Competencia Matemática Ernesto Paenza

24° REALIZACIÓN – 26 DE AGOSTO DE 2009

Participante N°:

---

1. Decidir si existen $n \in \mathbb{N}$ y números enteros distintos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tales que el polinomio $(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1$ sea el producto de dos polinomios no constantes en $\mathbb{Z}[x]$.

---

2. Sea $p \in \mathbb{N}$ primo. Probar que si un $2p$-ágono tiene todos sus lados de longitudes enteras $L_1, \ldots, L_{2p}$ y todos sus ángulos iguales, entonces existe $C \in \mathbb{N}_0$ tal que $|L_{p+k} - L_k| = C$ para todo $1 \leq k \leq p$.

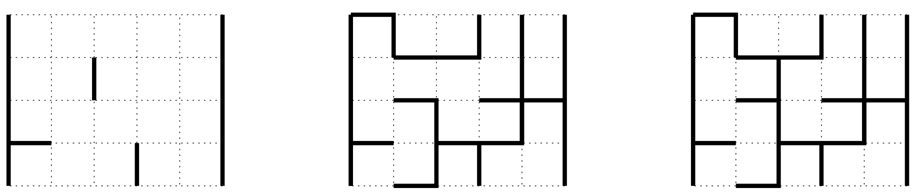
---

3. Para cada $x \in \mathbb{R}$, sea $||x|| = \min_{m \in \mathbb{Z}} |x-m|$. Probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{||2^n x||}{4^n} = ||x||(1-2||x||).$$

---

4. Dado un cuadriculado de 2009 cuadrados de ancho por 2008 de alto, es posible armar distintos *laberintos* poniendo paredes en los lados de los cuadrados. En cada lado de cada cuadrado puede ponerse una pared o no, excepto en los lados de los costados, en los que siempre se ponen paredes (de manera que, sin importar qué otras paredes se pongan, sea imposible salir del laberinto por un costado).
Probar que la cantidad de laberintos que se pueden armar tales que es posible atravesar el cuadriculado entrando por alguno de los cuadrados de la parte de abajo y saliendo por alguno de los de arriba es la misma que la de los que no.



Tres laberintos posibles en cuadriculados de 5 de ancho por 4 de alto: en el de la izquierda y en el del centro es posible atravesar el cuadriculado; en el de la derecha, no.

---

5. Decidir si la siguiente afirmación es verdadera en cada uno de los casos:

a) $K = \mathbb{R}$ b) $K = \mathbb{Q}$

"Si $f : K \times K \to K$ es una función tal que

- *para cada $x_0 \in K$, $f(x_0, y) : K \to K$ es un polinomio en $K[y]$,*
- *para cada $y_0 \in K$, $f(x, y_0) : K \to K$ es un polinomio en $K[x]$,*

entonces f es un polinomio en $K[x,y]$."

---

6. Para cada $x \in \mathbb{R}$ y cada $n \in \mathbb{N}$, se define $f_n(x) = \min\{|x - \frac{m}{n}| : m \in \mathbb{Z}\}$. Determinar todos los $x \in \mathbb{R}$ tales que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge.

Nota: Se asignará puntaje no nulo a argumentos conducentes a una solución, casos particulares, respuestas correctas no justificadas, etc. Por otro lado, para obtener el máximo puntaje en un ejercicio, es necesario justificar apropiadamente la respuesta.