{xy}$.

  Sean s, t rectas perpendiculares a $\overline{xy}$, pasando por x e y respectivamente. Sea $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ parametrización de ∂B.

  Si $x, y \in \partial B \Longrightarrow x = \alpha(a_1),\ y = \alpha(a_2)$ y $l(\alpha) \geq ||\alpha(0) - \alpha(a_1)|| + ||\alpha(a_2) - \alpha(a_1)|| + ||\alpha(1) - \alpha(a_2)|| \geq ||\alpha(a_2) - \alpha(a_1)|| = ||x - y||$.

  Si $x \in \partial B,\ y \in B^\circ \Longrightarrow t$ corta a ∂B en y_1, y_2 (pues t es la unión de dos semirrectas que parten de un punto de B°) $\Longrightarrow x = \alpha(a_0),\ y_1 = \alpha(a_1),\ y_2 = \alpha(a_2) \Longrightarrow l(\alpha) \geq ||\alpha(a_0) - \alpha(a_1)|| = ||x - y_1|| \geq ||x - y||$ ya que $y_1 \in t$, $x \in S$ y $d(t, s) = ||x - y||$.

  Si $x, y \in B^\circ \Longrightarrow t \cap \partial(B) = \{x_1, x_2\},\ s \cap \partial(B) = \{y_1, y_2\}$ (como en el caso anterior) y $l(\alpha) \geq ||x_1 - y_1|| \geq ||x - y||$ ya que $x_1 \in s$ y $y_1 \in t$.

<u>Ejercicio 5</u> (9, 0, 18, 38)
La sucesión de enteros $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *está definida de la manera siguiente:* $a_1 = 2, a_2 = 7$ *y*

$$-\frac{1}{2} < a_{n+1} - \frac{a_n^2}{a_{n-1}} \leq \frac{1}{2} \qquad \forall n \geq 2.$$

Pruebe que, $\forall n > 1, a_n$ *es impar.*

<u>Resolución</u> (participatentes 17034, Bolognini, Laura - Angiono, Iván; Fac. de Cs. Exactas de La Plata):

Es claro que en ese intervalo hay un único entero a_{n+1}, pues $(\frac{a_n^2}{a_{n-1}} - \frac{1}{2}, \frac{a_n^2}{a_{n-1}} + \frac{1}{2}]$ es un intervalo de longitud 1 y uno de los extremos es abierto y el otro cerrado.
Calcularno algunos términos de la sucesión: $a_1 = 2$; $a_2 = 7$; $a_3 = 25$; $a_4 = 89$; $a_5 = 317$.
Tomemos ahora la sucesión $b_n = 3b_{n-1} + 2b_{n-2}$ para $n \geq 3$, con $b_1 = 2$, $b_2 = 7$. Vemos que esta sucesión cumple las condiciones del problema. Claramente la sucesión $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está definida en los enteros positivos como $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Probemos que $b_n \in (\frac{b_n^2}{b_{n-1}} - \frac{1}{2}, \frac{b_n^2}{b_{n-1}} + \frac{1}{2}]$.

Primero expresemos la sucesión como $b_n = x_1^n + bx_2^n$ donde x_1, x_2 son entonces (de acuerdo a lo que se sabe de sucesiones en recurrencia) las raices $x^2 - 3x - 2 = 0$. Asi, $x_1 = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$ y $x_2 = \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$. Ahora a y b cumplen:

$$b_1 = a\frac{3+\sqrt{17}}{2} + b\frac{3-\sqrt{17}}{2} = 2$$
$$b_2 = a(\frac{3+\sqrt{17}}{2})^2 + b(\frac{3\sqrt{17}}{2})^2 = 7$$

Despejando se obtiene:

$$a = \frac{5+\sqrt{17}}{4\sqrt{17}}$$
$$b = \frac{\sqrt{17}-5}{4\sqrt{17}}$$

Así sera, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$b_n = \frac{5+\sqrt{17}}{4\sqrt{17}}\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{17}-5}{4\sqrt{17}}\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n.$$

