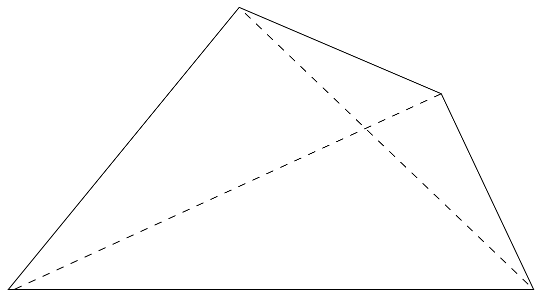
Competencia Matemática E. Paenza

Sexta Realización — 1991

Participante N ^{0} :

Problema 1. Sea C un cuadrilátero convexo.



Si el área del cada uno de los cuatro triángulos determinados por las dos diagonales de C es un número natural, pruebe que el área de C no es un número primo.

Problema 2. Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \arctan\left(\frac{n}{n^2+k(k-1)}\right).$$

Problema 3. Dado un polinomio $P \neq 0$ con coeficientes complejos, se define el número entero $n_0(P)$ como el número de raíces distintas de P.
Sean P, Q, R tres polinomios con coeficientes complejos tales que

$$P+Q+R=0 \qquad \text{y} \qquad \text{máximo común divisor}(P,Q,R)=1$$

Demuestre: $\max\{\text{grado}\, P,\ \text{grado}\, Q,\ \text{grado}\, R\} \leq n_0(P\cdot Q\cdot R)-1$.

Problema 4. Determine los números naturales n para los cuales es posible encontrar números reales *positivos* x_1, $x_2, \ldots,$ $x_{n!}$ que verifique el sistema

$$\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_{n!}=n \\ \dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_{n!}}=n^n. \end{cases}$$

Problema 5. Sea P un polinomio mónico con coeficientes reales tal que, para el número complejo i ($i^2=-1$) se verifica $|P(i)|<1$.
Pruebe que existen número reales a y b tales que

$$P(a+ib)=0 \qquad \text{y} \qquad (a^2+b^2+1)^2<4b^2+1.$$

Problema 6. Sea p un número primo. Si para algún número natural n, (2^n-1) es divisible por p pero no por p^2, demustre que $(2^{p-1}-1)$ no es divisible por p^2.

NOTA: *Para obtener el máximo puntaje en cada ejercicio, es necesario justificar la respuesta.*