Competencia Matemática Ernesto Paenza

25° realización – 26 de agosto de 2010

Participante N°:

---

1. a) Reemplazar cada letra de la siguiente suma por un dígito del 0 al 9, para que la suma resulte correcta.

$$\begin{array}{r} \text{A B C} \\ \text{D E F} \\ +\ \text{G H I} \\ \hline \text{J J J} \end{array}$$

Letras distintas deben ser reemplazadas por dígitos distintos, y letras iguales por dígitos iguales. Los números ABC, DEF, GHI y JJJ no pueden empezar por 0.

b) Determinar cuántas ternas de números (ABC, DEF, GHI) se pueden formar con las condiciones del ítem anterior.

---

2. En el pizarrón está escrito un polinomio f, con todos sus coeficientes enteros. El profesor es un matemático que tiene tres hijos: Andrés, Belén y César. Andrés, que tiene 7 años, es el más chico y César, el más grande. Al evaluar el polinomio en las edades de sus hijos obtiene:

- $f(7) = 77$,
- $f(b) = 85$, donde b es la edad de Belén,
- $f(c) = 0$, donde c es la edad de César.

¿Qué edad tiene cada uno de los hijos?

---

3. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por $x_n = \operatorname{sen}(2\pi n!e)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

---

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua que tiene la siguiente propiedad: para todo $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$, la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por $a_n = f(n\alpha)$ verifica $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. ¿Es necesariamente cierto que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$?

---

5. En el espacio de 4 dimensiones, se dispone de ladrillos de $1 \times 2 \times 3 \times 4$. Decidir si con estos ladrillos se pueden armar paralelepípedos de las siguientes dimensiones:

i) $2 \times 5 \times 7 \times 12$
ii) $5 \times 5 \times 10 \times 12$
iii) $6 \times 6 \times 6 \times 6$

Todo el parelelepípedo debe quedar lleno; no puede haber huecos o agujeros.

---

6. Se tiene dos tetraedros en el espacio (no necesariamente regulares) cuyos baricentros coinciden y tales que uno está contenido en el otro. Para cada tetraedro, consideramos el octaedro cuyos vértices son los puntos medios de las aristas del tetraedro. Probar que uno de estos octaedros está contenido en el otro.
Nota: El baricentro de un tetraedro de vértices A, B, C y D es el punto $X = \frac{1}{4}(A+B+C+D)$.

Nota: Se asignará puntaje no nulo a argumentos conducentes a una solución, casos particulares, respuestas correctas no justificadas, etc. Por otro lado, para obtener el máximo puntaje en un problema, es necesario justificar apropiadamente la respuesta.