Competencia Matemática Ernesto Paenza

22° REALIZACIÓN — 28 DE AGOSTO DE 2007

Participante N°:

---

1 - Dado $n \in \mathbb{N}$, ¿cuál es la mayor cantidad $r(n)$ de reinas* que se pueden ubicar en un tablero como el de ajedrez de $n \times n$ de modo que quede al menos una casilla sin atacar? ¿De cuántas maneras se pueden ubicar estas $r(n)$ reinas para que esto suceda?

*Una reina ataca todas las casillas que están en la misma fila, columna o diagonales que ella.

---

2 - Sean $\ell_1, \dots, \ell_n$ números reales positivos tales que ninguno de ellos es mayor que la suma de los otros. Probar que entre todos los n-ágonos cuyos lados miden $\ell_1, \dots, \ell_n$, tienen mayor área exactamente aquellos en los que los vértices quedan sobre una circunferencia.

---

3 - Dentro de un cuadrado de lado 1 se tiene una familia de segmentos tales que la suma de sus longitudes es por lo menos 20. Demostrar que existe una línea paralela a alguno de los lados del cuadrado que corta por lo menos a 10 de estos segmentos.

---

4 - Dado un polinomio $g \in \mathbb{R}[x]$, definimos $S(g) := g \cdot g'' - (g')^2$.

Sea $f \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio de grado n. Demostrar que f tiene n raíces reales distintas si y solo si $\forall x \in \mathbb{R}$

$$S(f)(x) < 0, \quad S(f')(x) < 0, \quad \dots , \quad S(f^{(n-2)})(x) < 0.$$

---

5 - Dado un número natural n, denotamos por $\sigma^*(n)$ a la suma de todos los divisores $d \in \mathbb{N}$ de n tales que d y $\frac{n}{d}$ son coprimos. Hallar todos los números naturales n tales que

$$\frac{\sigma^*(n)}{n} \geq \frac{\sigma^*(m)}{m}$$

para todo número natural $m \leq n$.

---

6 - (a) Sea $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$. Encontrar, si es posible, dos polinomios f_1, $f_2 \in \mathbb{R}[x, y]$ tales que $(x, y) \in A_2$ si y solo si $f_1(x, y) \geq 0$ y $f_2(x, y) \geq 0$.

(b) Sea $A_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x|+|y|+|z| \leq 1\}$. Encontrar, si es posible, tres polinomios f_1, f_2, $f_3 \in \mathbb{R}[x, y, z]$ tales que $(x, y, z) \in A_3$ si y solo si $f_1(x, y, z) \geq 0$, $f_2(x, y, z) \geq 0$ y $f_3(x, y, z) \geq 0$.

Nota: Se asigna puntaje no nulo a argumentos conducentes a una solución, casos particulares, respuestas correctas no justificadas, etc. Por otro lado, para obtener el máximo puntaje en un ejercicio, es necesario justificar apropiadamente la respuesta.