Competencia Matemática Ernesto Paenza

20^0 REALIZACIÓN — 8 DE SETIEMBRE DE 2005

Participante N^0:

---

1 - Sea $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de números reales definida por $\alpha_n := \sqrt[n]{|(2+3i)^n - (2-3i)^n|}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Hallar el mayor número real r que sea límite de una subsucesión de $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

---

2 - Sean n y m enteros positivos impares y coprimos entre sí. Para todo $k \in \mathbb{N}$ se define

$$a_k := (-1)^{[k/m]+[k/n]},$$

donde $[x]$ denota la parte entera de x. Demostrar que $\sum_{k=1}^{mn} a_k = 1$.

---

3 - Sea $f(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ una serie de potencias. Para cada $i, j \geq 0$ definimos $c_{i,j}$ como el coeficiente de x^j en $f(x)^i$. Demostrar que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\det(c_{i,j})_{0\leq i,j\leq n} = a_1^{n(n+1)/2}.$$

---

4 - Sean $A, B \subset \mathbb{R}^2$ polígonos convexos de interior no vacío. Definimos

$$A + B := \{a + b : a \in A,\ b \in B\}.$$

Probar que $A + B$ es un polígono convexo y que

$$per(A + B) = per(A) + per(B).$$

(Si $X \subset \mathbb{R}^2$ es un polígono convexo, $per(X)$ denota el perímetro de X.)

---

5 - Sea a un número real, $a > 1$ y no entero. Dado $x \in \mathbb{R}_{>0}$, llamamos una *expansión en base a de x* a una representación del tipo:

$$x = \sum_{j=-\infty}^{j_0} x_j a^j,$$

con $j_0 \in \mathbb{Z}$, y $x_j \in \{0, 1, \ldots, [a]\}$ $\forall j \leq j_0$ ($[a]$ es la parte entera de a). Sea $\varphi := \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

1. Probar que si $a > \varphi$, entonces hay infinitos números reales con expansión única en base a.
2. Probar que si $a \leq \varphi$, entonces todo $x \in \mathbb{R}_{>0}$ tiene infinitas expansiones distintas en base a.
3. Probar que para todo $a > 1$ y no entero, el conjunto de números con infinitas expansiones en base a es denso.

---

6 - Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio mónico de grado positivo.

1. Probar que si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo tal que $|p(x)| \leq 2$ para todo $x \in I$, entonces la longitud de I es menor o igual que 4.
2. Si todas las raíces de $p(x)$ son reales, demostrar que el conjunto

   $$C := \{x \in \mathbb{R} : |p(x)| \leq 2\}$$

   es una unión de intervalos reales cuya suma de longitudes es menor o igual que 4.

Nota: Se asigna puntaje no nulo a argumentos conducentes a una solución, casos particulares, respuestas correctas no justificadas, etc. Por otro lado, para obtener el máximo puntaje en un ejercicio, es necesario justificar apropiadamente la respuesta.