Competencia Matemática E. Paenza
Séptima Realización — 1992

Participante N ^{0} :

Problema 1. Sea H el conjunto de vectores con coeficientes enteros, $H \subset \mathbb{Z}^{n+1}$,

$$H = \{(z_0, z_1, \ldots, z_n) \ : \ z_0 = 0, \ |z_{i+1} - z_i| = 1, \ i = 0, 1, \ldots, n-1\}$$

Dos puntos de H son *vecinos* si difieren en una única coordenada (por ejemplo $(0,1,2,3,2)$ y $(0,1,2,1,2)$). Dados dos puntos cualesquiera de H , demostrar que es posible ir de uno al otro moviéndose siempre de un punto a un punto vecino.

Problema 2. Determinar si la ecuación $\operatorname{sen}(x^2 + x) = \operatorname{sen} x^2 + \operatorname{sen} x$ tiene solución en el intervalo $[2, 3]$.

Problema 3. Calcular $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\binom{n}{5}}$.

Problema 4. Sean $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua no decreciente ($x \leq y \ \Rightarrow \ f(x) \leq f(y)$) y $\{c_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión de números reales estrictamente positivos. Sea $a \in \mathbb{R}$ cualquiera y $\{x_n\}_{n \geq 0}$ una sucesión que satisface la relación: $x_0 = a$, $x_n = x_{n+1} + c_n \cdot f(x_{n+1})$. Demuestre:

a) Si f tiene algún cero, entonces x_n es convergente.

b) Si además la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ diverge, entonces $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n$ es un cero de f .

Problema 5. Dos números racionales x , y se dicen *ligados* si

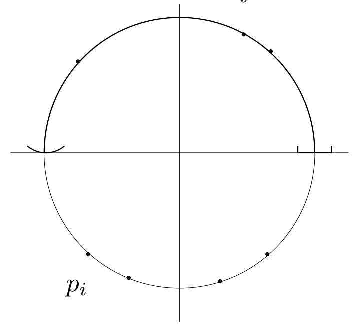
$$x \cdot y = -1 \qquad \text{o bien si} \qquad |x - y| = 2.$$

Demuestre que para todo número racional q , existen $n \in \mathbb{N}$ y números racionales $q_0, \ldots, q_n$ tales que

$$\begin{cases} q_0 = 0 \quad \text{o} \quad q_0 = 1 \\ q_i \ \text{ y } \ q_{i+1} \ \text{ están ligados para todo } i = 0, 1, \ldots, n-1 \\ q_n = q \end{cases}$$

Problema 6. Se tienen n puntos p_1 , $p_2, \ldots, p_n$ en la circunferencia unidad C y n enteros no nulos $k_1, \ldots, k_n$.

Demuestre que existe un número real $\theta \geq 0$ tal que si cada punto p_i gira un ángulo $k_i \cdot \theta$, entonces al menos la mitad de los puntos (es decir $n/2$ si n es par o $(n{+}1)/2$ si n es impar), cae en la semicircunferencia superior $C^+ = \{p \in C \ : \ 0 \leq \arg(p) < \pi\}$.



NOTA: *Para obtener el máximo puntaje en cada ejercicio, es necesario justificar la respuesta.*