Calculemos ahora:

$$
\begin{aligned}
\frac{b_n^2}{b_{n+1}} = \quad & \frac{(ax_1^n+bx_2^n)^2}{ax_1^{n-1}+bx_2^{n-1}} \\
& \frac{ax_1^{2n}+bx_2^{2n}+2abx_1^nx_2^n}{ax_1^{n-1}+bx_2^{n-1}} + b_{n+1} - b_{n+1} \\
& b_{n+1} + \frac{(ax_1^{2n}+bx_2^{2n}+2abx_1^nx_2^n)-(ax_1^{n-1}+bx_2^{n-1})(ax_1^{n+1}+bx_2^{n+1})}{ax_1^{n-1}+bx_2^{n-1}} \\
& b_{n+1} + \frac{ax_1^{2n}+bx_2^{2n}+2abx_1^nx_2^n-ax_1^{2n}-bx_2^{2n}-ab(x_1x_2)^{n-1})(x_1^2+x_2^2)}{ax_1^{n-1}+bx_2^{n-1}} \\
& b_{n+1} + \frac{ab(x_1x2)^{n-1}(2x_1x_2-x_1^2-x_2^2}{ax_1^{n-1}+bx_2^{n-1}} \\
& b_{n+1} - \frac{ab(x_1x_2)^{n-1}(x_1-x_2)^2}{b_{n-1}} \\
& b_{n+1} - \frac{\frac{\sqrt{17}-5}{4\sqrt{17}}\frac{\sqrt{17}+5}{4\sqrt{17}}\left[\frac{3+\sqrt{17}}{2}\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right]^{n-1}\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}-\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^2}{b_{n-1}} \\
& b_{n+1} + \tfrac{(-2)^{n-1}}{2b_{n-1}}
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$b_{n+1} - \frac{b_n^2}{b_{n-1}} = -\frac{(-2)^{n-2}}{b_{n-1}}$$

Así , tenemos que probar que:

$$\frac{1}{2} < b_{n+1} - \frac{b_n^2}{b_{n-1}} = -\frac{(-2)^{n-2}}{b_{n-1}} \leq \frac{1}{2} \quad \forall \ \ n > 2$$

Esto equivale a probar que $|\frac{(-2)^{n-2}}{b_{n-1}}| = \frac{2^{n-2}}{b_{n-1}} < \frac{1}{2}$, o sea $b_n > 2^n$, para todo $n > 1$.

Veremos esto por inducción:

Si $n = 2$, $b_2 = 7 > 2^2 = 4$.

Si esto se cumple para todo $k < n$. Se tiene que:

$$b_n = 3b_{n-1} + 2b_{n-2} > 3{,}2^{n-1} + 2{,}2^{n-2} = 4{,}2^{n-1} = 2^{n+1} > 2^n$$

Entonces, la sucesión b_n cumple con las mismas condiciones que a_n y como esta es única resulta $a_n = b_n$. Así, la sucesión a_n esta definida recursivamente por:

$b_1 = 2$, $b_2 = 7$
$b_n = 3b_{n-1} + 2b_{n-2}$ para $n \geq 3$

Probemos por inducción que $a_n \equiv 1 \ (2)$ para $n > 1$.
Si $n = 2$: $a_2 = 7 \equiv 1 \ (2)$.
Si $a_n \equiv 1 \ (2)$, entonces:

$$a_{n+1} = 3a_n + 2a_{n-1} \equiv 1.a_n + 0.a_{n-1} \equiv a_n \equiv 1 \ (2)$$

Como queríamos demostrar.

Ejercicio 6 (3, 0, 14, 48)
Para cada $n \in \mathbb{N}$, llamemos m_n al máximo valor que toma la función "determinante"sobre todas las matrices cuadradas de tamaño $n \times n$ cuyos coeficientes son 1 ó -1 (por ejemplo, $m_1 = 1, m_2 = 2, m_3 = 4$). Defina una función $f(n)$, tan explícitamente como pueda, que verifique $m_n \leq f(n) \forall n \in \mathbb{N}$, y $m_n = f(n)$ para infinitos valores de n.

