Competencia Matemática E. Paenza

11^0 REALIZACIÓN — AÑO 1996

Participante N^0:

---

1. ¿Existe un polinomio $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ cuya imagen sea el intervalo abierto $(0, +\infty)$?

---

2. Se tiene una función $f : [0,1] \to [0,1]$ con derivada segunda continua, que verifica:

$$f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f'(0) = f'(1) = 0.$$

Pruebe que existe un número real $t \in (0,1)$, tal que $|f''(t)| \geq 4$.

3.

i. Demuestre que si $A = (a_{ij})$ es una matriz simétrica de $n \times n$ con coeficientes reales, y $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ son sus autovalores (eventualmente repetidos), entonces

$$\sum_{i=1}^{n} {\lambda_i}^2 = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}^2.$$

ii. Demuestre que si $A = (a_{ij})$ es una matriz arbitraria $n \times n$ con coeficientes complejos y $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ son sus autovalores (eventualmente repetidos), entonces

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \leq \sum_{1 \leq i,j \leq n} |a_{ij}|^2.$$

---

4. Se trazan en el plano n rectas cualesquiera, quedando éste dividido en regiones. Pruebe que es posible colorearlas con sólo dos colores, de manera tal que dos regiones adyacentes no tengan nunca el mismo color.

(Nota: Para que dos regiones sean adyacentes, se requiere que tengan al menos un segmento en común.)

---

5. ¿Cuántos pares $(x, y) \in \mathbb{Z}_{31} \times \mathbb{Z}_{31}$ (es decir, enteros módulo 31) satisfacen la igualdad

$$x^5 + 1 = y^2?$$

6.

Se sabe que una mañana, empezó a nevar en forma pesada y constante. Una máquina recogedora de nieve comenzó su tarea a las $8:00$ am. Luego de una hora, había recorrido 2 kilómetros. A las $10:00$ am había avanzado en total 3 kilómetros. Suponiendo que la máquina recoge un volumen constante de nieve por hora, determine el momento en el que había empezado a nevar.