II COMPETENCIA MATEMATICA ERNESTO PAENZA

28 de agosto de 1987

EJERCICIOS

Problema 1.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define

$$r(n) = r_1(n) + r_2(n) + \cdots + r_n(n) = \sum_{j=1}^{n} r_j(n)$$

donde $r_j(n)$ denota el resto de la división de n por j.

Pruebe que existen infinitos valores de n para los cuales $r(n) = r(n-1)$.

Problema 2.

Sea $E \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto *no* acotado[1] que contiene un par de segmentos que forman una “V”. Demuestre entonces que para todo número real $\alpha > 0$ existe un triángulo de área α cuyos 3 vértices pertenecen al conjunto E.

Problema 3.

Se tienen dos octógonos regulares iguales. Se pretende numerar los vértices de ambos, de forma tal que para cualquiera de las 8 maneras de superponer los polígonos –conservando la orientación– haya al menos un vértice que tenga el mismo número en ambos. Encuentre numeraciones que lo cumplan o pruebe que no es posible.

Problema 4.

Se tiene una sucesión decreciente de números reales $\{x_n\}_{n \geqslant 0}$ estrictamente positivos con $x_0 = 1$.

a) Pruebe que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_k^2}{x_{k+1}} \geqslant 3,999$$

b) Encuentre una sucesión $\{x_n\}_{n \geqslant 0}$, que satisfaga las hipótesis del enunciado, para la cual

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \cdots + \frac{x_n^2}{x_{n+1}} < 4$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Problema 5.

Sea $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ una función con la siguiente propiedad:

Cualesquiera sean $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *se verifica:*

$$f(m+n) = f(m) + f(n) \qquad o \qquad f(m+n) = f(m) + f(n) + 1$$

Si se sabe que $f(9999) = 3333$, calcule $f(1988)$.

---

[1] Un subconjunto A del plano $\mathbb{R}^2$ se dice **acotado** si y sólo si está contenido en algún círculo.

Problema 6.

Un móvil se mueve en línea recta con aceleración creciente desde el instante $t = 0$ hasta $t = T$.

Mostrar que su velocidad en $t = \frac{T}{2}$ no puede superar su velocidad promedio (o sea, la distancia recorrida dividida por tiempo total T).

Problema 7.

Se agrupan los primeros n^2 números naturales (o sea: $1, 2, 3, 4, \ldots, n^2$) en n conjuntos de n elementos cada uno. Luego se suman los números de cada conjunto y finalmente se multiplican las sumas.

a) ¿cuál es el máximo valor posible de este producto?

b) ¿existen dos maneras distintas de distribuir los n^2 números para alcanzar máximo?

Problema 8.

Se tienen n rectas en el plano –no paralelas dos a dos– y tales que nunca tres de ellas pasan por un mismo punto.

¿Cuántas regiones acotadas[2] del plano delimitan estas n rectas?

Composición tipográfica: LaTeX 2_ε (http://www.miktex.org)
Gráficos: Tkpaint (http://www.netanya.ac.il/~samy/tkpaint.html)

[2] Un subconjunto A del plano $\mathbb{R}^2$ se dice **acotado** si y sólo si está contenido en algún círculo.