Resolución (participante 17040; Mereb, Martín - Barmack, Jonathan; Fac. Cs. Exactas y Naturales, UBA):

Veamos primero que si M es una matriz ($M \in \mathbb{R}^{n\times n}$) y sus columnan son las coordenadas de los vectores $v_1, \ldots, v_n$ en la base canónica, entonces $|\det M| \leq \prod_{i=1}^{n} ||v_i||_2$ donde $||(v_i^1, \ldots, v_i^n)||_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (v_i^j)^2}$.
Si M fuese una matriz triangular, la norma 2 de cada columna sería mayor o igual que el módulo del coeficiente de esa columna que se encuentra en la diagonal y el $\det M$ sería el producto de los elementos de la diagonal. Por lo tanto, $|\det M| = \prod_{i=1}^{n} |v_i^i| \leq \prod_{i=1}^{n} ||v_i||_2$.
Si M no es una matriz triangular, cambio a otra base ortonormal de manera tal que las coordenadas de los v_i en esta nueva base formen una matriz triangular (esto lo puedo hacer con Gram-Schmidt o con la factorización QR de M donde Q es ortogonal y R es triangular; entonces $Q^{-1}M = R$ y las columnas de $Q^{-1}M$ son las coordenadas de los v_i en la base formada por las columnas de Q).
Como el cambio de base fue ortonormal, las normas 2 de los vectores columna de $Q^{-1}M$ valen lo mismo que las respectivas normas 2 de los v_i y $|\det(Q^{-1})| = 1$ ya que Q es ortogonal. Entonces $|\det M| = |\det Q^{-1}||\det M| = |\det(Q^{-1}M)| = \prod_{i=1}^{n} |w_i| \leq \prod_{i=1}^{n} ||w_i||_2$ donde $w_i = (w_i^1, \ldots, w_i^n)$ son las coordenadas de los v_i en la base nueva, cuyos elementos son las columnas de Q. Pero quedamos en que $||w_i||_2 = ||v_i||_2$.
Por lo tanto, $|\det M| \leq \prod_{i=1}^{n} ||w_i||_2 = \prod_{i=1}^{n} ||v_i||_2$.
Supongamos que $\det M \neq 0$. Notemos que $||w_i||_2 = |w_i^i|$ si y sólo si las coordenadas w_i^j son 0 para $j \neq i$.
Entonces, si $Q^{-1}M$ es triangular y $|\det(Q^{-1}M)| = \prod_{i=1}^{n} ||w_i||_2 \Leftrightarrow ||w_i||_2 = |w_i^i|, \ \forall i \Leftrightarrow$ $Q^{-1}M$ es diagonal $\Leftrightarrow$ los w_i son ortogonales entre sí $\Leftrightarrow$ los v_i también (como Q es ortogonal preserva productos internos).
Si $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tiene sus coeficientes iguales a 1 ó -1, entoces las normas 2 de sus vectores columna son iguales a $\sqrt{n}$ pues $||v_i||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (v_i^j)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1} = \sqrt{n}$. Por lo tanto $|\det M| \leq \prod_{i=1}^{n} ||v_i||_2 = n^{\frac{n}{2}}$.
Así, $\det M \leq n^{\frac{n}{2}}$ y como es un número entero que resulta de sumar $n!$ términos, cada uno de los cuales es producto de n números del conjunto $1, -1$, entonces $\det M$ es suma de $n!$ números impares y, por lo tanto, para $n \geq 2$, $\det M$ es par.
Si llamamos $\lfloor x \rfloor_p$ al mayor entero par menor o igual a x, $\det M \leq \lfloor n^{\frac{n}{2}} \rfloor_p$, si $n \geq 2$.
Notemos que $\lfloor x \rfloor_p := 2\lfloor \frac{x}{2} \rfloor$. Entonces, $m_n \leq \lfloor n^{\frac{n}{2}} \rfloor_p$, para todo $n \geq 2$ y $m_1 = 1$.
Veamos que hay infinitos $n \in \mathbb{N}$ para los que $m_n = \lfloor n^{\frac{n}{2}} \rfloor_p$.
Sea $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Su determinante es 2 y es igual a $2^{\frac{2}{2}} = \lfloor 2^{\frac{2}{2}} \rfloor_p$. Sus vectores columna son ortogonales entre sí.
Si $b \in \mathbb{R}^{k\times k}$ y sus coeficientes son sólo 1 y -1, y sus vectores columna son ortogonales, entonces $|\det B| = \prod_{i=1}^{k} ||B_i||_2 = \prod_{i=1}^{n} \sqrt{k} = k^{\frac{k}{2}}$ o también

