Competencia Matemática Ernesto Paenza
Octava Realización — 1993

Participante N^0:

---

1 - Probar que cualquier conjunto A de 55 elementos tomados entre los primeros 100 números naturales contiene, al menos, un par de números que difieren en 10 y un par de números que difieren en 12. ¿Es cierto que A debe contener también un par de números que difieren en 11?

---

2 - Sean p y q dos primos impares distintos y $n = p \cdot q$. Dar un procedimiento para hallar un número $k \in \{2, 3, \ldots, n-2\}$ que verifique que $k^2 - 1$ sea divisible por n. Exhibir k para el caso $p = 953$, $q = 317$.

---

3 - Sea p un número natural, $p \geq 2$, y $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1} \in \mathbb{R}$. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \pi^p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

y sea $A > 0$ tal que $f(x) > 0\ \forall x \geq A$.
Para cada número natural $n \geq A$ definimos

$$x_n = \operatorname{sen} \sqrt[p]{f(n)}$$

Probar que (x_n) es convergente $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{a_{p-1}}{p \cdot \pi^p} \in \mathbb{Z}$.

---

4 - Una terna (x_1, x_2, x_3) de números irracionales positivos con $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ se dice "balanceada" si cada x_i es menor que $1/2$. Si una terna no está balanceada, supongamos por ejemplo que $x_1 > 1/2$, se efectúa el siguiente procedimiento:

$$(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (2x_1 - 1, 2x_2, 2x_3)$$

(similarmente si $x_2 > 1/2$ o $x_3 > 1/2$).
Si la nueva terna no resulta balanceada, se reitera el procedimiento. ¿Es cierto que en un número finito de pasos se llega siempre a una terna balanceada?

---

5 - Se define una sucesión de circunferencias del siguiente modo:
C_0 es la circunferencia de radio 1 con centro en $P_0 = (0, 1)$
C_1 es la circunferencia de radio 1 con centro en $P_1 = (2, 1)$
y a partir de éstas
C_{i+1} es la circunferencia tangente a C_i, a C_{i-1} y al eje x.
Si llamamos P_n al punto centro de la circunferencia C_n, se pide hallar $\lim_{n\to\infty} P_n$.

---

6 - Sea $a > 0$. Determinar todos los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que

$$\left(\int_0^a f(t)\, dt \right)^2 \geq \lambda \int_0^a f^3(t)\, dt$$

para toda función $f : [a, b] \to [0, +\infty)$ derivable tal que $f(0) = 0$ y $f'(x) \leq 1\ \forall x \in [0, a]$.

<u>Nota:</u> Para obtener el máximo puntaje en un ejercicio, es necesario justificar apropiadamente la respuesta.