$$|\det B|^2 = |\det B \det B^t| = |\det(BB^t)| = \det \begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & & \\ & & \ddots & \\ & & & k \end{pmatrix} = k^k.$$

Si $A_n \in \mathbb{R}^{2^n \times 2^n}$ es una matriz de 2^n por 2^n con coeficientes 1 ó -1, tal que sus columnas son ortogonales entre sí, consideramos $A_{n+1} \in \mathbb{R}^{2^{n+1} \times 2^{n+1}}$ definida por

$$A_{n+1} := \begin{pmatrix} A_n & -A_n \\ A_n & A_n \end{pmatrix}$$

que sólo tiene por coeficientes al 1 y al -1.
Veamos que sus vectores columna son también ortogonales dos a dos y que el módulo del determinante es $(2^{n+1})^{\frac{2^{n+1}}{2}} = 2^{(n+1)2^n} = \lfloor k^{\frac{k}{2}} \rfloor_p$ si $k = 2^{n+1}$ (es decir, en este caso, $m_k = m_{2^{k+1}} = \lfloor k^{\frac{k}{2}} \rfloor = 2^{(n+1)2^n}$).

$$A_{n+1}A_{n+1}^t = \begin{pmatrix} A_n & -A_n \\ A_n & A_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n^t & A_n^t \\ -A_n^t & A_n^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2A_nA_n^t & 0 \\ 0 & 2A_nA_n^t \end{pmatrix} = 2. \begin{pmatrix} A_nA_n^t & 0 \\ 0 & A_nA_n^t \end{pmatrix}$$

Pero, $A_nA_n^t = \begin{pmatrix} 2^n & & 0 \\ & \ddots & \\ & & 2^n \end{pmatrix} = 2^n I_{2^n}$ ya que sus vectores columna som ortogonales y tienen norma 2 igual a $2^{\frac{n}{2}}$.
Entonces,

$$A_{n+1}A_{n+1}^t = 2 \begin{pmatrix} 2^n I_{2^n} & 0 \\ 0 & 2^n I_{2^n} \end{pmatrix} = 2^{n+1}.I_{2^{n+1}}.$$

Entonces sus vectores columna son ortogonales entre sí y tienen norma 2 igual a $2^{\frac{n+1}{2}}$.
Calculando el determinante como en los casos anteriores se llega a que $|\det(A_{n+1}| = (2^{n+1})^{2^n} = 2^{(n+1)2^n}$.
Como tenemos definido A_1 que cumple que sus vectores columna son ortogonales, de norma $2^{\frac{1}{2}}$ y probamos que si A_n tiene esa propiedad (la de la ortogonalidad de las columnas), también la tiene A_{n+1}, tenemos definida por recurrencia una sucesión de matrices que cumplen tener sus vectores columna ortogonales entre sí, cuyos determinantes coinciden con la cota dada por $\lfloor k^{\frac{k}{2}} \rfloor_p$ siendo k la cantidad de columnas.
En realidad, no probamos que el determinante coincide con la cota sino que lo que probamos es que el módulo del determinante coincide con la cota. Esto se soluciona cambiando el signo de todos los elementos de una misma fila.
Por lo tanto, nuestra f sería:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ \lfloor n^{\frac{n}{2}} \rfloor_p & n \geq 1 \end{cases}$$

y sabemos que $f(n) \geq m_n \ \forall n$ y que coincide para todo n potencia de 2.